

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181875>

## **ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ИЗ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

**Владимир Георгиевич Дмитриев<sup>1</sup>, Екатерина Анатольевна Коровайцева<sup>2</sup>✉,  
Анастасия Руслановна Попова<sup>3</sup>**

<sup>1,3</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

<sup>1</sup>[vgd2105@mail.ru](mailto:vgd2105@mail.ru)

<sup>2</sup>[katrell@mail.ru](mailto:katrell@mail.ru)✉

<sup>3</sup>[Popova.ar@1566.ru](mailto:Popova.ar@1566.ru)

**Аннотация.** В работе представлены математические модели и вычислительные алгоритмы для исследования особенностей процессов деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов при произвольных обобщенных перемещениях и деформациях. Рассматривается два подхода к построению математических моделей: а) оболочка рассматривается в актуальном (деформированном) состоянии; б) уравнения формулируются для исходного недеформированного состояния оболочки. В первом случае используется

квазидинамическая форма метода установления с построением явной двухслойной разностной схемы по времени второго порядка точности. При этом сеточные аналоги уравнений равновесия заменяются на уравнения, совпадающие по форме с уравнениями движения в вязкой среде. При действии «следящей» нагрузки для ускорения сходимости итерационный процесс строится относительно перемещений локального базиса  $u, w$  с последующим пересчетом в системе координат, отнесенной к актуальному состоянию оболочки. Параметры итерационного процесса определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы. При использовании второго подхода решение нелинейной краевой задачи проводится на основании алгоритма метода дифференцирования по параметру. Методами вычислительного эксперимента исследованы особенности напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки из гиперупругого материала при использовании соотношений неогуковской модели как для случаев шарнирно закрепленных, так и защемленных краев. Показано хорошее совпадение результатов расчетов, полученных с использованием рассмотренных подходов.

**Ключевые слова:** оболочки, гиперупругие материалы, конечные разности, нелинейные задачи, метод установления, метод продолжения по параметру, аппроксимация, граничные условия

**Для цитирования:** Дмитриев В.Г., Коровайцева Е.А., Попова А.Р. Особенности построения математических моделей для исследования процессов деформирования оболочек вращения из нелинейно упругих материалов // Труды МАИ. 2024. № 137.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181875>

Original article

# FEATURES OF MATHEMATICAL MODELS CONSTRUCTION FOR PROCESSES OF HYPERELASTIC SHELLS OF REVOLUTION DEFORMING INVESTIGATION

Vladimir Georgievich Dmitriev<sup>1</sup>, Ekaterina Anatolievna Korovaytseva<sup>2</sup>✉,  
Anastasiya Ruslanovna Popova<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Moscow aviation institute (national research university),  
Moscow, Russia

<sup>2</sup>Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia

<sup>1</sup>[vgd2105@mail.ru](mailto:vgd2105@mail.ru)

<sup>2</sup>[katrell@mail.ru](mailto:katrell@mail.ru)✉

<sup>3</sup>[Popova.ar@1566.ru](mailto:Popova.ar@1566.ru)

**Abstract.** The work represents mathematical models and numerical algorithms for investigation of hyperelastic thin-walled shells of revolution deforming at arbitrary generalized displacements and strains processes features. Two approaches to mathematical models construction are considered: a) the shell is considered in actual (deformed) state; b) equations are formulated for initial undeformed shell state. In the first case quasi-dynamic form of relaxation method with constructing explicit two-layer difference scheme in time of second order of accuracy is used. At this mesh analogues of equilibrium equations are replaced by the equations, coinciding in form with motion in viscous media equations. At follow load action for convergence acceleration iteration process is built in displacements of local basis  $u, w$  with the following recalculation in coordinate system referring to actual

shell state. Iteration process parameters are determined from the condition of convergence and stability of difference scheme. When using the second approach solution of nonlinear boundary value problem is obtained on the basis of parameter differentiation method. In this case relations of the given boundary value problem are differentiated with respect to some preselected solution continuation parameter, in result of which a set of interconnected quasilinear boundary value and nonlinear initial problems is formed. Their solution is constructed in sequence using iterative approach. By means of numerical experiment features of hyperelastic shell of revolution stress-strain state are investigated using relations of neohookean model for cases of hinged and fixed edges. A good coincidence of the results obtained on the basis of two considered approaches is shown.

**Keywords:** shells, hyperelastic materials, finite differences, nonlinear problems, relaxation method, parameter continuation method, approximation, boundary conditions

**For citation:** Dmitriev V.G., Korovaytseva E.A., Popova A.R. Features of mathematical models construction for processes of hyperelastic shells of revolution deforming investigation| // *Trudy MAI*, 2024, no. 137. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181875>

## 1. Введение

В конструкциях современных летательных аппаратов, а также судостроении, машиностроении, робототехнике и др., как в качестве несущих, так и амортизирующих достаточно широко используются упругие оболочки вращения из нелинейно упругих (гиперупругих) материалов [1-7]. Напряженно-деформированное

состояние (НДС) тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов характеризуется значительными величинами обобщенных перемещений и деформаций, что обуславливает необходимость разработки и развития адекватных математических моделей для исследования особенностей существенно нелинейных процессов деформирования таких конструкций при действии как статических, так и динамических нагрузок [8-12]. В данной работе исследуется НДС оболочек вращения в общем случае переменной толщины  $h$ , выполненных из гиперупругих материалов, под действием статических нагрузок общего или локального характера. При этом для верификации разработанных математических моделей, описывающих процессы статического деформирования оболочек вращения при произвольных перемещениях точек и углах поворота нормали, разрабатываются два различных подхода к выбору переменных при построении разрешающих систем уравнений, для каждого из которых сформирован и реализован свой вычислительный алгоритм. В рамках первого подхода оболочка рассматривается в актуальном (деформированном) состоянии в декартовых координатах  $x, y$  с последующей дискретизацией методом конечных разностей, а для решения полученной системы нелинейных сеточных уравнений используется квазидинамическая форма метода установления. В рамках второго подхода уравнения формулируются для недеформированного состояния оболочки и используются компоненты тангенциального  $u$  и нормального  $w$  перемещения, а их решение строится на основании алгоритма метода дифференцирования по параметру.

## 2. Постановка задачи и алгоритм решения

**1. Неогуковская модель гиперупругого материала.** Не теряя общности, при проведении исследований ограничимся случаем неогуковской модели гиперупругого материала. При этом разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы применимы и для других моделей нелинейно упругих материалов. После соответствующих преобразований с использованием статической гипотезы теории оболочек  $\sigma_{33}=0$ , имеем следующие выражения для продольных  $\sigma_{11}$  и окружных  $\sigma_{22}$  напряжений

$$\sigma_{11} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right); \quad \sigma_{22} = 2 \cdot C_{11} \cdot \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right), \quad (1)$$

где  $C_{11}$  – константа материала. Главные кратности удлинений в продольном  $\lambda_1$  и окружном  $\lambda_2$  направлении связаны с соответствующими компонентами деформации оболочки  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  как  $\lambda_1=1+E_{11}$  и  $\lambda_2=1+E_{22}$ , а выражение для кратности удлинения в направлении нормали  $z$  к координатной поверхности оболочки вытекает из условия несжимаемости материала  $\lambda_1 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3=1$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (2)$$

**2. Математическая модель ММА с построением итерационного процесса методом установления.** Система уравнений осесимметричного статического деформирования оболочки вращения данной математической модели включает в себя геометрические соотношения для недеформированного

$$ds_0 = \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}; \quad \sin \theta_0 = \frac{dx_0}{ds_0}; \quad \cos \theta_0 = \frac{dy_0}{ds_0}; \quad (3)$$

$$ds_0 = R_{10} \cdot d\theta_0; \quad k_{10} = \frac{1}{R_{10}} = \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad k_{20} = \frac{1}{R_{20}} = \frac{\sin \theta_0}{y_0},$$

и деформированного состояния

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad \sin \theta = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{dy}{ds};$$

$$ds = R_1 \cdot d\theta; \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}; \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{y}, \quad (4)$$

соотношения для компонент линейной деформации оболочки вдоль образующей  $E_{11}$  и в окружном направлении  $E_{22}$

$$E_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1; \quad E_{22} = \frac{\pi \cdot y - \pi \cdot y_0}{\pi \cdot y_0} = \frac{y}{y_0} - 1. \quad (5)$$

соотношения для параметров изменения кривизны вдоль образующей  $K_{11}$  и в окружном направлении  $K_{22}$

$$K_{11} = k_1 - k_{10} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad K_{22} = k_2 - k_{20} = \frac{\sin \theta}{y} - \frac{\sin \theta_0}{y_0}. \quad (6)$$

Здесь  $s$  – локальная координата точки меридиана оболочки,  $ds$  – длина элемента дуги оболочки,  $x, y$  – глобальная система координат,  $\theta$  – угол между нормалью к деформированной координатной поверхности и осью  $x$ ,  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны меридиана оболочки,  $k_1, k_2$  – кривизны меридиана оболочки. Индексом «0» обозначены величины, соответствующие недеформированному состоянию оболочки.

На углы поворота нормали  $\Delta\theta=\theta-\theta_0$ , аналогичные углам поворота в классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгоффа-Лява, ограничения не накладываются.

Уравнения равновесия деформированного элемента оболочки вращения [13-16]

$$\frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot T_{11}) - \frac{\cos\theta}{y} \cdot T_{22} + k_1 \cdot Q_{13} + q_1 = 0;$$

$$\frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot Q_{13}) - k_1 \cdot T_{11} - k_2 \cdot T_{22} + q_2 = 0;$$
(7)

$$Q_{13} = \frac{1}{y} \frac{d}{ds} (y \cdot M_{11}) - \frac{\cos\theta}{y} \cdot M_{22},$$

где  $q_1, q_2$  – компоненты поверхностной нагрузки, заданной локально или по всей поверхности,  $Q_{13}$  - поперечная сила. Оболочка может быть нагружена поверхностной нагрузкой консервативного или следящего типа. Входящие в уравнения (7) силовые факторы - продольные  $T_{11}, M_{11}$  и окружные  $T_{22}, M_{22}$  усилия и моменты - определяются интегрированием напряжений (1) по толщине оболочки  $h$  с учетом принятого в теории оболочек линейного закона распределения перемещений и деформаций по толщине. Все обозначения соответствуют принятым в [15, 16].

**3. Дискретизация задачи. Вычислительный алгоритм.** Дискретизация исходной краевой задачи (1)-(7) по пространственным переменным  $x, y$  осуществляется методом конечных разностей (МКР) [17, 18]. Начальная геометрия оболочки вращения задается сеточными функциями  $(x_0)_i, (y_0)_i$ , а деформированному состоянию сопоставляются сеточные функции узловых перемещений  $x_i$  и  $y_i$ . Для аппроксимации исходных уравнений (3) и уравнений (4), описывающих деформированное состояние



оболочки, используется однотипный разностный шаблон с конечно-разностными операторами второго порядка точности. Для определения силовых факторов – усилий  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  и моментов  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  – оболочка разбивается на определенное число слоев по толщине. При этом компоненты деформации и параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  соотносятся с серединой текущего слоя, а компоненты напряженного состояния  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  полагаются постоянными в пределах толщины текущего слоя. Далее выполняется численное интегрирование по толщине оболочки.

Полученная нелинейная система дискретных уравнений решается построением итерационного процесса на основе квазидинамической формы метода установления путем замены дискретных аналогов уравнений (7) на нестационарные уравнения, формально совпадающие с уравнениями движения оболочки в некоторой искусственной вязкой среде с параметрами  $\varepsilon_k$  [15, 18, 19]. После соответствующих преобразований с аппроксимацией конечно-разностных аналогов уравнений равновесия (7) на временной сетке с шагом  $\Delta t = \text{const}$ , для случая действия «следящей» нагрузки можно получить в явном виде выражения для скоростей  $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$  на временном слое  $t^{(n+1/2)}$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[2m - \varepsilon_k \Delta t]_i}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i} \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta s}(U_k) + q_k]_i^{(n)}}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i}. \quad (8)$$

где  $\varepsilon_k$  - параметры удельной вязкости искусственной среды,  $\rho$  - плотность,  $m = \rho h$ ,  $[L_{\Delta s}(U_k)]_i$  - конечно-разностные операторы для вектора  $U_k$  сеточных функций перемещений:  $U_1 = u_i$ ,  $U_2 = w_i$ ;  $(q_1)_i = (q_u)_i$ ,  $(q_2)_i = (q_w)_i$ ;  $(k=1,2)$ . Точкой в (8) и далее

обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Сеточные функции перемещений  $[u_k]_i^{(n+1)}$  на временном слое  $t^{(n+1)}$  вычисляются в явном виде путем интегрирования

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \quad (9)$$

Полученные значения сеточных функций перемещений  $u_i, w_i$  используются далее для вычисления сеточных функций перемещений узловых точек основной сетки  $x_i, y_i$  в системе координат  $x, y$  [15]. Аналогичный итерационный процесс строится и для случая действия консервативной нагрузки. Для определения оптимальных (с точки зрения сходимости и устойчивости разностной схемы) параметров итерационного процесса используются оценки минимального и максимального собственных чисел разностной задачи, полученные в рамках линеаризованных уравнений [15, 18, 19].

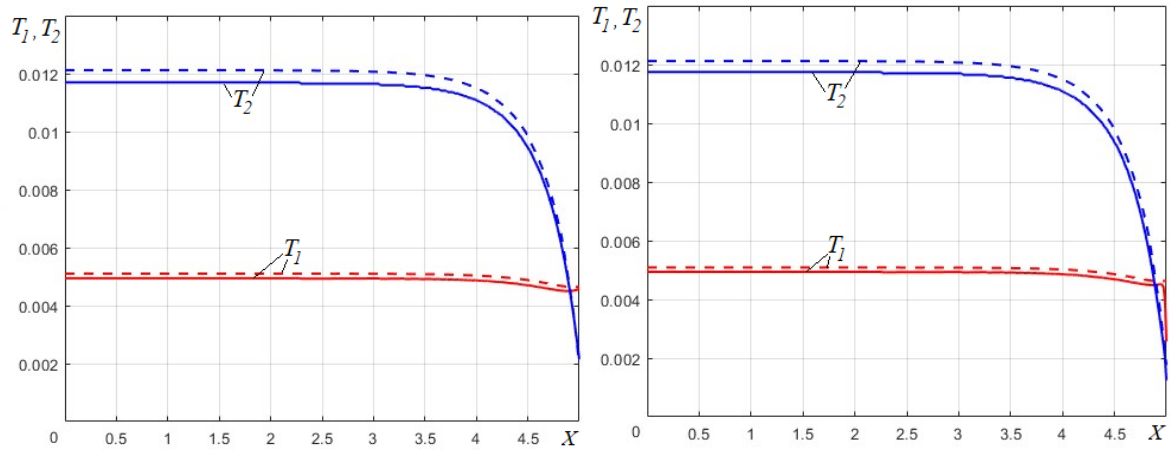
**4. Математическая модель ММВ с реализацией алгоритма метода дифференцирования по параметру.** Для построения математической модели ММВ выбраны разрешающие соотношения моментной теории оболочек В.Н. Паймушина [20] как наиболее корректно описывающие поведение тонкостенной оболочки из гиперупругого материала. Для решения формируемой таким образом нелинейной краевой задачи используется алгоритм метода дифференцирования по параметру, представленный в [21].

### 3. Результаты

Рассматривается цилиндрическая оболочка из неогуковского материала с константой  $C_{11} = 0.192$  МПа [22]. Геометрические параметры оболочки в

недеформированном состоянии:  $R_0/h_0=50$ ;  $L_0=10 \cdot R_0$ , где  $h_0 = 8$  мм,  $R_0$  и  $L_0$  - соответственно толщина, радиус и длина оболочки. Оболочка нагружена внутренним давлением  $q_2=0.02 \cdot C_{11}$ . Рассмотрено два случая закрепления торцов оболочки  $x=0$ ;  $x=L_0$ : неподвижный шарнир и заделка. В силу симметрии задачи расчетная область принималась равной  $0 \leq x \leq L_0/2$ . При проведении исследований по модели **ММА** число точек дискретизации на расчетной области составило  $N=87$ , по модели **ММВ**  $N=170$ . Для модели **ММА** силовые факторы определялись численным интегрированием напряжений по толщине  $h$ , изменение которой в процессе деформирования учитывалось в соответствии с (1),(2), для модели **ММВ** в предположении линейного распределения деформаций по толщине оболочки были получены аналитические выражения, связывающие усилия и изгибающие моменты с компонентами деформаций и изменениями кривизны.

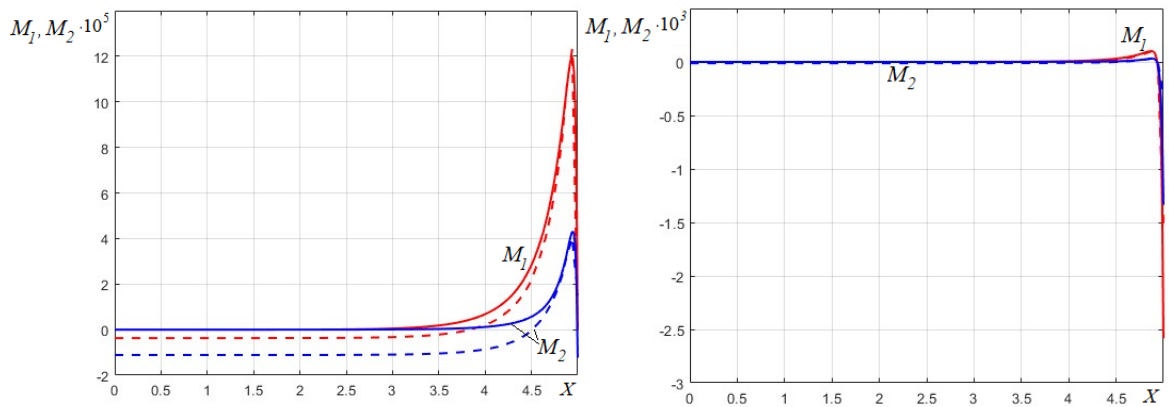
Результаты исследований представлены на рис. 1-4, где вариант а) соответствует шарнирному закреплению, а вариант б) - заделке. Штриховыми линиями представлены результаты по модели **ММА**, а сплошными линиями – по модели **ММВ**. Координата меридиана оболочки представлена в долях радиуса  $R_0$ :  $X = x/R_0$ , начало координат принято в среднем сечении цилиндра  $x=L_0/2$ . На рис. 1-2 приняты обозначения безразмерных усилий и моментов соответственно  $T_1 = T_{11}/(C_{11}h_0)$ ,  $M_1 = M_{11}/(C_{11}h_0^2)$ ,  $11 \Leftrightarrow 22$ , на рис. 4 координата  $Y$  точек деформированного меридиана цилиндра представлена в долях радиуса  $R_0$ .



а)

б)

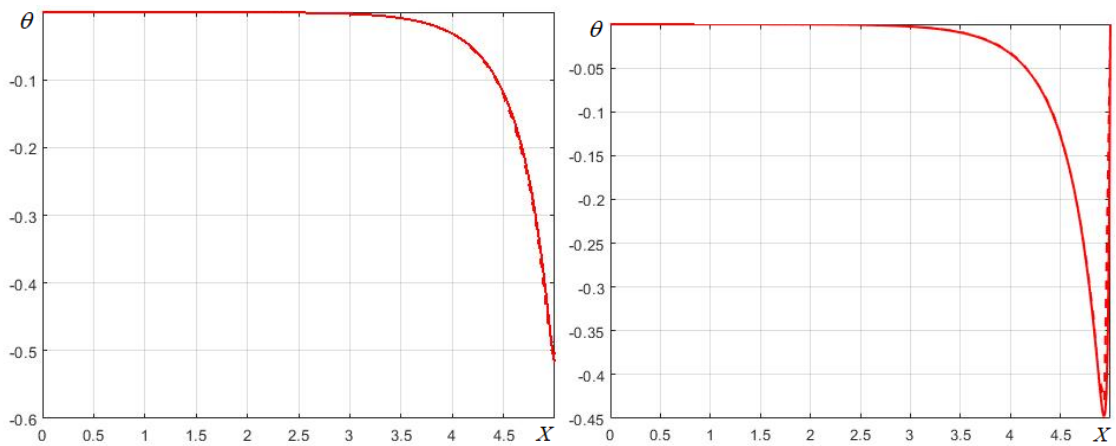
Рис. 1. Распределение меридиональных  $T_1$  и окружных  $T_2$  усилий



а)

б)

Рис. 2. Распределение меридиональных  $M_1$  и окружных  $M_2$  изгибающих моментов



а)

б)

Рис. 3. Распределение по меридиану оболочки углов поворота нормали

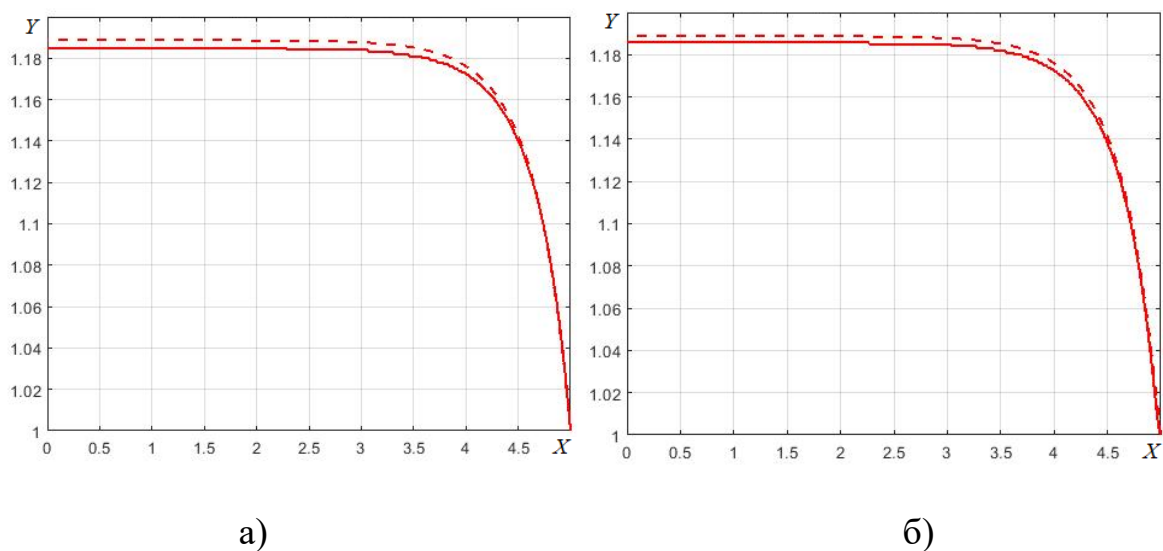


Рис. 4. Форма меридиана оболочки

#### 4. Заключение

Разработаны адекватные математические модели и вычислительные алгоритмы, позволяющие исследовать напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов в области больших перемещений и деформаций. Проведены исследования особенностей процессов деформирования цилиндрической оболочки из неогуковского материала для случаев заземленных и шарнирно закрепленных краев. Показана хорошая корреляция результатов, полученных как с помощью математической модели, разрешающие уравнения которой (1)-(9) сформулированы для оболочки в деформированном состоянии, так и на основе математической модели, разрешающие уравнения которой относятся к исходному (недеформированному) состоянию оболочки, что подтверждает достоверность разработанных математических моделей и вычислительных алгоритмов решения существенно нелинейных задач.

## Список источников

1. Друзь Б.И., Друзь И.Б. Теория мягких оболочек. – Владивосток: Изд-во МГУ, 2003. – 381 с.
2. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
3. Хованец В.А. Взаимодействие пневмонапряженных мягких оболочек с жесткими преградами: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Владивосток, 2004. – 199 с.
4. Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. Парашютные системы: проблемы и методы их решения. – М.: Физматлит, 2009. - 575 с.
5. Gorissen B., Milana E., Baeyens A., Broeders E., Christiaens J., Collin K., Reynaerts D., De Volder, M. Hardware Sequencing of Inflatable Nonlinear Actuators for Autonomous Soft Robots // Advanced Materials, 2019, vol. 31, no. 3. DOI: [10.1002/adma.201804598](https://doi.org/10.1002/adma.201804598)
6. Чуркин В.М., Попов Д.А., Серпичева Е.В. Анализ колебаний парашютных систем, вызванных пульсацией купола // Труды МАИ. 2002. № 7. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34618>
7. Чуркин В.М. Вынужденные колебания парашютной системы с упругими стропами // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63004>
8. Кылытчанов К.М. Некоторые задачи статики мягких оболочек при больших деформациях: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Ленинград, 1984. – 133 с.
9. Колпак Е.П. Устойчивость и закритические состояния безмоментных оболочек при больших деформациях: Дисс. ... д.ф.-м.н. – Санкт-Петербург, 2000. – 334 с.

10. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Ростов-на-Дону, 2006. – 115 с.
11. Zhang C., Hao Y., Li B., Feng X., Gao H. Wrinkling patterns in soft shells // *Soft matter*, 2018, vol. 14, no. 9, pp. 1681-1688. DOI:[10.1039/c7sm02261a](https://doi.org/10.1039/c7sm02261a)
12. Zhao Z., Niu D., Zhang H., Yuan X. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells // *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, pp. 911–933. DOI: [10.1007/s11071-020-05855-5](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05855-5)
13. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1988. - 232 с.
14. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. - М.: Физматлит, 1992. - 392 с.
15. Дмитриев В.Г. Численный анализ особенностей упруго-пластического деформирования неоднородных оболочек вращения в области больших перемещений и углов поворота нормали // *Ученые записки ЦАГИ*. 2023. № 1. С. 76-88.
16. Dmitriev V.G., Danilin A.N., Popova A.R., Pshenichnova N.V. Numerical Analysis of Deformation Characteristics of Elastic Inhomogeneous Rotational Shells at Arbitrary Displacements and Rotation Angles // *Computation*, 2022, no. 10 (10), pp. 184. DOI:[10.3390/computation10100184](https://doi.org/10.3390/computation10100184)
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
18. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.

19. Dmitriev V. Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions. Chapter 4. Book Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116. DOI: [10.1201/9781351123303-4](https://doi.org/10.1201/9781351123303-4)
20. Паймушин В.Н. Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа-Лява // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 5. С. 813–829.
21. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. 2020. №114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
22. Rodríguez–Martínez J.A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // International Journal of Engineering Science, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)

## References

1. Druz' B.I., Druz' I.B. *Teoriya myagkikh obolochek* (Theory of Soft Shells), Vladivostok, Izd-vo Morskoi gosudarstvennyi universitet, 2003, 381 p.
2. Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika konstruksii kosmicheskoi tekhniki* (Structural mechanics of space technology structures), Moscow, Mashinostroenie, 1988, 392 p.



3. Khovanets V.A. *Vzaimodeistvie pnevmonapryazhennykh myagkikh obolochek s zhestkimi pregradami* (Interaction of Pneumatically Loaded Soft Shells with Rigid Barriers), Doctor's thesis, Vladivostok, 2004, 199 p
4. Lyalin V.V., Morozov V.I., Ponomarev A.T. *Parashyutnye sistemy: problemy i metody ikh resheniya* (Parachute Systems: Problems and Methods of Their Solution), Moscow, Physmatlit, 2009, 575 p
5. Gorissen B., Milana E., Baeyens A., Broeders E., Christiaens J., Collin K., Reynaerts D., De Volder, M. Hardware Sequencing of Inflatable Nonlinear Actuators for Autonomous Soft Robots, *Advanced Materials*, 2019, vol. 31, no. 3. DOI: [10.1002/adma.201804598](https://doi.org/10.1002/adma.201804598)
6. Churkin V.M., Popov D.A., Serpicheva E.V. *Trudy MAI*, 2002, no. 7. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34618>
7. Churkin V.M. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=63004>
8. Kylytchanov K.M. *Nekotorye zadachi statiki myagkikh obolochek pri bol'shikh deformatsiyakh* (Some problems of soft shells statics at large strains), Doctor's thesis, Leningrad, 1984, 133 p.
9. Kolpak E.P. *Ustoichivost' i zakriticheskie sostoyaniya bezmomentnykh obolochek pri bol'shikh deformatsiyakh* (Stability and post-bifurcation states of momentless shells at large strains), Doctor's thesis, Sankt-Peterburg, 2000, 334 p.
10. Kolesnikov A.M. *Bol'shie deformatsii vysokoelastichnykh obolochek* (Large strains of hyperelastic shells), Doctor's thesis, Rostov-na-Donu, 2006, 115 p.

11. Zhang C., Hao Y., Li B., Feng X., Gao H. Wrinkling patterns in soft shells, *Soft matter*, 2018, vol. 14, no. 9, pp. 1681-1688. DOI: [10.1039/c7sm02261a](https://doi.org/10.1039/c7sm02261a)
12. Zhao Z., Niu D., Zhang H., Yuan X. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells, *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, pp. 911–933. DOI: [10.1007/s11071-020-05855-5](https://doi.org/10.1007/s11071-020-05855-5)
13. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya* (Problems of Nonlinear Deforming), Moscow, Nauka, 1988, 232 p.
14. Birger I.A. *Sterzhni, plastinki, obolochki* (Rods, plates, shells), Moscow, Fizmatlit, 1992, 392 p.
15. Dmitriev V.G. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2023, no. 1, pp. 76-88.
16. Dmitriev V.G., Danilin A.N., Popova A.R., Pshenichnova N.V. Numerical Analysis of Deformation Characteristics of Elastic Inhomogeneous Rotational Shells at Arbitrary Displacements and Rotation Angles, *Computation*, 2022, no. 10 (10), pp. 184. DOI: [10.3390/computation10100184](https://doi.org/10.3390/computation10100184)
17. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (The theory of difference schemes), Moscow, Nauka, 1989, 616 p.
18. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow, Fizmatlit. Laboratoriya Bazovykh Znaniy, 2001, 632 p.
19. Dmitriev V. *Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions*. Chapter 4. Book Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116. DOI: [10.1201/9781351123303-4](https://doi.org/10.1201/9781351123303-4)

20. Paimushin V.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 813–829.
21. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
22. Rodríguez–Martínez J.A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation, *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)

Статья поступила в редакцию 09.06.2024

Одобрена после рецензирования 13.06.2024

Принята к публикации 28.08.2024

The article was submitted on 09.06.2024; approved after reviewing on 13.06.2024; accepted for publication on 28.08.2024