

# МЕТОД РАСЧЕТА ВИБРОДИНАМИЧЕСКОГО И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ ОБШИВКИ САМОЛЕТА ПРИ ДЕЙСТВИИ ДУЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Валерий Васильевич ФИРСАНОВ родился в 1943 г. в городе Шадринске Курганской области. Заведующий кафедрой МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области динамики, прочности и безопасности авиационных конструкций. Автор более 200 научных работ. E-mail: k906@mai.ru

Valery V. FIRSANOV, D.Sci., was born in 1943, in the Kurgan Region. He is the Head of a Department at the MAI. His major research interests are in dynamics, strength and safety for aircraft structures. He has published over 200 technical papers. E-mail: k906@mai.ru

*Рассматривается метод и алгоритм расчета вибродинамического и напряженно-деформированного состояний панели обшивки самолета, находящейся в непосредственной близости от среза ствола и подверженной воздействию дульной ударной волны.*

*Методика основана на определении параметров дульной ударной волны с помощью эмпирической теории размерностей, а вибродинамическое состояние обшивки рассчитывается с помощью теории упругих оболочек. Входными данными являются геометрия и расположение ствола, характеристики его наполнителя, а также геометрические и механические свойства панели обшивки. Выходными характеристиками служат прогиб панели, ее виброускорения и напряжения.*

*The method and algorithm of calculation of the dynamic and is intense-deformed conditions of the panel of an aircraft skin, being in immediate proximity from a cut of a trunk and subject to influence a muzzle shock wave is considered.*

*The technique is based on definition of muzzle shock wave parameters by means of the empirical theory of dimensions, and the dynamic condition of a covering pays off with the help of the theory of elastic covers. Entrance data are the geometry and arrangement of a cut of a trunk and the characteristic filling compound, and also geometrical and mechanical properties of the panel of an aircraft skin. Output characteristics are dynamic accelerations, stresses and a panel deflection.*

**Ключевые слова:** панель обшивки, вибродинамическое состояние, дульная ударная волна, эмпирическая теория размерностей, теория оболочек, давление, импульс силы, напряжения, графоаналитический подход.

**Key words:** the skin panel, a dynamic state, muzzle shock wave, the empirical theory of dimensions, the theory of shells, pressure, a force impulse, stress, the graf-analytic approach.

## Характеристики нагрузки от ДУВ

При стрельбе из авиационного артиллерийского оружия на обшивку самолета действуют газодинамические нагрузки (рис. 1), вызванные истекающими из ствола газами и называемые дульной ударной волной (ДУВ).

Считаем, что нагрузка от волны  $p = p(t)$  представляет собой кратковременные импульсы треугольной формы (рис. 2), следующие друг за другом с интервалом времени  $T_c = \frac{1}{h_c}$ , где  $h_c$  — темп работы,  $c^{-1}$ .

Основными характеристиками такой нагрузки являются: интервал времени между срабатываниями  $T_c$ ; импульс единичного срабатывания  $I$ ; максимальное значение давления  $p_{\max}$ ; длительность действия давления от единичного срабатывания  $\tau$ .

Импульс нагрузки  $I$  в общем случае определяется как

$$I = \int_0^{\tau} p(t) dt \quad (1)$$

и является более надежно определяемой характеристикой ДУВ, чем  $p_{\max}$  и  $\tau$ .

Для простоты полагаем, что давление  $p$  распределено равномерно по площади панели. Аналитическое выражение для нагрузки  $p(t)$  имеет вид

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max}, & \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t \leq T_c. \end{cases}$$

Импульс  $I$  для нагрузки вида на рис. 2 от одного срабатывания в данном случае выражается как

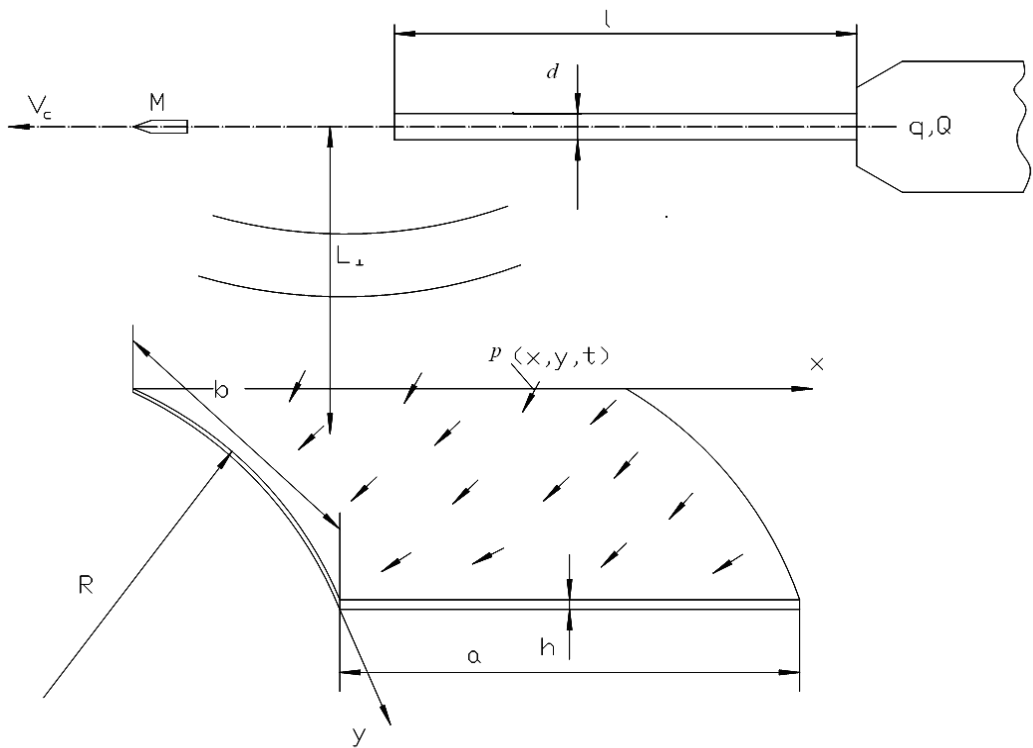


Рис. 1. Расчетная схема

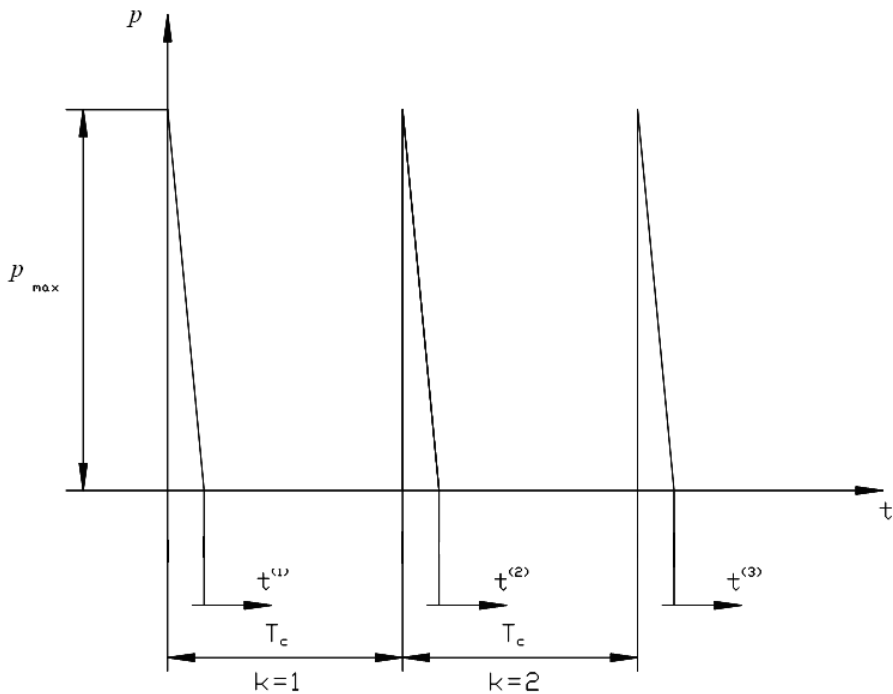


Рис. 2. Вид нагрузки

$$I = \frac{1}{2} p_{\max} \tau, \quad (2)$$

$$p_{\max} = 4,4 \cdot 10^{-2} \frac{U}{l \cdot L_1^{3/2} d^{1/2}}, \quad (3)$$

где  $\tau$  — длительность действия положительного избыточного давления.

Для расчета пикового давления  $p_{\max}$  можно использовать приближенную эмпирическую формулу Уэстайна

$$U = 4,27 \cdot 10^4 \cdot q \cdot Q_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{G_c V_c^2}{g} \quad (4)$$

определяет приведенную энергию срабатывания, кгс·см;  $V_c$ ,  $G_c$  — вес (кгс) и скорость вылета игол-

ки, см/с;  $q, Q_{II}^c$  — вес наполнителя (кгс) и его теплопроводная способность, ккал/кгс;  $l, d$  — длина и диаметр ствола, см;  $p_{\max}$  — максимальное давление в точке панели под срезом ствола, кгс/см<sup>2</sup>;  $g = 981$  — ускорение свободного падения, см/с<sup>2</sup>.

Импульс  $I$  (кгс · с/см<sup>2</sup>) определяется по эмпирической формуле Уэстайна как

$$I = 7,26 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{U}{l^{3/4} \cdot L^{3/4} \cdot d^{1/2}}. \quad (5)$$

Тогда длительность импульса  $\tau$  из формулы (2) можно определить из равенства

$$\tau = \frac{2I}{p_{\max}}.$$

В настоящей работе используется система единиц [кгс], [см], [с], поскольку формулы (3), (5) являются эмпирическими формулами для нагрузок, измеряемых в этой же системе.

### Метод расчета вибродинамического состояния панели

Расчет вибрационного состояния производится для участка обшивки фюзеляжа и крыла, заключенного между соседними элементами продольного и поперечного силового набора. Указанный участок моделируется полой цилиндрической оболочкой (см. рис. 1), свободно опертой на жесткие ребра. Исходной является система дифференциальных уравнений для поперечных колебаний полой оболочки в координатах  $x, y$  (см. рис. 1), записываемая относительно функции прогиба  $w(x, y, t)$  и функции мембранных напряжений  $\Phi(x, y, t)$  [1,2] и приводящаяся к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , а остальные параметры расшифрованы ниже.

Напряженное состояние в элементе оболочки характеризуется мембранными напряжениями  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ , постоянными по толщине  $h$ , и изгибными на-

пряжениями  $\sigma_x^{(u)}$ ,  $\sigma_y^{(u)}$ , линейно изменяющимися по толщине (их нулевые значения будут на срединной поверхности оболочки). Касательными напряжениями  $\tau_{xy}$  ввиду их малости пренебрегаем. В качестве  $\sigma_x^{(u)}$ ,  $\sigma_y^{(u)}$  далее рассматриваем их максимальные по толщине значения, имеющие место на внешней и внутренней поверхностях оболочки.

Общее решение уравнений колебаний оболочки (6) представляется в виде разложения прогиба  $w$  по собственным формам колебаний

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) s_{x,m} s_{y,n}, \quad (7)$$

где обозначено

$$s_{x,m} = \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad s_{y,n} = \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — размеры панели соответственно в продольном и окружном направлениях (см. рис. 1).

В аналогичном виде представляется и функция  $\Phi$ :

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn}(t) s_{x,m} s_{y,n}. \quad (9)$$

Тогда в соответствии с первым уравнением системы (6) функции  $\Phi_{mn}(t)$  могут быть выражены через функции  $W_{mn}(t)$  как

$$\Phi_{mn}(t) = -\frac{E \cdot h}{R} \cdot \frac{\Phi_m}{(\Phi_m + \Psi_n)^2} \cdot W_{mn}(t), \quad (10)$$

где принимается

$$\Phi_m = \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2; \quad \Psi_n = \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2. \quad (11)$$

В формулах (10), (11)  $R, h$  — радиус кривизны панели и ее толщина;  $E, \mu, \rho$  — модуль продольной упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала панели (величины  $\mu, \rho$  встречаются ниже).

Как следует из второго уравнения системы (6), функции  $W_{mn}(t)$  для каждого  $m$  и  $n$  должны удовлетворять уравнению колебаний простого осциллятора, которое дополним диссипативным членом с параметром демпфирования  $\epsilon_{mn}$ , т. е.

$$\ddot{W}_{mn} + 2 \cdot \epsilon_{mn} \cdot \dot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 \cdot W_{mn} = \frac{1}{\rho \cdot h} Q_{mn}. \quad (12)$$

Здесь  $Q_{mn}(t)$  — коэффициенты разложения внешней нагрузки в ряд Фурье по собственным формам колебаний:

$$Q_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{16p_{\max}}{m\pi^2} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & t \leq \tau \text{ при } m \text{ и } n \text{ нечетных;} \\ 0 & t > \tau \text{ при } m \text{ и } n \text{ четных.} \end{cases} \quad (13)$$

В уравнении (12) через  $\omega_{mn}^2$  обозначено выражение

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D(\varphi_m + \psi_n)^4 + Eh\varphi_m^2/R^2}{\rho h(\varphi_m + \psi_n)^2} \quad (14)$$

$(m, n = 1, 3, 5\dots)$ ,

имеющее смысл квадрата собственной частоты колебаний панели с  $m$  полуволнами в продольном и  $n$  полуволнами в окружном направлениях.

В формуле (14)  $D$  — цилиндрическая жесткость панели, равная

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}. \quad (15)$$

Величину  $\varepsilon_{mn}$  полагаем пропорциональной соответствующей частоте:

$$\varepsilon_{mn} = \eta \cdot \omega_{mn}, \quad (16)$$

при этом безразмерный коэффициент демпфирования  $\eta$  обычно принимается равным 0,005—0,05 и связанным с логарифмическим декрементом затухания  $\delta$  соотношением  $\eta = \frac{\delta}{2\pi}$ .

Аналитическое решение  $W_{mn}(t)$  уравнения (12) строится методом Коши: на малом участке  $0 \leq t^{(n)} \leq \tau$  с использованием интеграла Дюгамеля [2], а на большом участке  $\tau < t^{(n)} < T_c$  — в форме свободных колебаний. Выражения для коэффициентов  $W_{mn}(t)$  функции прогиба (7) получаются сопряжением решений для  $W_{mn}(t)$  и  $\dot{W}_{mn}(t)$  на двух последующих участках.

Виброускорения определяются как

$$\ddot{w}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{W}_{mn}(t) s_{x,m} s_{y,n}. \quad (17)$$

Напряжения в панели также выражаются через зависимости  $W_{mn}(t)$  соотношениями (27), приводимыми ниже.

### Расчет нагрузок и виброускорений панели

При определении нагрузки на панель в качестве исходных данных используются: геометрические характеристики ствола  $l, d$  и его расстояние от панели  $L_1$ ; характеристики снаряда  $G_c, V_c$ ; характеристики наполнителя  $q, Q_{II}$ .

С помощью формул (3), (5), (2) сначала определяют максимальное давление на панель  $p_{\max}$ , импульс  $I$  и длительность действия давления  $\tau$ .

При расчете напряженно-деформированного состояния панели в качестве исходных данных используются геометрические характеристики  $a, b, h, R$  и характеристики материала  $E, \mu, \rho$ .

По формуле (14) определяют несколько собственных частот панели  $\omega_{1,1}, \omega_{1,3}, \omega_{3,1}, \dots$  с использованием обозначений (11), (15).

Для функции прогиба  $w(x, y, t)$  используется представление (7). При этом коэффициенты разложения  $W_{mn}(t)$  для основного интервала времени  $\tau < t^{(n)} < T_c$  после  $k$ -го срабатывания строятся по следующей схеме:

1) вычисляются постоянный коэффициент

$$B_{mn} = \frac{16 \cdot p_{\max}}{\rho \cdot h \cdot \pi^2 \cdot \omega_{mn}^2 \cdot m \cdot n} \quad (18)$$

и значения

$$\alpha_{mn} = \omega_{mn} \cdot \tau; \quad (19)$$

2) вычисляются  $H_{mn}$  и  $S_{mn}$ , одинаковые для всех участков:

$$H_{mn} = B_{mn} e^{-\varepsilon_{mn}\tau} \left( \frac{\sin \alpha_{mn}}{\alpha_{mn}} - \cos \alpha_{mn} \right); \quad (20)$$

$$S_{mn} = B_{mn} e^{-\varepsilon_{mn}\tau} \left( \sin \alpha_{mn} - \frac{1 - \cos \alpha_{mn}}{\alpha_{mn}} \right); \quad (21)$$

3) функции  $W_{mn}^{(k)}(t)$  преобразуются с учетом того, что согласно (16)  $\varepsilon_{mn}/\omega_{mn} = \eta$ . При этом, учитывая малость  $\eta$  ( $\eta \ll 1$ ), для упрощения формул пренебрегаем в них слагаемыми, содержащими множитель  $\eta$ . В качестве выражения для  $W_{mn}^{(k)}(t)$  на  $k$ -м интервале принимается

$$W_{mn}^k(t) \approx$$

$$\approx e^{-\varepsilon_{mn} \cdot t^{(k)}} \left( U_{mn}^{(k)} \cdot \cos \omega_{mn} t^{(k)} + V_{mn}^{(k)} \cdot \sin \omega_{mn} t^{(k)} \right), \quad (22)$$

где  $U_{mn}^{(k)}$  и  $V_{mn}^{(k)}$  для первого срабатывания ( $k=1$ ) определяются в виде

$$U_{mn}^{(1)} = H_{mn}; \quad V_{mn}^{(1)} = S_{mn}, \quad (23)$$

а для последующих срабатываний ( $k \geq 2$ ) выражаются рекуррентно через значения  $W_{mn}^{(k-1)}(T_c)$  и  $Z_{mn}^{(k-1)}(T_c)$  на предыдущем  $k-1$ -м интервале:

$$U_{mn}^{(k)} = e^{-\varepsilon_{mn} \tau} \times$$

$$\times \left[ W_{mn}^{(k-1)}(T_c) \cos \alpha_{mn} + Z_{mn}^{(k-1)}(T_c) \sin \alpha_{mn} \right] + H_{mn};$$

$$V_{mn}^{(k)} = e^{-\varepsilon_{mn} \tau} \times \quad (24)$$

$$\times \left[ Z_{mn}^{(k-1)}(T_c) \cos \alpha_{mn} - W_{mn}^{(k-1)}(T_c) \sin \alpha_{mn} \right] + S_{mn},$$

где  $W_{mn}^{(k-1)}(T_c)$  и  $Z_{mn}^{(k-1)}(T_c)$  определяются для предыдущего интервала при  $t^{(k-1)} = T_c$  как

$$W_{mn}^{(k-1)}(T_c) = e^{-\varepsilon_{mn} T_c} \times$$

$$\times \left[ U_{mn}^{(k-1)} \cos \omega_{mn} T_c + V_{mn}^{(k-1)} \sin \omega_{mn} T_c \right];$$

$$Z_{mn}^{(k-1)}(T_c) = e^{-\varepsilon_{mn} T_c} \times \quad (25)$$

$$\times \left[ V_{mn}^{(k-1)} \cos \omega_{mn} T_c - U_{mn}^{(k-1)} \sin \omega_{mn} T_c \right];$$

4) точные значения для прогиба панели  $W$  после  $k$ -го срабатывания могут быть определены по формуле (7) при подстановке туда выражения (22) для  $W_{mn}^{(k)}(t^{(k)})$  путем суммирования по нечетным значениям  $m = n = 1, 3, 5, \dots$  (более простая методика приближенной оценки максимальных прогибов излагается ниже);

5) виброперегрузки  $\ddot{w}(x, y, t)$  при необходимости вычисляются по формуле (17), где  $\ddot{W}_{mn}(t)$  определяются выражением

$$\ddot{W}_{mn}^{(k)}(t) = -\omega_{mn}^2 \cdot e^{-\varepsilon_{mn} \cdot t^{(k)}} \times$$

$$\times \left[ U_{mn}^{(k)} \cdot \cos \omega_{mn} t^{(k)} + V_{mn}^{(k)} \cdot \sin \omega_{mn} t^{(k)} \right], \quad (26)$$

при этом в выражении (17) для виброускорений необходимо учитывать достаточное число слагаемых (обычно не менее 5).

### Расчёт напряжений

Используя выражения (22) для  $W_{mn}$  и (10) для  $\Phi_{mn}$ , по формулам, выражающим напряжения через производные от функций  $\Phi$  и  $w$  [1], определяем эти напряжения. Общая форма записи для всех напряжений имеет вид

$$\sigma_N(x, y, t) = B_N^{(\sigma)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{mn} \bar{W}_{mn}(t) s_{x,m} s_{y,n}, \quad (27)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Здесь через  $\bar{W}_{mn}(t)$  обозначена безразмерная функция времени, связанная с  $W_{mn}(t)$  соотношением

$$W_{mn}(t) = \frac{16 \cdot p_{\max}}{\pi^2} \cdot \frac{R^2}{E \cdot h} \cdot \bar{W}_{mn}(t). \quad (28)$$

Коэффициенты  $B_N^{(\sigma)}$  и  $N_{mn}$  для различных компонентов напряжений приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\sigma_N$	$B_N^{(\sigma)}$	$N_{mn}$
$\sigma_x^0$	$\frac{16 \cdot p_{\max}}{\pi^2 \cdot \gamma}$	$\frac{m^2 \cdot n^2}{\alpha^2 \cdot \left( \frac{m^2}{\alpha^2} + n^2 \right)^2}$
$\sigma_y^0$	$\frac{16 \cdot p_{\max}}{\pi^2 \cdot \gamma}$	$\frac{m^4}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2}$
$\sigma_x^u$	$\frac{8 \cdot p_{\max}}{\beta^2 \cdot (1 - \mu^2)}$	$\frac{m^2}{\alpha^2} + \mu \cdot n^2$
$\sigma_y^u$	$\frac{8 \cdot p_{\max}}{\beta^2 \cdot (1 - \mu^2)}$	$n^2 + \mu \cdot \frac{m^2}{\alpha^2}$
$\alpha = \frac{a}{b}; \quad \beta = \frac{b}{R}; \quad \gamma = \frac{h}{R}$		

### Упрощенная оценка максимальных прогибов панели

Из-за узости спектра функции  $w(x, y, t)$ , которую можно представить малым числом гармоник (обычно  $m, n = 1, 3$ ), и малости величины  $\tau$  так, что  $\omega_{mn} \cdot \tau \ll 1$ , возможно получение более простого способа вычисления для  $w$ . Из формул (18)–(21) с помощью разложений в ряд по  $\alpha_{mn}$  получаем

$$S_{mn} \approx \frac{16 \cdot I}{\pi^2 \cdot \rho \cdot h \cdot \omega_{mn} \cdot m \cdot n}; \quad H_{mn} \approx S_{mn} \cdot \frac{2}{3} \cdot \alpha_{mn} \rightarrow 0, \quad (29)$$

где учтено, что  $I = \frac{1}{2} \cdot p_{\max} \cdot \tau$ . При этом импульсы нагрузки (рис. 2) можно считать бесконечно короткими, а в качестве ее характеристики использовать импульс  $I(1)$ . Очевидно, что при малых  $\tau$  вид зависимости  $p(t)$  и величина  $p_{\max}$  не имеют существенного значения.

Выражение для прогиба после первого срабатывания ( $k = 1$ ) принимает вид

$$w^{(1)}(x, y, t) = \frac{16I}{\pi^2 \rho h} \times \sum_{m=1,3} \sum_{n=1,3} \frac{1}{mn\omega_{mn}} e^{-\varepsilon_{mn} t^{(1)}} \sin(\omega_{mn} \cdot t^{(1)}) s_{x,m} s_{y,n}. \quad (30)$$

С погрешностью менее 20% можно ограничиться только первой гармоникой ( $m = n = 1$ ). Тогда максимальный прогиб в центре панели ( $x = a/2$ ;  $y = b/2$ ) при  $k = 1$  будет

$$w_{\max}^{(1)} = \frac{16 \cdot I}{\pi^2 \cdot \rho \cdot h \cdot \omega_{1,1}} \cdot e^{-\eta \frac{\pi}{2}}. \quad (31)$$

При последующих срабатываниях ( $k \geq 2$ ) может происходить как увеличение, так и уменьшение прогиба  $w$  (рис. 3) в зависимости от фазовой характеристики процесса  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega_{1,1} \cdot T_c. \quad (32)$$

На основании соотношений (22)—(25) получаются достаточно простые формулы для непосредственного определения прогиба панели после произвольного  $k$ -го срабатывания (без использования рекуррентных соотношений), которые имеют вид

$$w(x, y, t^{(k)}) = e^{-\eta \omega_{1,1} t^{(k)}} S_{1,1} \times \left( \bar{U}_{1,1}^{(k)} \cos \omega_{1,1} t^{(k)} + \bar{V}_{1,1}^{(k)} \sin \omega_{1,1} t^{(k)} \right) s_{x,m} s_{y,n}, \quad (33)$$

где обозначено

$$S_{1,1} = \frac{16 \cdot I}{\pi^2 \cdot \rho \cdot h \cdot \omega_{1,1}}; \quad (34)$$

$$\bar{U}_{1,1}^{(k)} = \sum_{i=1}^k e^{-(i-1) \cdot \varphi \eta} \cdot \sin((i-1) \cdot \varphi);$$

$$\bar{V}_{1,1}^{(k)} = \sum_{i=1}^k e^{-(i-1) \cdot \varphi \eta} \cdot \cos((i-1) \cdot \varphi). \quad (35)$$

Выражение для прогиба (33) может быть представлено также в виде

$$w(x, y, t^{(k)}) = A^{(k)} e^{-\eta \omega_{1,1} t^{(k)}} \sin(\omega_{1,1} t^{(k)} + \chi_k) s_{x,m} s_{y,n}, \quad (36)$$

где амплитуда  $A^{(k)}$  и фаза  $\chi_k$  определяются как

$$A^{(k)} = \frac{16 \cdot I}{\pi^2 \cdot \rho \cdot h \cdot \omega_{1,1}} \cdot \sqrt{\bar{V}_{1,1}^2 + \bar{U}_{1,1}^2}; \quad (37)$$

$$\chi_k = \arctg \frac{\bar{U}_{1,1}}{\bar{V}_{1,1}}. \quad (38)$$

Амплитуда  $A^{(k)}$  при  $\eta = 0$  может быть легко определена графически на фазовой плоскости путем геометрического суммирования векторов, как показано на рис. 4,а. При этом длина каждого вектора, согласно (37), равна  $S_{1,1}$ , а амплитуда  $A^{(k)}$  рав-

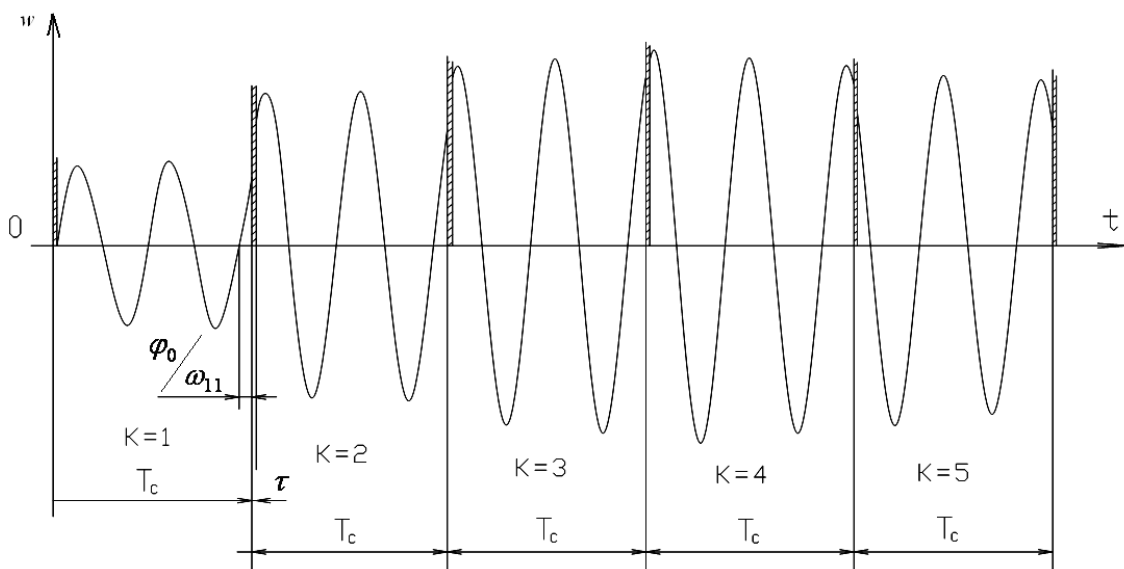


Рис. 3. Изменение прогиба панели при срабатывании

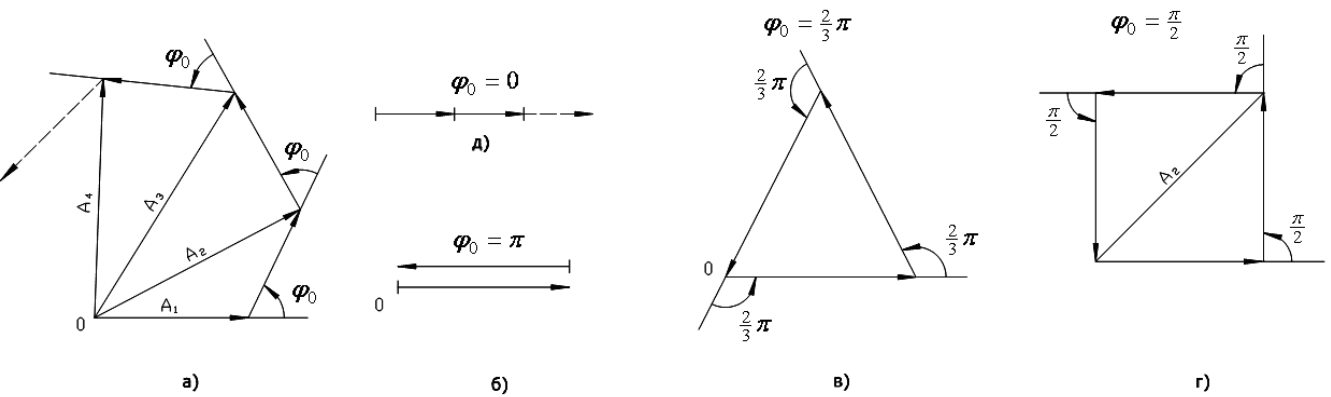


Рис. 4. Изменение амплитуды колебания панели на фазовой плоскости

на расстоянии от начала координат  $0$  до конца  $k$ -го вектора (рис. 4,а). В случае  $\eta \neq 0$  каждый последующий вектор должен быть меньше предыдущего в  $e^{\eta\varphi}$  раз. В качестве угла между векторами вместо  $\varphi$  удобнее брать угол  $\varphi_0$ , определяемый как

$$\varphi_0 = \varphi - 2\pi E\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right), \quad (39)$$

где  $E(x)$  — целая часть  $x$ .

Благоприятными будут значения  $\varphi$ , при которых отсутствует (или мало) увеличение прогиба  $w$  при последующих срабатываниях. В этом смысле наилучшим будет режим, при котором  $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ , в результате чего, согласно (35), при  $\eta = 0$  каждый четный импульс гасится ( $w^{(k)}(t) \equiv 0$  при  $k = 2, 4, 6, \dots$ ). При этом получается «двухугольник»: каждый четный вектор алгебраически вычитается из предыдущего (рис. 4,б). При наличии же демпфирования ( $\eta \neq 0$ ), хотя полного гашения и не происходит, тем не менее уровень колебаний будет минимальным.

Другой достаточно хороший режим имеет место, когда  $\varphi = \frac{2}{3}\pi + (j-1)2\pi$ , где  $j$  — любое целое

число. Тогда гасится каждый третий импульс. На фазовой диаграмме (рис. 4,в) это соответствует трехугольнику. Далее идет квадрат ( $i = 4$ , рис. 4,г) и т.д.

В общем случае желательно, чтобы фазовый многоугольник (рис. 4,а) был замкнутым, т. е. чтобы выполнялось условие  $\frac{2\pi}{\varphi_0} = i$ , где  $i \geq 2$  — любое

целое число, причем,  $i < \frac{\varphi}{2\pi}$ , т. е. оно должно быть не больше числа периодов основного тона колеба-

ний на интервале  $T_c$ . В этом случае  $i$  будет равно числу срабатываний в группе с нулевой амплитудой последнего. Так, при  $i = 2$  должно быть  $\varphi_0 = \pi$ , при этом гасится каждый второй импульс; при  $i = 3$  будет  $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$  — гасится каждый третий импульс;

при  $i = 4$  будет  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  — гасится каждый четвертый импульс и т. д. (чем больше  $i$ , тем эффект слабее).

Наиболее опасным будет режим ударного резонанса, когда  $\varphi \equiv \omega_{1,1}$ ,  $T_c = 2\pi, 4\pi, \dots$  или, то же самое,  $\varphi_0 = 0$ . При этом векторы алгебраически складываются по горизонтали (рис. 4,д). В случае  $\eta = 0$  после каждого  $k$ -го срабатывания амплитуда прогиба увеличивается в  $k$  раз.

При наличии же демпфирования ( $\eta \neq 0$ ) при резонансе в очереди из  $k$  срабатываний амплитуда прогиба  $A^{(k)}$  увеличивается по сравнению с первой  $A^{(1)}$  в  $s$  раз, т. е.

$$A^{(k)} = s \cdot A^{(1)},$$

где  $s$  определяется выражением

$$s = \frac{1 - e^{k-\xi}}{1 - e^{-\xi}}, \quad \xi = 2\pi\eta, \quad (40)$$

являющимся суммой геометрической прогрессии. При малом демпфировании ( $\eta \ll 1$ ) имеем в пределе  $s = k$ .

### Пример расчета

В качестве примера приводим результаты расчета вибродинамического состояния панели, возникающего при действии ДУВ, расположенной на расстоянии  $L_{\perp} = 12,5$  см от обшивки.

**Исходные данные для расчета:**

параметры установки:  $d = 2,3$  см;  $l = 100$  см;  
 $n_c = 50$  с<sup>-1</sup>;  $G_c = 0,17$  кгс;  $V_c = 7,1 \cdot 10^4$  см/с;  $q = 0,037$  кгс;  
 $Q_{II} = 1040$  ккал/кгс;

расстояние до панели:  $L_{\perp} = 12,5$  см;

параметры панели:  $R = 75$  см;  $h = 0,15$  см;  
 $a = 36$  см;  $b = 18$  см;  $E = 7,2 \cdot 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>;  $\mu = 0,3$ ;  
 $\rho = 2,8$  г/см<sup>3</sup> =  $2,854 \cdot 10^6$  кгс·с<sup>2</sup>/см<sup>4</sup>;  $\eta = 0,01$ .

В соответствии с формулами (2)—(5) получаем  
 $U = 1,206 \cdot 10^6$  кгс·см;  $p_{\max} = 7,92$  кгс/см<sup>2</sup>;  
 $I = 2,746 \cdot 10^{-4}$  кгс·с/см<sup>2</sup>;  $\tau = 0,7 \cdot 10^{-4}$  с. Низшая собственная частота панели рассчитывается формуле

(14):  $v_{1,1} = \frac{\omega_{1,1}}{2\pi} = 253,9$  Гц. Интервал между срабатываниями  $T_c = \frac{1}{h_c} = 0,02$  с. Фазовый угол  $\varphi_0 = 2 \cdot 0,078\pi = 0,49$  рад  $\approx 27^\circ$ .

При расчете напряжений учитывается то обстоятельство, что вибронапряжения, в особенности изгибные, и виброускорения обладают широким спектром, поэтому для их представления приходится

удерживать достаточно много гармоник в разложениях (7), (9). В результате для  $\sigma_N$  и  $\dot{w}$  не удается получить таких простых приближенных формул, как для прогиба (32).

Зависимость для напряжений в центре панели ( $x = a/2$ ;  $y = b/2$ ) для интервала времени, примерно равного четверти периода основного тона прогиба  $w$ , при  $k = 1$  приведена на рис. 5. Для сопоставления штриховой линией в том же масштабе времени показано изменение прогиба  $w(t)$ .

**Оценка прочности вибрирующей панели**

Для оценки прочности вычисляются суммарные напряжения:

$$\sigma_x^{\Sigma} = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(u)}; \quad \sigma_y^{\Sigma} = \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(u)}, \quad (41)$$

которые максимальны на внутренней или на внешней поверхности панели.

Вычисление этих напряжений следует проводить на ЭВМ. Результаты расчета максимальных напряжений и прогиба после четырех первых срабатываний представлены в табл. 2.

Таблица 2

$k$	max $w$ , см	max $\sigma_x^{(0)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	max $\sigma_y^{(0)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	max $\sigma_x^{(u)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	max $\sigma_y^{(u)}$ , кгс/см <sup>2</sup>	max $\sigma_x^{\Sigma}$ , кгс/см <sup>2</sup>	max $\sigma_y^{\Sigma}$ , кгс/см <sup>2</sup>
1	0,541	828	663	1660	2278	2465	2865
2	0,805	1216	678	1885	2677	3096	3328
3	0,958	1441	715	2039	3021	3479	3723
4	1,004	1510	751	2080	3069	3582	3801

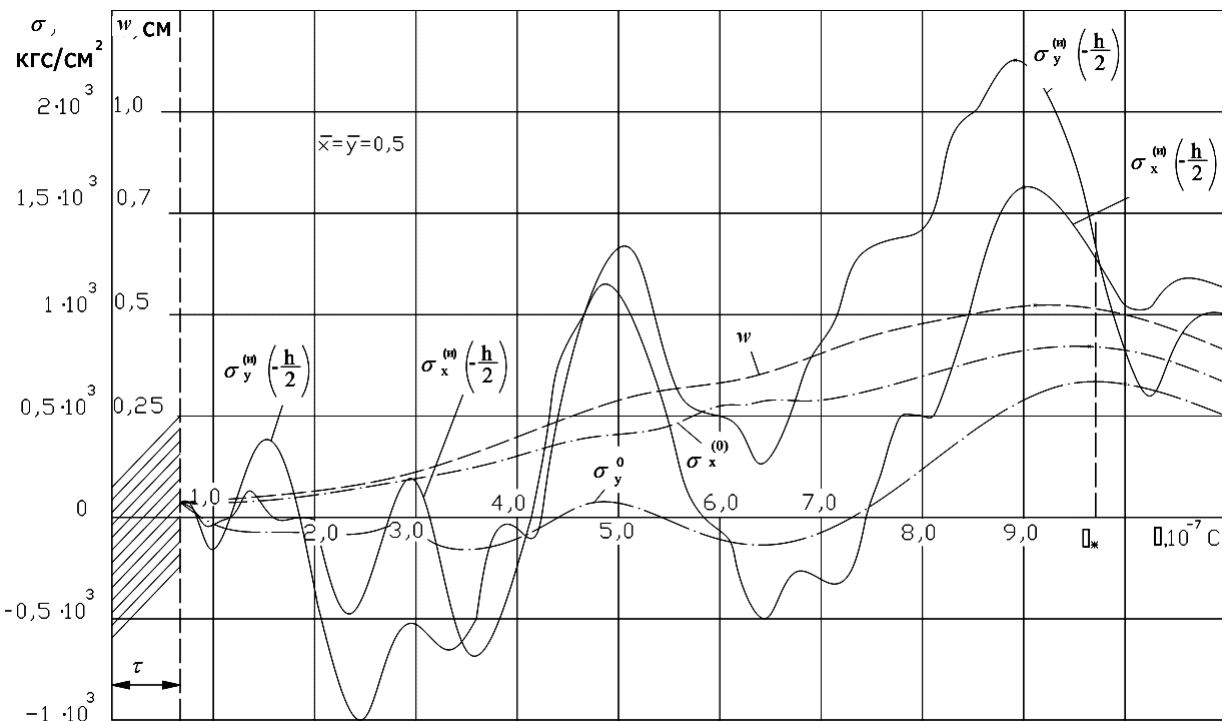


Рис. 5. Изменение во времени напряжений в центре панели



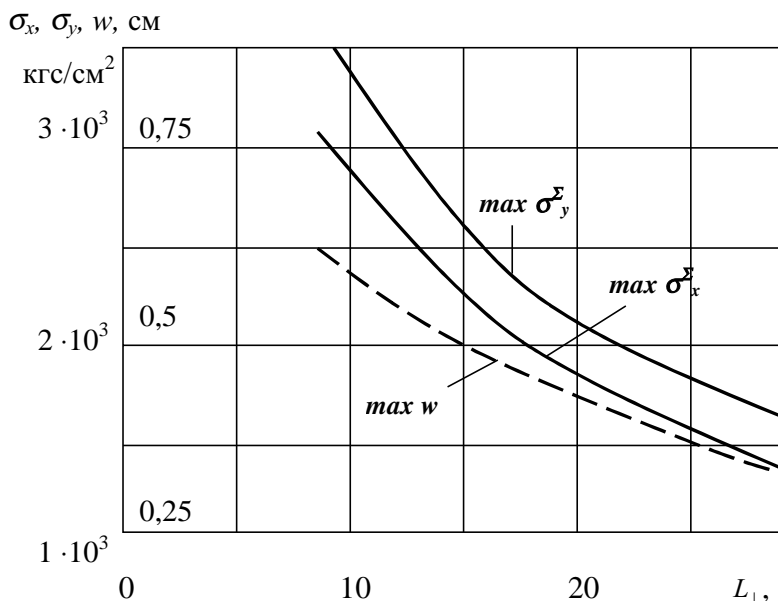


Рис. 6. Зависимость максимальных суммарных напряжений панели от расстояния до среза ствола

На рис. 6 приведена зависимость максимальных суммарных напряжений от расстояния панели до среза ствола.

**Выводы**

Разработанный метод может использоваться при проверочных расчетах прочности участка обшивки ЛА вблизи ствола пушечной установки, а также для выбора безопасного расстояния от места размещения ствола до обшивки ЛА.

Теоретические расчеты согласуются с результатами экспериментальных исследований нагрузок на панель с точностью около 25%.

При этом для расчета прогиба приведены упрощенные зависимости и дан графоаналитический подход. Для определения же напряжений (в особенности изгибных) допустимы только точные методы.

Установлено, что процесс изменения напряжений во времени является более высокочастотным, чем для прогибов и полигармоническим; мембранные напряжения несколько меньше изгибных.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №09-08-00519-а).*

**Биографический список**

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. — М.: Гостехиздат, 1949.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 16.11.2009