УДК 623.746.174

Аналитическое моделирование боевых действий и оценка эффективности боевого вертолетного комплекса в объеме боевого вылета

М.М. Медынский

Аннотация

В статье рассматриваются два примера использования аппарата теории массового обслуживания для аналитического моделирования боевых действий и оценки эффективности боевого вертолетного комплекса (БВК) в объеме боевого вылета.

Большинство военных операций, развивающихся по схеме «массового обслуживания», представляют собой случайные процессы, не являющиеся марковскими. Рассматривается метод, который позволяет обойти эту трудность, путем сведения не-марковского процесса к марковскому, и использовать для исследования математический аппарат теории массового обслуживания.

Предлагаемая методика является достаточно универсальной для аналитического моделирования не только боевых действий вертолетов, но и многих других боевых операций авиации, сводящихся к модели массового обслуживания.

Ключевые слова

боевой вертолетный комплекс; появляющиеся цели; система массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе; размеченный граф состояний; марковский случайный процесс; обобщенный поток Эрланга; метод псевдосостояний; относительная пропускная способность; абсолютная пропускная способность

Известно, что основные результаты математической теории массового обслуживания получены для случая, когда случайный процесс, протекающий в системе, является марковским [1]. Вместе с тем, большинство военных операций, развивающихся по схеме «массового обслуживания», как раз и не соответствуют этому предположению: случайные процессы, происходящие в таких системах, не являются марковскими.

Рассмотрим метод, который позволяет обойти эту трудность, путем сведения немарковского процесса к марковскому, и использовать для исследования математический аппарат теории массового обслуживания.

Идея метода заключается в аппроксимации реальных законов распределения интервала времени между соседними событиями в потоках, используемых в моделях боевых действий БВК, законами Эрланга некоторого (подходящего) порядка, и использовании метода «псевдосостояний» [1].

Отличительной особенностью боевого применения вертолетов в ходе огневой поддержки войск на поле боя является борьба с так называемыми появляющимися целями.

Под появляющимися целями понимаются танки, БТР, БМП, огневые точки, ракетные установки и другие объекты противника, которые после их обнаружения находятся под наблюдением вертолета ограниченное время, а обнаружение целей происходит случайным образом.

Такое предположение хорошо согласуется с реальностью в условиях предпринимаемых противником мероприятий по маскировке боевой техники и постоянного маневрирования целей на пересеченной местности.

Рассмотрим одну из наиболее часто встречающихся задач БВК – задачу отражения атак и контратак танков противника и борьба с прорвавшимися через линию фронта бронетанковыми частями. Для этого используем модель действия группы вертолетов по танкам, наступающим на полузакрытой местности в боевом порядке в дневных условиях. В поле зрения одного вертолета группа танков идет в боевом порядке типа «колонна» с одинаковой для всех танков скоростью v. Каждый танк, кроме ведущего, выдерживает дистанцию L от впереди идущего. Это расстояние выдерживается с ошибками. Поэтому моменты пересечения танками заданного рубежа обнаружения и обстрела с вертолета образуют поток Пальма (с ограниченным последействием), так как случайные величины $T_1 = \frac{L_1}{v}$, $T_2 = \frac{L_2}{v}$, …, независимы (здесь L_1 - расстояние между ведущим и вторым танком, L_2 - расстояние между вторым и третьим танком и т.д.). Плотность распределения $f(t)$ времени между соседними танками (для вертолета - целями-заявками) качественно имеет вид, представленный на рис.1.

Время пребывания танков в зоне обнаружения вертолета является случайной величиной и ограничено – цель-заявка может находиться в системе время, не превосходящее некоторой (случайной) величины τ.

Экранирование танков местностью во время его «обслуживания» БВК приводит к срыву боевой работы БВК, если время обслуживания цели-заявки больше τ, т.е. если $T_{обс} > \tau$. Иными словами, если за время $T_{обс}$ обслуживание цели-заявки не будет закончено, цель теряется независимо от того, началось обслуживание или нет.

В качестве основного оружия в борьбе с танками применяются противотанковые управляемые реактивные снаряды (ПТУРС). После обнаружения и опознавания цели экипаж производит прицеливание и пуск ПТУРС.

Таким образом, могут представиться следующие случаи:

1) за время τ цель-заявка начала «обслуживаться» и «обслужилась» с вероятностью $W_{\text{ПТУРС}}$ ($W_{\text{ПТУРС}}$ - вероятность поражения цели при обстреле ее с вертолета);

2) за время τ цель-заявка начала «обслуживаться», но обслуживание не успело закончиться – потеря «недообслуженного» требования;

3) за время τ цель не начала «обслуживаться» - потеря «недообслуженного» требования.

Плотность распределения $h(t)$ времени пребывания цели-заявки в зоне обнаружения БВК зависит от особенностей рельефа местности боевых действий, а также от естественных и искусственных помех. Качественный вид этой плотности представлен на рис.1.

Время $T_{обс}$, необходимое для обстрела («обслуживания») каждой цели-заявки, складывается из времени обнаружения и распознавания цели, времени подготовки к стрельбе (прицеливания), времени полета ракеты до цели и является величиной случайной.

Плотность распределения $g(t)$ времени «обслуживания» каждой цели-заявки качественно имеет вид, представленный на рис. 1.

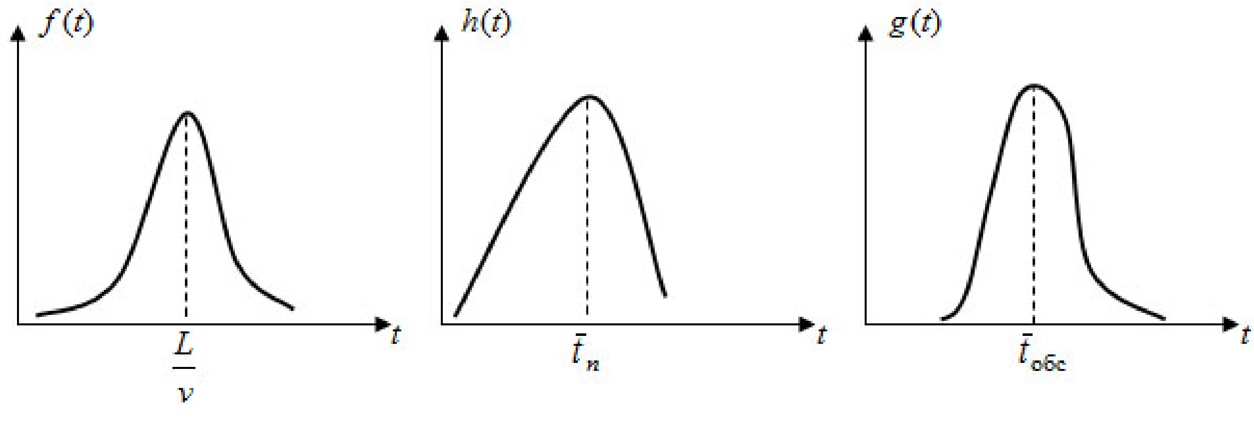

Рис.1.

Таким образом, в рассматриваемой задаче БВК можно рассматривать как систему массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе.

Источник заявок имеет ограниченную мощность (зависит от сил противника, участвующих в операции). Система (БВК) – одноканальная (или многоканальная при наличии соответствующей аппаратуры).

Граф состояния такой системы зависит от типа применяемого БВК (одноместный или двухместный вертолет), стратегии маневрирования вертолета в процессе боевых действий.

Отличие двухместного БВК от одноместного заключается в том, что процесс обнаружения целей и процесс обстрела целей могут быть совмещены во времени (задача обнаружения целей может быть решена летчиком во время обстрела цели штурманом-оператором). В одноместном же БВК этап обстрела следует непосредственно за этапом обнаружения цели.

После поражения цели огонь сразу же переносится на другие цели, если они имеются, либо вертолет маневрирует с целью выхода из зоны поражения войсковых средств ПВО противника, после чего осуществляет повторную атаку.

Выбор типа и объема оборонительного маневрирования вертолета в процессе боевых действий является предметом компромисса между интересами БВК по нанесению противнику наибольшего ущерба в процессе боевого вылета и интересами БВК по уменьшению вероятности поражения вертолета средствами ПВО. Действительно, укрываясь большую часть времени в складках местности, БВК может уменьшить величину вероятности своего поражения практически до нуля, но при этом будет близок к нулю и ущерб, наносимый противнику.

1. Модель одноместного БВК с одним каналом обслуживания.

Рассмотрим один из возможных сценариев боевых действий БВК, когда вертолет совершает оборонительный маневр, прячась в складках местности, сразу после обслуживания одной цели-заявки. При этом обслуживание может закончиться либо обстрелом цели и поражением ее с вероятностью $W_{\text{ПТУРС}}$, либо потерей «недообслуженной заявки», если цель уходит из-под обстрела. Время маневрирования будем считать случайной величиной с известным законом распределения $w(t)$.

Если законы распределения: времени между соседними целями-заявками, времени пребывания цели-заявки в системе, времени обслуживания и времени маневрирования – являются показательными с параметрами λ, ν, μ, γ:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda \cdot t},\ \ h(t) = \nu e^{-\nu \cdot t},\ g(t) = \mu e^{-\mu \cdot t},\ \ w(t) = \gamma e^{-\gamma \cdot t}\ \ (t > 0),$$

то случайный процесс, протекающий в системе, будет марковским и размеченный граф состояний имеет вид, представленный на рисунке 2.

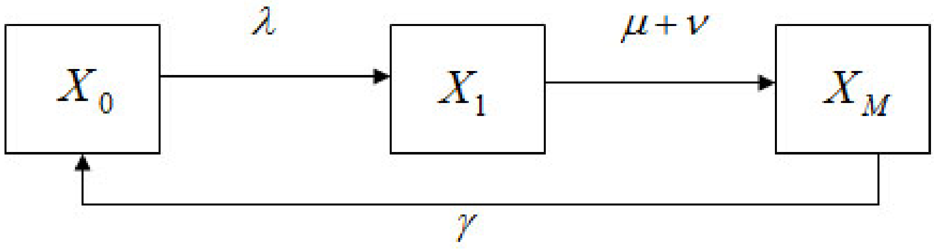

Рис.2.

Возможные состояния системы:

X_0 - канал обслуживания свободен;

X_1 - канал обслуживания занят;

X_M - канал «вышел из строя» - вертолет маневрирует.

Как видно из графа имеем циклический процесс. Подобная задача имеет известное в литературе [1, 2] общее решение. Применяя выражения для предельных вероятностей состояний в этой схеме, получим

$$\begin{cases} p_0 = \left(1+\lambda\left(\dfrac{1}{\mu+\nu}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1}, \\ p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu+\nu}\left(1+\lambda\left(\dfrac{1}{\mu+\nu}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1}, \\ p_M = \dfrac{\lambda}{\gamma}\left(1+\lambda\left(\dfrac{1}{\mu+\nu}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1}. \end{cases}$$

Вводя в рассмотрение средние времена пребывания системы в каждом состоянии

$$\bar{t}_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{\mu+\nu}, \quad \bar{t}_M = \frac{1}{\gamma},$$

после элементарных преобразований, получим

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{\bar{t}_0}{\bar{t}_0+\bar{t}_1+\bar{t}_M}, \\ p_1 = \dfrac{\bar{t}_1}{\bar{t}_0+\bar{t}_1+\bar{t}_M}, \\ p_M = \dfrac{\bar{t}_M}{\bar{t}_0+\bar{t}_1+\bar{t}_M}. \end{cases}$$

Чтобы найти относительную пропускную способность системы q, нужно вероятность p_0 того, что заявка будет принята к обслуживанию, умножить на условную вероятность $P_{усл}$ того, что заявка, принятая к обслуживанию, фактически будет обслужена (заявка не уйдет из системы за время обслуживания).

Найдем эту условную вероятность по интегральной формуле полной вероятности. Сделаем гипотезу, состоящую в том, что время обслуживания заявки попало на участок времени от t до $t + dt$; вероятность этой гипотезы приближенно равна $g(t)dt$, где $g(t)$- плотность распределения времени обслуживания.

Условная вероятность того, что заявка не уйдет из системы за время t, равна $e^{-\nu \cdot t}$, поэтому

$$P_{усл} = \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu \cdot t} e^{-\nu \cdot t} dt = \int_0^{+\infty} \mu e^{-(\mu+\nu)\cdot t} dt = \frac{\mu}{\mu+\nu}.$$

Таким образом,

$$q = p_0 \cdot P_{\text{усл}} = \frac{\dfrac{\mu}{\mu+\nu}}{1+\dfrac{\lambda}{\mu+\nu}+\dfrac{\lambda}{\gamma}} = \frac{\mu\gamma}{(\mu+\nu)(\lambda+\gamma)+\lambda\gamma}.$$

Абсолютная пропускная способность системы – среднее число заявок, обслуживаемое в единицу времени, определяется по формуле

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \cdot \mu\gamma}{(\mu+\nu)(\lambda+\gamma)+\lambda\gamma}.$$

Зная эти характеристики и время боевых действий БВК в боевом вылете, легко вычислить математическое ожидание числа пораженных целей в объеме боевого вылета рассматриваемой боевой задачи.

Однако реальные законы распределения времени между соседними целями-заявками, времени пребывания цели-заявки в системе, времени обслуживания и времени маневрирования – не являются показательными, и качественно имеют вид, представленный на рис.1. Поэтому случайный процесс, протекающий в системе, не будет марковским, а представленную выше математическую модель функционирования БВК в процессе боевых действий нельзя считать корректной.

Учитывая, что плотности распределения времени между соседними целями-заявками, времени пребывания цели-заявки в системе, времени обслуживания и времени маневрирования имеют вид, подобный показанным на рис.1 кривым, аппроксимируем указанные кривые плотностей распределения обобщенными потоками Эрланга, например, 2-го порядка:

$$f_2(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right); \quad h_2(t) = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\right);$$

$$g_2(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right); \quad w_2(t) = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}\right).$$

Это позволяет свести не-марковский процесс к марковскому путем использования метода «псевдосостояний» [1].

Идея метода «псевдосостояний» состоит в использовании свойств потока Эрланга.

Если потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, представляют собой потоки Эрланга, то путем введения в схему возможных состояний некоторых фиктивных «псевдосостояний», удается свести не-марковский процесс к марковскому и, соответственно, описать его с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова, которые при $t \to \infty$ переходят в алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Процесс, происходящий рассматриваемой в системе, будет марковским, если ввести следующие фиктивные псевдосостояния, нумеруя их по числу заявок в системе (нижний индекс) и фазе обслуживания, поступления новой заявки и ухода из системы (верхний индекс):

X_0^1 - заявок в системе нет, 1-я фаза поступления заявки, обслуживания нет, ухода заявки из системы нет;

X_0^2 - заявок в системе нет, 2-я фаза поступления заявки, обслуживания нет, ухода заявки из системы нет;

X_1^{11} - одна заявка в системе , 1-я фаза обслуживания заявки, 1-я фаза ухода заявки из системы;

X_1^{12} - одна заявка в системе , 1-я фаза обслуживания заявки, 2-я фаза ухода заявки из системы;

X_1^{21} - одна заявка в системе , 2-я фаза обслуживания заявки, 1-я фаза ухода заявки из системы;

X_1^{22} - одна заявка в системе , 2-я фаза обслуживания заявки, 2-я фаза ухода заявки из системы;

X_M^1 - система «не работает» (вертолет маневрирует), 1-я фаза «восстановления» системы;

X_M^2 - система «не работает» (вертолет маневрирует), 2-я фаза «восстановления» системы.

Размеченный граф состояний имеет вид, представленный на рис.3.

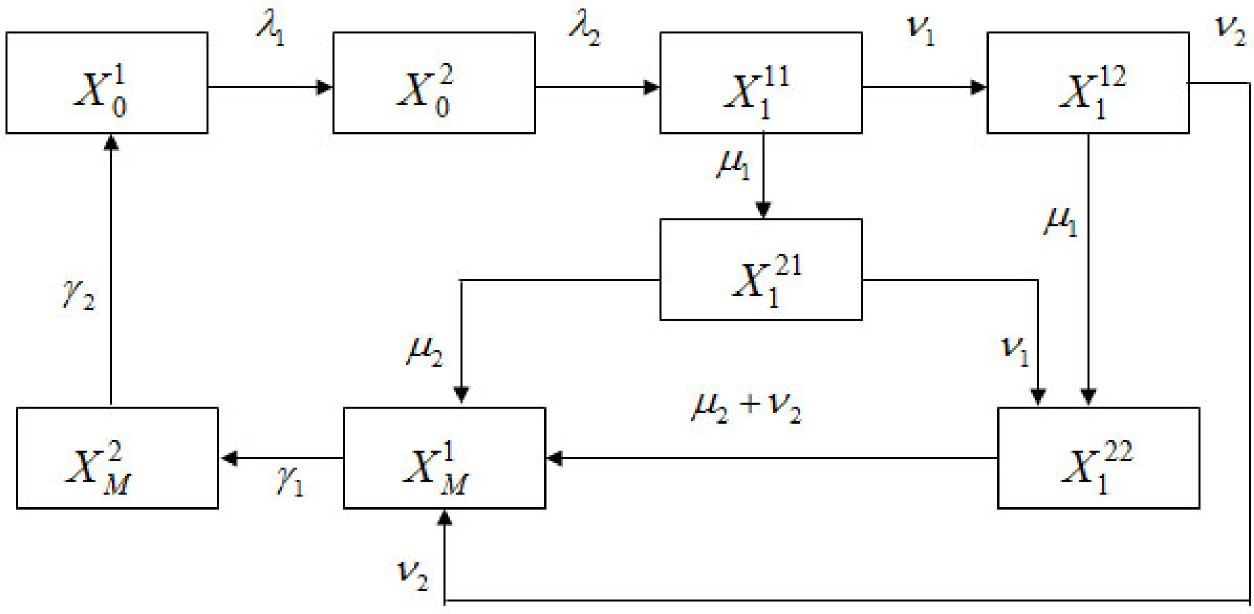

Рис. 3

Пользуясь размеченным графом состояний, показанным на рис.3, запишем линейные алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний системы:

$$
\begin{cases}
-\lambda_1 p_0^1 + \gamma_2 p_M^1 = 0, \\
-\lambda_2 p_0^2 + \lambda_1 p_0^1 = 0, \\
-(\mu_1+\nu_1) p_1^{11} + \lambda_2 p_0^2 = 0, \\
-(\mu_1+\nu_2) p_1^{12} + \nu_1 p_1^{11} = 0, \\
-(\mu_2+\nu_1) p_1^{21} + \mu_1 p_1^{11} = 0, \\
-(\mu_2+\nu_2) p_1^{22} + \mu_1 p_1^{12} + \nu_1 p_1^{21} = 0, \\
-\gamma_1 p_M^1 + \mu_2 p_1^{21} + (\mu_2+\nu_2) p_1^{22} + \nu_2 p_1^{12} = 0, \\
-\gamma_2 p_M^2 + \gamma_1 p_M^1 = 0.
\end{cases}
$$

Поскольку события X_0^1, X_0^2, X_1^{11}, X_1^{12}, X_1^{21}, X_1^{22}, X_M^1, X_M^2 образуют полную группу несовместных событий, то сумма предельных вероятностей состояний равна единице, т.е. $p_0^1 + p_0^2 + p_1^{11} + p_1^{12} + p_1^{21} + p_1^{22} + p_M^1 + p_M^2 = 1$.

Добавив это уравнение к уравнениям системы, и решив систему, найдем предельные вероятности состояний в этом случае:

$$\begin{cases} p_0^1 = \left(1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \dfrac{\lambda_1}{\gamma_1} + \dfrac{\lambda_1}{\gamma_2} + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1 + \nu_1} + \dfrac{\lambda_1 \nu_1}{(\mu_1 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)} + \dfrac{\lambda_1 \mu_1}{(\mu_2 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_1)} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\lambda_1 \mu_1 \nu_1 (\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)}{(\mu_2 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_2)(\mu_2 + \nu_1)} \right)^{-1} \\ p_0^2 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} p_0^1, \\ p_1^{11} = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1 + \nu_1} p_0^1, \\ p_1^{12} = \dfrac{\lambda_1 \nu_1}{(\mu_1 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)} p_0^1, \\ p_1^{21} = \dfrac{\lambda_1 \mu_1}{(\mu_2 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_1)} p_0^1, \\ p_1^{22} = \dfrac{\lambda_1 \mu_1 \nu_1 (\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)}{(\mu_2 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_2)(\mu_2 + \nu_1)} p_0^1, \\ p_M^1 = \dfrac{\lambda_1}{\gamma_1} p_0^1, \\ p_M^2 = \dfrac{\lambda_1}{\gamma_2} p_0^1. \end{cases}$$

После того как найдены вероятности псевдосостояний, можно найти и вероятности состояний:

$$\begin{cases} p_0 = p_0^1 + p_0^2 = (1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}) p_0^1, \\ p_1 = p_1^{11} + p_1^{12} + p_1^{21} + p_1^{22} = \left(\dfrac{\lambda_1}{\mu_1 + \nu_1} + \dfrac{\lambda_1 \nu_1}{(\mu_1 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)} + \dfrac{\lambda_1 \mu_1}{(\mu_2 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_1)} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\lambda_1 \mu_1 \nu_1 (\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)}{(\mu_2 + \nu_2)(\mu_1 + \nu_1)(\mu_1 + \nu_2)(\mu_2 + \nu_1)} \right) \cdot p_0^1, \\ p_M = \left(\dfrac{\lambda_1}{\gamma_1} + \dfrac{\lambda_1}{\gamma_2} \right) p_0^1. \end{cases}$$

Относительную и абсолютную пропускную способность системы определяем аналогично случаю, рассмотренному выше.

Относительная пропускная способность равна произведению вероятности p_0 того, что заявка будет принята к обслуживанию на условную вероятность того, что заявка, принятая к обслуживанию, фактически будет обслужена (заявка не уйдет из системы за время обслуживания). Условную вероятность найдем по формуле полной вероятности.

Составим гипотезу, состоящую в том, что время обслуживания заявки попало на участок от t до $t + dt$; вероятность этой гипотезы приближенно равна $g(t)dt$, где $g(t)$- плотность распределения времени обслуживания.

Условная вероятность того, что заявка не уйдет из системы за время t, равна

$$\widetilde{P}(t) = 1 - \int_0^t h_2(t)dt = 1 - \int_0^t \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\right)dt = \frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t},$$

поэтому

$$P_{усл} = \int_0^{+\infty}\widetilde{P}(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t}\right)\cdot\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right)dt =$$

$$= \frac{\mu_1\mu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(\frac{\nu_2}{(\mu_1+\nu_1)(\nu_1+\mu_2)} - \frac{\nu_1}{(\mu_2+\nu_2)(\nu_2+\mu_1)}\right).$$

Таким образом,

$$q = p_0 \cdot P_{\text{усл}} = \left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\cdot\frac{\mu_1\mu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(\frac{\nu_2}{(\mu_1+\nu_1)(\nu_1+\mu_2)} - \frac{\nu_1}{(\mu_2+\nu_2)(\nu_2+\mu_1)}\right)\cdot p_0^1, \text{ где}$$

$$p_0^1 = \left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\gamma_2}+\frac{\lambda_1}{\gamma_1}+\frac{\lambda_1}{\mu_1+\nu_1}+\frac{\lambda_1\nu_1}{(\mu_1+\nu_2)(\mu_1+\nu_1)}+\frac{\lambda_1\mu_1}{(\mu_2+\nu_1)(\mu_1+\nu_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1\mu_1\nu_1(\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2)}{(\mu_2+\nu_2)(\mu_1+\nu_1)(\mu_1+\nu_2)(\mu_2+\nu_1)}\right)^{-1}.$$

Абсолютная пропускная способность определяется следующим образом:

$A = \Lambda q$, где $\Lambda = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Зная эти характеристики и время боевых действий БВК в боевом вылете, легко сосчитать математическое ожидание числа пораженных целей в объеме боевого вылета рассматриваемой задачи по формуле $M = AT_{\text{БД}}W_{\text{ПТУРС}}$, где $A = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot q$, $T_{\text{БД}}$ - время боевых действий, $W_{\text{ПТУРС}}$ - вероятность поражения цели при одном выстреле.

2. Модель двухместного БВК с одним каналом обслуживания

Будем считать, что двухместный БВК, в отличие от одноместного, допускает в процессе обслуживания целей-заявок наличие одной заявки в очереди.

Это соответствует ситуации, когда летчик в процессе обслуживания цели-заявки штурманом-оператором может обнаружить новую цель и передать ее в соответствующий момент на обслуживание оператору.

Учитывая, что плотности распределения времени между соседними целями-заявками, времени пребывания цели-заявки в системе, времени обслуживания и времени маневрирования имеют вид, подобный кривым, показанным на рис.1, аппроксимируем указанные кривые плотностей распределения обобщенными потоками Эрланга, например, 2-го порядка:

$$f_2(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right); \quad h_2(t) = \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\right);$$

$$g_2(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right); \quad w_2(t) = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}\right).$$

Размеченный граф состояний в этом случае имеет вид, представленный на рис. 4.

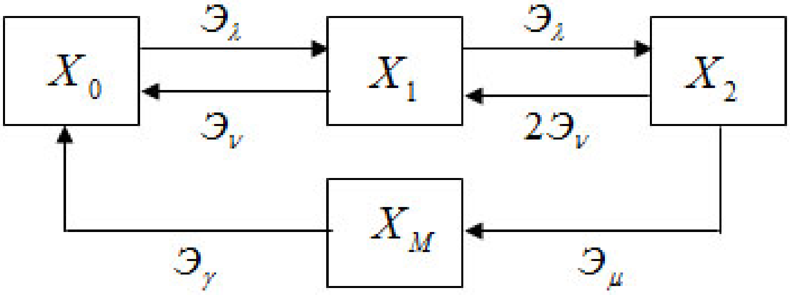

Рис. 4.

Возможные состояния системы:

X_0 - канал обслуживания свободен;

X_1 - канал обслуживания занят;

X_2 - канал обслуживания занят, одна заявка в очереди;

X_M - канал «вышел из строя» - вертолет маневрирует.

Так как потоки, переводящие систему из состояния в состояние – эрланговские, то случайный процесс, протекающий в системе – не-марковский.

Используя идею метода «псевдосостояний» [1], сведем не-марковский процесс к марковскому.

Процесс, происходящий в системе, будет марковским, если ввести следующие фиктивные псевдосостояния, нумеруя их по числу заявок в системе (нижний индекс) и фазе обслуживания, поступления новой заявки и ухода заявки из системы (верхний индекс):

X_0^i - канал свободен, i-я фаза поступления заявки (i = 1,2), обслуживания нет, ухода из системы нет;

X_1^{ijk} - канал занят , i-я фаза поступления 2-й заявки (i = 1,2), j-я фаза обслуживания заявки (j = 1,2), k-я фаза ухода заявки из системы (k = 1,2), нет заявок в очереди;

X_2^{pqr} - канал занят, две заявки в системе, p-я фаза обслуживания заявки (p = 1,2), q-я фаза ухода обслуживаемой заявки из системы (q = 1,2), r-я фаза ухода заявки из очереди (r = 1,2).

Размеченный граф состояний имеет вид, представленный на рис.5.

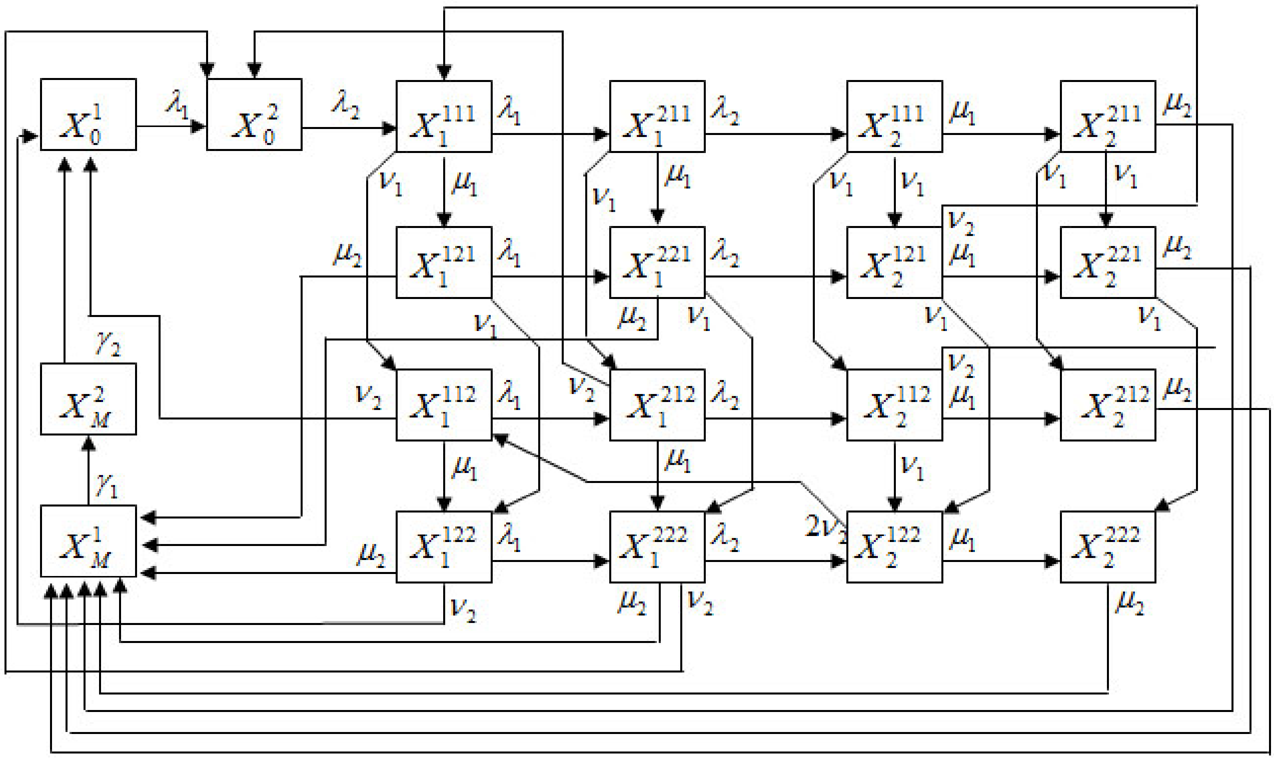

Рис. 5

Процесс эргодический, система уравнений для определения предельных вероятностей состояний имеет вид:

$$
\begin{cases}
-\lambda_1 p_0^1 + \gamma_2 p_M^2 + \nu_2 p_1^{122} + \nu_2 p_1^{112} = 0\,, \\
-\lambda_2 p_0^2 + \nu_2 p_1^{212} + \nu_2 p_1^{222} = 0\,, \\
-(\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1) p_1^{111} + \nu_2 p_2^{112} + \nu_2 p_2^{121} = 0\,, \\
-(\lambda_1 + \mu_1 + \nu_2) p_1^{112} + \nu_1 p_1^{111} + \nu_2 p_2^{222} + 2\nu_2 p_2^{122} = 0\,, \\
-(\lambda_1 + \mu_2 + \nu_1) p_1^{121} + \mu_1 p_1^{111} + \nu_2 p_2^{212} + \nu_2 p_2^{221} = 0 \\
-(\lambda_2 + \mu_1 + \nu_1) p_1^{211} + \lambda_1 p_1^{111} = 0\,, \\
-(\lambda_2 + \mu_1 + \nu_2) p_1^{212} + \lambda_1 p_1^{112} + \nu_1 p_1^{211} = 0\,, \\
-(\lambda_1 + \mu_2 + \nu_2) p_1^{122} + \nu_1 p_1^{121} + \mu_1 p_1^{112} + \nu_2 p_2^{222} = 0\,, \\
-(\lambda_2 + \mu_2 + \nu_1) p_1^{221} + \lambda_1 p_1^{121} + \mu_1 p_1^{211} = 0\,, \\
-(\lambda_2 + \mu_2 + \nu_2) p_1^{222} + \mu_1 p_1^{212} + \lambda_1 p_1^{122} + \nu_1 p_1^{221} = 0\,, \\
-(\mu_1 + 2\nu_1) p_2^{111} + \lambda_2 p_1^{211} = 0\,, \\
-(\mu_1 + \nu_1 + \nu_2) p_2^{112} + \nu_1 p_2^{111} = 0\,, \\
-(\mu_1 + \nu_1 + \nu_2) p_2^{121} + \nu_1 p_2^{111} + \lambda_2 p_1^{212} = 0\,, \\
-(\mu_2 + 2\nu_1) p_2^{211} + \mu_1 p_2^{111} + \lambda_2 p_1^{221} = 0\,, \\
-(\mu_2 + \nu_1 + \nu_2) p_2^{212} + \mu_1 p_2^{112} + \nu_1 p_2^{211} = 0\,, \\
-(\mu_1 + 2\nu_2) p_2^{122} + \nu_1 p_2^{121} + \nu_1 p_2^{112} = 0\,, \\
-(\mu_2 + \nu_1 + \nu_2) p_2^{221} + \nu_1 p_2^{211} + \mu_1 p_2^{121} + \lambda_2 p_1^{222} = 0 \\
-(\mu_2 + 2\nu_2) p_2^{222} + \nu_1 p_2^{221} + \mu_1 p_2^{122} + \nu_1 p_2^{212} = 0\,, \\
-\gamma_1 p_M^1 + \mu_2 p_1^{121} + \mu_2 p_1^{122} + \mu_2 p_1^{221} + \mu_2 p_1^{222} + \mu_2 p_2^{211} + \mu_2 p_2^{212} + \mu_2 p_2^{221} + \mu_2 p_2^{222} = 0\,, \\
-\gamma_2 p_M^2 + \gamma_1 p_M^1 = 0\,.
\end{cases}
$$

Поскольку события X_0^i (i = 1, 2), X_1^{ijk} (i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2), X_2^{pqr} (p = 1, 2; q = 1, 2; r = 1, 2), образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_i^2 p_0^i + \sum_{i,j,k}^2 p_1^{ijk} + \sum_{p,q,r}^2 p_2^{pqr} + \sum_i^2 p_M^i = 1\,.$$

Добавив это уравнение к уравнениям системы, и решив систему, найдем предельные вероятности состояний в этом случае.

После того как найдены вероятности псевдосостояний, можно найти и вероятности состояний:

$$\begin{cases} p_0 = p_0^1 + p_0^2, \\ p_1 = p_1^{111} + p_1^{112} + p_1^{121} + p_1^{211} + p_1^{122} + p_1^{212} + p_1^{221} + p_1^{222}, \\ p_2 = p_2^{111} + p_2^{112} + p_2^{121} + p_2^{211} + p_2^{122} + p_2^{212} + p_2^{221} + p_2^{222}, \\ p_M = p_M^1 + p_M^2. \end{cases}$$

Зная вероятности состояний, можно рассчитать относительную q и абсолютную A пропускную способность системы.

Событие, состоящее в обслуживании одной цели-заявки, равно сумме событий:

$C = C_1 + C_2$, где

C_1 - событие, состоящее в обслуживании 1-й цели-заявки;

C_2 - событие, состоящее в обслуживании 2-й цели-заявки (из очереди).

Так как события C_1 и C_2 несовместны, то $P(C) = P(C_1) + P(C_2)$.

Вероятность события C_1 рассчитывается также как и в случае одноместного БВК:

$$P(C_1) = p_0 \cdot P_{\text{усл}}^{/},$$

где p_0 – вероятность того, что 1-ая цель-заявка будет принята к обслуживанию;

$P_{\text{усл}}^{/}$– условная вероятность того, что цель-заявка, принятая к обслуживанию, фактически будет обслужена.

В случае эрланговского закона распределения:

$$P_{\text{усл}}^{/} = \frac{\mu_1\mu_2}{\nu_2 - \nu_1}\left(\frac{\nu_2}{(\mu_1 + \nu_1)(\nu_1 + \mu_2)} - \frac{\nu_1}{(\mu_2 + \nu_2)(\nu_2 + \mu_1)}\right).$$

Событие C_2 также представляет собой сложное событие.

Для того чтобы 2-ая цель-заявка была обслужена, необходимо совмещение следующих событий:

– БВК не должен обслужить 1-ю цель-заявку;

– 2-ая цель-заявка должна быть в очереди на обслуживание и не уйти из системы вплоть до момента обслуживания.

Таким образом, $P(C_2) = p_1 \cdot P_{\text{усл}}^{//}$, где

p_1 - вероятность того, что 2-я цель-заявка будет принята в систему (место в очереди свободно);

$P^{//}_{\text{усл}}$ - условная вероятность того, что цель-заявка, находящаяся в очереди, будет фактически обслужена (1-ая цель-заявка уйдет из системы не обслуженной, а 2-ая цель-заявка не уйдет из системы за время обслуживания).

Найдем эту условную вероятность по интегральной формуле полной вероятности.

Сделаем гипотезу, состоящую в том, что время обслуживания 2-ой цели-заявки попало на участок от t до $t + dt$; вероятность этой гипотезы приближенно равна $g(t)dt$, где $g(t)$ - плотность распределения времени обслуживания. Условная вероятность того, что 1-ая цель-заявка уйдет из системы за время t , равна:

$$\widetilde{P}_1(t) = \int_0^t h_2(t)dt = \int_0^t \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\right)dt = 1 - \left(\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t}\right).$$

В случае эрланговского закона распределения времени пребывания заявки в системе условная вероятность того, что 2-ая цель-заявка не уйдет из системы за время t равна:

$$\widetilde{P}_2(t) = 1 - \int_0^t h_2(t)dt = 1 - \int_0^t \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}\right)dt = \frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t}.$$

Тогда

$$P^{//}_{усл} = \int_0^{+\infty} \widetilde{P}_1(t)\widetilde{P}_2(t)g(t)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} + \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_1 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2-\nu_1}e^{-\nu_2 t}\right)\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right)dt.$$

Интегрируя, получаем

$$P^{//}_{усл} = \frac{\mu_1\mu_2}{\nu_2-\nu_1}\left(\frac{\nu_2}{(\nu_1+\mu_1)(\nu_1+\mu_2)} - \frac{\nu_1}{(\nu_2+\mu_1)(\nu_2+\mu_2)} - \frac{\nu_2^2}{(\nu_2-\nu_1)(2\nu_1+\mu_1)(2\nu_1+\mu_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\nu_1\nu_2}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_1+\nu_2+\mu_1)(\nu_1+\nu_2+\mu_2)} - \frac{\nu_1^2}{(\nu_2-\nu_1)(2\nu_2+\mu_1)(2\nu_2+\mu_2)}\right).$$

Итак, $P(C_1) = p_0 \cdot P^{/}_{\text{усл}}$, $P(C_2) = p_1 \cdot P^{//}_{\text{усл}}$.

Следовательно, относительная пропускная способность равна

$$q = P(C) = p_0 \cdot P^{/}_{\text{усл}} + p_1 P^{//}_{\text{усл}}.$$

Абсолютная пропускная способность определяется следующим образом:

$A = \Lambda q$, где $\Lambda = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Зная эти характеристики и время боевых действий БВК в боевом вылете, легко вычислить математическое ожидание числа пораженных целей в объеме боевого вылета рассматриваемой задачи по формуле $M = A \cdot T_{\text{БД}} \cdot W_{\text{ПТУРС}}$, где $A = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot q$, $T_{\text{БД}}$ - время боевых действий, $W_{\text{ПТУРС}}$ - вероятность поражения цели при одном выстреле.

Представленные примеры аналитического моделирования действий БВК естественно не исчерпывают все возможные сценарии боевых действий вертолетов в ходе огневой поддержки войск на поле боя. Они служат цели демонстрации возможностей предлагаемой методики создания аналитических (математических) моделей боевых действий БВК, сводящихся к не-марковской модели массового обслуживания Понятно, что при изменении сценария действий БВК, модель может быть легко изменена.

В заключение отметим, что предлагаемая в данной статье методика является достаточно универсальной для аналитического моделирования не только боевых действий вертолетов, но и многих других боевых операций авиации, сводящихся к не-марковским моделям массового обслуживания.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М. «Советское радио», 1972, – 552 с.
2. Медынский М.М. Методы теории массового обслуживания в задачах оценки эффективности оснащения ЛА: Учебное пособие.- М.: 1987, -50 с.

Сведения об авторе

Медынский Михаил Михайлович, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, ГСП-3, 125993;

тел.: +7-916-617-05-91, e-mail: medmm1950@gmail.com