

## **Варианты модели Навье-Стокса-Фурье для сверх- и гиперзвуковых течений**

**Буданова С.Ю.\*, Красавин Е.Э.\*\*, Никитченко Ю.А.\*\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия*

*\*e-mail: [svet-bu2014@yandex.ru](mailto:svet-bu2014@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [krasavin.ieghor@mail.ru](mailto:krasavin.ieghor@mail.ru)*

*\*\*\*e-mail: [nikitchenko7@yandex.ru](mailto:nikitchenko7@yandex.ru)*

*Статья поступила 23.05.2020*

### **Аннотация**

Физико-математическая модель Навье-Стокса-Фурье рассматривается как первое приближение системы моментных уравнений третьего порядка. Анализируются моментные уравнения неравновесных напряжений и тепловых потоков. Рассматриваются несколько модификаций коэффициента сдвиговой вязкости. На примере задачи о профиле ударной волны показано, что модифицированный коэффициент вязкости позволяет получать размер сильно возмущенной области близкий к реальному даже в гиперзвуковых течениях.

**Ключевые слова:** модель Навье-Стокса-Фурье, коэффициент вязкости, гиперзвуковое течение, численные тесты.

### **Введение**

Физико-математическая модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ) может быть рассмотрена как строгое первое приближение системы моментных уравнений

третьего порядка [1, 2]. Термин "первое приближение" подразумевает, что в уравнениях неравновесных величин (неравновесных напряжений, тепловых потоков, разности поступательной и вращательной температур) учитываются члены только первого порядка малости.

Хотя модель НСФ теоретически обоснована только при указанных выше условиях, она имеет "неожиданно широкую" область применения [3, 4]. В частности, ударные волны эта модель описывает лучше 13-моментной модели Грэда [5, 6]. В ряде случаев дает результаты не хуже моделей более высоких приближений [7].

Для модели НСФ сформулированы граничные условия на твердой поверхности, удовлетворительно зарекомендовавшие себя даже в области слабо разреженных течений [8, 9]. Приближенные аналитические зависимости для основных газодинамических величин, полученные из системы уравнений НСФ успешно используются для описания гиперзвуковых течений в разреженных средах [10, 11].

Основным недостатком модели НСФ является несоответствие наблюдаемым размерам возмущенной области в сильно неравновесном течении. При торможении гиперзвукового потока возмущенная область сильно сжата (вязкость модели недостаточна), при истечении струи в вакуум – расширена (вязкость избыточна).

В настоящей работе анализируются моментные уравнения неравновесных напряжений и тепловых потоков. Рассматривается аппроксимация коэффициента сдвиговой вязкости. Проводятся численные тесты на примере задачи о профиле ударной волны, в которых решения модели НСФ с различными аппроксимациями

коэффициента вязкости сопоставляются с решениями модельного кинетического уравнения (МКУ) [12].

Рассматриваются однокомпонентные одно- и многоатомные газы. Число

Прандтля принято  $Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$ .

### 1. Анализ моментных уравнений напряжений и теплового потока

Рассмотрим систему моментных уравнений 3-го порядка [1, 6] в незамкнутом виде [13]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{R_r} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h\tau_p} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}^m) + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{P_{ij}^m}{\tau_p} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{(4)}) = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + R_r P_{i\alpha} \frac{\partial T_r}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{r(4)}) = -\frac{\omega_i}{\tau_p} \quad (1.7)$$

В этих выражениях и ниже повторяющиеся греческие подстрочные индексы в одночленах подразумевают свертку тензора, т.е. суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} \equiv P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Основные символы:

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$\rho, u_i, T$  – плотность, скорость и термодинамическая температура газа;

$T_t, T_r, \theta = T_t - T_r$  – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул и разность температур;

$P_{ij}, T_{ij} = P_{ij}/(\rho R)$  – полное и удельное напряжения;

$p^m = P_{\alpha\alpha}/3 = \rho RT_t, p = \rho RT$  – механическое и термодинамическое давления;

$p^m_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p^m, p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p$  – механическое и термодинамическое неравновесные напряжения;

$\Phi_{ijk}, \Phi_i \equiv \Phi_{i\alpha\alpha}$  – момент 3-го порядка и вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии поступательного движения молекул;

$\omega_i$  – вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии вращения молекул;

$q_i = \Phi_i + \omega_i$  – полный тепловой поток;

$c_v, \gamma, R$  – изохорная теплоемкость, показатель адиабаты и удельная газовая постоянная;

$R_r = c_v - \frac{3}{2}R = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)}R$  – теплоемкость внутренних степеней свободы

молекул;

$\tau_p,$  – времена релаксации напряжений;

$h$  – отношение времен поступательно-вращательной и поступательно-поступательной релаксаций;

$m_{ijkl}^{(4)}, m_{ijkl}^{r(4)}$  – моменты 4-го порядка [6, 13], принимаемые равными нулю в замкнутой системе 3-го порядка.

Поясним соотношения температур и неравновесных напряжений. Энергия теплового движения молекул может быть разложена на поступательную и вращательную составляющие следующим образом:

$$c_v \rho T = \frac{3}{2} R \rho T_t + \left( c_v - \frac{3}{2} R \right) \rho T_r, \quad (1.8)$$

$$T = \frac{3}{2} (\gamma - 1) T_t + \frac{5 - 3\gamma}{2} T_r. \quad (1.9)$$

Связь поступательной и термодинамической температур посредством неравновесной величины –  $\theta = T_t - T_r$ :

$$T_t = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \theta \quad (1.10)$$

Тензор напряжений может быть разложен на сферическую и девиаторную (неравновесную) части двумя способами:

$$P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m = p_{ij} + \delta_{ij} p \quad (1.11)$$

С учетом определений механического и термодинамического давлений из (1.10) и (1.11) следует связь между термодинамическим и механическим неравновесными напряжениями:

$$p_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5 - 3\gamma}{2} \rho R \theta \quad (1.12)$$

Система уравнений НСФ содержит уравнения (1.1) ... (1.3). Совокупности уравнений (1.4), (1.5) и (1.6), (1.7) заменяются законом трения Стокса и законом Фурье соответственно.

С целью сокращения выкладок и без ущерба для существа вопроса, рассмотрим одномерное стационарное течение вдоль декартовой оси  $OX$ . По аналогии с [6] запишем уравнение термодинамических неравновесных напряжений. Используя (1.12), почленно сложим (1.4) и (1.5). Перепишем полученное уравнение относительно напряжения, стоящего в релаксационном члене. Для  $p_{xx}$ , наибольшего из неравновесных напряжений в случае торможения потока, получим:

$$p_{xx} = -\tau_p \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) + \left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varphi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \end{aligned} \right] \quad (1.13)$$

В ряде работ, например [1, 7, 8, 14], показано, что в близких к равновесию условиях время релаксации  $\tau_p$  связано с коэффициентом вязкости  $\mu$  следующим образом:

$$\tau_p = \mu / p \quad (1.14)$$

Рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (1.13):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) \quad (1.15)$$

$$-\left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \mu \frac{p_{xx}}{p} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.16)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varphi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \quad (1.17)$$

Вычислить напряжение непосредственно по (1.13), очевидно, невозможно. Воспользуемся решением МКУ работы [12], полученного для течения в плоской ударной волне азота при числе Маха  $M_\infty = 5$ . Свободные параметры МКУ подбирались по экспериментальным данным [15, 16, 17] и соответствовали [12].

Значения слагаемых (1.13) взяты из кинетического решения и представлены на рис. 1. Координатная ось  $OX$  проградуирована в длинах свободного пробега молекул в невозмущенном потоке. Значение  $x=0$  соответствует локальному числу Маха  $M=1$ . На этом же рисунке (кривая 4) показан профиль  $p_{xx}$ , полученный из решения модели НСФ с объемной вязкостью. Этот вариант модели будет описан ниже. Все данные, представленные на рисунке отнесены к локальному термодинамическому давлению.

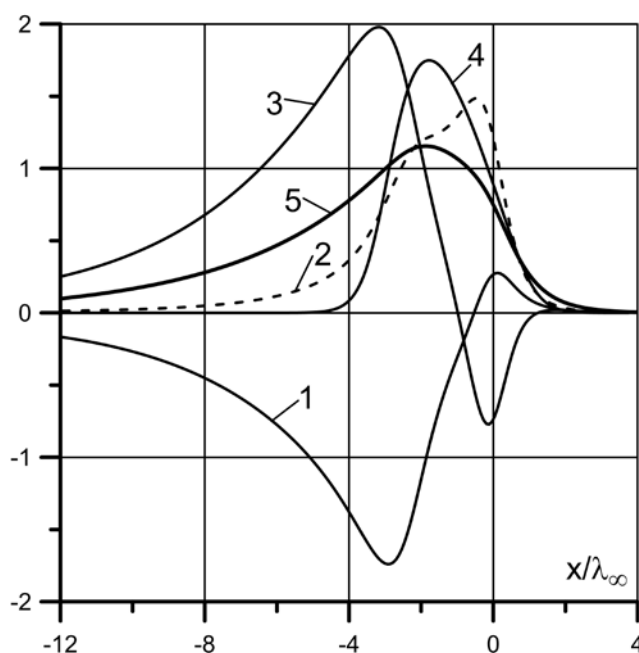


Рис. 1. Профили неравновесного напряжения и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – (1.15), 2 – (1.16), 3 – (1.17), 4 –  $p_{xx}$  модели НСФ, 5 –  $p_{xx}$  решение МКУ.

Профиль неравновесного напряжения МКУ, близкий к реальному, существенно шире профиля НСФ. Возмущения в потоке газа начинают формироваться значительно раньше, чем это предписывает модель НСФ.

За наработку напряжения в (1.13) отвечают члены (1.16) и (1.17). Член (1.15) только "констатирует" изменение потока напряжения. Большой вклад в наработку напряжения создает градиент тепловых потоков (1.17). Градиент скорости (1.16) влияет меньше и позже. Используемый в модели НСФ закон трения Стокса, представляет собой первое приближение (1.16). Градиент тепловых потоков (1.17) в этой модели не используется.

Специально отметим, что преобладание градиента тепловых потоков имеет место только в сильно неравновесных течениях, в которых неравновесные величины становятся соизмеримы по порядку величины с основными газодинамическими переменными. На рис. 1 неравновесное напряжение превышает давление: по МКУ – примерно в 1.2 раза, по НСФ – примерно в 1.7 раза. По мере уменьшения неравновесности течения тепловые потоки стремятся к нулю, а вместе с ними и их градиент (1.17). В отличие от (1.17), член (1.16) содержит нормальное напряжение  $P_{xx}$ , которое в условиях равновесия сравнивается с давлением. Порядок малости (1.17) определяется коэффициентом вязкости.

Аналогично выражению (1.13) может быть записано выражение для теплового потока. Используя соотношение  $q_i = \varphi_i + \omega_i$ , почленно сложим свертку уравнения (1.6), домноженного на  $3/2$ , и уравнения (1.7). Перепишем полученное уравнение относительно теплового потока, стоящего в релаксационном члене. Для рассматриваемого одномерного течения:



$$q_x = -\tau_p \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) + \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \left( \frac{3}{4} m_{xx\alpha\alpha}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Как и в предыдущем случае рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (1.18):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) \quad (1.19)$$

$$-\frac{\mu}{p} \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.20)$$

$$-\frac{\mu}{p} RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) \quad (1.21)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \left( \frac{3}{4} m_{xx\alpha\alpha}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \quad (1.22)$$

Значения слагаемых (1.18) взяты из кинетического решения и представлены на рис. 2.

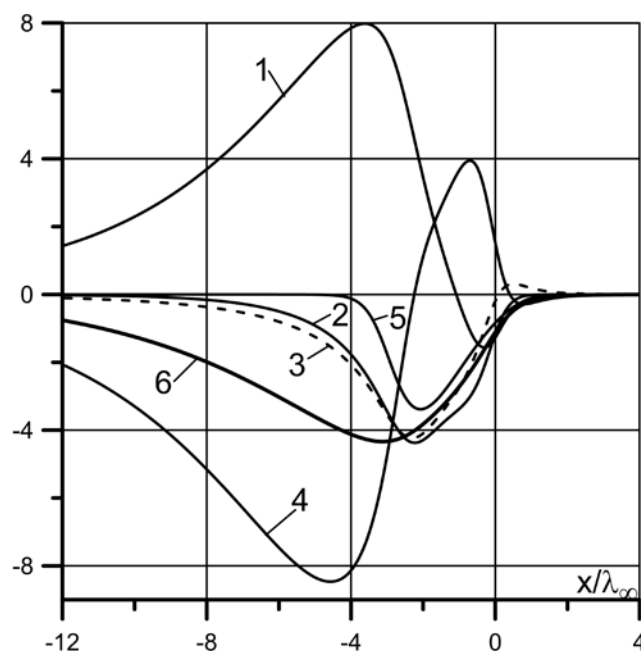


Рис. 2. Профили теплового потока и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – (1.19), 2 – (1.20), 3 – (1.21), 4 – (1.22), 5 –  $q_x$  модели НСФ, 6 –  $q_x$  решение МКУ.

В решении МКУ (кривая 6) тепловой поток формируется в более широкой области, чем в решении НСФ (кривая 5). Основной вклад в тепловой поток вносит градиент моментов четвертого порядка, определение которых возможно только в системе моментных уравнений 4-го порядка [13]. Напомним, что система НСФ – система неполного второго порядка, и в ней используется только член (1.21) (кривая 3) в первом приближении, т.е. закон Фурье.

В слабо неравновесных течениях этот член является определяющим, при этом  $P_{xx}$  вырождается в давление  $p$ , а  $T_{xx}$  – в температуру  $T$ , что и соответствует закону Фурье. Порядок малости теплового потока, также, как и неравновесного напряжения, определяется коэффициентом вязкости. Остальные члены (1.18), включая (1.22), при переходе газа в равновесное состояние стремятся к нулю.

Проведенный анализ в основном объясняет существенные погрешности расчетов сильно неравновесных течений, возникающие при использовании модели НСФ в ее классическом виде.

## **2. Аппроксимации неравновесных напряжений, теплового потока и коэффициента вязкости**

В плотных и умеренно разреженных газах время релаксации напряжений  $\tau_p$  и отношение  $\mu/p$ , являются малыми величинами по сравнению с основными газодинамическими параметрами. Из (1.13) и (1.18) следует, что неравновесные напряжения и тепловой поток имеют порядок малости  $\tau_p$  или  $\mu$ . Нетрудно убедиться,

что в правых частях (1.13) и (1.18) содержится только по одному члену, имеющему первый порядок малости в (1.13) это (1.16), в (1.18) – (1.21).

Оставим в правой части (1.13) только старший член (1.16). В такой аппроксимации неравновесное напряжение примет вид:

$$p_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu \frac{p_{xx}}{p} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.1)$$

или с учетом (1.11)

$$p_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu \left(1 + \frac{p_{xx}}{p}\right) \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.2)$$

В этом уравнении содержится член второго порядка малости:  $\mu p_{xx}/p$ . В первом приближении, т.е. в приближении до членов только первого порядка малости, уравнение неравновесных напряжений примет вид

$$p_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.3)$$

В таком виде неравновесные напряжения представлены в модели НСФ с учетом объемной вязкости. Во многих приложениях используется упрощенная форма (2.3), в которой объемной вязкостью пренебрегают:

$$p_{xx} = -\frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим аппроксимации теплового потока. Оставим в правой части (1.18) только старший член (1.21):

$$q_x = -\frac{\mu}{p} R p_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) \quad (2.5)$$

В первом приближении:

$$q_x = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.6)$$

Здесь учтено, что  $T_t$  и  $T_{xx}$  отличаются от  $T$  на величины первого порядка малости:  $\theta$  и  $p_{xx}/p$  соответственно.

Коэффициент сдвиговой вязкости определяется эмпирически в слабо неравновесных условиях. В совершенных газах он зависит только от температуры. Поскольку в слабо неравновесных условиях отличие термодинамической температуры от поступательной мало, принимается  $\mu = \mu(T)$ .

Из молекулярно-кинетической теории известно, что перенос импульса, учитываемый коэффициентом вязкости, зависит от интенсивности теплового поступательного движения молекул. Следовательно, коэффициент вязкости является функцией поступательной температуры, т.е.  $\mu = \mu(T_t)$ .

Связь поступательной температуры с термодинамической определена уравнением (1.10). Первое приближение разности температур  $\theta$ , входящей в (1.10) несложно получить из уравнения (1.4), удержав в нем члены только первого порядка малости:

$$\theta = -\frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.7)$$

Первое приближение поступательной температуры с учетом (1.10) и (2.7):

$$T_t = T - \frac{5 - 3\gamma}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.8)$$

Представленные аппроксимации неравновесного напряжения и коэффициента сдвиговой вязкости позволяют построить различные варианты модели НСФ.

### 3. Варианты модели Навье-Стокса-Фурье

Уравнения системы НСФ представляют собой совокупность законов сохранения массы, импульса и энергии. Для рассмотренного выше одномерного течения эта система может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) T_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Варианты замыкания этой системы с учетом объемной вязкости и без нее рассматривались в [1]. В дальнейшем они потребуются для сравнения результатов двухатомных газов. Приведем некоторые из них.

Вариант В1:

$$P_{xx} = -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} R \mu \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \mu = \mu(T^s)$$

Вариант В2:

$$P_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5 - 3\gamma}{3} h\right) \mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} R \mu \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \mu = \mu(T^s)$$

Вариант В3:

$$P_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5 - 3\gamma}{3} h\right) \mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} R \mu \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \mu = \mu(T_t^s)$$

При описании течений одноатомных газов все три варианта идентичны, ввиду отсутствия у таких газов объемной вязкости. Рассмотрим дополнительный вариант,

который уже не будет строгим первым приближением системы моментных уравнений (1.13) и (1.18).

Вариант В4:

$$p_{xx} = -\left(\frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3}h\right)\mu \frac{p_{xx}}{p^m} \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad q_x = -\frac{9\gamma-5}{4(\gamma-1)}R\mu \frac{p_{xx}}{p^m} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \mu = \mu(T_t^s)$$

Особенностью этого варианта является то, что в выражения неравновесного напряжения и теплового потока введен внепорядковый член  $p_{xx}/p$ . Введение такого члена в множитель производной не меняет характеристического уравнения системы (3.1) и, следовательно, полученная модель имеет те же характеристические свойства, что и модель НСФ.

При этом внепорядковые члены не включены в производную температуры в уравнении теплового потока. Это привело бы к увеличению порядка дифференциального уравнения энергии, и полученная модель течения не соответствовала бы модели НСФ. Такого рода уравнения характерны для моделей второго приближения – приближения Барнетта [7].

В отличие от первых трех, четвертый вариант влияет на вязкие свойства модели НСФ как в случае многоатомных, так и одноатомных газов.

#### 4. Численные тесты

Численное тестирование разрабатываемой модели проведено на примере решения классической задачи о структуре ударной волны. Рассматривалось стационарное течение вдоль декартовой координатной оси  $Ox$ . На верхней границе вычислительной области выставлялись условия невозмущенного потока, на нижней границе – условия Ренкина-Гюгонио.

Использовалась расчетная сетка с постоянным шагом, равным  $0.1\lambda_\infty$ . Средняя длина свободного пробега молекул в невозмущенном потоке определялась как

$$\lambda_\infty = \frac{16\mu_\infty}{5\rho_\infty} \sqrt{2\pi RT_\infty} \quad (4.1)$$

Решение системы (3.1) строилось на трех узлах расчетной сетки и сводилось к прогонке трехдиагональной матрицы.

Значение параметра  $s$  в аппроксимациях коэффициента вязкости подобрано опытным путем и составляет  $s=0.8$  для одноатомных газов и  $s=0.75$  для двухатомных. Параметр  $h$  аппроксимирован зависимостью [18]:

$$h = Z \frac{(7 - 2s)(5 - 2s)}{30} \quad (4.2)$$

где  $Z$  – среднее число межмолекулярных столкновений, приходящихся на одно неупругое столкновение. В проведенных тестах принималось  $Z=5$ .

На рис. 3 и рис .4 представлены профили плотности, скорости и температуры в ударной волне двухатомного газа. В качестве эталонного использовалось решение МКУ работы [12].

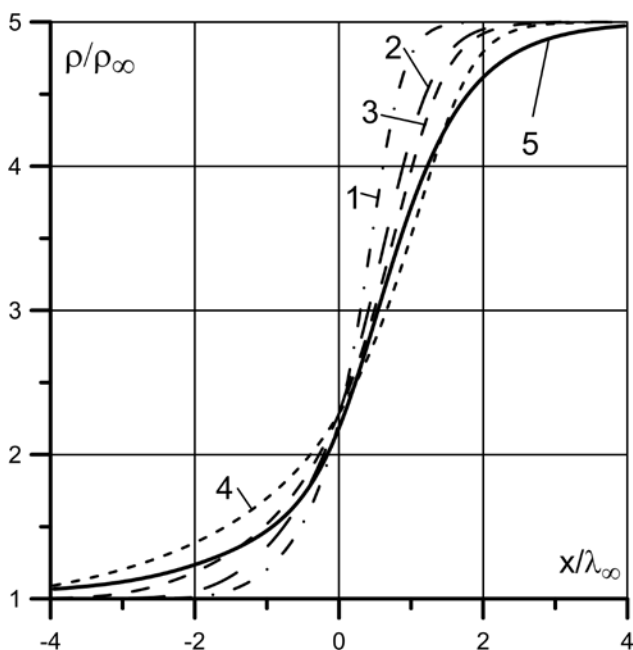


Рис. 3. Профиль плотности в ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – вариант В1, 2 – вариант В2, 3 – вариант В3, 4 – вариант В4, 5 – решение МКУ.

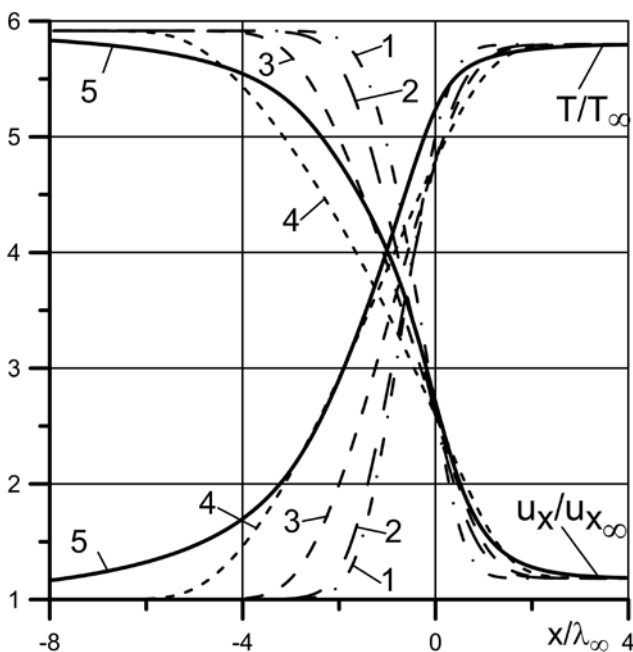


Рис. 4. Профили скорости и температуры в ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – вариант В1, 2 – вариант В2, 3 – вариант В3, 4 – вариант В4, 5 – решение МКУ.



Традиционный вариант модели НСФ – В1 дает наиболее узкий профиль. Небольшое расширение возмущенной области возникает при учете объемной вязкости (В2). Несколько большее расширение дает аппроксимация  $\mu = \mu(T_t^s)$  (В3). Наиболее широкие профили, близкие к кинетическим, обеспечивает вариант с внепорядковыми членами (В4). Однако, формы этих профилей значительно отличаются от кинетических.

На рис. 5 и рис. 6 представлены профили плотности, скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Как и в случае многоатомного газа, вариант В4 имеет существенные преимущества перед остальными вариантами.

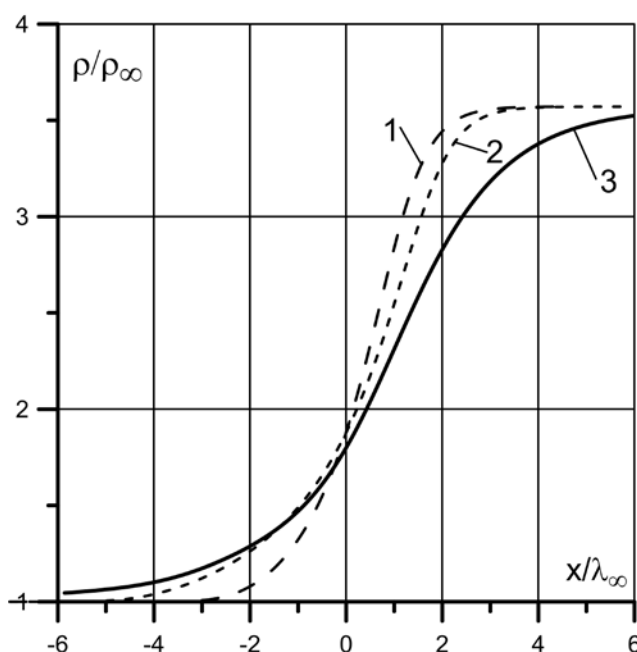


Рис. 5. Профиль плотности в ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – варианты В1, В2, В3, 2 – вариант В4, 3 – решение МКУ.

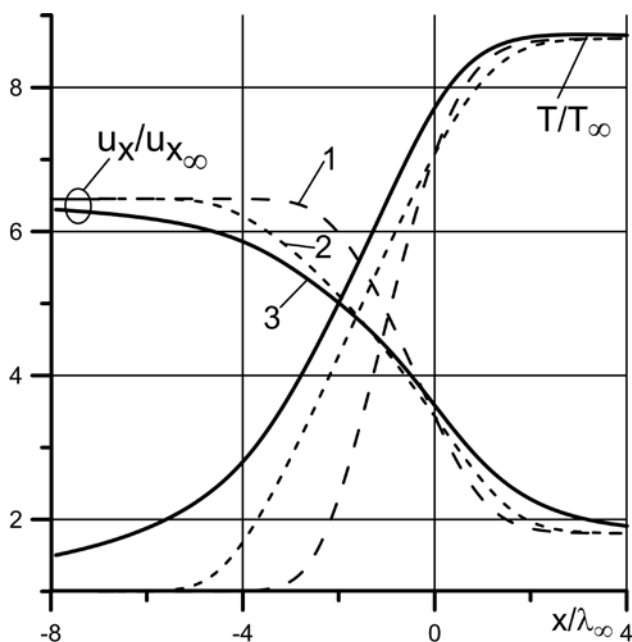


Рис. 6. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – варианты В1, В2, В3, 2 – вариант В4, 3 – решение МКУ.

### Заключение

Проведенные исследования показывают, что относительно простые преобразования членов, замыкающих систему уравнений сохранения, позволяют существенно улучшить вязкие свойства модели НСФ при расчете гиперзвуковых течений. Подчеркнем, что эти преобразования не затрагивают характеристических свойств модели, в частности, необходимое количество граничных условий остается прежним.

Из рассмотренных вариантов предпочтительным является вариант с внепорядковыми членами. Область возмущения течения, даваемая этим вариантом, достаточно широка, хотя распределение газодинамических параметров в этой области значительно отличается реальных.

В отношении распределения параметров, выразившегося в данной работе в виде профилей ударной волны, отметим следующее. Как показано в первом разделе,

в сильно неравновесных течениях неравновесные напряжения и тепловые потоки в значительной степени определяются процессами, не учитываемыми моделью первого приближения – моделью НСФ. По этой причине не стоит ожидать от модели НСФ корректного описания распределений газодинамических параметров в сильно возмущенной области.

Геометрические размеры сильно неравновесных областей, как правило, невелики. В той связи представляют, как теоретический, так и практический интерес комбинированные и гибридные модели, использующие кинетические уравнения в сильно неравновесной области и модель НСФ в остальной области течения, см. например, [19, 20]. Модели этого типа позволяют весьма корректно описывать все поле течения. К их недостаткам следует отнести высокую вычислительную трудоемкость и, следовательно, повышенные требования к вычислительным средствам.

В данной работе преобразования модели НСФ рассматривались в одномерной постановке. В плане рекомендации варианта В4 к дальнейшему практическому применению запишем замыкающие систему (3.1) выражения для трехмерного течения.

$$P_{ij} = -\frac{\mu}{p^m} \left( P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right);$$

$$q_i = -\frac{9\gamma-5}{4(\gamma-1)} R\mu \frac{P_{i\alpha}}{p^m} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha}; \quad \mu = \mu(T_t^s); \quad p^m = P_{\alpha\alpha}/3;$$

$$P_{ij} = \delta_{ij} \rho RT + p_{ij}; \quad T_t = T - \frac{5-3\gamma}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}.$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2020-0013.*

### **Библиографический список**

1. Никитченко Ю.А. О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 128 – 138.
2. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. - М.: Наука, 1989. – 336 с.
3. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=83571>
4. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>
5. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов // Механика. 1952. № 5. С. 62 – 96.
6. Никитченко Ю.А. Модели неравновесных течений. - М.: Изд-во МАИ, 2013. 160 с.
7. Бузыкин О.Г., Галкин В.С. О модификациях газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 185 - 199.

8. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. - 440 с.
9. Гусев В.Н., Егоров И.В., Ерофеев А.И., Провоторов В.П., Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1999. № 2. С. 128 – 137.
10. Брыкина И.Г. Приближенные аналитические решения для тепловых потоков при трехмерном гиперзвуковом обтекании затупленных тел // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2017. № 4. С. 125 – 139.
11. Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Титарев В.А., Утюжников С.В. Сравнительный анализ подходов к исследованию гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном режиме // Прикладная математика и механика. 2013. № 77(1). С. 15 - 26.
12. Никитченко Ю.А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 11. С. 117 – 129.
13. Никитченко Ю.А. Снижение коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений за счет ее расширения // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. XLVI. № 1. С. 72 – 84.
14. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. – М.: ВЦ АН СССР, 1975. – 207 с.
15. Holtz T., Muntz E.P. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7 // Physics of Fluids, September 1983, no. 26 (9), pp. 2425 – 2436.

16. Alsmeyer H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // Journal of Fluid Mechanics, 1976, vol. 74, no. 3, pp. 497 – 513. DOI: [10.1017/S0022112076001912](https://doi.org/10.1017/S0022112076001912)
17. Robben F., Talbot L. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave // Physics of Fluids, 1966, vol. 9, no. 4, pp. 653 – 662. DOI: [10.1063/1.1761730](https://doi.org/10.1063/1.1761730)
18. Bird G.A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows, Oxford, Clarendon Press, 1994, 458 p.
19. Degond P., Jin S., Mieussens L. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations // Journal of Computational Physics, 2005, no. 209 (2), pp 665 – 694. DOI: [10.1016/j.jcp.2005.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.025)
20. Rovenskaya O.I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic–continuum approach versus Navier–Stokes // Microfluidics and Nanofluidics, 2016, no. 20 (5). DOI: [10.1007/s10404-016-1746-x](https://doi.org/10.1007/s10404-016-1746-x)

# Navier-Stokes-Fourier model options for supersonic and hypersonic flows

**Budanova S.Yu. <sup>\*</sup>, Krasavin E.E. <sup>\*\*</sup>, Nikitchenko Yu.A. <sup>\*\*\*</sup>**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,*

*4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russia*

*\*e-mail: [svet-bu2014@yandex.ru](mailto:svet-bu2014@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [krasavin.ieghor@mail.ru](mailto:krasavin.ieghor@mail.ru)*

*\*\*\*e-mail: [nikitchenko7@yandex.ru](mailto:nikitchenko7@yandex.ru)*

## Abstract

The flows of the high-degree non-equilibrium are of considerable interest at present stage of the engineering development. Such flows are being realized, for example, while the hypersonic flying vehicles flow-around, reentry spacecraft, in vacuum installations and other technical devices.

The basic physico-mathematical model of a gas medium flow is the Navier-Stokes-Fourier (NSF) model. This model is theory-based for weakly non-equilibrium flows, but it can be applied for the flows of a high-degree non-equilibrium. In such flows, the NSF model coarsens the solution. For example, when computing shock waves, the disturbance area is narrowed. The model is short of viscosity. The opposite sign effects are being observed while the gas intensive expansion.

The presented work analyses the processes of the non-equilibrium stresses and heat flows forming at the shock wave front, employing the model kinetic equation (MKE). The hypersonic flow at the Mach number of  $M_\infty = 5$  is under consideration.

The article shows that the heat flows gradients, absent in the NSE, contribute mainly to the non-equilibrium stresses forming process. The basic factor of the heat flows development are the fourth-order gradients, which are missed in the model as well.

Several options for improving the viscous properties of the NSF model are under consideration. It is known that in the case of multi-atomic gases a significant effect can be achieved by accounting for the voluminous viscosity in the equations of non-equilibrium stresses. Besides, the voluminous viscosity coefficient allows computing the temperature of the translational degrees of freedom molecules in the first approximation. Defining the shear viscosity coefficient by this temperature, will improve the viscous properties of the model.

The Stokes's friction law can be obtained by using the moment stress equation as its strict first approximation. If one accounts for the terms of the second order of vanishing in the equation terms, containing gradients and divergence of the flow velocity, , then the shear viscosity coefficient will take a tensor form. The NSF model with this shear viscosity coefficient describes better the processes of viscosity and heat conductivity.

The article demonstrates that the improved option of the NSF model allows obtaining rather wide area of disturbances on the example density, velocity and temperature profiles in the flat shock wave. The profiles shapes differ slightly from real ones. This, probably, is a consequence of the artificial approach to the model improvement.

**Keywords:** Navier-Stokes-Fourier model, viscosity factor, hypersonic flow, numerical tests.

## References

1. Nikitchenko Yu.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2018, no. 2, pp. 128 – 138.



2. Zhdanov V.M., Alievskii M.Ya. *Protsessy perenosa i relaksatsii v molekulyarnykh gazakh* (Transfer and relaxation processes in molecular gases), Moscow, Nauka, 1989, 336 p.
3. Kuznetsov M.M., Kuleshova Yu.D., Reshetnikova Yu.G., Smotrova L.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=83571>
4. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091>
5. Gred G. *Mekhanika*, 1952, no. 5, pp. 62 – 96.
6. Nikitchenko Yu.A. *Modeli neravnovesnykh techenii* (Non-equilibrium flow models), Moscow, Izd-vo MAI, 2013, 160 p.
7. Buzykin O.G., Galkin V.S. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2001, no. 3, pp. 185 - 199.
8. Kogan M.N. *Dinamika razrezhennogo gaza* (Rarefied gas dynamics), Moscow, Nauka, 1967, 440 p.
9. Gusev V.N., Egorov I.V., Erofeev A.I., *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1999, no. 2, pp. 128 – 137.
10. Brykina I.G. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2017, no. 4, pp. 125 – 139.
11. Brykina I.G., Rogov B.V., Tirskii G.A., Titarev V.A., Utyuzhnikov S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2013, no. 77(1), pp. 15 - 26.
12. Nikitchenko Yu.A. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2017, vol. 57, no. 11, pp. 117 – 129.
13. Nikitchenko Yu.A. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2015, vol. XLVI, no. 1, 72 – 84.

14. Shakhov E.M. *Metod issledovaniya dvizhenii razrezhennogo gaza* (Method of rarefied gas motions studying), Moscow, VTs AN SSSR, 1975, 207 p.
15. Holtz T., Muntz E.P. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7, *Physics of Fluids*, September 1983, no. 26 (9), pp. 2425 – 2436.
16. Alsmeyer H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam, *Journal of Fluid Mechanics*, 1976, vol. 74, no. 3, pp. 497 – 513. DOI: [10.1017/S0022112076001912](https://doi.org/10.1017/S0022112076001912)
17. Robben F., Talbot L. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave, *Physics of Fluids*, 1966, vol. 9, no. 4, pp. 653 – 662. DOI: [10.1063/1.1761730](https://doi.org/10.1063/1.1761730)
18. Bird G.A. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*, Oxford, Clarendon Press, 1994, 458 p.
19. Degond P., Jin S., Mieussens L. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations, *Journal of Computational Physics*, 2005, no. 209 (2), pp 665 – 694. DOI: [10.1016/j.jcp.2005.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.03.025)
20. Rovenskaya O.I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic–continuum approach versus Navier–Stokes, *Microfluidics and Nanofluidics*, 2016, no. 20 (5). DOI: [10.1007/s10404-016-1746-x](https://doi.org/10.1007/s10404-016-1746-x)