УДК 519.642.7

# СТРОГОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО АДАМАРУ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ АЭРОДИНАМИКИ, ДЛЯ ДРОБНЫХ СТЕПЕНЕЙ ОСОБЕННОСТИ

В.Ю. СМИРНОВ

*Изучаются несобственные интегралы по Адамару, встречающиеся в математических моделях аэродинамики и других задачах математической физики. Рассматривается случай сильной особенности на конце отрезка интегрирования. Исследуются дробные степени особенности. Доказывается теорема существования несобственного интеграла по Адамару в рассматриваемом случае. Дается строгое определение интеграла в смысле конечного значения по Адамару для дробных степеней особенности. Для интеграла по Адамару приводится явное выражение, не содержащее несобственных интегралов, которое удобно применять в математических моделях.*

В задачах математической физики, например, в математических моделях, применяемых в аэродинамике, часто встречаются уравнения, содержащие несобственные интегралы [1 - 3]. В статье [4] был рассмотрен случай, когда точка, в которой подынтегральная функция имела сильную особенность, лежала внутри отрезка интегрирования. Однако в некоторых задачах численной аэродинамики, например, при моделировании кромок и отсеков, возникает необходимость вычисления несобственных интегралов с сильной особенностью на конце отрезка интегрирования. Интерес представляет также случай дробных степеней особенностей.

Рассмотрим случай, когда особая точка с дробной степенью особенности является граничной точкой интервала интегрирования, а именно

$$\int_L \frac{\nu(x)}{(x-a)^p}\,dx\,, \tag{1}$$

где $L=[a, b]/[a, a+\varepsilon)$, $p\in R$, $p\geq 1$.

Пусть функция $\nu(x)$ имеет $[p]+1$ производную в некоторой окрестности точки a. Тогда в этой окрестности она представима в виде

$$\nu(x)=\sum_{i=0}^{[p]}\frac{1}{i!}\nu^{(i)}(a)(x-a)^i+o((x-a)^{[p]})\,. \tag{2}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\varepsilon)=\int_{a+\varepsilon}^{a+r}\frac{\nu(x)}{(x-a)^{[p]}}\,dx\,, \tag{3}$$

где r – радиус окрестности, в которой функция $\nu(x)$ представима в виде (2). С учетом разложения (2) интеграл (3) будет равен

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{[p]} \frac{1}{i!(p-i-1)} \nu^{(i)}(a) \frac{1}{(x-a)^{p-i-1}} \Bigg|_{a+\varepsilon}^{a+r} + \int_{a+\varepsilon}^{a+r} g(x)dx.$$

Здесь $g(x) = O((x-a)^{\alpha})$, где $\alpha>0$.

Следовательно, функция $g(x)$ не имеет особенности при $x\to a$. Таким образом, существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[ I(\varepsilon) - \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{1}{i!(p-i-1)} \nu^{(i)}(a) \frac{1}{\varepsilon^{p-i-1}} \right].$$

Если $\nu(x)$ интегрируема на отрезке [a+r, b], то существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[ \int_L \frac{\nu(x)}{(x-a)^p}dx - \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{1}{i!(p-i-1)} \nu^{(i)}(a) \frac{1}{\varepsilon^{p-i-1}} \right].$$

Этот предел называется интегралом в смысле конечного значения по Адамару от подынтегральной функции и обозначается

$$*\int_a^b \frac{\nu(x)}{(x-a)^p}dx.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема**. Пусть функция $\nu(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка [p]+1 и интегрируема по Риману на отрезке [a, b]. Тогда

$$*\int_a^b \frac{\nu(x)}{(x-a)^p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[ \int_L \frac{\nu(x)}{(x-a)^p}dx - \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{1}{i!(p-i-1)} \nu^{(i)}(a) \frac{1}{\varepsilon^{p-i-1}} \right]. \tag{4}$$

Доказанная теорема существования позволяет считать выражение (4) определением интеграла в смысле конечного значения по Адамару от подынтегральной функции в случае дробных степеней особенностей когда особая точка является граничной точкой интервала интегрирования.

Сформулированная в статье [4] теорема существования, а также интегрирование по частям, являющееся следствием из этой теоремы, в данном случае не применимы. Поэтому возникает вопрос о вычислении данного интеграла.

Нетрудно видеть, что интеграл

$$I = \int_a^b \frac{\nu(x) - \nu(a) - \ldots - \dfrac{\nu^{([p]-1)}(a)}{([p]-1)!}(x-a)^{[p]-1}}{(x-a)^p} dx$$

существует по Риману.

Таким образом, имеем

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\nu(x)}{(x-a)^p} dx - \int_{a+\varepsilon}^{b} \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(x-a)^{p-i}} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\nu(x)}{(x-a)^p} dx + \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(p-i-1)(x-a)^{p-i-1}} \Bigg|_{a+\varepsilon}^{b} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(p-i-1)(b-a)^{p-i-1}} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\nu(x)}{(x-a)^p} - \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(p-i-1)\varepsilon^{p-i-1}} \right) =$$

$$= *\int_a^b \frac{\nu(x)}{(x-a)^p} dx + \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(p-i-1)(b-a)^{p-i}}.$$

Следовательно, интеграл в смысле конечного значения по Адамару от подынтегральной функции в случае дробных степеней особенностей, когда особая точка является граничной точкой интервала интегрирования, можно представить в явном виде

$$*\int_a^b \frac{\nu(x)}{(x-a)^p} dx = \int_a^b \frac{\nu(x) - \nu(a) - \ldots - \dfrac{\nu^{([p]-1)}(a)}{([p]-1)!}(x-a)^{[p]-1}}{(x-a)^p} dx - \sum_{i=0}^{[p]-1} \frac{\nu^{(i)}(a)}{i!(p-i-1)(b-a)^{p-i-1}}. \quad (5)$$

Таким образом, рассматриваемый несобственный интеграл по Адамару (1) можно понимать в смысле данного выше определения (4), так как для него доказана теорема существования. Приведенное выражение для интеграла по Адамару (5) не содержит несобственных интегралов и позволяет решать задачи математического моделирования аэродинамической интерференции обычными методами численного интегрирования.

Полученные выше результаты носят универсальный характер, так как могут найти применение не только в аэродинамике, но и в других областях науки, где встречаются сингулярные интегралы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.

2. Мусхелишвили Н.Н. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.

3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.

4. Смирнов В.Ю. Строгое определение несобственных интегралов по Адамару, встречающихся в математических моделях аэродинамики, для целых степеней особенности. Статья настоящего журнала.

---

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*Смирнов Владимир Юрьевич, заведующий кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н., доцент.*