

УДК 629.08.125

## **Интегрированное управление тягой двигателя и рулем воздушного судна при его автоматическом причаливании**

**Лебедев Г.Н. \*, Ву Суан Хыонг \*\*, Ву Суан Дык \*\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, А-80, ГСП-3, 125993*

*\*e-mail: kaf301@mail.ru*

*\*\*e-mail: vухuanhuong1984@gmail.com*

*\*\*\*e-mail: ducmoscow@gmail.com*

### **Аннотация**

Решается задача интегрированного управления тягой двигателя и рулем воздушного судна при его автоматическом причаливании. В качестве сигнала тревоги о некоординированности действия используется полученная с помощью динамического программирования функция риска.

**Ключевые слова:** воздушное судно, дирижабль, тяга, руль, терминальная точка, оптимальное управление, линейный и релейный регулятор, причаливание

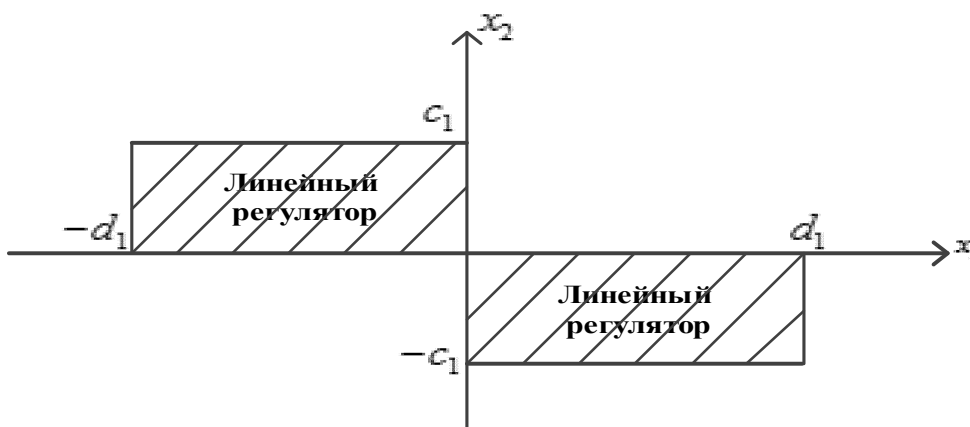
### **Введение**

Среди задач терминального управления подвижными объектами особое место представляют процессы достижения заданной точки одним или двумя объектами с конечной нулевой относительной скоростью сближения. К ним относятся процессы стыковки космических аппаратов, дозаправки самолетов топливом в воздухе,

причаливания воздушных судов, в частности дирижаблей. Управлению этими процессами посвящена данная работа.

Однако для одновременного сведения к нулю координат объекта относительно заданной точки в трехмерном пространстве важно согласовывать управление движением в каждом канале системы управления. При ручном управлении причаливанием воздушного судна возникает ряд ошибок в регулировании, возникающих в силу несогласованности действий по управлению тягой двигателя и рулем, когда отклонения в боковом и продольном направлении уменьшаются со временем непропорционально друг другу. Особенно часто это происходит при стремлении осуществить причаливание как можно быстрее.

В данной работе координация движения основана на гипотезе о линейной пропорциональности отклонений по каждому из каналов попутного и бокового движения на примере причаливания дирижабля. Целью данной работы является попытка синтезировать систему автоматического управления (САУ) причаливанием, которая по быстродействию и точности должна превосходить возможности ручного управления. За основу принято допущение, что сочетание быстродействия и точности может быть обеспечено за счет попеременного применения в САУ регуляторов линейного и релейного управления в боковом и продольном каналах, как это показано на рис.1.



*Рис. 1. Области переключения релейного регулятора*

*продольного движения на линейный в фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$*

Согласно принятому в [1, 2] подходу, переключения в каждом канале с одного регулятора на другой осуществляется с помощью логического анализатора, учитывающего знаки отклонений по положению и скорости. Если эти знаки совпадают, то действует релейный регулятор. Если это не так, то на фазовой плоскости есть прямоугольная область, показанная на рис.1, при попадании в которую в работу включается более плавный линейный регулятор. При этом процесс отработки отклонений в канале замедляется, но зато в завершение обеспечивается максимальная точность.

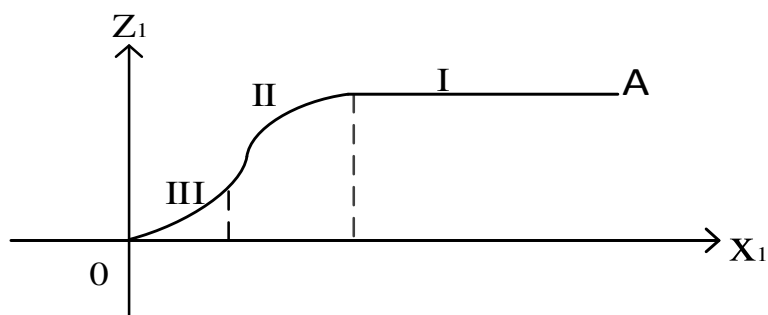
Теперь предстоит согласовать длительности работы линейных регуляторов в обоих каналах друг с другом, автоматически меняя в случае необходимости площади прямоугольников – в одного канале площадь увеличивать, а в другом – уменьшать, если он «отстает» от первого.

Сигналом перестроения должна являться функция риска, она вычисляется в виде правой части уравнения Беллмана при использовании в данной работе метода динамического программирования при следующей постановке задачи.

## Постановка задачи интегрированного управления причаливанием

Дано:

1. Управление воздушного судна осуществляется по двум каналам, продольному за счет изменения тяги двигателя и изменения скорости попутного движения, и боковому путем изменения положения руля, чтобы обеспечить движение воздушного судна по траектории, примерный вид которой показан на рис.2.



*Рис. 2. Примерный вид траектории причаливания, на которой*

*участок I – исходное движение из заданной точки A с максимальной скоростью;*

*участок II – сближение с терминальной точкой с максимальным*

*быстродействием; участок III – медленное приближение к заданной терминальной*

*точке  $x_1 = z_1 = 0$*

2. Продольное движение воздушного судна описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + w_1 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_2 x_3 + u_1 \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1$  – координата продольного пути;  $x_2$  – скорость продольного движения;  $w_1$  – продольное возмущение;  $x_3$  – ускорение, возникающее под действием управления  $u_1$  тягой двигателя;  $a_1, a_2$  – заданные динамические коэффициенты.

Управление  $u_1$  тягой двигателя осуществляется с помощью двух регуляторов – релейного и линейного. Первый регулятор используется при значительных отклонениях по  $x_1$ , второй – вблизи терминальной точки. Управление  $u_1$  тягой двигателя на участке I таково, что скорость  $x_2$  в установившемся режиме достигает своего максимального значения  $V_{\max}$ , и, согласно уравнениям (1), это управление при  $\dot{x}_3 = \dot{x}_2 = 0$  равно:

$$u_{1\max} = a_2 a_3 V_{\max}$$

На участке II управление также релейное, и поэтому максимальное значение  $u_1 = \delta_1$ , где  $\delta_1 < u_{1\max}$  – заданная величина.

На участке III управление воздушного судна желательно иметь таковым, чтобы обеспечить равнозамедленное движение:

$$x_2 \approx V_{\max} - a_0 t$$

где  $a_0$  – некоторое заданное значение, определяющее темп торможения. При этом очевидно, что релейное управление целесообразно для отработки значительных отклонений от заданной терминальной точки, т.е. при большом расстоянии  $x_1$  от точки А.

Однако по мере сближения необходимо применить более осторожное линейное управление при попадании в особую область, учитывающую еще и

скорость сближения и показанную на рис. 1 в виде прямоугольника со сторонами  $c_1$  и  $d_1$ . Процесс переключения с релейного управления на линейное и наоборот можно пояснить с помощью графика на рис. 3.



*Рис. 3. График переходного процесса изменения ошибки приближения к точке A при продольном движении*

На изображенном рисунке показанная пунктиром полоса в интервале  $[-d_1, +d_1]$  соответствует малым отклонениям по положению, а внутри этой полосы – заштрихованные участки, когда отклонения по положению и по скорости имеют одинаковый знак, и поэтому представляют наибольшую опасность.

В связи с этим на указанных участках предлагается использовать релейное управления вместо линейного и лишь на незаштрихованных участках – линейное управление, чему соответствуют следующие области переключения, показанные на рис. 1 в фазовой плоскости  $[x_1, x_2]$ .

3. Заданы упрощенные уравнения бокового движения воздушного судна:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + w_2 \\ \dot{z}_2 = -a_3 z_2 + u_2 \end{cases} \quad (2)$$

где  $z_1$  – координата бокового смещения;  $z_2$  – скорость бокового движения;  $w_2$  – боковое возмущение;  $u_2$  – сигнал для управления боковым движением;  $a_3$  – заданный динамический коэффициент.

Следует отметить, что упрощенная модель движения используется с целью достижения описанных ниже результатов синтеза координированного управления в квадратурах.

4. При управлении боковым движением также используются два регулятора отклонения руля – линейный и релейный, причем линейный регулятор включается в работу только тогда, когда знаки отклонений по положению  $z_1$  и по скорости  $z_2$  не совпадают и при этом вектор состояния  $[z_1, z_2]$  оказывается внутри прямоугольника со сторонами аналогично рис.1 для продольного движения.

5. Качество координации управления оценивается следующим образом:

Считается, что текущие координаты  $x_1$  и  $z_1$  должны находиться в определенной пропорциональности при идеальном движении по прямой

$$x_1 = Kz_1 \quad (3)$$

т.е. с уменьшением дистанции  $x_1$  пропорционально должно снижаться значение  $z_1$ .

Если это не происходит, то площади прямоугольников со сторонами  $c_1, d_1$  и  $c_2, d_2$  должны меняться так, что одна область увеличивается (и тем самым снижается темп движения), а другая – уменьшается (и поэтому осуществляется большее время релейного управления), что должно привести к восстановлению баланса. Изменения этих площадей эквивалентно перестройке передаточных чисел комплексированных

регуляторов в двух каналах по соответствующим сигналам линейных координат  $x_1$  и  $z_1$ .

6. Для проведения синтеза оптимального управления координированного движения предложен критерий, содержащий терминальную и интегральную части при заданном общем времени управления  $T$ :

$$J = \int_0^T \left[ \frac{r_0}{2} (u_1^2 + u_2^2) + n_0 x_1 x_3 z_1 + r_1 x_1^2 + r_2 z_1^2 - 2\sqrt{r_1 r_2} x_1 z_1 \right] dt + \frac{r_3}{2} [x_1^2(T) + x_2^2(T) + z_1^2(T) + z_2^2(T)] \rightarrow \min \quad (4)$$

где  $r_0 = 1$  – коэффициент штрафа за отклонение рулевых органов;  $r_1$  – коэффициент штрафа за отклонение в попутном движении;  $r_2$  – коэффициент штрафа за боковое отклонение от заданной линии пути;  $r_3$  – коэффициент штрафа за отклонение от траектории вблизи терминальной точки в фиксированный момент времени,  $n_0$  – штраф за совпадение по знакам координат.

При этих условиях необходимо синтезировать законы управления  $u_1$  и  $u_2$  с учетом взаимовлияния бокового и продольного движения при учете единого критерия (4).

### **Формулировка задачи оптимального управления с помощью динамического программирования**

Поскольку формально критерий (4) задан и относится в теории управления к задаче Майера, а объект задан с помощью непрерывных дифференциальных уравнений (1) и (2) в форме Коши, решение этой задачи можно найти с помощью



динамического программирования [4], если свести терминальные члены к интегральному виду следующим путем:

$$\frac{r_3}{2} [x_1^2(T) + x_2^2(T) + z_1^2(T) + z_2^2(T)] = r_3 \int_0^T (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2) dt$$

Тогда уравнение Беллмана в частных производных можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \min_{u_1, u_2} \left[ 0.5(u_1^2 + u_2^2) + r_1 x_1^2 + r_2 z_1^2 - 2\sqrt{r_1 r_2} x_1 z_1 + n_0 x_1 x_3 z_1 + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_1} + r_3 z_1 \right) \dot{z}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_2} + r_3 z_2 \right) \dot{z}_2 + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1} + r_3 x_1 \right) \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_2} + r_3 x_2 \right) \dot{x}_2 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_3} \dot{x}_3 \right] = \\ &= \min_{u_1, u_2} \left[ 0.5(u_1^2 + u_2^2) + r_1 x_1^2 + r_2 z_1^2 - 2\sqrt{r_1 r_2} x_1 z_1 + n_0 x_1 x_3 z_1 + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_1} + r_3 z_1 \right) z_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z_2} + r_3 z_2 \right) (-a_3 z_2 + u_2) + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1} + r_3 x_1 \right) x_2 + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_2} + r_3 x_2 \right) (x_3 - a_1 x_2) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_3} (-a_2 x_3 + u_1) \right] = \\ &= \min F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{u}) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathcal{E}$  - искомая функция Беллмана,  $F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$  - минимизируемая функция текущего риска.

Для решения уравнения Беллмана (5) можно было бы воспользоваться методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [2], требующим представления функции Беллмана  $\mathcal{E}$  в виде степенного полинома второго порядка. Однако, в данной задаче такого представления недостаточно, и был взят полином третьей степени, имеющий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \beta_1 z_1 + 0.5 \gamma_1 z_1^2 + \beta_2 z_2 + 0.5 \gamma_2 z_2^2 + \beta_3 x_1 + 0.5 \gamma_3 x_1^2 + \beta_4 x_2 + 0.5 \gamma_4 x_2^2 + \\ &\quad + \beta_5 x_3 + 0.5 \gamma_5 x_3^2 + \psi_{12} z_1 z_2 + \psi_{13} z_1 x_1 + \psi_{14} z_1 x_2 + \psi_{15} z_1 x_3 + \psi_{23} z_2 x_1 + \\ &\quad + \psi_{24} z_2 x_2 + \psi_{25} z_2 x_3 + \psi_{34} x_1 x_2 + \psi_{35} x_1 x_3 + \psi_{45} x_2 x_3 - \lambda x_1 z_1 z_2 - \xi x_1 x_3 z_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты функции Беллмана  $\psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{15}, \psi_{23}, \psi_{24}, \psi_{25}$ , относящиеся к произведениям координат  $z_i$  и  $x_k$  разных каналов управления, учитывают их взаимосвязь и исключают возможность раздельного синтеза законов оптимального управления в каждом канале. Коэффициенты  $\lambda, \xi$  делают возможным, как показано ниже, модернизировать структуру известных регуляторов с неизменяемыми передаточными числами.

Далее, получив из формулы (6) конкретные значения для  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z_1}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial z_2}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2},$

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3}$  и подставив их в уравнение Беллмана (5), можно составить систему дифференциальных уравнений, соответствующих членам при одинаковых степенях вектора состояния воздушного судна.

Перед этим нужно предварительно получить формулы для сигналов  $u_1$  и  $u_2$  оптимального управления, пользуясь тем, что функция риска  $F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{u})$  является квадратичной функцией от  $u_1$  и  $u_2$ . Используя условие экстремума  $\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial u_2} = 0$ ,

можно найти:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= - [\beta_5 + \psi_{35}x_1 + \psi_{45}x_2 + \gamma_5x_3 + \psi_{15}z_1 + \psi_{25}z_2 - \xi z_1x_1] \\
 &= - [\beta_5 + (\psi_{35} - \xi z_1) x_1 + \psi_{45}x_2 + \gamma_5x_3 + \psi_{15}z_1 + \psi_{25}z_2] \\
 u_2 &= - [\beta_2 + \psi_{12}z_1 + (\gamma_2 + r_3) z_2 + \psi_{23}x_1 + \psi_{24}x_2 + \psi_{25}x_3 - \lambda z_1x_1] \\
 &= - [\beta_2 + (\psi_{12} - \lambda x_1) z_1 + (\gamma_2 + r_3) z_2 + \psi_{23}x_1 + \psi_{24}x_2 + \psi_{25}x_3] \quad (7)
 \end{aligned}$$

Формулы (7) указывают, что кроме основных, выделенных более жирно, координат, интегрированное управление в «своем» канале зависит от состояния координат движения в соседнем канале. Кроме того, передаточные числа

$$k_{11} = \psi_{35} - \xi z_1; k_{12} = \psi_{12} - \lambda x_1$$

изменяются под влиянием «успешности» или «неуспешности» обнуления координат  $x_1$  и  $z_1$  в соседних каналах, и таким образом сигналы управления  $u_1$  и  $u_2$  соответствуют квазилинейным регуляторам. Для принятой структуры комплексирования линейного и релейного управления это означает соответственное уменьшение одного и увеличение другого прямоугольников на рис. 1.

Затем для установившегося состояния при  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$  можно вместо дифференциальных уравнений получить систему нелинейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов  $\beta_i, \gamma_i, \psi_{ik}$  функции Беллмана, состоящую из следующих 22 уравнений по соответствующим степеням координат  $z_i$  и  $x_k$ , указанных слева.

1	$x_1$	$w_2 \psi_{13} + w_1 (\gamma_3 + r_3) - \beta_2 \psi_{23} - \beta_5 \psi_{35} = 0$
2	$x_2$	$w_1 \psi_{34} + \psi_{14} w_2 + \beta_3 - a_1 \beta_4 - \beta_2 \psi_{24} - \beta_5 \psi_{45} = 0$
3	$x_3$	$\beta_4 - a_2 \beta_5 - \beta_5 \gamma_5 - \beta_2 \psi_{25} + \psi_{35} w_1 + w_2 \psi_{15} = 0$
4	$z_1$	$-\beta_2 \psi_{12} - \beta_5 \psi_{15} + \psi_{13} w_1 = 0$
5	$z_2$	$w_2 \psi_{12} + \beta_1 - \beta_5 \psi_{25} - a_3 \beta_2 + \psi_{23} w_1 = 0$
6	$x_1^2$	$r_1 - 0.5 \psi_{23}^2 - 0.5 \psi_{35}^2 = 0$
7	$x_2^2$	$\psi_{34} - a_1 (\gamma_4 + r_3) - 0.5 \psi_{24}^2 - 0.5 \psi_{45}^2 = 0$

8	$x_3^2$	$\Psi_{45} - a_2 \gamma_5 - 0.5\gamma_5^2 - 0.5\Psi_{25}^2 = 0$
9	$z_1^2$	$r_2 - 0.5 \Psi_{12}^2 - 0.5 \Psi_{15}^2 = 0$
10	$z_2^2$	$\Psi_{12} - a_3 (\gamma_2 + r_3) - 0.5 (\gamma_2 + r_3)^2 - 0.5 \Psi_{25}^2 = 0$
11	$x_1 x_2$	$(\gamma_3 + r_3) - a_1 \Psi_{34} - \Psi_{23} \Psi_{24} - \Psi_{35} \Psi_{45} = 0$
12	$x_1 x_3$	$\Psi_{34} - a_2 \Psi_{35} - \Psi_{23} \Psi_{25} - \Psi_{35} \gamma_5 - w_2 \xi = 0$
13	$x_1 z_1$	$-2\sqrt{r_1 r_2} - \Psi_{12} \Psi_{23} - \Psi_{15} \Psi_{35} + \beta_2 \lambda + \beta_5 \xi = 0$
14	$x_1 z_2$	$\Psi_{13} - a_3 \Psi_{23} - (\gamma_2 + r_3) \Psi_{23} - \Psi_{25} \Psi_{35} - w_2 \lambda = 0$
15	$x_2 x_3$	$\Psi_{35} + (\gamma_4 + r_3) - a_1 \Psi_{45} - a_2 \Psi_{45} - \gamma_5 \Psi_{45} - \Psi_{24} \Psi_{25} = 0$
16	$x_2 z_1$	$\Psi_{13} - a_1 \Psi_{14} - \Psi_{12} \Psi_{24} - \Psi_{15} \Psi_{45} = 0$
17	$x_2 z_2$	$\Psi_{14} - a_1 \Psi_{24} + \Psi_{23} - a_3 \Psi_{24} - (\gamma_2 + r_3) \Psi_{24} - \Psi_{25} \Psi_{45} = 0$
18	$x_3 z_1$	$\Psi_{14} - a_2 \Psi_{15} - w_1 \xi - \gamma_5 \Psi_{15} - \Psi_{12} \Psi_{25} = 0$
19	$x_3 z_2$	$\Psi_{24} + \Psi_{15} - a_2 \Psi_{25} - a_3 \Psi_{25} - \gamma_5 \Psi_{25} - (\gamma_2 + r_3) \Psi_{25} = 0$
20	$z_1 z_2$	$(\gamma_1 + r_3) - a_3 \Psi_{12} - (\gamma_2 + r_3) \Psi_{12} - \Psi_{15} \Psi_{25} - w_1 \lambda = 0$
21	$x_1 x_3 z_1$	$n_0 + a_2 \xi + \gamma_5 \xi + \lambda \Psi_{25} = 0$
22	$x_1 z_1 z_2$	$\lambda a_3 + \lambda (\gamma_2 + r_3) + \xi \Psi_{25} = 0$

(8)

Естественно, что строгое аналитическое решение этой системы невозможно. Поэтому необходимо пойти на некоторые упрощения, и, главное – свести решение задачи синтеза к использованию их минимального числа путем соответствующих подстановок.

### Сокращение числа алгебраических уравнений

## при нахождении коэффициентов функции Беллмана

Проведем поэтапное сокращение числа уравнений и искомым коэффициентов.

На первом этапе из уравнений 12 и 15 системы (8) найдем  $\gamma_4 + r_3$  и  $\psi_{34}$ , из уравнения 8 – коэффициент  $\gamma_5$ , а из уравнения 19 – коэффициент  $\psi_{24}$ .

$$\begin{aligned}\gamma_4 + r_3 &= (a_1 + a_2 + \gamma_5)\psi_{45} + \psi_{24}\psi_{25} - \psi_{35}; \\ \psi_{34} &= (a_2 + \gamma_5)\psi_{35} + \psi_{23}\psi_{25} + w_2\xi; \\ \gamma_5 &= -a_2 - \sqrt{a_2^2 + 2\psi_{45} - \psi_{25}^2}; \\ \psi_{24} &= (a_2 + a_3 + \gamma_5 + \gamma_2 + r_3)\psi_{25} - \psi_{15}.\end{aligned}\tag{9}$$

Подставив эти коэффициенты в уравнение 7, получим:

$$\begin{aligned}(a_2 + \gamma_5)\psi_{35} + \psi_{23}\psi_{25} - a_1[(a_1 + a_2 + \gamma_5)\psi_{45} + \\ + (a_2 + a_3 + \gamma_5 + \gamma_2 + r_3)\psi_{25} - \psi_{15}]\psi_{25} - \psi_{35}] - \\ - 0.5[(a_2 + a_3 + \gamma_5 + \gamma_2 + r_3)\psi_{25} - \psi_{15}]^2 - 0.5\psi_{45}^2 = 0\end{aligned}\tag{10}$$

На втором этапе найдем  $\psi_{13}$  из уравнения 14,  $\psi_{14}$  – из уравнения 18, коэффициент  $\gamma_2 + r_3$  – из уравнения 10, коэффициент  $\psi_{23}$  – из уравнения 13.

$$\begin{aligned}\psi_{13} &= (a_3 + \gamma_2 + r_3)\psi_{23} + \psi_{25}\psi_{35} + w_2\lambda; \\ \psi_{14} &= (a_2 + \gamma_5)\psi_{15} + \psi_{12}\psi_{25} + w_1\xi; \\ \gamma_2 + r_3 &= -a_3 + \sqrt{a_3^2 + 2\psi_{12} - \psi_{25}^2}; \\ \psi_{23} &= \frac{-2\sqrt{r_1 r_2} - \psi_{15}\psi_{35}}{\psi_{12}}.\end{aligned}\tag{11}$$

Дополнительно рассмотрев уравнения 6 и 9, можно получить:

$$\psi_{15} = -\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\psi_{35}; \quad \psi_{12} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}(1 - \psi_{35}^2); \quad \psi_{23} = -\sqrt{1 - \psi_{35}^2}.\tag{12}$$

Подставив найденные значения в уравнения 17 и 18 системы (8), можно получить еще два уравнения в компактной форме, если обозначить  $m = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$  и

принять  $w_1 = w_2 = 0$

$$\begin{aligned} & -m(a_2 + \gamma_5)\psi_{35} + m\psi_{25}\sqrt{1-\psi_{35}^2} - \sqrt{1-\psi_{35}^2} - \psi_{25}\psi_{45} \\ & -(a_1 + a_3 + \gamma_2 + r_3)[(a_2 + a_3 + \gamma_5 + \gamma_2 + r_3)\psi_{25} + m\psi_{35}] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\psi_{25}\psi_{35}(1 - m\sqrt{a_3^2 + 2\psi_{45}}) + \sqrt{2(1 - \frac{\psi_{35}^2}{2r_1})}[\psi_{45} - a_2\sqrt{a_3^2 + 2\psi_{45}} - \frac{1}{m}(a_1 + \sqrt{2m\psi_{35} - \psi_{25}^2})] = 0 \quad (14)$$

Уравнения (10), (13), (14) содержат только три искомого коэффициента  $\psi_{25}, \psi_{35}, \psi_{45}$ , которые могут быть найдены только при определенных упрощениях.

### Получение коэффициентов функции Беллмана и передаточных чисел квазилинейных регуляторов в квадратурах

Чтобы получить аналитическое, хотя и приближенное решение задачи синтеза, примем следующие допущения.

В уравнении (10) пренебрежем членами  $\psi_{25}^2$  и  $\psi_{45}^2$ , считая их малыми (что подтверждено рядом расчетов). Тогда получим первую оценку коэффициента  $\psi_{45}$ :

$$\psi_{45} = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - a_3) \quad (15)$$

Осталось найти коэффициенты  $\psi_{25}$  и  $\psi_{35}$  из уравнений 12 и 13. Для этого из уравнения (10) выразим коэффициент  $\psi_{35}$ :

$$\psi_{35} = -a_2\psi_{45} + \frac{\psi_{45}^2 + \psi_{35}^2(a_3^2 + 2\psi_{45})}{2(\sqrt{a_3^2 + 2\psi_{45}} - a_2)}$$

а из уравнения (12) – сомножитель  $\sqrt{2m\psi_{35} - \psi_{25}^2}$ :

$$\sqrt{2m\psi_{35} - \psi_{25}^2} = \frac{\sqrt{2r_1} \left(1 - m\sqrt{a_3^2 + 2\psi_{45}}\right) \left(1 - \frac{\psi_{35}^2}{2r_1}\right)}{\psi_{35}} - \psi_{45} + (a_1 + a_2)\sqrt{a_3^2 + 2\psi_{45}}$$

Подставим найденные выражения в уравнение (13), и получим вторую приближенную оценку для коэффициента  $\psi_{25}$ :

$$\psi_{25} = \sqrt{2r_1} m \left[ m\sqrt{a_3^2 + 2(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - a_3)} \right], \quad (16)$$

где  $m = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$ .

Наконец, третья оценка  $\psi_{35}$  оказывается равной:

$$\psi_{35} = 2r_1 \sqrt{a_3^2 + 2(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - a_3)}. \quad (17)$$

Зная в квадратурах значения  $\psi_{25}$ ,  $\psi_{35}$ ,  $\psi_{45}$ , нетрудно вычислить по формулам (9), (11), (12) все остальные коэффициенты функции Беллмана, кроме значений  $\beta_i$ . Так как по определению терминальной задачи коэффициенты  $\beta_2 = \beta_5 = 0$ , остальные коэффициенты легко найти из уравнений 2, 3, 5 системы (8):

$$\beta_1 = -w_2\psi_{12} - w_1\psi_{23}; \beta_3 = -w_2\psi_{14} - w_1\psi_{34}; \beta_4 = -w_2\psi_{35}. \quad (18)$$

Особые коэффициенты  $\lambda$  и  $\xi$  находятся из уравнений 21 и 22 системы (8):

$$\xi = -\frac{n_0 + \lambda\psi_{25}}{a_2 + \gamma_5}; \quad \lambda = -\frac{\xi\psi_{25}}{a_3 + \gamma_2 + r_3}.$$

В частности, при  $a_1 = 0.04$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = 0.2$ ,  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 4.5$ ,  $n_0 = 1$ , можно получить:

$$\psi_{25} = -0.3159; \quad \psi_{35} = 0.0348; \quad \psi_{45} = 0.0185.$$

И, следовательно, определить остальные коэффициенты, от которых зависят передаточные числа квазилинейных регуляторов, согласно формулам (7):

$$\psi_{12} = 2.99982; \gamma_2 + r_3 = 2.2365; \psi_{23} = -0.9994; \psi_{24} = -0.8020; \psi_{25} = -0.3159;$$

$$\psi_{15} = -0.1045; \gamma_5 = -0.0675; \xi = -2.5539; \lambda = -0.3312.$$

Видно, что знаки  $\lambda$  и  $\xi$  таковы, что увеличение передаточного числа  $k_{11}$  в одном регуляторе сопровождается уменьшением  $k_{12}$  в другом, и наоборот. Поэтому полученный способ балансировки работы каналов теперь нужно перевести в формат изменения площадей использования линейных регуляторов, показанных на рис.1.

Дальнейшее уточнение процедуры интегрированного управления воздушного судна может быть произведено экспериментально с помощью моделирования на ЭВМ.

### **Заключение**

1. Предложена структура системы автоматического причаливания повышенного быстродействия, имеющая логическую часть, содержащую три анализатора, и исполнительную часть, содержащую два линейных и два релейных регулятора.

Для реализации логической части используются основные операции:

1-операция: координация управления осуществляется путем увеличения области использования линейного регулятора в одном канале при одновременном увеличении в другом канале, и наоборот, с учетом величины и знаков несоответствия бокового отклонения от попутного отклонения.



2-операция: переключение линейного и релейного регуляторов осуществляется с помощью двух логических анализаторов, следящих за совпадением по знаку отклонений по положению и скорости.

2. Исполнительная часть содержит два линейных и два релейных регулятора, из которых первая пара используется для осторожного и мягкого причаливания, а вторая пара – для повышения быстродействия отработки значительных отклонений.

3. Полученное техническое решение применимо для управления как дирижаблями, так и другими крупнотоннажными воздушными или речными судами, для которых важно сократить время приближения к заданной терминальной точке.

Работа выполнена при материальной поддержке гранта РФФИ № 12-08-00028а

### **Библиографический список**

1. Лукомский Ю.А., Корчанов В.М. Управление морскими подвижными объектами. С.-П.: Элмор. 1996. 318 с.

2. Гришанин Ю.С., Лебедев Г.Н., Липатов А.В., Степаньянц Г.А. Теория оптимальных систем. М.: МАИ. 1999. 317 с.

3. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука. 1989. 62с.

4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ. 1961. 400 с.

5. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука. 1981. 255 с.

6. Лебедев Г.Н., Ву С.Х. Задача синтеза алгоритма максимального по быстродействию автоматического причаливания речного судна в заданной точке. // Электронный журнал «Труды МАИ», 2013, № 63.