

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН).

На правах рукописи



РУССКИХ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА УПРУГИХ
ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ И УПРАВЛЯЕМЫХ
КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2021 г.

Научный консультант: Доктор технических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки РФ
Шклярчук Федор Николаевич

Официальные оппоненты: **Бужинский Валерий Алексеевич**
доктор физико-математических наук, старший научный
сотрудник, АО «ЦНИИмаш», начальник отдела «Динамика РКТ»

Паймушин Виталий Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор, академик АН РТ,
ФГБОУ ВО «КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева»,
профессор кафедры «Прочность конструкций»

Пшеничнов Сергей Геннадиевич
доктор физико-математических наук, старший научный
сотрудник, НИИ Механики ФГБОУ ВО «МГУ
им. М.В. Ломоносова», ведущий научный сотрудник
Лаборатории 202 (динамических испытаний)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный
исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится «20» октября 2021 г. в 15:00 на заседании
диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный
институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993,
г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке «Московского
авиационного института (национального исследовательского университета)» (МАИ)
и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=157457

Автореферат разослан: «___» _____ 2021 г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета:**

**Федотенков
Григорий Валерьевич**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Задачи нелинейной механики упругих трансформируемых и управляемых космических систем и конструкций со стержневыми и тросовыми элементами являются теоретически и практически важными на современном этапе развития фундаментальной и прикладной науки и космической техники.

Актуальность темы связана с недостаточной проработанностью некоторых задач механики больших упругих космических конструкций, в частности динамики составных систем с гибкими стержнями и тросовыми элементами, совершающими в общем случае нелинейные движения с большими перемещениями и углами поворота. Из обзора литературы можно сделать вывод о необходимости построения адекватных и уточненных математических моделей для численного решения нелинейных задач динамики больших упругих космических систем. Анализ конструкций современных космических антенн зонтичного типа показал, что в настоящее время существует проблема выведения на орбиту Земли разворачиваемых антенн с диаметром отражающего зеркала более 6 метров с обеспечением необходимой точности формы поверхности. Большой практический интерес представляют задачи пассивного управления линейными и нелинейными механическими системами при конечных передвижениях в целом или их отдельных частей (в случае трансформируемых конструкций) из одного состояния (положения) в другое за заданное время с устранением упругих нестационарных колебаний в конце операции. Имеется необходимость в разработке методов решения этих задач и определении достаточно простых и удобных для практической реализации силовых и кинематических управляющих воздействий. В целом тема исследований, представленных в данной работе, является актуальной.

Целями и задачами диссертационной работы являются:

1. Получение уравнений нелинейной динамики разворачивания плоской стержневой системы, состоящей из произвольного числа упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой и с космическим аппаратом упруговязкими узловыми шарнирами с упорами, а также – уравнений разворачивания системы панелей солнечных батарей.
2. Построение математической модели разворачивания из транспортировочного положения и разработка математической модели и метода решения обратной нелинейной задачи формообразования циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с упругими радиальными стержнями, соединенными по параллелям растяжимыми тросами.
3. Исследование нелинейных нестационарных термоупругих колебаний тонкостенного стержня-удлинителя круглого поперечного сечения, соединенного с подвижным космическим аппаратом и подвергающегося солнечному нагреву с учетом теплоизлучения и влияния изгиба на углы падения солнечных лучей.

4. Исследование динамики упругих составных нелинейных систем с геометрическими связями, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями в подвижных системах координат.

5. Разработка методов решения терминальных задач пассивного силового и кинематического управления упругими линейными системами с постоянными и переменными параметрами, а также нелинейными системами, при конечных передвижениях их в целом или их отдельных частей за определенное время из одного состояния в другое с устранением колебаний в конце операции. Определение удобных для практической реализации финитных управляющих функций, обеспечивающих плавное передвижением управляемой системы.

Научная новизна диссертационной работы заключается в получении следующих основных результатов:

1. Математическая модель разворачивания в подвижной системе координат плоской системы упругих стержней, а также панелей солнечных батарей, соединенных в узлах упруго-вязкими шарнирами с упорами с аналитическими выражениями для всех коэффициентов трансформируемой системы.
2. Новая функциональная схема и метод решения обратной нелинейной задачи формообразования каркаса циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с упругими многозвенными радиальными стержнями, соединенными в узлах по параллелям растяжимыми тросовыми элементами.
3. Решение в уточненной постановке связанных задач нестационарной теплопроводности и термоупругих колебаний тонкостенного стержня-удлинителя в виде круговой цилиндрической оболочки, связанным с подвижным по углу поворота космическим аппаратом, при солнечном нагреве с учетом внешнего и внутреннего теплоизлучения стержня и влияния углов поворота элементов его поверхности на углы падения солнечных лучей.
4. Новые эффективные методы решения линейных и нелинейных задач пассивного управления упругими системами при их конечных передвижениях за определенное время из одного состояния в другое с устранением нестационарных колебаний в момент окончания операции.

Теоретическая и практическая ценность и значимость работы:

1. Полученные общие уравнения нелинейной динамики больших упругих космических систем в центральном гравитационном поле могут служить теоретической основой для решения различных прикладных задач космической техники в процессах сборки и выполнения функциональных и технологических операций на орбите.
2. Предложенная оригинальная функциональная схема и расчетная модель динамического раскрытия многозвенной системы радиальных стержней и последующего квазистатического изгиба с учетом реакций соединяющих их по

параллелям растяжимых тросов будут способствовать разработке больших космических антенн зонтичного типа.

3. На основе полученных нелинейных уравнений связанной задачи упругих колебаний и нестационарной теплопроводности тонкостенного стержня-удлинителя, присоединенного к подвижному космическому аппарату, могут быть решены практически важные задачи колебаний спутника на орбите при выходе его из тени, а также выполнены оценки динамической неустойчивости типа «раскачивания».

4. Разработанные методы решения терминальных задач управления линейными и нелинейными упругими системами при их конечных передвижениях за определенное время из одного состояния в другое с устранением колебаний в момент окончания операции могут быть использованы в различных технических приложениях (автоматизированные операции сборки, краны, подъемно-транспортные устройства, быстродействующие роботы-манипуляторы, пр.).

Методология и методы исследования:

Уравнения нелинейной динамики, представленные в работе, были получены на основе принципа возможных перемещений (Даламбера-Лагранжа), а также как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. При их выводе использовались метод Ритца и метод конечных элементов. При решении задач устранения колебаний нелинейных систем и систем с переменными коэффициентами для определения управляющих воздействий использовался метод Бубнова-Галеркина во временной области.

Численное интегрирование полученных систем нелинейных дифференциальных уравнений по времени осуществлялось на основе методов Адамса, Рунге-Кутты, обратного дифференцирования (BDF), а также – комбинированного метода решения дифференциально-алгебраических систем уравнений. Нелинейные алгебраические уравнения решались по методу последовательных приближений.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Нелинейные уравнения и результаты расчета развертывания в подвижной системе координат многозвенной плоской системы упругих стержней, а также – панелей солнечных батарей, присоединенных к космическому аппарату.

2. Функциональная схема, математическая модель, численные методы решения задач развертывания и формообразования космической зонтичной антенны.

3. Уточненная постановка и численные решения связанной нелинейной задачи нестационарной теплопроводности и термоупругих колебаний при солнечном нагреве тонкостенного стержня-удлинителя, соединенного со свободным по углу поворота космическим аппаратом.

4. Дифференциально-алгебраические уравнения динамики в подвижных координатах составных нелинейных систем с геометрическими связями.

5. Методы и результаты решения задач управления нестационарными колебаниями упругих систем при их конечных передвижениях и устранения колебаний в момент окончания операции.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается:

1. Строгим и корректным использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математическим обоснованием предлагаемых методов и подходов.

2. Сравнениями полученных численных результатов с имеющимися в литературе для частных случаев.

3. Решением тестовых задач для проверки численных алгоритмов решения систем разрешающих уравнений.

4. Исследованием сходимости результатов расчета при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Апробация работы: основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, семинарах и симпозиумах, в том числе:

1. 5-ая (15-17.12.2015 г.), 6-ая (16-18.11.2016 г.), 7-ая (21-23.11.2017 г.), 8-ая (18-19.12.2018 г.), 9-ая (19-21.11.2019 г.) Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН.

2. XXII (15-19.02.2016 г.), XXIII (13-17.02.2017 г.), XXIV (19-23.03.2018 г.), XXV (18-22.03.2019 г.), XXVI (16-20.03.2020 г.), XXVII (17-21.05.2021 г.) Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки.

3. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 17-19.05.2016 г.

4. 15-ая (14-18.11.2016 г.), 16-ая (20-24.11.2017 г.), 17-ая (19-23.11.2018 г.), 19-ая (23-27.11.2020 г.) Международная конференция «Авиация и космонавтика», Москва, МАИ.

5. 1-ая Общероссийская научно-практическая конференция «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России», Москва, МАИ, 12.2018 г.

6. Третья молодежная конференция «Инновационная деятельность в науке и технике. Создание космических аппаратов. Актуальные проблемы и пути их решения», Московская область, Истра, 25.04.2019 г.

Структура и объем диссертации. Результаты исследований изложены на 324 страницах машинописного текста, иллюстрированного 213 рисунками и содержащего 18 таблиц. Диссертация состоит из введения, 6 глав с кратким введением и заключением с выводами по каждой главе, общего заключения, списка публикаций и литературы, состоящего из 205 ссылок.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий обзор литературы, относящейся к теме диссертации. Отмечается, что большой научный вклад в механику упругих и трансформируемых космических систем с частями и элементами, совершающими относительное движение, внесли: Асланов В.С., Белецкий В.В., Борзых С.В., Бужинский В.А., Докучаев Л.В., Дорошин А.В., Закржевский А.Е., Зимин В.Н., Иванов В.А., Климов Д.М., Лиходед А.Н., Лопатин А.В., Паничкин В.И., Тестоедов Н.А., Усюкин В.И., Шмаков В.П., Craig R.R., Meirovich L., Modi V.J., Nurre G.S., Padill С.Е. и др. Вопросы нелинейной механики деформирования и устойчивости упругих систем рассматривались в работах Вольмира А.С., Данилина А.Н., Лурье А.И., Новожилова В.В., Паймушина В.В., Пшеничнова С.Г., Светлицкого В.А. и др. Исследования по пассивному и активному управлению упругими конструкциями выполнены в работах Акуленко Л.Д., Воронова А.А., Ганиева Р.Ф., Гришаниной Т.В., Колесникова К.С., Матюхина В.И., Рабиновича Б.И., Разыграева А.П., Ротенберга Я.Н., Соколова Б.Н., Черноусько Ф.Л., Crawley E.F., Wada В.К. и др.

В первой главе представлены общие нелинейные и линеаризованные уравнения динамики больших упругих космических конструкций в центральном гравитационном поле Земли для перемещений и конечных углов поворота системы как твердого тела и для обобщенных координат, представляющих относительные перемещения при нелинейных упругих деформациях в квадратичном приближении.

Рассматривается упругая система (тело), которая совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые нелинейными колебаниями в связанной с ним подвижной «самолетной» системе координат $Ox_1x_2x_3$, **рис. 1.1.1**.

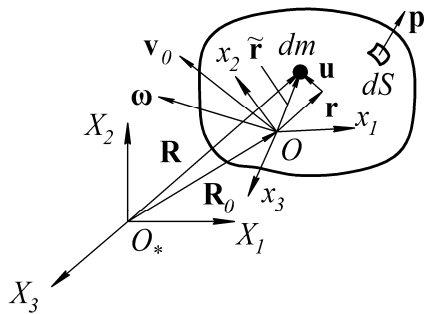


Рис. 1.1.1. Упругое тело и связанная система координат

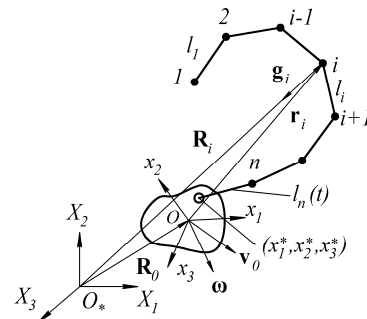


Рис. 1.2.1. Космический аппарат с выпускаемой тросовой системой

Положение рассматриваемой подвижной системы координат относительно инерциальной системы $O_*X_1X_2X_3$ характеризуется радиус-вектором

$\mathbf{R}_0 = [X_{01}(t) X_{02}(t) X_{03}(t)]^T$ и углами поворота $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, представляющими углы крена, рыскания и тангажа, соответственно. Векторы скорости поступательного (в точке O) и вращательного движений системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $O_*X_1X_2X_3$ обозначаются через $\mathbf{v}_0 = [v_{01}(t) v_{02}(t) v_{03}(t)]^T$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t)]^T$, где $v_{0k}(t), \omega_k(t)$ – проекции этих векторов на ось Ox_k .

Радиус-вектор \mathbf{R} и векторы абсолютной скорости \mathbf{v} и абсолютного ускорения \mathbf{a} любой точки движущегося и колеблющегося упругого тела (см. **рис. 1.1.1**):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Lambda^T \tilde{\mathbf{r}}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0;$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}},$$

где $\mathbf{r} = [x_1 x_2 x_3]^T$ – радиус-вектор исходного положения рассматриваемой точки (элемента массы dm); $\mathbf{u} = [u_1 u_2 u_3]^T$ – вектор перемещений тела, обусловленных его колебаниями относительно системы $Ox_1x_2x_3$; \mathbf{a}_0 – ускорение точки O ; Λ – матрица преобразования от системы $O_*X_1X_2X_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$.

Нелинейные деформации (относительные удлинения $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ и углы сдвига $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$) в квадратичном приближении выражаются через проекции перемещения на оси подвижной системы координат $u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)$ на основании нелинейных соотношений:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right], \quad \dots, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \dots,$$

которые справедливы при $\partial u_i / \partial x_1 \ll 1, (\partial u_i / \partial x_2)^2 \ll 1, \dots (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$.

В геометрически нелинейных задачах на основании метода Ритца и метода конечных элементов (МКЭ) перемещения упругого тела в общем случае могут быть представлены в виде разложения:

$$\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\Phi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij},$$

где $q_i(t)$ – обобщенные координаты; $i, j = 1, 2, \dots, n$ при описании движения тела в локально связанной системе координат и $i, j = 0_1, 0_2, \dots, 0_6, 1, 2, \dots, n$ – «плавающей» системе координат; $\boldsymbol{\Phi}_i(x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{\Psi}_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и пр.) с учетом определенных допущений.

Для удобства дальнейших вычислений векторное произведение заменяется матричным $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b}$, где верхним знаком \vee обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонент соответствующего вектора.

Уравнения движения системы для векторов $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}$ и обобщенных координат q_i можно составить на основе принципа возможных перемещений (Д'Аламбера –

Лагранжа): $\delta\Pi = \delta A_p + \delta A_{ин}$, где $\Pi[\mathbf{u}]$ – потенциальная энергия деформации системы; δA_p – вариация работы гравитационных и поверхностных сил, $\delta A_{ин}$ – вариация работы инерционных сил:

$$\delta A_p = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dm + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS, \quad \delta A_{ин} = - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{a} dm.$$

Здесь $\delta \mathbf{u}$ – вариация перемещения любой точки тела с учетом вариаций смещения $\delta \mathbf{u}_0 = \Lambda \delta \mathbf{R}_0$ и малого поворота $\delta \boldsymbol{\theta}$ подвижной системы координат; \mathbf{g} – вектор массовых сил тяготения; \mathbf{p} – вектор поверхностной нагрузки.

Из принципа возможных перемещений следуют уравнения движения:

$$\int_V \mathbf{a} dm = \mathbf{P}, \quad \int_V \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{a} dm = \mathbf{M}, \quad \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{a} dm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_j q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}.$$

В окончательном виде для случая, когда движение тела описывается в локально связанной с ним системе координат:

$$m \mathbf{a}_0 - \tilde{\mathbf{L}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{L}}_0 + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{L}}_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \mathbf{P};$$

$$- \tilde{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{I}}_{00} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{0j} \ddot{q}_j + (\boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{I}}_{00} + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{I}}_{0j} \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \mathbf{M};$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega} \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i;$$

(i = 1, 2, ..., n);

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_p, \quad \mathbf{P}_g = \int_V \mathbf{g} dm, \quad \mathbf{P}_p = \int_S \mathbf{p} dS, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_p, \quad \mathbf{M}_g = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{g} dm;$$

$$\mathbf{M}_p = \int_S \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{p} dS, \quad Q_i = Q_{g,i} + Q_{p,i}, \quad Q_{g,i} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{g} dm, \quad Q_{p,i} = \int_S \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{p} dS.$$

Здесь инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$.

Для решения задачи динамики упругой системы, движущейся под действием заданных внешних нагрузок в гравитационном поле, к уравнениям добавляются кинематические соотношения: $\dot{\mathbf{R}}_0 = \Lambda^T \mathbf{v}_0$, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\omega}$. В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: двенадцать уравнений первого порядка для двенадцати компонент векторных функций \mathbf{R}_0 , $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ и n уравнений для обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n .

На основе этих уравнений в **первой главе** также рассмотрена динамика пространственного и плоского движения космического аппарата с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле Земли (см. **рис. 1.2.1**).

Во второй главе рассмотрена нелинейная динамика в подвижной системе координат плоской стержневой системы, состоящей из произвольного числа упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота. Стержневая система присоединена к недеформируемому космическому аппарату (КА), который совершает поворот относительно своего центра масс и перемещения по горизонтальной и вертикальной оси как свободное твердое тело, **рис. 2.1.1**. Между двумя любыми шарнирами может присутствовать в качестве связи растяжимый трос, длина которого может изменяться по заданному закону.

Погонные массы m_k и изгибные жесткости EI_k стержней считаются постоянными в пределах их длин l_k , $k = 1, 2, \dots, n$. В шарнирных узлах $k = 0, 1, \dots, n$ имеются сосредоточенные массы μ_k и пружины с угловой жесткостью κ_k и вязким демпфированием ν_k . В некоторых узлах система может иметь стационарные или переменные (управляемые) изломы с заданными углами $\theta(t)$.

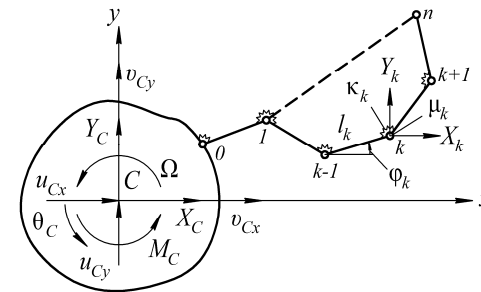


Рис. 2.1.1. Общий вид рассматриваемой системы

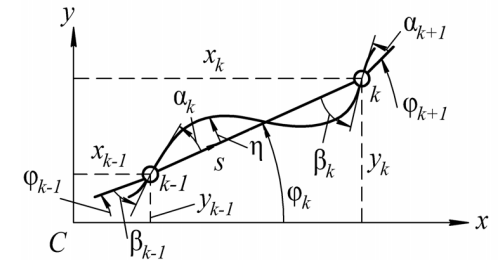


Рис. 2.1.2. Стержневой элемент системы

Движение свободной составной системы (КА плюс стержневая система) описывается в подвижной системе координат S_{xy} , связанной с недеформируемым твердым телом (КА) с началом в его центре масс, имеющем массу M_0 и момент инерции относительно центра тяжести J_0 . Проекция скорости точки C на оси подвижной системы координат обозначаются через $v_{cx}(t)$, $v_{cy}(t)$, а угловая скорость КА – через $\Omega(t)$. Проекция на оси подвижной системы координат перемещений центра масс обозначаются через u_{cx} и u_{cy} , а угол поворота через θ_c . На КА действует момент $M_c(t)$ и силы $X_c(t)$ и $Y_c(t)$, приложенные в его центре масс; в каждом шарнирном узле действуют силы $X_k(t)$ и $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Все силы записываются в проекциях на оси подвижной системы координат S_{xy} .

Перемещения k -го стержня относительно подвижной системы координат обусловлены его поворотом как твердого тела на угол $\varphi_k(t)$ (т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы $k-1$ и k), и изгибом относительно этой прямой. Изгибное (поперечное) перемещение $\eta_k(s,t)$ точки s k -го стержня как элемента считается малым и упругим, **рис. 2.1.2**. Оно задается в виде

$$\eta_k(s,t) = \alpha_k(t)\sigma_k(s) + \beta_k(t)\tau_k(s), \quad \sigma_k(s) = \frac{s}{l_k^2}(l_k - s)^2, \quad \tau_k(s) = -\frac{s^2}{l_k^2}(l_k - s).$$

где $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ – углы между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в k -ом шарнирном узле.

Координаты k -го узла деформированной стержневой системы:

$$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^k l_j \cos \varphi_j, \quad y_k = y_0 + \sum_{j=1}^k l_j \sin \varphi_j,$$

где x_0, y_0 – постоянные координаты узла $k=0$, расположенного на КА. Координаты точки s k -го стержня с учетом его изгиба:

$$x = x_k - (l_k - s) \cos \varphi_k - \eta_k \sin \varphi_k, \quad y = y_k - (l_k - s) \sin \varphi_k + \eta_k \cos \varphi_k.$$

Проекции ускорения в точке s k -го стержня на оси x и y подвижной системы координат:

$$a_x = \dot{v}_{cx} - \Omega v_{cy} - \dot{\Omega}y - \Omega^2x - 2\Omega\dot{y} + \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_{cy} + \Omega v_{cx} + \dot{\Omega}x - \Omega^2y + 2\Omega\dot{x} + \ddot{y}.$$

Потенциальная энергия узловых пружин и изгиба стержней:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k (\Delta\varphi_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k \beta_k), \quad \Delta\varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k) - \theta_k.$$

Вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах:

$$\begin{aligned} \delta A_m = & - \sum_{k=1}^n \left\{ \delta u_{cx} \left[\int_0^{l_k} m_k a_x ds + \mu_k a_{xk} + M_0 (\dot{v}_{cx} - \Omega v_{cy}) \right] + \delta u_{cy} \left[\int_0^{l_k} m_k a_y ds + \mu_k a_{yk} + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_0 (\dot{v}_{cy} + \Omega v_{cx}) \right] + \delta \theta_c \left[\int_0^{l_k} m_k (a_y x - a_x y) ds + \mu_k (a_{yk} x_k - a_{xk} y_k) + J_0 \dot{\Omega} \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^{l_k} m_k [a_x \delta x + a_y \delta y] ds + \mu_k (a_{xk} \delta x_k + a_{yk} \delta y_k) \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения движения составной системы получаются на основе принципа возможных перемещений с учетом выражений для вариации работы демпфирующих моментов в упруговязких шарнирах и вариации работы внешних сил и моментов:

$$\delta \Pi - \delta A_d - \delta A_m - \delta A_p = 0.$$

Пассивное управление изменением формы системы может производиться за счет освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин или за счет сил натяжения тросовых элементов, расположенных между двумя

произвольными шарнирными узлами. Распределенная масса троса приводится к узлам; в пределах длины трос считается безынерционным. Пусть между двумя узлами с номерами r и p ($p > r$) расположен упругий на растяжение регулируемый трос с переменной длиной

$$\tilde{l}_{rp}^0 = l_{rp}^0 + \Delta l_{rp}, \quad l_{rp}^0 = \sqrt{(x_p^0 - x_r^0)^2 + (y_p^0 - y_r^0)^2},$$

где l_{rp}^0 – начальная длина троса, Δl_{rp} – приращение длины троса, изменяющейся по заданному закону по времени.

Для учета этого троса в выражение для потенциальной энергии системы следует добавить его потенциальную энергию Π_{rp} :

$$\Pi_{rp} = \frac{1}{2} \frac{EF_{rp}}{\tilde{l}_{rp}^0} (l_{rp} - \tilde{l}_{rp}^0)^2, \quad l_{rp} = \sqrt{(x_p - x_r)^2 + (y_p - y_r)^2},$$

где EF_{rp} – жесткость на растяжение, l_{rp} – текущая длина троса. Тросовые элементы не работают на сжатие, поэтому при $l_{rp} \leq \tilde{l}_{rp}^0$ следует принимать $\Pi_{rp} = 0$.

Нелинейная система $3n+3$ дифференциальных уравнений, записанная в матричном виде, представляется в виде:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{T} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2,$$

где $\mathbf{q} = [u_{cx} \ u_{cy} \ \theta_c \ \varphi_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \dots \ \varphi_n \ \alpha_n \ \beta_n]^T$ – вектор перемещений и углов поворота;

$\mathbf{p} = [v_{cx} \ v_{cy} \ \Omega \ \dot{\varphi}_1 \ \dot{\alpha}_1 \ \dot{\beta}_1 \ \dots \ \dot{\varphi}_n \ \dot{\alpha}_n \ \dot{\beta}_n]^T$ – вектор линейных и угловых скоростей;

$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)_{(3n+3) \times (3n+3)}$ – симметричные матрицы инерции, жесткости и демпфирования;

\mathbf{z} – вектор нелинейных частей;

$\mathbf{r} = [\mathbf{p} \ \mathbf{q}]_{(6n+6) \times 1}^T$; $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{r}, t)_{(3n+3) \times (2n+3)}$ – матрица нелинейных частей, причем квадратная матрица, получающаяся из первых $(n+3)$ строк и столбцов, является антисимметричной;

$\mathbf{Q}_1_{(3n+3) \times 1}$ – вектор правых частей, обусловленный приложенными силами и моментами;

$\mathbf{Q}_2_{(3n+3) \times 1}$ – вектор правых частей, обусловленный возможными управляемыми изломами в узлах;

$\mathbf{T}_{(3n+3) \times 1}$ – вектор тросовых элементов.

Выполнено исследование сходимости численного интегрирования полученных уравнений движения. Рассмотрены численные примеры: развертывания системы за счет сил предварительно сжатых пружин и за счет центробежных и инерционных сил, создаваемых движением КА; развертывание ферменной конструкции с тросовыми элементами, в том числе с программно изменяемыми их длинами.

Рассмотрена также упрощенная постановка задачи, которая получается путем редуцирования исходной системы по квазистатическому изгибу – из уравнений движения исключаются «быстрые» переменные, представляющие собой изгиб каждого стержня.

Некоторые примеры расчета:

1. Перевод стержневой системы из начального транспортировочного состояния в плоское горизонтальное положение за счет освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин:

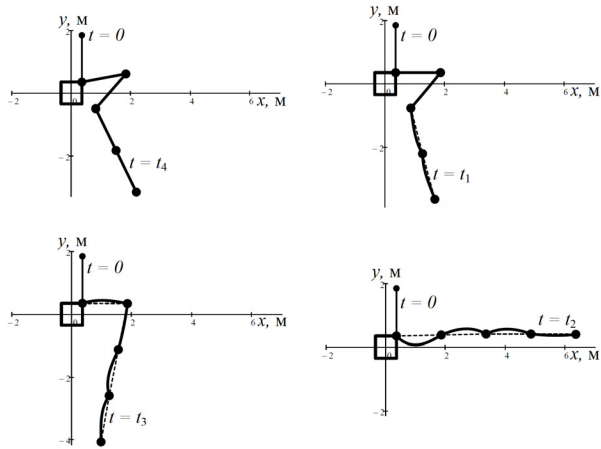


Рис. 2.1.8. Последовательное развертывание стержневой системы

2. Развертывание ферменной конструкции с тросовыми элементами постоянной длины из начального положения за счет центробежных сил предварительно раскрученного КА:

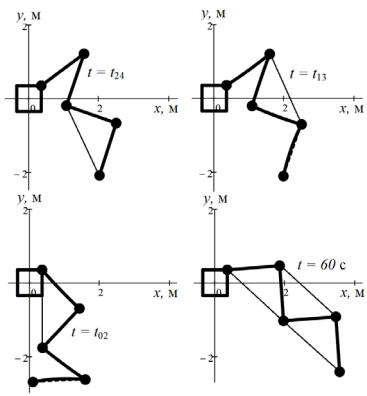


Рис. 2.1.21. Последовательные положения системы

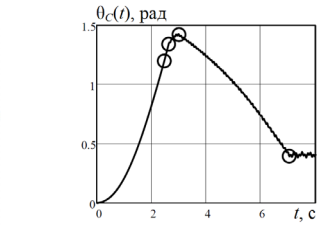


Рис. 2.1.10. Угол поворота КА

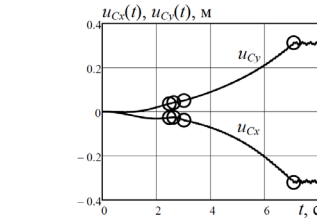


Рис. 2.1.11. Перемещение КА

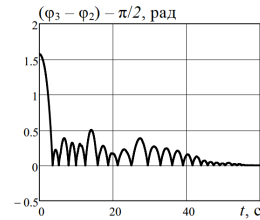


Рис. 2.1.20. Характер развертывания системы с тросами постоянной длины

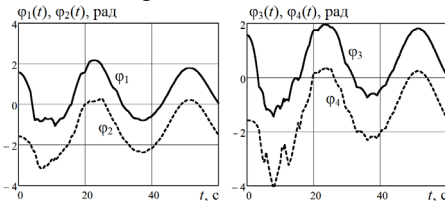


Рис. 2.1.22. Углы поворота стержней как твердого тела

Во второй главе рассматривается нестационарный поворот и нелинейные колебания в плоскости крена симметричного относительно продольной плоскости КА с двумя упругими панелями солнечных батарей. Каждая панель состоит из произвольного числа недеформируемых секций, которые связаны между собой и с КА упруговязкими шарнирами, допускающими большие углы поворота. На основе полученных уравнений рассмотрены примеры расчета реакции системы на приложение к КА управляющего момента крена и выполнен анализ развертывания панелей солнечных батарей при различных начальных условиях.

В третьей главе рассматривается предложенная автором функциональная схема циклически симметричной антенны зонтичного типа, состоящей из радиальных многозвенных нерастяжимых стержней, которые связаны между собой в узлах по параллелям растяжимыми тросами. Сначала решается нелинейная динамическая задача развертывания многозвенного упругого на изгиб радиального стержня антенны под действием предварительно напряженных пружин в шарнирах с выходом их на упоры в заданном прямолинейном положении под некоторым углом к оси системы, в котором тросовые элементы становятся прямолинейными, но еще ненапрянутыми; это предварительное состояние системы с выравниваем положений всех стержней циклически симметричной системы обеспечивается за счет медленного хода демпфирующего гидроцилиндра.

Схема предлагаемой циклически симметричной космической антенны зонтичного типа с n радиальными стержнями 1, каждый из которых состоит из p звеньев, показана на рис. 3.1.1 в сложенном состоянии (а) и в конечном деформированном состоянии (б).

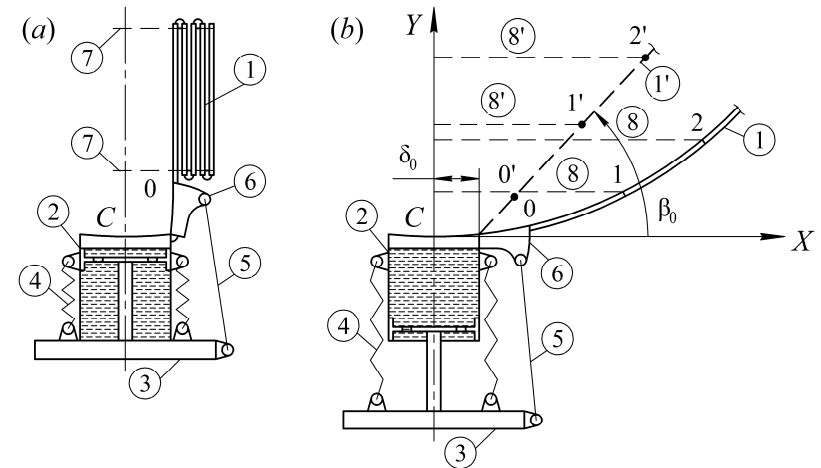


Рис. 3.1.1. Схема антенны в сложенном состоянии (а) и в конечном состоянии (б)

Раскрытие и формообразование антенны происходит следующим образом. По сигналу устраняется удерживающая связь между корпусом демпфирующего гидроцилиндра 2 и штоком 3 и начинается медленное движение штока под действием предварительно сжатых пружин 4, за счет чего с помощью тросов 5 и рычагов 6 упаковки стержней 1 поворачиваются в радиальных плоскостях. При некотором отклонении упаковок разрываются связи 7 и многозвенные стержни с упругими шарнирными соединениями разворачиваются с фиксацией на упорах в прямолинейном положении. Считается, что в некотором заданном отклоненном положении (1', **рис. 3.1.1, б**) выпрямившихся стержней (при угле β_0 между осью X и осью стержня) в силу выбора начальных длин участков тросов 8, соединяющих в плоскостях параллелей соответствующие узлы $k = 1, 2, \dots, p$ стержней, эти участки становятся прямолинейными (без провисаний), но еще ненапрянутыми. При этом все тросы $k = 1, 2, \dots, p$ будут иметь форму правильных n -угольников. При повороте рычагов 6 до упора тросы растянутся, а стержни изогнутся в радиальных плоскостях под действием реакций тросов в узлах $k = 1, 2, \dots, p$. Конечная изогнутая форма 1 стержня с растянутыми тросами 8 показана на **рис. 3.1.1, б**. Полотно антенны соединяется со стержнями в отдельных точках, включая узлы; в сложенном состоянии оно находится в пространстве между упаковками стержней. При раскрытии и формообразовании составной конструкции антенны реакции полотна не учитываются.

Осесимметричная поверхность антенны имеет заданную форму $Y = F(X)$, **рис. 3.1.1, б**. При проектировании и расчете составной циклически симметричной конструкции антенны требуется, чтобы координаты узловых точек $k = 1, 2, \dots, p$ изогнутых радиальных стержней совпадали с соответствующими координатами поверхности антенны $X_k, Y_k = F(X_k), k = 0, 1, \dots, p$. Центральный участок $C - 0$ после поворота рычага 6 до упора считается абсолютно жестким и профилированным по форме $Y = F(X)$; $X = Y = 0$ в точке C и $X_0 = a_0, Y_0 = F(a_0), \theta_0 = \arctg(F'(a_0))$ в точке 0. Звенья упругой части стержня имеют примерно одинаковую длину $a_k, k = 1, 2, \dots, p$ (для удобства складывания их в упаковки).

Динамика процесса одновременного раскрытия всех n радиальных стержней под действием упругих пружин в шарнирных узлах с упорами из начального состояния 1 в упаковках в заданные прямолинейные положения 1' (см. **рис. 3.1.1**) может быть исследована численно на основе расчетной модели для многозвенного упругого стержня, разработанного в **гл.2**.

На **рис. 3.2.8** и **рис. 3.2.11** в качестве примеров приведены некоторые результаты расчета динамики раскрытия упругого стержня, состоящего из $p = 6$ и $p = 8$ звеньев.

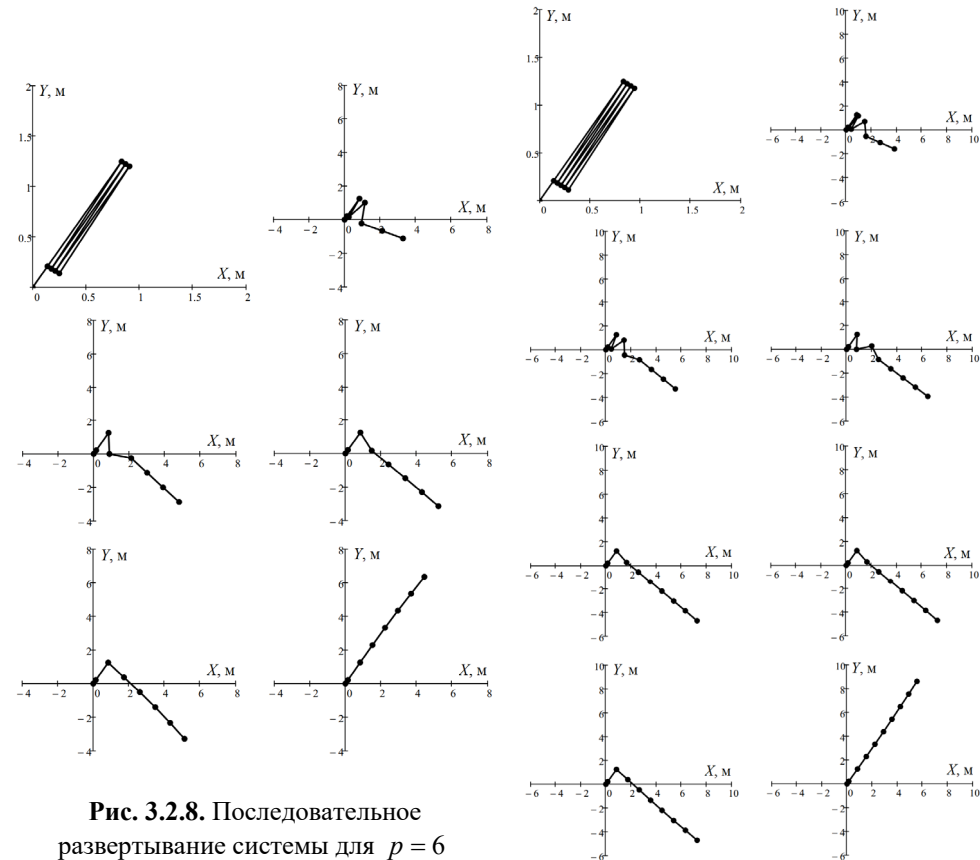


Рис. 3.2.8. Последовательное разворачивание системы для $p = 6$

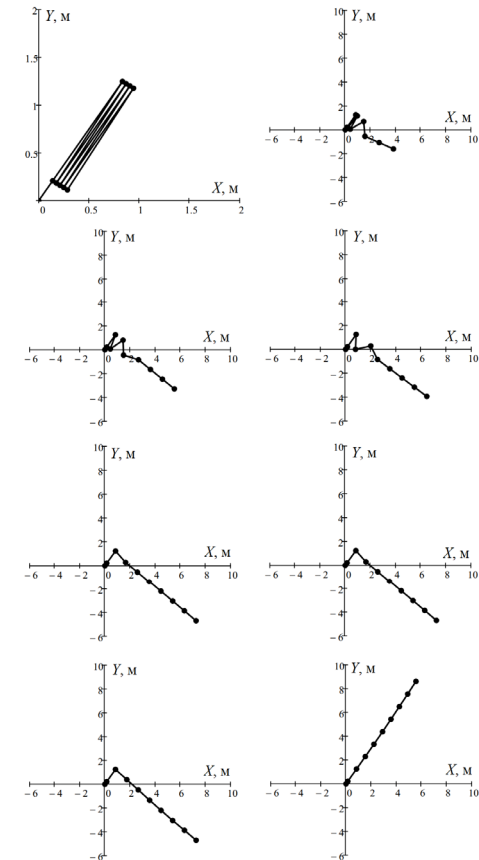


Рис. 3.2.11. Последовательное разворачивание системы для $p = 8$

При дальнейшем медленном ходе штока гидроцилиндра тросы, расположенные в плоскостях параллелей и связывающие одноименные узлы радиальных стержней, начинают натягиваться и под действием момента в корневой части каждого стержня и реакций тросов в узлах стержни изгибаются. Для решения квазистатической задачи формообразования осесимметричной поверхности антенны $Y = F(X)$ разработана математическая модель нелинейного деформирования радиальных формообразующих стержней в двух постановках: 1) для пологой параболической поверхности, деформации модели для которой описываются только значениями Y в фиксированных узлах $k = 1, 2, \dots, p$; 2) для произвольной однозначной поверхности вращения, деформации модели для которой описываются значениями X и Y в узлах $k = 1, 2, \dots, p$.

Для описания сильного изгиба стержня каждое его звено $k=1,2,\dots,p$ рассматривается как консольный конечный элемент (КЭ) в местной системе координат xu , который в узле $k-1$ жестко связан с $(k-1)$ -м КЭ, рис. 3.4.1.

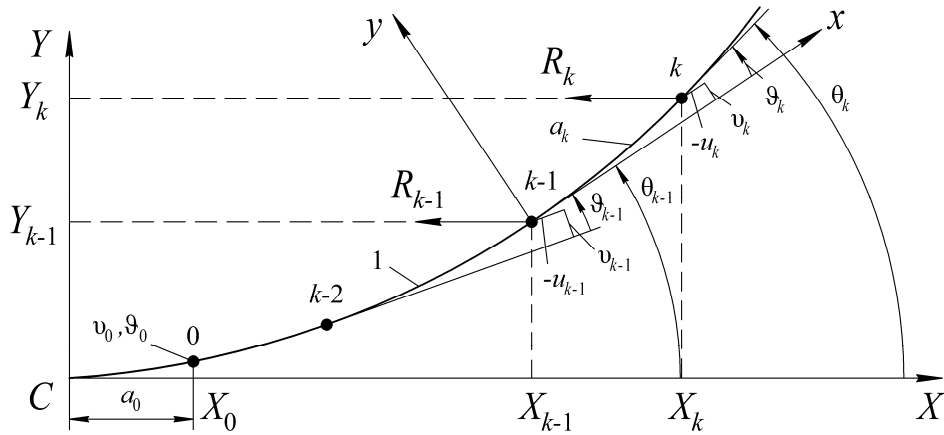


Рис. 3.4.1. Конечно-элементная модель сильного изгиба радиального стержня

Координаты и угол наклона оси стержня в узле $k-1$ равны $X_{k-1}, Y_{k-1}, \theta_{k-1}$. Относительное поперечное перемещение $v(x)$ и угол поворота $\vartheta(x)$ k -го КЭ как консольного стержня длины a_k записываются в виде:

$$v(x) = v_k \varphi_k(x) + \vartheta_k \psi_k(x), \quad \vartheta(x) = v'(x), \quad \varphi_k(x) = 3 \frac{x^2}{a_k^2} - 2 \frac{x^3}{a_k^3}, \quad \psi_k(x) = \frac{x^3}{a_k^2} - \frac{x^2}{a_k}.$$

Продольное перемещение u_k конца КЭ за счет сильного изгиба при условии, что стержень является нерастяжимым ($\varepsilon = u' + 0.5v'^2 = 0$), записывается как

$$u_k = -\frac{1}{2} \int_0^{a_k} (v')^2 dx = \frac{1}{2} (p_k v_k + q_k \vartheta_k);$$

$$p_k = -\frac{1}{5} \left(\frac{6}{a_k} v_k - \frac{1}{4} \vartheta_k \right), \quad q_k = -\frac{1}{5} \left(\frac{a_k}{3} \vartheta_k - \frac{1}{4} v_k \right), \quad \vartheta_k = \theta_k - \theta_{k-1}.$$

Потенциальная энергия изгиба стержня:

$$\Pi = \sum_{k=1}^p \Pi_k, \quad \Pi_k = \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{a_k^3} (v_k^2 - a_k v_k \vartheta_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k^2).$$

Нелинейные уравнения равновесия изогнутого стержня в обобщенных координатах v_k и ϑ_k , $k=1,2,\dots,p$, получаются на основании принципа возможных перемещений $\delta\Pi - \delta A = 0$ и записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{12EI_k}{a_k^3} (v_k - \frac{a_k}{2} \vartheta_k) + (c_{k-1} p_k - s_{k-1}) \sum_{i=k}^p R_i &= 0; \\ \frac{12EI_k}{a_k^3} (-\frac{a_k}{2} v_k + \frac{a_k^2}{3} \vartheta_k) + q_k c_{k-1} \sum_{i=k}^p R_i + (1 - \delta_{km}) \sum_{i=k+1}^p y_i \sum_{j=i}^p R_j &= 0; \\ c_k &= \cos \theta_k, \quad s_k = \sin \theta_k, \quad y_i = -[(a_i + u_i) s_{i-1} + v_i c_{i-1}]. \end{aligned}$$

Эти уравнения для их численного решения записываются в матричном виде в зависимости от векторов безразмерных перемещений $\mathbf{V} = \{v_k/a_k\}$, углов поворота $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$ и реакций тросов $\mathbf{R} = \{R_k\}$:

$$12\mathbf{G}(\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}) + \mathbf{A}\mathbf{R} = 0, \quad 12\mathbf{G}(-\frac{1}{2}\mathbf{V} + \frac{1}{3}\mathbf{\Omega}) + \mathbf{B}\mathbf{R} = 0.$$

Формообразование поверхности вращения (или в данном случае – изогнутого радиального стержня каркаса, на который накладывается с некоторым натяжением мягкая оболочка) согласно уравнению $Y = F(X)$ может осуществляться в пределах рассматриваемых элементов за счет выбора реакций R_k натянутых тросов, расположенных в плоскостях параллелей, или за счет изгибных жесткостей EI_k элементов радиальных стержней, или за счет изменения тех и других одновременно. Решение такой нелинейной задачи является неединственным и в некоторых областях изменения указанных параметров оно может не существовать.

Здесь рассматривается случай, когда уравнение заданной формы параболы $Y = F(X) = \lambda X^2$ удовлетворяется в точках $k=1,2,\dots,p$ за счет регулируемых реакций тросов R_k только по координатам X_k и $Y_k = F(X_k)$, а углы наклона θ_k в этих точках остаются свободными, т.е. не требуется выполнение условия $\theta_k = \arctg(F'(X_k))$. Жесткости EI_k элементов изгибаемого стержня считаются заданными. Основными неизвестными будут ϑ_k и R_k , $k=1,2,\dots,p$, т.е. – векторы $\mathbf{\Omega} = \{\vartheta_k\}$ и $\mathbf{R} = \{R_k\}$. Для удобства решения система двух матричных уравнений путем исключения вектора \mathbf{R} приводится к одному уравнению, содержащему только неизвестные параметры $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$:

$$\mathbf{G}\mathbf{\Omega} = (\frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{B})(\frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{P}.$$

Это уравнение решается методом последовательных приближений по схеме $\mathbf{G}\mathbf{\Omega}^{(r+1)} = \mathbf{P}^{(r)}$, где $r=0,1,\dots$ – номер приближения по набору неизвестных параметров $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$; $\mathbf{P}^{(r)}$ – вектор, зависящий от $\vartheta_1^{(r)}, \vartheta_2^{(r)}, \dots, \vartheta_p^{(r)}$.

Выполнена верификация модели, описываемой полученными нелинейными уравнениями сильного изгиба стержня, путем сопоставления результатов расчета с численными решениями известной задачи для эластики Эйлера.

Некоторые примеры расчета формообразования параболической антенны при различных значениях параметра λ для $p = 4$ или $p = 6$:

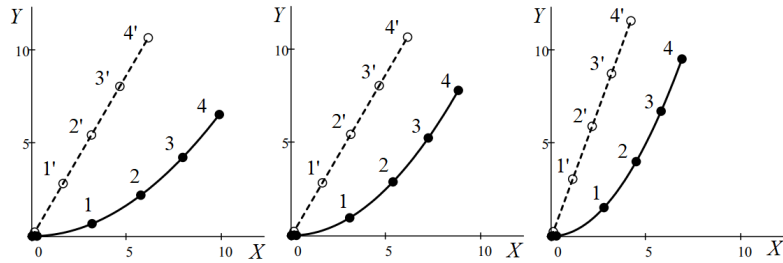


Рис. 3.4.4. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для $n = 24$, $p = 4$ и $\lambda = 1/15$, $\lambda = 1/10$, $\lambda = 1/5$

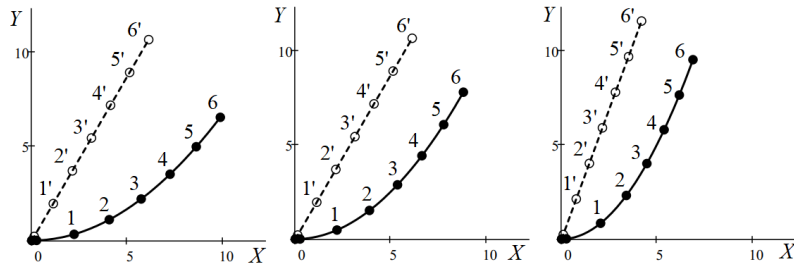


Рис. 3.4.5. Формы радиального стержня в начальном и конечном положениях для $n = 24$, $p = 6$ и $\lambda = 1/15$, $\lambda = 1/10$, $\lambda = 1/5$

В четвертой главе представлена математическая модель термоупругих изгибных колебаний тонкостенного стержня с круговым поперечным сечением, соединенного упруговязким шарниром с КА и подвергающегося прямому солнечному нагреву с учетом теплового излучения в космическое пространство и лучистого теплообмена на внутренней поверхности оболочки стержня.

Рассмотрено нестационарное движение КА с присоединенным к нему тонкостенным стержнем с массой на конце, рис. 4.1.1. Под действием приложенного к КА управляющего момента $M_0(t)$ и нестационарного солнечного нагрева с учетом теплоизлучения стержень совершает термоупругие колебания в плоскости падения солнечных лучей и поворачивается вместе с КА на угол $\varphi(t)$ относительно центра масс системы. Стержень соединен с КА с помощью упруго-вязкого шарнира и в исходном недеформированном состоянии при постоянной температуре является прямолинейным; он направлен вдоль оси x связанной с КА подвижной (вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}(t)$) системы координат Oxy с началом в центре масс.

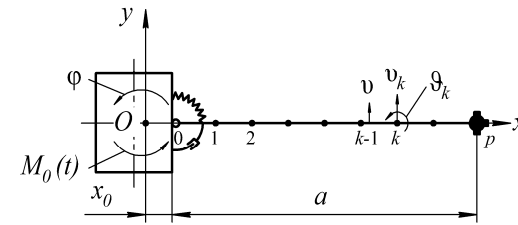


Рис. 4.1.1. Модель КА с присоединенным тонкостенным стержнем

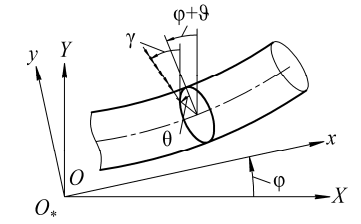


Рис. 4.1.2. Направление теплового потока от прямого солнечного излучения

Тепловой поток от прямого солнечного излучения на единицу площади внешней поверхности оболочки с учетом влияния на угол падения солнечных лучей поворота связанной с КА системы координат и изгиба стержня (рис. 4.1.2):

$$q^* = \nu A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2} \cos(\gamma - \varphi - \vartheta) \cos \theta \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq -\frac{\pi}{2}, \quad q^* = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{2},$$

где A_s – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня; $S_0 = 1400 \text{ Вт/м}^2$; $L_0 = 149 \cdot 10^9 \text{ м}$ – среднее расстояние от Земли до Солнца; L – расстояние от КА до Солнца; $\nu(t)$ – коэффициент, учитывающий затененность стержня ($0 \leq \nu \leq 1$; $\nu = 0$ в тени планеты или КА и $\nu = 1$ при прямом солнечном освещении в космосе). Отраженный поток солнечного излучения от поверхности КА и планеты не учитывается.

Тепловой поток, теряемый за счет внешнего излучения в космическое пространство $q^e = c_0 \varepsilon^e \tau^4$, $\tau = T/100^\circ$, где $c_0 = 5,77 \text{ Вт/м}^2$; ε^e – коэффициент черноты внешней поверхности оболочки; T – температура в рассматриваемой точке оболочки стержня. Тепловой поток лучистого теплообмена на внутренней поверхности цилиндрической оболочки стержня q^i определяется из интегрального уравнения и зависит от коэффициентов c_0 и ε^i , где ε^i – коэффициент черноты внутренней поверхности оболочки.

Уравнение нестационарной теплопроводности оболочки стержня в окружном направлении θ :

$$c\rho h \frac{\partial T}{\partial t} = h\lambda \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + q^* - q^e - q^i,$$

где r , h – радиус и толщина оболочки; ρ , c , λ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала.

Решение данного уравнения ищется в виде ряда для безразмерных температур $\tau = T/100^\circ$:

$$\tau(x, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n(x, t) \cos n\theta.$$

При учете только двух основных членов ряда $\tau = \tau_0 + \tau_1 \cos \theta$ уравнения теплового баланса для гармоник $n = 0$ и $n = 1$:

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_0 + c_0 \varepsilon^e F_0(\tau_0, \tau_1) = \frac{1}{\pi} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta);$$

$$c\rho h \cdot 100^\circ \dot{\tau}_1 + \frac{h\lambda}{r^2} 100^\circ \tau_1 + c_0 \left(\varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4 - \varepsilon^i} \right) F_1(\tau_0, \tau_1) = \frac{1}{2} q^0 \cos(\gamma - \varphi - \vartheta);$$

$$F_0 = \tau_0^4 + 3\tau_0^2 \tau_1^2 + \frac{3}{8} \tau_1^4, \quad F_1 = 4\tau_0^3 \tau_1 + 3\tau_0 \tau_1^3, \quad q^0 = A_s S_0 \frac{L_0^2}{L^2}.$$

Кинетическая энергия вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ относительно центра масс системы с присоединенным стержнем, совершающим малые поперечные колебания:

$$K = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \sum_{k=0}^p [(\mu_k x_k + s_k) \dot{\varphi} \dot{v}_k + (s_k x_k + i_k) \dot{\varphi} \dot{\vartheta}_k + \frac{1}{2} (\mu_k \dot{v}_k^2 + 2s_k \dot{v}_k \dot{\vartheta}_k + i_k \dot{\vartheta}_k^2)],$$

где J – момент инерции КА с присоединенным недеформируемым стержнем относительно их центра масс; μ_k, s_k, i_k – приведенные к узлам $k = 0, 1, \dots, p$ сосредоточенные массы, статические моменты масс и моменты инерции.

Потенциальная энергия поворота в упругом шарнире и термоупругого изгиба стержня:

$$\Pi = \frac{1}{2} \kappa_0 \vartheta_0^2 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+a} EI (v'' + 2 \frac{\alpha}{r} 100^\circ \tau_1) v'' dx,$$

где κ_0 – жесткость упругого шарнира по углу поворота ϑ_0 ; EI – изгибная жесткость тонкостенного стержня с моментом инерции поперечного сечения $I = \pi r^3 h$; α – коэффициент температурного расширения материала стержня.

Уравнения термоупругих колебаний стержня в обобщенных координатах $\varphi, \vartheta_0, v_1, \vartheta_1, \dots, v_p, \vartheta_p$ и уравнения нестационарной теплопроводности в узловых сечениях $k = 0, 1, \dots, p$ записываются в виде связанной системы нелинейных дифференциальных уравнений для вектора узловых перемещений и углов поворота $\mathbf{q} = [\varphi \ \vartheta_0 \ v_1 \ \vartheta_1 \ \dots \ v_p \ \vartheta_p]^T$ и для вектора узловых температур $\boldsymbol{\tau} = [\tau_{0,0} \ \tau_{1,0} \ \tau_{0,1} \ \tau_{1,1} \ \dots \ \tau_{0,p} \ \tau_{1,p}]^T$.

Выполнены исследования сходимости численного интегрирования связанных уравнений термоупругости и теплопроводности. Приведены результаты численного решения на конкретных примерах со сравнениями различных расчетных случаев, в том числе решений без учета теплоизлучения и с учетом теплоизлучения и лучистого теплообмена; выполнена оценка влияния составляющих инерционных сил стержня на характер его колебаний при солнечном нагреве.

В качестве примера приведены результаты решения задачи о выходе из тени КА с тонкостенным стержнем при угле падения солнечных лучей $\gamma = -60^\circ$: 1 – с

учетом излучения и инерционных сил стержня; 2 – с учетом излучения и без учета инерционных сил стержня; 3 – без учета излучения и с учетом инерционных сил стержня; 4 – без учета излучения и инерционных сил стержня.

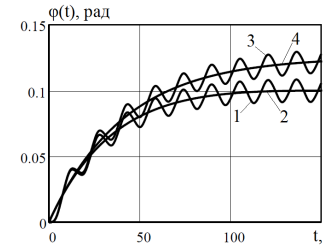


Рис. 4.6.13. Зависимость φ от t

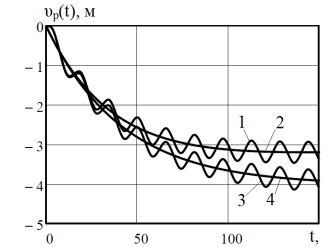


Рис. 4.6.14. Зависимость v_p от t

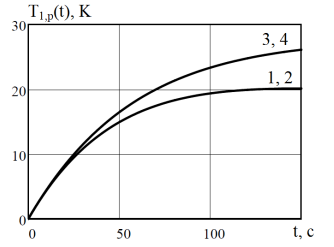


Рис. 4.6.16. Зависимость T_p от t

В пятой главе рассмотрен общий подход получения уравнений движения упругих составных нелинейных систем с геометрическими связями на основании принципа возможных перемещений (Д'Аламбера-Лагранжа) путем использования уравнений отдельных свободных систем в связанных с ними подвижных координатах с учетом неизвестных реакций взаимодействия и присоединения к этим уравнениям условий связи.

Уравнения движения свободных (несвязанных между собой) упругих нелинейных систем в обобщенных координатах записываются в символическом виде как

$$L_i^{(k)}(\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)}, t) = \mathbf{Q}_i^{(k)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{q}_j^{(k)}, \mathbf{Q}_i^{(k)}(t)$ – обобщенные координаты и обобщенные силы k -ой системы; $L_i^{(k)}$ – нелинейный дифференциальный оператор; верхней стрелкой обозначается совокупность всех обобщенных координат k -ой системы, т.е. $\bar{\mathbf{q}}_j^{(k)} \rightarrow \mathbf{q}_1^{(k)}, \mathbf{q}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_{n_k}^{(k)}$.

При соединении рассматриваемых систем друг с другом по перемещениям и конечным углам поворота в определенных точках систем должны удовлетворяться в общем случае нелинейные геометрические связи $f_r(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)}, \dots, t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, s$. Для упругих связей записывается потенциальная энергия деформации и она выражается через обобщенные координаты систем; например, для p -ой упругой связи – $\Pi_p(\bar{\mathbf{q}}_j^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_j^{(2)}, \dots)$.

Уравнения движения составной системы со связями могут быть получены как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах с неопределенными множителями или на основании вариационного принципа возможных перемещений (Д'Аламбера-

Лагранжа с учетом вариации работы неизвестных реакций N_r при малых возможных нарушениях связей δf_r в виде:

$$L_i^{(k)} - Q_i^{(k)} + \sum_p \frac{\partial \Pi_p}{\partial q_i^{(k)}} - \sum_r N_r \frac{\partial f_r}{\partial q_i^{(k)}} = 0, \quad i=1,2,\dots,n_k, \quad k=1,2,\dots;$$

к этим уравнениям добавляются условия связей.

Для решения связанной системы уравнений для неизвестных функций $q_i^{(k)}(t)$, $N_r(t)$ при $i=1,2,\dots,n_k$, $k=1,2,\dots$, $r=1,2,\dots,s$ необходимо использовать методы численного интегрирования систем дифференциально-алгебраических уравнений. Если геометрические связи $f_r=0$ заменить соответствующими дифференциальными связями $\dot{f}_r=0$, то тогда можно использовать методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. Систему уравнений можно редуцировать (по крайней мере – по части переменных), удовлетворяя некоторые (в первую очередь линейные) или все связи и исключить из уравнений соответствующие реакции связей N_r . При этом редуцированная система уравнений становится весьма громоздкой.

В качестве примеров подсистем рассмотрены: гибкий нерастяжимый стержень, изгибаемый в двух плоскостях и закручиваемый, который представляет собой гибкое звено космического крана-манипулятора; растяжимый весомый трос, совершающий трехмерные нелинейные колебания.

Выполнено сравнение двух вариантов численного решения задачи о переходных нелинейных колебаниях упругой нерастяжимой балки с поворачивающимся по заданному закону тяжелым твердым телом на ее конце, причем в первом варианте условие связи конца балки и тела по перемещениям и углу поворота выполняется точно, а во втором варианте – условие равенства продольного перемещения тела и конца нерастяжимой балки записывается в виде нелинейного алгебраического соотношения, которое добавляется к дифференциальным уравнениям.

Рассмотрена упругая консольно закрепленная нерастяжимая балка постоянного поперечного сечения, на конце которой при $x=l$ шарнирно присоединено тяжелое абсолютно твердое тело, совершающее неустановившееся вращательное движение с большими углами поворота, **рис. 5.4.1**. Колебания гибкой балки считаются умеренно большими и нелинейными в квадратичном приближении. Относительный угол поворота тела $\varphi(t)$ считается заданным.

Продольное перемещение конца балки u_1 выражается через перемещение v_1 и угол поворота ϑ_1 на конце балки при $x=l$:

$$u_1 = -\frac{1}{2}l(p\frac{v_1}{l} + q\vartheta_1), \quad p(v_1, \vartheta_1) = \frac{6}{5}\frac{v_1}{l} - \frac{1}{10}\vartheta_1, \quad q(v_1, \vartheta_1) = -\frac{1}{10}\frac{v_1}{l} + \frac{2}{15}\vartheta_1.$$

Это условие рассматривается как нелинейная геометрическая связь.

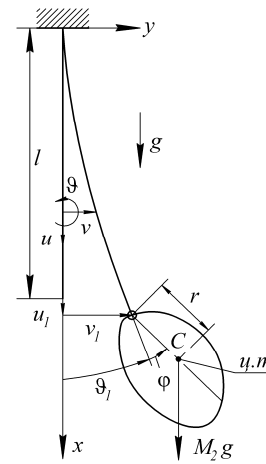


Рис. 5.4.1. Балка с поворачивающимся телом на конце

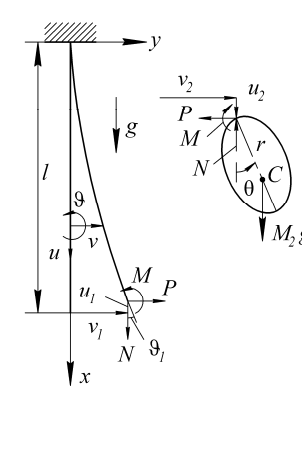


Рис. 5.4.2. Балка и тело с освобожденными кинематическими связями

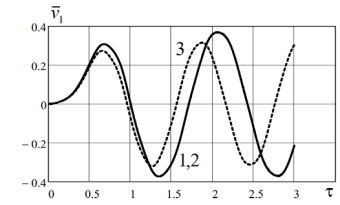


Рис. 5.4.3. Безразмерное поперечное перемещение конца балки

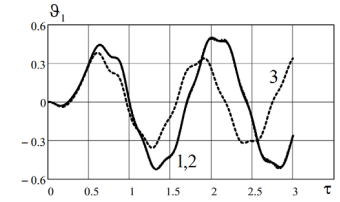


Рис. 5.4.4. Угол поворота конца балки

Кинетическая энергия балки с постоянной погонной массой m :

$$T_1 = \frac{1}{2}m \int_0^l \dot{v}^2 dx = \frac{1}{2}(m_{vv}\dot{v}_1^2 + 2m_{v\vartheta}\dot{v}_1\dot{\vartheta}_1 + m_{\vartheta\vartheta}\dot{\vartheta}_1^2).$$

Потенциальная энергия балки с постоянной изгибной жесткостью EI :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}(k_{vv}v_1^2 + 2k_{v\vartheta}v_1\vartheta_1 + k_{\vartheta\vartheta}\vartheta_1^2).$$

Кинетическая энергия поступательного и вращательного движений тела:

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}J_c\dot{\theta}^2, \quad x_c = l + u_1 + r \cos \theta, \quad y_c = v_1 + r \sin \theta, \quad \theta = \vartheta_1 + \varphi,$$

где M_2 и J_c – масса и момент инерции относительно центра тяжести тела; x_c , y_c – координаты центра тяжести тела, θ – полный угол его поворота.

Потенциальная энергия силы тяжести тела:

$$\Pi_2 = M_2g(-u_1 + r(1 - \cos \theta)).$$

В первом варианте уравнения Лагранжа с учетом связей балки с телом в обобщенных координатах v_1 и ϑ_1 при $\theta = \vartheta_1 + \varphi$:

$$\begin{aligned} (m_{vv} + M_2(1 + p^2))\ddot{v}_1 + (m_{v\vartheta} + M_2lpq + M_2r(p \sin \theta + \cos \theta))\ddot{\vartheta}_1 + k_{vv}v_1 + k_{v\vartheta}\vartheta_1 + \\ + M_2(pp\dot{v}_1 + pql\dot{\vartheta}_1) + M_2r(\dot{\varphi}(p \sin \theta + \cos \theta) + \dot{\theta}^2(p \cos \theta - \sin \theta)) + M_2gp = 0; \\ (m_{\vartheta\vartheta} + M_2lpq + M_2r(p \sin \theta + \cos \theta))\ddot{v}_1 + (m_{\vartheta\vartheta} + M_2lq(lq + 2r \sin \theta) + J_2)\ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta}v_1 + \\ + k_{\vartheta\vartheta}\vartheta_1 + M_2(l(pq\dot{v}_1 + qql\dot{\vartheta}_1) + r \sin \theta(\dot{p}\dot{v}_1 + \dot{q}\dot{\vartheta}_1)) + M_2rlq(\dot{\varphi} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + \\ + J_2\dot{\varphi} + M_2g(ql + r \sin \theta) = 0. \end{aligned}$$

Во втором варианте тело отделяется от балки (рис. 5.4.2) и для него вводятся новые обобщенные координаты u_2 и v_2 – продольное и поперечное перемещения точки подвеса твердого тела, θ – угол поворота тела. Реакции присоединенного тела при его движении обозначаются через N , P и M . Геометрические связи шарнирного соединения тела с концом упругой балки записываются в виде:

$$u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad \theta - (\vartheta_1 + \varphi) = 0.$$

Уравнения поперечных колебаний балки с учетом действующих на ее конце сил (реакций тела, рис. 5.4.2) в обобщенных координатах v_1 и ϑ_1 имеют вид:

$$m_w \ddot{v}_1 + m_{v0} \ddot{\vartheta}_1 + k_{vv} v_1 + k_{v\vartheta} \vartheta_1 + pN = P, \quad m_{v0} \ddot{v}_1 + m_{\vartheta\vartheta} \ddot{\vartheta}_1 + k_{v\vartheta} v_1 + k_{\vartheta\vartheta} \vartheta_1 + qLN = M.$$

Уравнения плоского движения свободного твердого тела с учетом реакций балки (рис. 5.4.2) записываются в переменных u_2 , v_2 и θ :

$$M_2 \ddot{v}_2 + M_2 r (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -P, \quad M_2 r (-\ddot{u}_2 \sin \theta + \dot{u}_2 \cos \theta + g \sin \theta) + J_2 \ddot{\theta} = -M;$$

$$M_2 (\ddot{u}_2 - r \ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta - g) = -N.$$

В итоге, получается замкнутая нелинейная система 5-ти дифференциальных уравнений и 3-х алгебраических уравнений связи.

В качестве примеров расчета на рис. 5.4.3 и рис. 5.4.4 приведены: 1 – результаты решения уравнений для $\bar{v}_1(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$, полученных с учетом всех геометрических связей в шарнире, соединяющим балку и тело; 2 – результаты решения уравнений для $\bar{v}_1(\tau)$, $\vartheta_1(\tau)$ и $\bar{u}_2(\tau)$ с добавлением продифференцированного дважды условия нелинейной геометрической связи (в пределах масштаба графиков практически совпадают с 1); 3 – результаты решения линейризованных уравнений для $\bar{v}_1(\tau)$ и $\vartheta_1(\tau)$ с учетом всех линейных геометрических связей при $\bar{u}_1 \approx \bar{u}_2 \approx 0$.

В шестой главе рассматриваются терминальные задачи управления нестационарными колебаниями упругой системы при ее конечном передвижении из одного состояния покоя или ускоренного движения в другое состояние. Для решения этой задачи в линейной и нелинейной постановках предложено несколько различных подходов. Для линейных систем с постоянными коэффициентами используется разложение движений по собственным формам колебаний, уравнения в нормальных координатах для которых решаются аналитически точно.

Рассмотрена система (тело), которая под действием нестационарной нагрузки совершает вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси, сопровождаемое упругими колебаниями (рис. 6.1.1). Движение упругого тела описывается во вращающейся с неизвестной угловой скоростью $\Omega = \dot{\theta}$ относительно оси z системе координат $0xuz$, угол поворота $\theta(t)$ которой считается конечным (может быть большим), а относительные упругие перемещения считаются малыми.

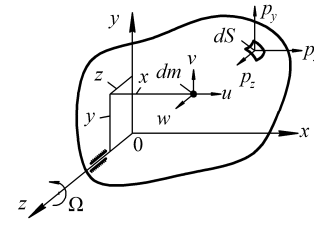


Рис. 6.1.1. Упругое тело, совершающее вращательное движение

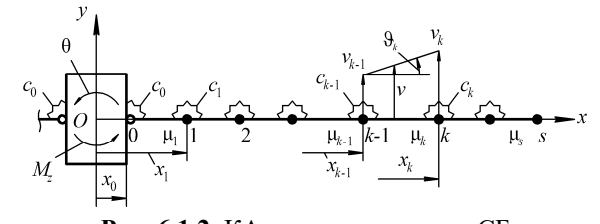


Рис. 6.1.2. КА с двумя панелями СБ

Рассматривается общая задача управляемого конечного поворота системы по углу $\theta(t)$ при разгоне или торможении и передвижении из одного состояния в другое за заданное время T , который сопровождается ее нестационарными упругими колебаниями. В общем случае начальные и конечные условия для функции $\theta(t)$ имеют вид

$$\dot{\theta}(0) = \Omega_0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(T) = \Omega_T, \quad \theta(T) = \theta_T,$$

где Ω_0 , Ω_T , θ_T – заданные величины, представляющие начальную и конечную угловые скорости и конечный угол поворота системы, соответственно.

Уравнения движения системы в обобщенных координатах:

$$\sum_{j=0}^s [m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j] = Q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, s \rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{q} = \{q_j\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$, $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ – векторы и матрицы порядка $s+1$ при $i, j = 0, 1, 2, \dots, s$.

Уравнения преобразуются к нормальным координатам:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} = 0 \rightarrow \omega_n, \mathbf{X}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \leq s, \quad \mathbf{q} = \sum_{n=0}^{s-1} f_n \mathbf{X}_n \rightarrow m_n (\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) = F_n.$$

Эти уравнения при $n = 1, 2, \dots, \leq s$ описывают относительное движение свободно вращающейся системы по ее собственным формам колебаний. Считается, что при $t = 0$ такие колебания отсутствуют ($\dot{f}_n(0) = f_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots, s$); и требуется, чтобы при $t \geq T$ они прекратились по $p \leq s$ собственным формам:

$$\dot{f}_n(T) = 0, \quad f_n(T) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, p.$$

В первом подходе для линейных систем с постоянными коэффициентами управляющая функция представляется несколькими членами ряда по синусам или косинусам с неизвестными коэффициентами, которые определяются из начальных и конечных условий.

При решении обратной задачи динамики пассивного силового управления поворотом системы и ее упругими колебаниями считается, что все нагрузки

изменяются по времени пропорционально одной безразмерной функции $\alpha_0 + \varphi(t)$, где α_0 – некоторое число, а $\varphi(t)$ – искомая управляющая функция, которая определяется из класса финитных функций, заданных при $0 \leq t \leq T$ и удовлетворяющих условию $\int_0^T \varphi(t) dt = 0$. В этом случае вводятся обозначения:

$$M_z(t) = M_z^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad F_n(t) = F_n^0(\alpha_0 + \varphi(t)), \quad n = 1, 2, \dots, \leq s.$$

С учетом начальных при $t = 0$ и конечных при $t = T$ условий:

$$\frac{M_z^0}{J_z} \alpha_0 T = \Omega_T - \Omega_0, \quad \frac{M_z^0}{J_z} \int_0^T \varphi(\tau) \tau d\tau = (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2} - \theta_r;$$

число α_0 определяется из первого соотношения.

Для решения сформулированной задачи устранения упругих колебаний системы при конечном повороте с разгоном ($\Omega_T > \Omega_0$) управляющая функция ищется, например, в виде:

$$\varphi(t) = \sum_k b_k \sin(k\sigma t), \quad \sigma = 2\pi/T, \quad k = 1, 2, \dots$$

Решение уравнений движения при $n = 1, 2, \dots$, $\omega_n \neq k\sigma$ и при начальных условиях $\dot{f}_n(0) = 0$, $f_n(0) = 0$:

$$f_n(t) = \frac{F_n^0}{m_n \omega_n^2} \left[\frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n t)) + \sum_k \frac{b_k}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} (\sin(k\sigma t) - \frac{k\sigma}{\omega_n} \sin(\omega_n t)) \right].$$

Конечные условия $f_n(T) = 0$, $\dot{f}_n(T) = 0$, $n = 1, 2, \dots, p$ записываются в виде системы уравнений для коэффициентов b_k при $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_n T) \sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} (1 - \cos(\omega_n T)); \\ (1 - \cos(\omega_n T)) \sum_k b_k \frac{k\sigma/\omega_n}{1 - (k\sigma/\omega_n)^2} &= - \frac{J_z}{M_z^0} \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{T} \sin(\omega_n T). \end{aligned}$$

К этим уравнениям добавляется уравнение при $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$:

$$\frac{M_z^0}{J_z} \frac{T}{\sigma} \sum_k \frac{1}{k} b_k = \theta_r - (\Omega_0 + \Omega_T) \frac{T}{2}.$$

В результате для общего случая (при разгоне или торможении системы) получается $2p + 1$ уравнений для определения коэффициентов b_k , $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$.

Во втором подходе для линейной системы с постоянными коэффициентами, совершающей многократно однотипные операции, устранение колебаний в конце каждой операции осуществляется за счет «настройки» нескольких низших собственных частот путем минимизации записанной для них квадратичной функции варьируемых параметров системы.

Для решения задачи устранения упругих колебаний системы при передвижении из одного состояния покоя в другое ($\Omega_0 = 0$, $\Omega_T = 0$, $\alpha_0 = 0$) путем настройки собственных частот управляющая функция $\varphi(t)$ разыскивается в классе антисимметричных относительно $t = T/2$ функций $\varphi(t) = -\varphi(T - t)$, удовлетворяющих условию $\int_0^T \varphi(t) dt = 0$ и обеспечивающих разгон системы при $0 \leq t < T/2$ и торможение при $T/2 < t \leq T$.

Решение уравнений движения при $n = 1, 2, \dots, \leq s$ с начальными условиями $\dot{f}_n(0) = 0$, $f_n(0) = 0$:

$$f_n = \frac{F_n^0}{m_n \omega_n} \int_0^t \varphi(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq T;$$

$$f_n = \frac{F_n^0 T}{m_n \omega_n} [\Phi_n \sin \omega_n t - \Psi_n \cos \omega_n t] \quad \text{при } t \geq T;$$

$$\Phi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau, \quad \Psi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau.$$

Колебания по n -ой собственной форме прекращаются в момент времени $t = T$, если выполняются условия $\Phi_n = 0$, $\Psi_n = 0$. Эти условия эквивалентны конечным условиям $\dot{f}_n(T) = 0$, $f_n(T) = 0$.

Вводится безразмерный параметр $\psi = \omega/\Omega$, где $\Omega = 2\pi/T$, а ω охватывает весь диапазон рассматриваемых собственных частот упругих колебаний системы ($\omega_1 \leq \omega \leq \omega_p$ при $n = 1, 2, \dots, p \leq s$, $\omega_n > \omega_{n-1}$), и считается, что $\Omega < \omega_1$, т.е. $\psi > 1$. Вместо Φ_n , Ψ_n рассматриваются соответствующие им функции:

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \cos \psi \Omega \tau d\tau, \quad \Psi(\psi) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\tau) \sin \psi \Omega \tau d\tau.$$

При этом $\Phi_n = \Phi(\psi_n^*)$, $\Psi_n = \Psi(\psi_n^*)$, где $\psi_n^* = \omega_n/\Omega = T/T_n$, $T_n = 2\pi/\omega_n$.

Условия $\Phi_n = 0$, $\Psi_n = 0$ заменяются уравнениями $\Phi(\psi) = 0$, $\Psi(\psi) = 0$, которые для заданной из рассматриваемого класса функции $\varphi(t)$ приводятся к двум трансцендентным уравнениям и имеют общие корни, образующие возрастающую последовательность чисел ψ_v при $v = 1, 2, 3, \dots$, $\psi_v > \psi_{v-1}$.

Приводится пять простых, удобных для управления конечными поворотами системы, финитных функций из класса $\varphi(t) = -\varphi(T - t)$ при $0 \leq t \leq T$, а также относящихся с ним функций $\Phi(\psi)$, $\Psi(\psi)$ и их корней ψ_v при $v = 1, 2, 3, \dots$; $\psi_1 > 1$.

Например, две из них:

1) функция переключения $\varphi(t) = 1$ при $0 \leq t < T/2$, $\varphi(t) = -1$ при $T/2 < t \leq T$:

$$\Phi = \frac{\sin \pi \psi}{\pi \psi} (1 - \cos \pi \psi), \quad \Psi = -\frac{\cos \pi \psi}{\pi \psi} (1 - \cos \pi \psi), \quad \psi_v \rightarrow 2; 4; 6; \dots, \quad M_z^0 = \frac{4J_z \theta_T}{T^2};$$

2) гладкая вместе со своей производной функция $\varphi(t) = \sin \Omega t \sin(\Omega t/2)$:

$$\Phi = \frac{\psi \sin 2\pi \psi}{2\pi(\psi^2 - 1/4)(\psi^2 - 9/4)}, \quad \Psi = -\frac{\psi \cos^2 \pi \psi}{\pi(\psi^2 - 1/4)(\psi^2 - 9/4)};$$

$$\psi_v \rightarrow 2,5; 3,5; 4,5; \dots, \quad M_z^0 = \frac{9\pi^2 J_z \theta_T}{8T^2}.$$

Для прекращения колебаний в момент $t = T$ по n -ой собственной форме ($n = 1, 2, 3, \dots$) необходимо, чтобы собственная частота этой формы ω_n удовлетворяла соотношению $\omega_n = \psi_n^* \Omega$, где ψ_n^* – одно из чисел последовательности $\psi_v \rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ при $\psi_1 > 1$, $\psi_v > \psi_{v-1}$, полученной для рассматриваемой функции $\varphi(t)$, которое соответствует частоте ω_n .

Для гашения в момент $t = T$ колебаний по нескольким низшим собственным формам ($n = 1, 2, \dots, p \leq s$) необходимо, чтобы собственные частоты этих форм удовлетворяли соотношениям

$$T\omega_1 = 2\pi\psi_1^*, \quad \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\psi_n^*}{\psi_1^*}, \quad n = 2, 3, \dots, p,$$

где ψ_1^* , ψ_n^* – выбираемые числа из последовательности корней ψ_v уравнений для рассматриваемой управляющей функции $\varphi(t)$; $\psi_1^* > 1$, $\psi_n^* > \psi_{n-1}^*$. Эти соотношения при выбранных ψ_1^* , ψ_n^* могут быть выполнены при проектировании системы или при ее настройке по частотам собственных колебаний. Для этого варьируется некоторое число (не менее p) проектных параметров системы и минимизируется квадратичная функция:

$$J = r_1 \left(\frac{T\omega_1}{2\pi\psi_1^*} - 1 \right)^2 + \sum_{n=2}^p r_n \left(\frac{\psi_n^* \omega_1}{\psi_1^* \omega_n} - 1 \right)^2 \rightarrow \min,$$

где r_n – заданные положительные весовые коэффициенты.

В качестве примера рассматривается пассивное гашение нескольких собственных форм колебаний ($n = 1, 2, \dots, \leq 4$) при повороте КА с двумя упругими панелями солнечных батарей (рис. 6.1.2), каждая из которых состоит из 4-х недеформируемых секций, на угол $\theta_T = \pi/2$ с помощью момента $M_z(t) = M_z^0 \varphi(t)$. Для этого варьируются жесткости пружин c_0, c_1, c_2, c_3 , соединяющих секции, и минимизируется квадратичная функция. Собственные частоты колебаний исходной системы: $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 3,330$ рад/с, $\omega_2 = 7,399$ рад/с, $\omega_3 = 14,165$ рад/с,

$\omega_4 = 22,349$ рад/с. Для каждого расчетного случая рассмотрены: а) гашение одной нижней формы колебаний ($n = 1$); б) гашение двух низших форм колебаний ($n = 1, 2$); в) гашение трех низших форм колебаний ($n = 1, 2, 3$).

1) Результаты, полученные при использовании ступенчатой управляющей функции переключения, приведены на рис. 6.2.2. При минимизации получены следующие параметры модифицированной системы: а) $\psi_1^* = 6$, $\omega_1 = 3,137$ рад/с, $\omega_2 = 7,222$ рад/с, $\omega_3 = 13,714$ рад/с, $\omega_4 = 21,305$ рад/с; б) $\psi_1^* = 6$, $\psi_2^* = 14$, $\omega_1 = 3,132$ рад/с, $\omega_2 = 7,317$ рад/с, $\omega_3 = 13,787$ рад/с, $\omega_4 = 21,399$ рад/с; в) $\psi_1^* = 6$, $\psi_2^* = 14$, $\psi_3^* = 28$, $\omega_1 = 3,111$ рад/с, $\omega_2 = 7,249$ рад/с, $\omega_3 = 14,515$ рад/с, $\omega_4 = 21,766$ рад/с.

2) Результаты, полученные при использовании гладкой вместе с ее производной управляющей функции, приведены на рис. 6.2.3. При минимизации получены следующие параметры модифицированной системы: а) $\psi_1^* = 6,5$, $\omega_1 = 3,403$ рад/с, $\omega_2 = 7,464$ рад/с, $\omega_3 = 14,338$ рад/с, $\omega_4 = 22,763$ рад/с; б) $\psi_1^* = 6,5$, $\psi_2^* = 14,5$, $\omega_1 = 3,403$ рад/с, $\omega_2 = 7,592$ рад/с, $\omega_3 = 14,441$ рад/с, $\omega_4 = 22,868$ рад/с; в) $\psi_1^* = 6,5$, $\psi_2^* = 14,5$, $\psi_3^* = 27,5$, $\omega_1 = 3,403$ рад/с, $\omega_2 = 7,591$ рад/с, $\omega_3 = 14,399$ рад/с, $\omega_4 = 22,855$ рад/с.

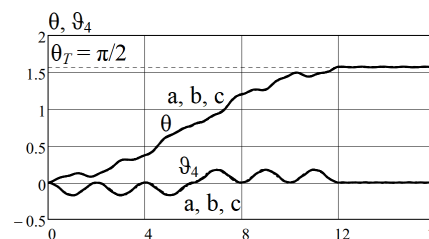


Рис. 6.2.2. Динамическая реакция системы по углам на управляющую функцию переключения

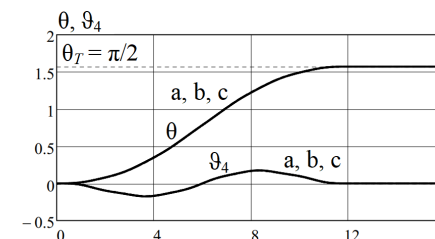


Рис. 6.2.3. Динамическая реакция системы по углам на гладкую управляющую функцию

Для решения задачи управления линейной системой с переменными параметрами и управления нелинейной системой, описываемых в обобщенных координатах, последние ищутся в виде разложений по заданным базисным функциям времени с неизвестными коэффициентами, которые определяются по методу Бубнова-Галеркина. Управляющая функция ищется в виде конечного ряда по синусам, неизвестные коэффициенты которого определяются из начальных и конечных условий. При этом для нелинейной системы по методу Бубнова-Галеркина получаются нелинейные алгебраические уравнения, которые решаются по методу последовательных приближений. В качестве примера расчета

рассматривается математический маятник переменной длины (рис. 6.4.14) с подвижной точкой подвеса, совершающий в общем случае умеренно большие колебания по углу $\theta(t)$.

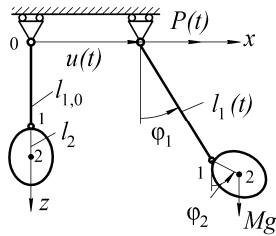


Рис. 6.4.1. Тяжелое твердое тело на тросе переменной длины

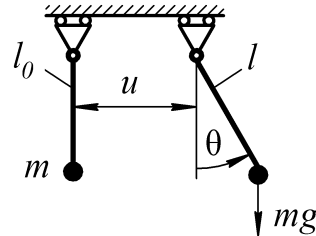


Рис. 6.4.14. Общий вид рассматриваемой системы

Также рассматривается плоская задача передвижения за определенное время T тяжелого абсолютно твердого тела, подвешенного на тросе, из начального положения покоя в конечное положение покоя за счет заданного изменения длины троса и управляемого горизонтального перемещения точки его подвеса (рис. 6.4.1). Начальные условия при $t=0$ и конечные условия при $t=T$, представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0, \quad u = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = 0; \\ \dot{u} &= 0, \quad u = u_T, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = T, \end{aligned}$$

где u_T – заданное конечное горизонтальное перемещение точки подвеса троса. Трос считается нерастяжимым, его длина $l_1(t)$ изменяется за счет продольного перемещения верхнего конца по заданному закону при условиях:

$$\dot{l}_1(0) = 0, \quad l_1(0) = l_{1,0}, \quad \dot{l}_1(T) = 0, \quad l_1(T) = l_{1,T}.$$

Задача заключается в следующем: найти закон изменения управляющего перемещения $u(t)$, при котором тело за определенное время T перемещается из начального положения покоя ($x_2 = 0, z_2 = l_{1,0} + l_2, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ при $t = 0$) в заданное конечное положение покоя ($x_2 = u_T, z_2 = l_{1,T} + l_2, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ при $t = T$) с устранением колебаний при $t \geq T$. Задача представлена в нелинейной постановке для умеренно больших углов поворота троса и тела ($|\varphi_1|, |\varphi_2| < 1$ в радианах).

Уравнения движения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}'' \cos \varphi_1 + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \sin \varphi_1 &= 0; \\ \bar{u}'' \cos \varphi_2 + \bar{l}_1 \varphi_2'' + \mu \varphi_2'' - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + & \\ + 2\bar{l}_1' \varphi_1' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{l}_1'' \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_2}, \quad \lambda = \frac{gT^2}{l_2}, \quad \mu = 1 + \frac{J_2}{Ml_2^2}.$$

Соответствующие линеаризованные уравнения имеют вид:

$$\bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 = 0, \quad \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2 = 0.$$

Далее для того, чтобы при использовании метода последовательных приближений первое приближение представляло решение линеаризованных уравнений, они объединяются, соответственно, с нелинейными уравнениями. Полученные уравнения записываются в виде:

$$L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь L_i и N_i – соответственно, линейные и нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} L_1 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1; \\ N_1 &= \bar{u}'' (\cos \varphi_1 - 1) + \varphi_2'' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda (\sin \varphi_1 - \varphi_1); \\ L_2 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2; \\ N_2 &= \bar{u}'' (\cos \varphi_2 - 1) + \bar{l}_1 \varphi_1'' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ 2\bar{l}_1' \varphi_1' (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \bar{l}_1'' (\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)) + \lambda (\sin \varphi_2 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Закон управления горизонтальным перемещением точки подвеса троса с учетом начальных и конечных условий ищется в виде тригонометрического ряда:

$$\bar{u}''(\tau) = \sum_{k=1}^n b_k \sin 2k\pi\tau, \quad \bar{u}(\tau) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{2k\pi} \left(\tau - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi\tau \right),$$

где b_k – неизвестные коэффициенты; n – определенное в каждом конкретном случае число коэффициентов b_k , которое требуется, чтобы удовлетворялись все начальные и конечные условия. В частности, в конечный момент времени $\tau = 1$ должно выполняться условие для заданного перемещения точки подвеса $\bar{u}(1) = \bar{u}_T$,

которое дает одно уравнение для коэффициентов b_k : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k\pi} b_k = \bar{u}_T$.

Приближенное решение уравнений на интервале $0 \leq \tau \leq 1$ ищется в рядах:

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{r=0}^s c_{i,r} \sigma_r(\tau), \quad i = 1, 2,$$

где $c_{i,r}$ – неизвестные коэффициенты; $\sigma_r(\tau)$ – заданные базисные функции, удовлетворяющие части начальных условий для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$.

Уравнения движения удовлетворяются по методу Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^1 [L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2)] \sigma_p(\tau) d\tau = 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, s_i, \quad i = 1, 2.$$

Полученная система уравнений должна быть дополнена уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, которым не удовлетворяют заданные функции $\sigma_r(\tau)$. В результате

получается система $(s_1+1)+(s_2+1)+3$ уравнений, из которых наряду с коэффициентами $c_{1,r}$ ($r=0,1,\dots,s_1$), $c_{2,r}$ ($r=0,1,\dots,s_2$) можно определить $n=3$ неизвестных коэффициентов b_k при $k=1,2,3$.

Для решения полученной системы алгебраических уравнений с нелинейными членами используется метод последовательных приближений. В качестве первого приближения ($v=1$) берется решение по методу Бубнова-Галеркина линеаризованных уравнений при $N_1 \equiv 0$, $N_2 \equiv 0$. В v -ом приближении ($v=2,3,\dots$) интегралы для нелинейных членов вычисляются численно с использованием выражений для N_1 и N_2 с функциями $\bar{u}(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, полученными в предыдущем ($v-1$)-ом приближении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Работа представляет собой вклад в решение актуальной и важной проблемы – создание надежных математических моделей, позволяющих решать широкий класс задач нелинейной механики упругих трансформируемых и управляемых космических систем и конструкций, содержащих стержневые и тросовые элементы:

1. Получены новые уравнения динамики пространственного и плоского движения космического аппарата с выпускаемым тросом в центральном гравитационном поле Земли, которые могут быть использованы для численного моделирования движения космических аппаратов с тросовыми элементами, в частности – космического аппарата с выпускаемым из него тросом как космического буксира для отработавших свой ресурс спутников, захват крупных объектов космического мусора и т.д.

2. Впервые получены нелинейные уравнения с аналитическими выражениями всех коэффициентов для плоского движения в подвижной системе координат космического аппарата с присоединенной системой связанных между собой упруговязкими шарнирами стержней, допускающими большие углы поворота. Эти уравнения позволяют решать новый класс задач развертывания системы стержней из сложенного в пакет транспортировочного положения в рабочее положение различными способами, в том числе – за счет инерционных сил вращения и передвижений космического аппарата.

3. Получены новые уравнения нестационарного поворота и нелинейных колебаний в плоскости крена космического аппарата с двумя упругими многосекционными панелями солнечных батарей. На основе этих уравнений можно проводить численную наземную отработку развертывания панелей под действием предварительно напряженных пружин в узлах, соединяющих секции.

4. Предложена функциональная схема и разработана математическая модель циклически симметричной антенны зонтичного типа, состоящей из гибких радиальных многозвенных стержней, связанных между собой в узлах по параллелям растяжимыми тросами. Разработан новый метод решения обратной нелинейной задачи квазистатического формообразования антенны после развертывания радиальных стержней за счет их изгиба под действием усилия, создаваемого демпфирующим гидроцилиндром с учетом реакций растяжимых тросов. Это будет способствовать созданию развертываемых в космосе крупногабаритных антенн.

5. Впервые получены уточненные уравнения термоупругих изгибных колебаний тонкостенного стержня-удлинителя с круговым поперечным сечением, соединенного с подвижным космическим аппаратом и подвергающегося солнечному нагреву с учетом изменений углов падения солнечных лучей за счет поворотов элементов поверхности упругого стержня и с учетом внешнего и внутреннего теплоизлучения. Уравнения используются для расчета нестационарных термоупругих колебаний стержня с космическим аппаратом при выходе его из тени.

6. Представлен подход получения уравнений движения упругих составных нелинейных систем с геометрическими связями на основании принципа возможных перемещений путем использования уравнений в связанных подвижных координатах и в обобщенных координатах для отдельных свободных подсистем с учетом неизвестных реакций взаимодействия и присоединения к этим уравнениям условий связи. Решение этих дифференциально-алгебраических нелинейных уравнений можно получить с помощью известных стандартных алгоритмов интегрирования для «жестких» систем.

7. Разработан новый подход к решению терминальных задач пассивного силового и кинематического управления упругими, в общем случае нестационарными и нелинейными, системами с использованием метода Бубнова-Галеркина во временной области при их конечных передвижениях за определенное время из одного состояния (покоя или движения) в другое состояние с устранением колебаний в конце операции. Задачи для линейных систем с постоянными параметрами решаются путем разложения по собственным формам колебаний с использованием точных решений уравнений в нормальных координатах для нескольких низших форм, подлежащих устранению. При этом управляющее воздействие ищется в виде конечного ряда простых финитных функций с неизвестными коэффициентами, которые определяются из начальных и конечных условий.

8. Предложен новый способ «настройки» нескольких низших собственных частот колебаний линейных систем с постоянными параметрами, многократно выполняющих однотипные операции, как быстродействующие манипуляторы, для

устранения колебаний в конце каждой операции с использованием простой управляющей функции с одним неизвестным множителем.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи из баз данных Scopus и Web of Science

1. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. – 2017. – Т.159. – Кн.4. – С.429-443.
2. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные колебания упругих панелей солнечных батарей космического аппарата при конечном повороте по крену // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №2. – С.34-43.
Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Nonlinear Oscillations of Elastic Solar Panels of a Spacecraft at Finite Turnby Roll // Mechanics of Solids. – 2018. – Vol.53. – Is.2. – P.147-155.
3. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение нестационарных колебаний упругой системы в момент остановки после конечного поворота по заданному закону путем настройки собственных частот // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №4. – С.16-27.
Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Elimination of Nonstationary Oscillations of an Elastic System at the Stopping Time after Finite Rotation by the Given Law via the Tuning of Eigenfrequencies // Mechanics of Solids. – 2018. – Vol.53. – Is.4. – P.370-380.
4. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение колебаний твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, при управляемом горизонтальном перемещении подвеса // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – №4. – С.234-245.
5. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Передвижение тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, с гашением колебаний // Прикладная математика и механика. – 2019. – №4. – С.549-561.
Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. Movement of a Heavy Rigid Body Suspended on a Cable of Variable Length with Oscillation Elimination // Mechanics of Solids. – 2019. – Vol.54. – Is.5. – P.683-693.

Статьи в изданиях перечня ВАК РФ

6. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нестационарные термоупругие колебания тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №4. – С.459-468.

7. Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2016. – №12(681). – С.97-105.
8. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Задача о термоупругих колебаниях стержня, соединенного с космическим аппаратом, при солнечном нагреве с учетом теплоизлучения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №2. – С.198-213.
9. Русских С.В. Нелинейная динамика космического аппарата с присоединенной упругой стержневой системой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – №7(688). – С.81-89.
10. Русских С.В. Плоская нелинейная задача динамики трансформируемой упругой стержневой системы, присоединенной к космическому аппарату // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – №11(692). – С.89-100.
11. Русских С.В. Развертывание плоской упругой стержневой системы с тросовыми элементами, присоединенной к космическому аппарату // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018. – № 4(697). – С.80-90.
12. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Конечное поперечное передвижение упругого стержня с массой на конце с гашением колебаний в момент остановки // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып.7.
13. Русских С.В. Задача нелинейной динамики присоединенной к космическому аппарату упругой стержневой системы в редуцированной квазистатической постановке по изгибу // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Том24. – №2. – С.171-185.
14. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода Бубнова-Галеркина для расчета нелинейных колебаний математического маятника переменной длины при конечном передвижении из одного состояния покоя в другое // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – Вып.10.
15. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Расчет формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Космонавтика и ракетостроение. – 2019. – №2(107). – С.95-103.
16. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Численное решение нелинейных уравнений движения составных упругих систем со связями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.139-150.
17. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика раскрытия космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – №2(113). – С.86-98.

Публикации в других изданиях

18. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Термоупругие колебания длинного тонкостенного стержня, соединенного с космическим аппаратом, при

солнечном нагреве с учетом теплоизлучения // Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015 г. – С.84-87.

19. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. О динамической устойчивости изгибных термоупругих колебаний тонкостенного стержня при солнечном нагреве // Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», Москва, ИПРИМ РАН, 15-17 декабря 2015 г. – С.82-83.

20. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управляемый разворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей на конечный угол // Сборник материалов XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 15-19 февраля 2016 г. – Т.2. – С.53-56.

21. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные колебания панелей солнечных батарей при больших углах поворота космического аппарата по крену // Сборник тезисов докладов Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 17-19 мая 2016 г. – С.198-200.

22. Русских С.В. Управляемое движение в гравитационном поле субспутника на длинном тяжелом тросе, выпускаемого с космического аппарата // Сборник тезисов докладов 15-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2016», Москва, МАИ, 14-18 ноября 2016 г. – С.133-134.

23. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Нелинейная динамика трансформируемых стержневых систем // Сборник тезисов докладов 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 16-18 ноября 2016 г. – С.91.

24. Русских С.В. Нелинейная плоская задача динамики космического аппарата с присоединенной стержневой системой // Сборник материалов XXIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 13-17 февраля 2017 г. – Т.1. – С.168-171.

25. Русских С.В. Динамика развертывания плоской системы, образованной многозвенными гибкими стержнями и тросами // Сборник тезисов докладов 16-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2017», Москва, МАИ, 20-24 ноября 2017 г. – С.293-295.

26. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Уравнения и задачи динамики многозвенных упругих стержневых систем при больших перемещениях и поворотах // Сборник тезисов докладов 7-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и

гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 21-23 ноября 2017 г. – С.169.

27. Русских С.В. Задача развертывания плоской составной системы, состоящей из многозвенных гибких стержней с тросовыми элементами // Сборник материалов XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 19-23 марта 2018 г. – Т.1. – С.195-197.

28. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Нелинейная динамика стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота и упругих конечных деформациях // Сборник материалов XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 19-23 марта 2018 г. – Т.1. – С.227-228.

29. Русских С.В., Нагорнов А.Ю., Шавня Р.А. Метод численного решения нелинейной задачи формообразования зонтичной антенны, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 17-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2018», Москва, МАИ, 19-23 ноября 2018 г. – С.341-342.

30. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Формообразование космической антенны зонтичного типа, состоящей из гибких радиальных стержней, соединенных растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 8-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, ИПРИМ РАН, 18-19 декабря 2018 г. – С.51.

31. Русских С.В. Задача о гашении колебаний упругого стержня в момент остановки при его конечном поперечном перемещении // Сборник материалов первой Общероссийской научно-практической конференции «Вопросы инновационного развития аэрокосмического комплекса России», Москва, МАИ, декабрь 2018 г. – Кн.2. – С.20-25.

32. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Нелинейная задача раскрытия и формообразования космической зонтичной антенны // Сборник материалов XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 18-22 марта 2019 г. – Т.1. – С.173-174.

33. Русских С.В. Методика решения нелинейной задачи о формообразовании космической зонтичной антенны // Тезисы докладов Третьей молодежной конференции «Инновационная деятельность в науке и технике. Создание космических аппаратов. Актуальные проблемы и пути их решения», Московская область, Истра, 25 апреля 2019 г. – С.59-62.

34. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Динамика развертывания и уточненная задача формообразования космической зонтичной антенны // Сборник тезисов докладов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика

композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского посвященная 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, ИПРИМ РАН, 19-21 ноября 2019 г. – С.77.

35. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Методы решения задачи устранения упругих колебаний линейных и нелинейных систем в момент остановки после конечного передвижения // Сборник тезисов докладов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского посвященная 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, ИПРИМ РАН, 19-21 ноября 2019 г. – С.29.

36. Русских С.В., Нагорнов А.Ю. Задача динамики раскрытия из транспортировочного в предварительное рабочее положение космической зонтичной антенны // Сборник материалов XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 16-20 марта 2020 г. – Т.1. – С.192-193.

37. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Метод решения задачи устранения колебаний нелинейных систем с переменными параметрами в момент остановки после конечного передвижения // Сборник материалов XXVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 16-20 марта 2020 г. – Т.2. – С.126-127.

38. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Задачи развертывания и формообразования космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней, соединенных по параллелям растяжимыми тросовыми элементами // Сборник тезисов докладов 19-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2020», Москва, МАИ, 23 – 27 ноября 2020 г. – С.402-403.

39. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Методы решения нелинейных уравнений движения составных упругих систем со связями // Сборник материалов XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 17-21 мая 2021 г. – Т.1. – С.225-226.

40. Русских С.В. Численное решение задачи о нелинейных колебаниях упругой балки с вращающимся тяжелым телом на конце // Сборник материалов XXVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, Калужская область, Кременки, 17-21 мая 2021 г. – Т.1. – С.195-197.

Учебные пособия

41. Шклярчук Ф.Н., Русских С.В. Избранные задачи динамики упругих космических систем. – М.: Издательство МАИ, 2017. – 80с.

Множительный центр МАИ (НИУ)
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

Заказ от 25.06.2021 г. Тираж 125 экз. Объем 2,0 усл.п.л.