УДК 531.3 517.9

Описание свойств фрактальных антенн с помощью квазиклассического кинетического уравнения в пространстве нецелой размерности.

С.Б.Богданова, С.О. Гладков

Аннотация

Для фрактальной радиолокационной антенны, обладающей нецелой размерностью, предложен аналитический аппарат описания физических свойств подобных объектов, и продемонстрирована методика вычисления некоторых физических свойств металлического фрактала в зависимости от его размерности.

Ключевые слова

кинетическое уравнение; фрактальная антенна; радиолокация; дробное дифференцирование.

Введение

За последние 10 – 15 лет широкое распространение получили исследования, связанные с изучением свойств фрактальных объектов. Это и понятно, поскольку именно за компактностью принимающих или передающих электромагнитные сигналы устройств будущее авиации и наземной техники.

Стремление к компактности принимающих и передающих радиолокационных устройств и, в частности, антенн, привело к созданию принципиально нового типа «ломаных», так называемых, фрактальных антенн. Подобные объекты обладают весьма сложной геометрией и получаются путем итераций [1-2]. Их основной геометрической характеристикой является размерность Хаусдорфа [3-4] $D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}$, где N - наименьшее число элементов диаметра r, необходимых для покрытия соответствующего множества.

Формально фрактальная размерность по своему характеру связана со способом построения самого множества, а потому она может принимать самые различные (не целые) значения, что и позволяет говорить нам о пространствах дробной размерности.

Меняя угол «вынимания» средней части инициатора построения (рис. 1) и количество итераций, можно получить широкий диапазон форм передающих и принимающих антенн, имеющих при этом весьма малый размер. Экспериментально установленная зависимость электродинамических свойств подобных антенн от их формы отмечена, например, в работах [5-6].

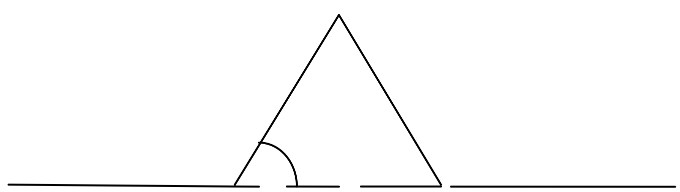

Рис.1. Показан угол «вынимания» средней части инициатора на одной итерации.

Целью настоящей статьи является разработка аналитического аппарата, позволяющего адекватно вычислять основные диссипативные характеристики разнообразных фрактальных металлических объектов.

При изучении физических свойств фрактальных структур необходимо использовать операцию дробного дифференцирования, поскольку обычное дифференцирование в силу их чрезвычайной «изломанности» к ним не применимо. В этом отношении показательным является тот факт, что самый первый чисто математический пример непрерывной, но нигде недифференцируемой функции, принадлежит Б.Больцано (1830) и представляет собой фрактальную кривую, построенную по принципу кривой Коха [7].

Сама операция дробного дифференцирования может быть введена различными способами: например, как гельдерова производная [8], или как интеграл риссов потенциал [9] с особым ядром типа «свертки» в произвольной степени.

В рамках нашей задачи наиболее удобным представляется применение метода разложения в интеграл Фурье. Именно этот способ мы примем за основу дальнейшего изложения материала статьи и по определению, введенному в работах [10 – 11], действие оператора дробного дифференцирования A_i на некоторый класс функций определим как

$$A_x f(\vec{r}) = \int_{V_k} i k_x^{1-\varepsilon} f_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3 k \quad , \qquad (1)$$

где $f(x)-$ некоторая функция, а $f_k -$ ее Фурье – образ. Заметим, что сам оператор A_i является линейным и при $\varepsilon = 0$ совпадает с оператором обычного дифференцирования.

Воспользуемся правилом (1) для модификации квазиклассического кинетического уравнения на объекты не целой размерности.

Для начала запишем обычное кинетическое уравнение [12] в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla f = L\{ f \},$$

где f функция распределения частиц, $L\{f\}-$ интеграл столкновений, $\vec{u}-$ обобщенная скорость, под которой мы подразумеваем скорость изменения импульса и обычную скорость, то есть $\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z\right)$.

Проведем в уравнении (1) формальную замену векторного оператора пространственного дифференцирования ∇ на оператор $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ и запишем обобщенное кинетическое уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_{i\varepsilon} A_i f = L\{f\}, \qquad (2)$$

где индекс $i = 1,2,...6$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Значения $i = 1,2,3$ соответствуют декартовым координатам x, y, z, а значения $i = 4,5,6 -$ импульсному пространству и координатам соответственно p_x, p_y, p_z. $u_{i\varepsilon}$ представляет собой обобщенную скорость в фазовом пространстве с числом состояний $\Delta\Gamma = \frac{d^3 p d^3 x}{(2\pi\hbar)^3}$.

Покажем, что квазиклассическое кинетическое уравнение (2) не противоречит закону сохранения числа частиц консервативной системы, то есть $N = \int f d\Gamma = const$.

Действительно, при интегрировании обеих частей уравнения, (2) по фазовому объему, получаем $\frac{\partial}{\partial t}\int f d\Gamma + \int i k'^{-\varepsilon}\left(\vec{u}\vec{k}'\right) e^{-i\vec{k}'\vec{x}} f_{\vec{k}'} d\Gamma \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} = \int L\{f\} d\Gamma$. В силу $H-$ теоремы Больцмана интеграл в правой части тождественно обращается в нуль (независимо от статистики частиц, принимающих участие в процессах взаимодействия будь то бозоны или фермионы).

Поскольку скорость $\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m}$ (если речь идет об электронах, где $m-$ их масса), то второе слагаемое также исчезает в силу того, что $\int\left(\vec{p}\vec{k}'\right) d^3 k' d^3 p \equiv 0$ и у нас автоматически получается, как и должно быть[12], уравнение вида $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$, а потому $N = const$.

Продемонстрируем, как «работает» уравнение (2) на примере вычисления тензора проводимости фрактального физического объекта.

Согласно определению плотности тока имеем

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \qquad (3)$$

С другой стороны, для плотности тока имеет место выражение

$$\vec{j} = 2e\int \vec{u}_{\varepsilon}(\bar{f} + \delta f)\frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (4)$$

где $\bar{f} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p)-\mu_0}{T(\vec{r})}}+1}$ представляет собой квазиравновесную неоднородную функцию распределения электронов, μ_0 - химический потенциал электронов, а $\delta f = \frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0}\delta T$ малая поправка к функции распределения.

Для вычисления δf воспользуемся τ - приближением. Тогда, в стационарном случае из уравнения (2) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{p}}_\varepsilon \vec{A}_p f = L\{f\}, \qquad (5)$$

где $L(f) \approx -\frac{\delta f}{\tau_p}$ и $\dot{\vec{p}} = \vec{F} = e\vec{E}$, $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, e – заряд электрона.

Из (5) сразу же находим искомое выражение для поправки δf :

$$\delta f = -\tau_p \vec{F} \cdot \vec{A}\bar{f} = -\tau_p e\vec{E} \cdot \vec{A}\bar{f}. \qquad (6)$$

Учитывая далее разложение $\vec{A}_p f = i\int \vec{r}^{\,1+\varepsilon} f_r e^{-i\vec{r}\vec{p}} \frac{d^3x}{(2\pi)^3}$, получаем для плотности тока выражение

$$\begin{aligned}\vec{j} &= -2i\int e\vec{u}_\varepsilon \tau_p e\vec{E}\vec{r}^{\,1+\varepsilon} f_{\vec{r}} e^{-\vec{r}\vec{p}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d^3x}{(2\pi)^3} = \\ &= -2ie^2\int \tau_p \vec{u}_\varepsilon \vec{E}\vec{r}^{\,1+\varepsilon} f_{\vec{r}} e^{-i\vec{r}\vec{p}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d^3x}{(2\pi)^3}\end{aligned} \qquad (7)$$

Сравнивая (7) с законом Ома, то есть приравнивая его к $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, получим

искомый тензор проводимости фрактального металлического объекта

$$\sigma_{ik} = -2ie^2\int \tau_p u_{i\varepsilon} x_k r^\varepsilon f_{\vec{r}} e^{-i\vec{r}\vec{p}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{d^3x}{(2\pi)^3} \qquad (8)$$

Формула (8) явно демонстрирует зависимость проводимости фрактального объекта от их геометрии [13-14]. Видно, что коэффициент σ является весьма сложной функцией параметра фрактальности ε.

В заключении работы обратим еще раз внимание на два важных момента.

1. Обосновано введение обобщенного квазиклассического кинетического уравнения, позволяющего описывать физические свойства фрактальных структур;

2. Продемонстрирован пример приложения уравнения (2) для случая вычисления проводимости фрактальной проволоки.

Библиографический список

1. В.Ф.Кравченко, В.М.Масюк. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. ИПРЖР, 2002. 72с.
2. Sagan H. Space Filling Curves. Springer-Verlag, New York, 1994. 193p.
3. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Ижевск, РХД, 2002г. 665с.
4. Е. Федер. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254с.
5. В.Слюсар. Фрактальные антенны. //Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. №5. С.78-83.
6. Vinoj K.J. Fractal Shaped Antenna Tltmtnts for Wide- and Multi-band Wireless Applications.-Thesis of PhD Dissertation. The Pennsylvania State University. 2002. 169p. – http//etda.libraries.psu.rdu/theses/approved/worldwideFiles/ETD-190/Thesis_Vinoj.pdf.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск., НИЦ «РХД», 2001г. 528с.
8. Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика. //УФН. 1985. т.146. вып.3. с. 493-506.
9. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления в комплексной плоскости. М., 1966г. 672с.
10. С.О. Гладков. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука. 1999. 330 с.
11. С.О. Гладков. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности. //ЖТФ. 1997. т.67. Вып.7. С.8 – 12.
12. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов. Электронная теория металлов. М.: Наука. 1971. 450 с.
13. S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova. Physica B. The heat-transfer theory for quasi – n – dimensional systems.// Physica B: Journal of Condensed matter, 2010. V.405. pp. 1975-1977.
14. С.О.Гладков, С.Б.Богданова. О вычислении продольной магнитной восприимчивости фрактальных ферродиэлектриков. //Вестник Московского государственного областного университета. Физика-математика. №2. 2010. С.76-80.

Сведения об авторах

1. Гладков Сергей Октябринович, профессор, Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф-м.н., тел.: (495) 434 75 05; e-mail: sglad@newmail.ru.

2. Богданова Софья Борисовна, старший преподаватель Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел: (903) 290 95 03; e-mail: sonjaf@list.ru