

**Публичное акционерное общество
«Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»**

На правах рукописи



Хатунцева Ольга Николаевна

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСШИРЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА
ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ В
ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И АЭРОДИНАМИКИ**

Специальность 01.02.05

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Королёв - 2019 г.

Оглавление.

Введение.	5
Глава 1. Операторный метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.	15
Глава 2. Метод теоретического описания фрактальных объектов в расширенном фазовом пространстве и физических процессов, протекающих в односвязных фрактальных системах.	29
2.1. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче образования вязких “пальцев”.	30
2.2. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче о росте дендритов.	37
2.3. Описание физических процессов в односвязных фрактальных системах с помощью дифференциальных уравнений без использования дифференциальной производной по времени в дробной степени.	42
2.3.1. Учет масштаба фрактальной области при описании физических процессов в односвязных фрактальных системах.	45
2.3.2. Метод описания процессов теплопроводности в односвязном фрактальном пространстве.	54
Глава 3. Метод описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений в расширенном пространстве переменных.	69
3.1. Построение математической модели для описания стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.	75
3.2. Метод описания мартингалов.	91
3.2.1. Получение замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве для мартингалов.	96

3.3. Метод описания стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.	100
3.3.1. Получение замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом пространстве для стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.	106
3.3.2. Дискретное представление метода описания стохастических процессов в расширенном пространстве переменных для стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.	113
3.4. Использование метода описания стохастических процессов в расширенном пространстве переменных на примере задачи распространения акустических возмущений малых амплитуд.	117
3.5. О возникновении «стохастичности» в детерминированных дифференциальных уравнениях.	121
Глава 4. Классификация аэродинамических гистерезисных явлений. Теоретические модели и методы описания.	128
4.1. Классификация аэродинамических гистерезисных явлений.	128
4.2. Гистерезисные функции первого типа.	131
4.3. Гистерезисные функции второго типа.	158
4.3.1. Аэродинамический гистерезис второго типа в задаче о пересечении косых скачков уплотнения.	168
Глава 5. Метод определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования.	176

Заключение.	190
Литература.	193

ВВЕДЕНИЕ.

Актуальность работы

Последние несколько десятилетий, благодаря использованию и развитию компьютерных технологий, механика, как наука, переживает свой ренессанс. Решения многих задач механики жидкости, газа и плазмы оказалось возможным найти, используя численные методы, при исследовании уравнений Навье-Стокса, Больцмана, теплопроводности, стохастических дифференциальных уравнений и т.д.

Однако наряду с этим, остается много открытых вопросов и проблем, связанных, в первую очередь, с задачами описания нелинейных процессов и систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью решения.

В случае если в исследуемом процессе или системе существуют некоторые скрытые параметры, неучитываемые при решении задач в обычном (пространственно-временном) измерении, бывает удобно (и часто необходимо) осуществить переход к расширенному фазовому пространству.

Так, при рассмотрении физических процессов во фрактальных (самоподобных с дробной размерностью) структурах, например, при рассмотрении течения крови в кровеносной системе, перколяции нефти в пористых грунтах, исследовании процесса теплопроводности в композитных материалах, используемых в качестве теплозащиты в аэрокосмической технике, бывает необходим учет масштаба фрактального объекта [10], [17], [65], [108-109].

При исследовании стохастических систем скрытые параметры могут приводить к отклонению от нормального распределения [60], [123]. Понимание механизмов влияния скрытых параметров на стохастический процесс очень важно в задачах гидро- и газодинамики, метеорологии и пр.

Гистерезисный вид зависимостей некоторых аэродинамических характеристик летательных аппаратов от угла атаки набегающего потока,

зависит либо от предыстории (направления) изменения угла атаки, либо от возможности существования различных режимов обтекания аппаратов воздушным потоком. Учет этих особенностей очень важен при проектировании новых летательных аппаратов (ЛА) с заранее заданными свойствами по балансировке и демпфированию.

Данная работа посвящена исследованию нелинейных процессов и систем в задачах механики сплошных сред и аэродинамики, а именно:

1. Разработке метода описания процессов, в которых функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. Такие функции в локальных областях могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей. Метод позволяет решать задачу поиска соотношений, связывающих значения функций и производных на границах областей их скачкообразного изменения с размерами и положением этих областей [8], [9], [18], [69], [124].

2. Методу теоретического определения размерности односвязных фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов, на основе метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [18].

3. Разработке метода описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора, без привлечения дифференциальных производных по времени в дробной степени [17], [65].

4. Описанию стохастических процессов с помощью уравнений в частных производных с учетом масштабного фактора, без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений [33], [60], [68-69], [123-125].

5. Классификации аэродинамических гистерезисных явлений и разработке замкнутых расчетно-теоретических моделей для описания

гистерезисных функций двух типов [43], [44], [53], [66]: гистерезисных функций, зависящих от скорости изменения аргумента, и гистерезисных функций от нее независимых.

6. Разработке метода, позволяющего характеризовать колебательное движение летательных аппаратов на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений [64].

Все эти исследования объединены единым подходом – решения нелинейных задач в них найдены с помощью метода расширения фазового пространства.

Вероятно, впервые с методом расширения фазового пространства мы встречаемся еще в школьном курсе математики при решении алгебраических уравнений типа: $F(x)=0$, геометрическим методом. В этом случае уравнение представляется в виде $f_1(x)=f_2(x)$, а затем на плоскости (x,y) строятся функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ и находятся их точки пересечения, которые и являются решением уравнения $f_1(x)=f_2(x)$.

В механике, гидро- и газодинамике наиболее известными примерами использования этого метода являются уравнение Лиувилля, кинетическое уравнение Больцмана и цепочка уравнений Боголюбова [27], [50]. В них помимо пространственно-временных переменных, описывающих состояния системы, используются переменные импульса (или обобщенного импульса).

Часто метод расширения фазового пространства используется и в теории управления [28], [48-49]. В ней расширение пространства не ограничивается только переменными импульса. Замена производной по времени i -ой координаты на координату $(i+1)$ -ую: $\dot{q}_i = q_{i+1}$, приводит к практически неограниченной возможности увеличения размерности фазового пространства и описания в этом пространстве динамического изменения системы.

Неявно метод расширения фазового пространства использовал Л.Д. Ландау

при описании фазовых переходов второго рода, когда раскладывал термодинамический потенциал $\Phi(P, T)$ в ряд по степеням искусственно введенного параметра порядка η : $\Phi(P, T) \rightarrow \Phi(P, T, \eta)$ [50].

Метод расширения фазового пространства в указанных задачах позволяет не только упростить подходы к их решению, но и зачастую выявить новые физические сущности и закономерности. Достаточно вспомнить, что переход от теории Ньютона при решении задачи движения и взаимодействия частиц газа к уравнению Больцмана, позволил доказать H-теорему (закон возрастания энтропии) и показать принципиальную необратимость во времени эволюции ансамбля частиц в замкнутых системах.

В диссертации предложены различные подходы для исследования нелинейных процессов и систем за счет расширения фазового пространства состояний.

Так в методе описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, описывающие их, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных [8], [9], [18], используется искусственно введенный параметр η , позволяющий произвести “расслоение” пространства переменных на два подпространства. Процессы в таких пространствах испытывают скачкообразный вероятностный переход при переходе от одного подпространства к другому.

В методе, разработанном для описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах, используется расширение фазового пространства переменных за счет введения параметра, описывающего масштаб области фрактальной структуры [17], [65]. Использование такого приема позволяет применять дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы в евклидовых пространствах с целыми размерностями, для описания аналогичных процессов в пространствах с дробными размерностями. При этом не возникает необходимости использования, обычно применяемых в таких

случаях, дифференциальных производных по времени в дробной степени [51]-[52].

Введение дополнительного - масштабного параметра, а также дополнительной стохастической переменной [33], [60], [68], [123-125] применяется при описании стохастических процессов с помощью системы уравнений с частными производными, в которую входят уравнения, описывающие аналогичные детерминированные процессы, но в расширенном фазовом пространстве переменных, и уравнения, описывающие эволюцию стохастических переменных. Это позволяет избежать использования, применяемых в таких случаях, стохастических дифференциальных уравнений [30-32].

Выделение двух основных типов аэродинамических гистерезисных явлений позволило применить к ним различные методы расширения фазового пространства [43-44], [53], [66]. Так, для описания гистерезисных функций, обусловленных демпфированием, используется расширение пространства переменных за счет введения скорости изменения исследуемого параметра. А гистерезисные явления, обусловленные бифуркацией в пространстве состояний, удастся описать, используя искусственно введенный параметр, позволяющий “расщепить” класс решений на два подкласса, и описать переход между этими подклассами.

Практическая значимость работы

Все рассмотренные задачи помимо теоретического интереса имеют различные практические приложения.

Так метод описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах может быть использован при решении задач перколяции, массо- и теплопереноса во многих природных и техногенных объектах, имеющих сложную и, в некотором смысле, самоподобную на разных масштабах структуру. Такими объектами могут быть кровеносная и нервная системы

живых организмов, развитая система пор в грунте, трещины в металле, композитные материалы и пр..

Необходимость описания стохастических процессов возникает в задачах предсказания погоды, описания турбулентного течения и т.д.

Методы, разработанные для описания аэродинамических гистерезисных явлений и методы, позволяющие характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования, в первую очередь, могут быть полезны на этапе проектирования летательных аппаратов.

Возможность определения затрачиваемой или выделяемой энергии при переходе между двумя квазистационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях «разрывной» гистерезисной кривой, может стать важным инструментом при создании методов управления аэродинамическим потоком относительно летательного аппарата при его балансировке на различных углах атаки.

Полученные результаты развивают теорию решения задач механики сплошных сред и аэродинамики, связанных с исследованием динамических систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью при реализации различных состояний, и расширяют область их практического использования.

Материалы диссертации использованы в курсе лекций «Математические модели критических и переходных явлений» (Московский физико-технический институт) и в курсе лекций «Модели нелинейных, стохастических и переходных процессов в динамических системах» (аспирантура ПАО «РКК «Энергия»).

Цель работы

1. Разработка новых методов исследования нелинейных процессов и систем, основанных на расширении фазового пространства переменных,

в задачах механики сплошных сред и аэродинамики.

2. Применение разработанных методов к решению задач гидродинамики, акустики, аэродинамики и пр.
3. Оценка границ использования разработанных методов.

Объектом исследования данной работы являются нелинейные процессы и системы в задачах механики сплошных сред и аэродинамики.

Методика исследования включает теоретический подход, основанный на расширении фазового пространства переменных при решении задач механики, связанных с исследованием нелинейных процессов и систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью при реализации различных состояний.

Научная новизна работы заключается в едином методологическом подходе, основанном на расширении фазового пространства переменных, к решению задач механики сплошных сред и аэродинамики, связанных с исследованием нелинейных процессов и систем, а также систем, обладающих неопределенностью при реализации различных состояний.

Автор защищает следующие **новые положения и результаты**:

1. Метод описания процессов, в которых функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. Такие функции в локальных областях могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей. Метод позволяет решать задачу поиска соотношений, связывающих значения функций и производных на границах областей их скачкообразного изменения параметров с размерами и положением этих областей.
2. Метод теоретического определения размерности односвязных фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов, на основе подхода, разработанного для описания

- процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.
3. Метод описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора.
 4. Метод описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора, без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений.
 5. Замкнутые расчетно-теоретические модели описания гистерезисных функций двух типов: гистерезисных функций, зависящих от скорости изменения аргумента, и гистерезисных функций от нее независящих.
 6. Метод, позволяющий характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

Личный вклад автора.

Представленные в работе научные результаты получены лично автором. Во всех случаях использования результатов других исследований приведены ссылки на источник информации.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы; содержит 207 стр. текста, 17 рис. Библиография насчитывает 125 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, проведен обзор и анализ исследований, связанных с применением метода расширения фазового пространства в задачах механики жидкости, газа и аэродинамики, а также в задачах кинетической физики и стохастических процессов.

В первой главе содержатся общие положения метода описания процессов, в которых функции в локальных областях скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных.

Во второй главе с помощью метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы, разрабатывается теоретический подход к описанию параметров фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов.

Разрабатывается метод описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений, в которых учитывается масштабный фактор, без привлечения дифференциальных производных по времени в дробной степени.

Решается задача распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее (плохо проводящее) тепло трехмерное пространство.

В третьей главе разрабатывается метод описания стохастических процессов, происходящих в системах, не имеющих выделенных состояний равновесия, с помощью дифференциальных уравнений, но без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений.

На примере решения задачи распространения акустических возмущений малых амплитуд в жидкости при наличии в ней стохастических колебаний показана возможность применения разработанного метода при описании стохастических систем.

В четвертой главе приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений. Разработаны теоретические подходы к описанию гистерезисных функций первого и второго типов: гистерезисных функций, зависящих от скорости изменения аргумента, и гистерезисных функций от нее независимых. Оба метода являются замкнутыми в рамках расчетно-

теоретических моделей.

В пятой главе разработана методика, позволяющая характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

Основные результаты работы сформулированы в выводах к диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8-9], [17-18], [33], [43-44], [53], [60] [64-69], [106], [123-125] и докладывались на международных и всероссийских конференциях: [71-107], [109], [114-122].

Работы, опубликованные в журналах из списка ВАК: [9], [17-18], [33], [43], [53], [64-66], [68-69], [123-125].

Переводные работы, входящие в международные базы данных Web of Science и Scopus: [17-18], [43], [64-65].

Большинство отмеченных работ написаны без соавторов. В работе [64] автору диссертации принадлежат: постановка задачи, построение математической модели, основные выводы.

Глава 1. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ, ПРЕТЕРПЕВАЮЩИХ СКАЧКООБРАЗНЫЕ ПЕРЕХОДЫ.

При решении задач механики жидкости и газа, а также в некоторых других физических, биологических, экономических приложениях, довольно часто возникает необходимость описания процессов, в которых функции, характеризующие их не являются гладкими. Примерами таких явлений могут служить ламинарно-турбулентные переходы при изменении значения числа Рейнольдса, переходные процессы в аэродинамике, обусловленные изменением положения точки отрыва потока, фазовые переходы первого рода.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы ([8-9], [18], [69]), или более кратко метод «разрывных» функций, применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями $\tilde{m}(\alpha)$ на всей области определения α , кроме малых подобластей, в которых эти функции изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции $\tilde{m}(\alpha) = \tilde{m}(\alpha(t))$ могут вести себя случайным образом (если следить за процессом изменения аргумента много раз). Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей изменения параметров с размерами и положением этих подобластей относительно, рассматриваемых областей определения значений α . Остановимся на этом подробнее.

Предположим, существует физический процесс, описываемый функцией $\tilde{m}(\alpha(t))$, такой, что до точки α_0 функция $\tilde{m}(\alpha(t))$, определена однозначно, как функция аргумента α : $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$. В области $\alpha \geq \alpha_0$ может реализовываться один из двух возможных квазистационарных режимов рассматриваемого физического процесса. Эти два режима могут быть описаны двумя ветвями функции $\tilde{m}(\alpha(t))$: либо $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$ (состояние «1»), либо

$\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_2(\alpha)$ (состояние «2») (см. рис.1). Причем, с увеличением аргумента α устойчивость состояния «2» возрастает, а состояния «1» - падает.

В качестве модели поведения системы в области $\alpha \geq \alpha_0$, при $\dot{\alpha} > 0$, примем следующее правило: если система находится в состоянии «1», то при увеличении значения аргумента $\alpha(t)$ она может либо продолжать в нем оставаться, либо в точке $\alpha_1 > \alpha_0$ выйти из него и оказаться в точке $\alpha_2 > \alpha_0$ в состоянии «2». При этом если система в какой-либо точке α_2 окажется в состоянии «2», то при дальнейшем увеличении аргумента α в области $\alpha > \alpha_2$ она будет продолжать оставаться только в состоянии «2». Причем значение α_2 может быть как больше, так и меньше значения α_1 . Переходы между двумя состояниями в области $[\alpha_1, \alpha_2]$, если следить за процессом изменения функции \tilde{m} от аргумента $\alpha(t)$ (при $\dot{\alpha} > 0$) много раз, носят случайный характер. Точки перехода из состояния «1» в состояние «2» - α_1 и α_2 - однозначно не определены.

Рассмотрим однократное изменение функции $\tilde{m}(\alpha)$ при изменении аргумента $\alpha(t)$ в одном направлении по времени: $\dot{\alpha} > 0$. Для этого процесса определим точки α_1 и α_2 . Будем считать, что для функции $\tilde{m}(\alpha)$ характерна лишь слабая нелинейность ее ветвей: $\tilde{m}_1(\alpha)$ и $\tilde{m}_2(\alpha)$ в окрестностях точек α_1 и α_2 , соответственно. Интерполируем ветвь функции $\tilde{m}_1(\alpha)$, расположенную на плоскости (α, \tilde{m}) до точки α_1 : $\alpha \leq \alpha_1$, линейной функцией в область $[\alpha_1, \alpha_2]$. Полученную таким образом функцию обозначим, как $m_1(\alpha)$. Ветвь функции $\tilde{m}_2(\alpha)$ за точкой α_2 : $\alpha \geq \alpha_2$, интерполируем в область $[\alpha_1, \alpha_2]$ и обозначим, как $m_2(\alpha)$. В результате в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ определим две ветви

функции $m(\alpha)$: $m(\alpha) = \begin{cases} m_1(\alpha) \\ m_2(\alpha) \end{cases}$. Область, лежащую между точками α_1 и α_2 и ограниченную функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, можно характеризовать, как область неопределенности рассматриваемого процесса. Внутри этой области лежат возможные траектории перехода между состояниями «1» и «2». Среднее значение функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ будет определяться выражением:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha. \quad (1.1)$$

Учитывая, что среднее значение от функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ является числом, выражение (1.1), в случае $\langle m^2 \rangle \neq 0$, может быть записано в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1, \quad \text{где } M^2 = m^2(\varphi) / \langle m^2 \rangle, \quad \varphi = \alpha / \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Свойство переходной области с учетом направленности процесса относительно течения времени и с учетом возможности затягивания процесса перехода за счет инертности системы (когда при переходе из точки α_1 в точку

α_2 траектория, лежащая на отрезке $\left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}; m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right]$, заменяется траекторией, состоящей из двух отрезков:

$$\left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}; m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + dm_1(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha' - \alpha_1) \right] \text{ и}$$

$$\left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + dm_1(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha' - \alpha_1); m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right], \quad \text{где} \quad \alpha_1 < \alpha' < \alpha_2$$

определяются следующим образом:

- если состояние системы «1» происходит по времени раньше состояния «2», то траектории перехода из точки α_1 в точку α_2 ограничены областью треугольника с вершинами в точках А, В, С на рисунке 1, соответствующие значениям: $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}$, $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + dm_1(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} \Delta\alpha$ и $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}$;

- если процесс идет в противоположном по времени направлении, то есть состояние системы «2» происходит по времени раньше состояния «1», то траектории перехода из точки α_2 в точку α_1 ограничены областью треугольника с вершинами в точках С, D, А, соответствующие значениям: $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}$, $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} - dm_2(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_2} \Delta\alpha$ и $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}$.

Расширим пространство (α, m) дополнительным параметром η : $(\alpha, m) \rightarrow (\alpha, m, \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$ (см. рис. 1), и определим в этом пространстве функцию $m(\alpha; \eta)$ так, чтобы проекция функции $m(\alpha; \eta)$ на плоскость (α, m) совпадала с функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ в областях: $\alpha < \alpha_2$ и $\alpha \geq \alpha_2$, соответственно. Удовлетворяя этим требованиям, в качестве функции $m(\alpha; \eta)$ можно выбрать соотношение:

$$m(\alpha; \eta) = m_2(\alpha) + \eta(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)), \quad \text{где} \quad \eta = \begin{cases} 1, & \text{при } x < \alpha_2 \\ 0, & \text{при } x \geq \alpha_2 \end{cases}.$$

Аналогичное соотношение выполняется для производных:

$$dm(\alpha; \eta)/d\alpha = dm_2(\alpha)/d\alpha + \eta(dm_1(\alpha)/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha).$$

Такое представление функции $m(\alpha; \eta)$ позволит (как будет показано ниже) специальным образом определить свойство переходной области. А именно, отметить, что для заданных точек перехода из состояния «1» в состояние «2»: α_1 и α_2 , в силу принципа «причинности», статистические свойства системы в точке α_1 описывается только функцией m_1 , а в точке α_2 состояние системы не является точно определенным, поскольку в эту точку могут приводить различные траектории из точки α_1 .

Параметр η будет характеризовать состояние системы (описываемой функцией m и ее производной), принимая значение равное единице везде до точки $\alpha = \alpha_2$ и, равное нулю в этой точке и за ней:

$$\eta = \frac{m - m_2(\alpha)}{m_1(\alpha) - m_2(\alpha)} \equiv \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{dm/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha}{dm_1(\alpha)/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha} \equiv \frac{dM/d\varphi - dM_2/d\varphi}{dM_1/d\varphi - dM_2/d\varphi}.$$

Производные величины η по α , а также η по φ будут равны:

$$d\eta/d\alpha = -d\eta/d(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(\alpha - \alpha_2),$$

$$d\eta/d\varphi = -d\eta/d(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(\varphi - \varphi_2)$$

где $\delta(\alpha - \alpha_2)$ и $\delta(\varphi - \varphi_2)$ - дельта-функции.

Найдем среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ (см. (1.1)) в области перехода $[\alpha_1, \alpha_2]$ в расширенном пространстве $(\alpha, m; \eta)$.

Проинтегрировав по частям выражение для среднего значения квадрата функции $m(\alpha)$:

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} m^2(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta\alpha} \int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm,$$

и, учитывая непрерывность функции m только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной η :

$$dm = \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\alpha} d\alpha = -(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)) \delta(\alpha - \alpha_2) d\alpha,$$

получим соотношение:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha \right) - \frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2. \quad (1.2)$$

Для краткости в этом выражении опущены обозначения показывающие, что значение функции m_2 берется в точке $\alpha = \alpha_2$: $m_2 = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$, а значение функции m_1 и ее производной - в точке $\alpha = \alpha_1$: $m_1 = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$, $dm_1/d\alpha = dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1}$.

При выводе соотношения (1.2) значение функции $m_1(\alpha)$ - в точке $\alpha = \alpha_2$, в силу условия линейной экстраполяции, определялось как

$$m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} \Delta\alpha = m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из выражения (1.2) видно, что среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$ определяется ее значениями в двух крайних точках: α_1 и α_2 , а также значением производной функции в точке α_1 . Причем, член выражения $\frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2$ определен значениями безразмерной координаты и квадрата функции в точке α_1 только на ветви m_1 . А произведение $\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha \right)$ описывает «смешанное» состояние системы в точке α_2 сразу для двух ветвей функции. Этот член пропорционален среднегеометрическому между значением функции на ветви m_2 и интерполированным значением функции на ветви m_1 . Несимметричность выражения в отношении двух ветвей среднего квадрата функции $m(\alpha)$ в

переходной области характеризует поведение этой функции в окрестностях точек α_1 и α_2 в соответствии с принципом «причинности»: для рассматриваемого процесса (с заданными точками «ухода» из состояния «1» - α_1 и «прихода» в состояние «2» - α_2): до достижения точки α_1 единственным возможным состоянием системы является состояние «1», а область: $[\alpha_1, \alpha_2]$ является переходной («смешанной»).

Вернемся к вероятностному представлению функции $m(\alpha)$ в области перехода: $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Самопроизвольный переход неравновесного физического процесса с одного режима на другой возможен в том случае, если в переходной области $\varphi \times M(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi), M_2(\varphi)]$ ветви функции $M_1(\varphi)$ и $M_2(\varphi)$ - такие, что область неопределенности, возникающая при переходе от пространства $(\varphi, M; \eta)$ к пространству (φ, M) , не меньше, чем переходная область. То есть, когда выполняется дисперсионное соотношение для области перехода.

Чтобы найти такое дисперсионное соотношение, рассмотрим эрмитовые операторы $\hat{k} = i d/d\varphi$ и $\hat{\eta} = i\eta$, действующие в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, в котором в качестве нормы скалярного произведения базисных

функций определено соотношение: $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1$. Скалярное произведение на

пространстве $L^2[\varphi_1, \varphi_2]$ задается равенством: $(f, g) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} fg d\varphi$.

Коммутационное соотношение этих операторов задается выражением:

$$\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M = M \delta(\varphi - \varphi_2).$$

Используя соотношение Робертсона — Шрёдингера и непосредственно следующее из него соотношение неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left[\left(\hat{k}^2 M, M \right) - \left(\hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^{\hat{\eta}} = \left[\left(\hat{\eta}^2 M, M \right) - \left(\hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta_M^{\hat{k}} \Delta_M^{\hat{\eta}} \geq \frac{1}{2} \left| \left(\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, а также учитывая непрерывность функции M только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной η , получим следующие выражения в пространстве $(\varphi, M; \eta)$:

$$\left(\hat{k} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{dM}{d\varphi} d\varphi = -i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \eta} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -\frac{i}{2} M_2 \left(M_1 + \frac{dM_1}{d\varphi} - M_2 \right),$$

$$\left(\hat{k}^2 M, M \right) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{d^2 M}{d\varphi^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dM}{d\varphi} \right) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right),$$

$$\left(\hat{\eta} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i \varphi \eta M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi +$$

$$+ 2i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -i M_1^2 \varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2,$$

$$\left(\hat{\eta}^2 M, M \right) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta^2 d\varphi = -\varphi \eta^2 M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi -$$

$$- 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta^2 M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = M_1^2 \varphi_1,$$

$$\left| \left(\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi \right| = \frac{1}{2} \left| M^2(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} \right| = \frac{1}{2} |M_2^2|.$$

При выводе этих соотношений, в области перехода $[\varphi_1, \varphi_2]$ принималась линейная интерполяция функции $M_1(\varphi)$ из области $\varphi \leq \varphi_1$. Поэтому, значение

разности $M_1(\varphi) - M_2(\varphi)$ и производной этой разности в точке $\varphi = \varphi_2$ равны, соответственно,

$$M_1(\varphi_1) + \left. \frac{dM_1(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} - M_2(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \left. \frac{dM_1(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} - \left. \frac{dM_2(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_2}.$$

Значение функции $M(\varphi)$ в точке $\varphi = \varphi_2$ равно значению функции на второй ветви в этой точке, то есть $M(\varphi)|_{\varphi=\varphi_2} = M_2(\varphi_2)$.

Из приведенных выражений, следует,

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left(\frac{1}{2} M_2 \left(\frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{4} M_2^2 \left(M_1 - M_2 + \frac{dM_1}{d\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_M^{\hat{\eta}} = \left(M_1^2 \varphi_1 + \left(\frac{1}{2} M_2^2 \varphi_2 - M_1^2 \varphi_1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Параметр $\Delta_M^{\hat{\eta}}$ определяет среднеквадратичное отклонение величины η в переходной области $[\varphi_1, \varphi_2]$ в пространстве $(\varphi, M; \eta)$. Поскольку в рассматриваемой области осуществляется переход с ветви $M_1(\varphi)$ (то есть при $\eta = 1$) на ветвь $M_2(\varphi)$ функции $M(\varphi)$ (то есть при $\eta = 0$), необходимо, чтобы среднеквадратичное отклонение величины η было равно половине интервала между ее значениями в начальном и конечном состояниях. То есть $\Delta_M^{\hat{\eta}} = 1/2$.

Накладывая это условие, получим соотношение, связывающее безразмерные величины $\varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2$:

$$4M_1^2 \varphi_1 + (M_2^2 \varphi_2 - 2M_1^2 \varphi_1)^2 = 1.$$

Используя зависимость (1.2) для определения среднего значения $\langle m^2 \rangle$ перейдем к соответствующей зависимости с размерными величинами: $\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha, \alpha_2, m_1, m_2$:

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right) m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2. \quad (1.3)$$

Дисперсионное соотношение для безразмерных значений функций и их производных имеет вид:

$$M_2 \left(\frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} M_2^2 \left(M_1^2 - 2M_1 M_2 + 2 \frac{dM_1}{d\varphi} (M_1 - M_2) + \left(\frac{dM_1}{d\varphi} \right)^2 \right) \geq 0.$$

А для соответствующих им размерных величин его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2 \left(\frac{dm_1}{d\alpha} \right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{dm_1}{d\alpha} \left(m_1 - m_2 + \alpha_2 \left(\frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} \right) \right) + \\ + 2m_1 \left(\alpha_2 + \frac{m_1}{m_2} (\Delta\alpha - \alpha_2) \right) \left(\frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} \right) + m_1 (m_1 - 2m_2) \geq 0. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Выражения (1.3)-(1.4) являются алгебраическими. Они связывают значения функций $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$, $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$ и значения их производных $dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = dm_1/d\alpha$, $dm_2(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = dm_2/d\alpha$ в точках $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно, с протяженностью области перехода $\Delta\alpha$, которая отделяет точку α_2 от точки α_1 .

Выражение (1.2) накладывает естественные ограничения на его применение для исследования процессов, описываемых преобразованными функциями и координатами: они должны быть такими, чтобы значение $\langle m^2 \rangle$ не равнялось нулю. В противном случае не возможно отнормировать на единицу базис пространства, то есть задать алгебру, в которой есть и ноль, и единица. В частности, с помощью предлагаемого метода не могут быть описаны процессы, в которых значения m_1 и $dm_1/d\alpha$ одновременно равны нулю. По этой же причине не может быть равно нулю значение m_2 . Так как в противном случае из (1.3) следует равенство нулю значения m_1 или значения

α_1 , что одновременно с условием $m_2 = 0$ повлечет условие равенства нулю значения $\langle m^2 \rangle$.

Необходимо напомнить, что соотношения (1.3)-(1.4) находились в предположении, что скачкообразный переход с ветви функции “1” на ветвь функции “2” происходит из точки α_1 в точку α_2 при однократном изменении по времени функции $\alpha(t)$. Если в другом процессе реализуются другие координаты точек α_1 и α_2 , то это не приведет к изменениям вида соотношений (1.3)-(1.4). Это связано с тем, что система (1.3)-(1.4) определяет лишь возможные комбинации параметров: $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$, $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$, $dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = dm_1/d\alpha$, $dm_2(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = dm_2/d\alpha$, α_2 , $\Delta\alpha$ (или α_1) для физического процесса с двумя (или несколькими) состояниями, описываемыми ветвями функции $m(\alpha(t))$, со скачкообразными изменениями ее значений в какой либо области аргумента. В общем случае, полученная система (1.3)-(1.4) является недоопределенной. В результате, комбинация точек перехода, как правило, является неединственной. И поэтому, при изменении функции $m(\alpha)$ (где $\alpha = \alpha(t)$) с течением времени сначала в одном, а затем в другом направлении по α , переход может происходить (и обычно происходит) в разных точках.

Из-за инертности физических систем, в нестационарных процессах происходит “затягивание” существования текущего процесса. Другими словами, если вероятность нахождения системы в двух состояниях, описываемых двумя ветвями функции, одна и та же, то система продолжает оставаться в том состоянии, в котором уже пребывает, до тех пор, пока в результате случайной флуктуации или возмущающего воздействия (для возникновения, которых требуется некоторое время) не перейдет в другое

состояние. В этом случае на плоскости с координатами (α, m) будет изображена не однопараметрическая, а разрывная гистерезисная кривая.

Необходимо также отметить, что соотношения (1.3)-(1.4) не являются инвариантным по отношению к выбору начала отсчета оси α . В предложенном методе это происходит из-за несимметричности относительно параметра η состояний, характеризуемых функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, а также из-за “привязки” процесса перехода из одного состояния системы в другое к масштабу этого перехода: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. В описываемых этим методом физических процессах это свойство “переходных” состояний определяется конкретными диапазонами параметров, а также наличием собственных масштабов таких процессов. Например, при описании зависимости силы сопротивления шара в потоке жидкости от числа Рейнольдса, возникает скачкообразный переход с одной ветви функции на другую при изменении режима течения жидкости от ламинарного к турбулентному. Этот переход не может происходить при малых значениях числа Рейнольдса. Минимальное - критическое значение этого числа, а также диапазон значений чисел Рейнольдса при которых возможен такой переход, можно считать масштабами переходного процесса.

Практически все процессы в природе, совершающие скачкообразные переходы между различными состояниями, могут быть описаны непрерывными функциями, имеющими в области перехода разрыв производных в одной или нескольких точках. Однако эти функции имеют, как правило, вероятностную – стохастическую природу либо во всей переходной области, либо в какой-то ее части. Принятое математическое приближение описания зависимости $m(\alpha)$ в виде функции с разрывом первого рода, позволяет в некоторых задачах определить размер и/или положение этой области, используя информацию о значениях функции и ее производных только на ее границах.

С помощью разработанного метода в главе 2 будет решена задача определения размерности односвязных фрактальных структур, образующихся в некоторых классах динамических процессов.

Выводы к главе 1.

Разработан метод описания процессов, в которых функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных.

Такие функции в локальных областях могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей. Метод позволяет решать задачу поиска соотношений, связывающих значения функций и производных на границах областей их скачкообразного изменения параметров с размерами и положением этих областей.

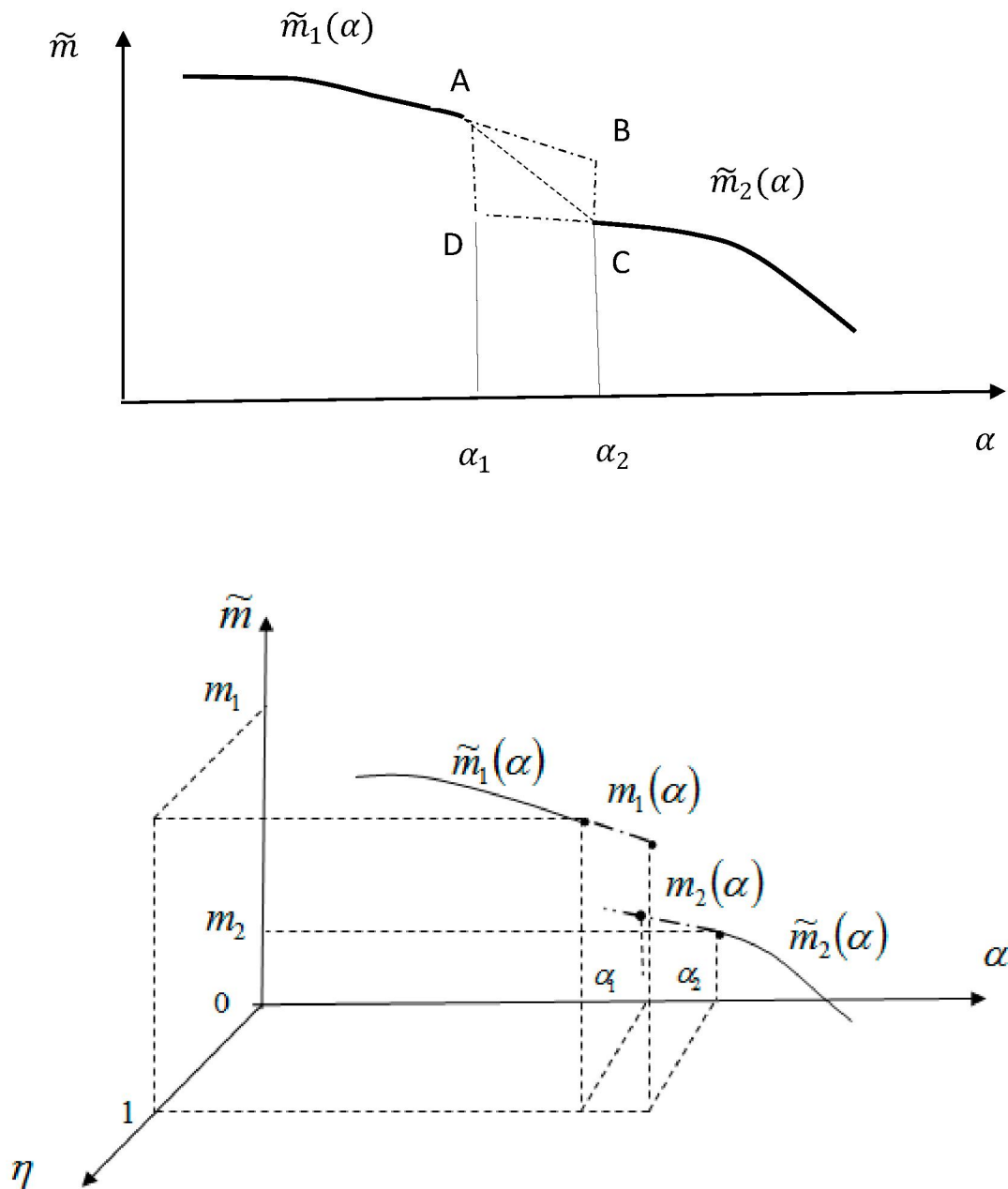


Рис. 1

Схематичное изображение функции с разрывом первого рода на плоскости и в расширенном пространстве переменных.

Глава 2. МЕТОД ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В РАСШИРЕННОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ В ОДНОСВЯЗНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ.

В окружающем нас мире существует огромное количество объектов, которые можно характеризовать дробными размерностями и, которые, в некотором приближении, проявляют свойства самоподобия на разных масштабах рассмотрения [1-2]. Такие объекты называются фрактальными. Это и пористые грунты, и русла рек, и деревья, и облака... Список этот можно было бы продолжать очень долго. Достаточно сказать, что и сама Вселенная, по мнению многих исследователей [3-4], - фрактальна. В технических задачах также возникает необходимость описания объектов с фрактальными свойствами, например, при исследовании композитных материалов.

Данная глава посвящена разработке теоретического подхода к определению параметров, характеризующих односвязные физические фрактальные объекты, на основе метода описания разрывных функций, приведенного в главе 1, а также разработке методов описания физических процессов в односвязных фрактальных структурах.

Понятие дробной размерности, известное под названием размерности Хаусдорфа-Безиковича, было впервые применено для определения размерности фрактальных объектов [1] Мандельбротом. Согласно определению Мандельброта, фрактал – это множество, обладающее некоторым свойством самоподобия на разных масштабах, размерность Хаусдорфа-Безиковича

которого: $D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta^{-1}}$, строго больше его топологической размерности.

Здесь $N(\delta)$ - количество элементов фрактала на масштабе рассмотрения δ .

Если рассматриваемый объект является самоподобным на всех масштабах рассмотрения, то размерность Хаусдорфа-Безиковича совпадает с

размерностью, выражаемой соотношением: $D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}}$, где N - число элементов, которое получается из одного элемента фрактала при рассмотрении его на следующем более мелком масштабе, $r = const$ - коэффициент подобия.

Определению размерности физических фрактальных объектов посвящено огромное количество работ (см., например, [5-7]). Однако, в основном, разработанные подходы имеют отношение к определению размерности уже сформированной фрактальной структуры “эмпирическими” методами, когда меры длины, площади поверхности или объема фрактального объекта исследуется на разных масштабах, а затем определяются пределы сходимости:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta^{-1}}.$$

Возникновение и рост физических объектов с дробными размерностями длины, поверхности и объема обусловлен развитием внутренних нестационарных процессов в системах с целочисленными размерностями. При этом имеется “зародыш” с целочисленной размерностью, из которого вследствие развития нестационарных процессов и возникает фрактальная структура. Исходя из этого, можно подойти к определению размерности физического фрактального объекта на основе теоретического подхода - с помощью метода описания «разрывных» функций.

2.1. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче образования вязких “пальцев”.

К первому классу задач, которые могут быть разрешены с помощью системы (1.3)-(1.4), можно отнести те задачи, в которых ничего не известно о размере области перехода $\Delta\alpha$, но при этом, получающийся фрактал можно считать самоподобным на всех рассматриваемых масштабах. Другими словами, изменяя масштаб рассмотрения, мы будем видеть каждый раз картину подобную изначальной. При этом должна существовать какая-либо

автомодельная зависимость, связывающая, к примеру, характерные размеры элементов фрактала (или параметры, зависящие от них) с линейными размерами или масштабом рассмотрения данного фрактала. Такой фрактал можно считать “идеальным” с математической точки зрения.

В такой “идеальной” постановке можно рассмотреть, к примеру, задачу о вытеснении менее вязкой жидкостью более вязкую, с образованием вязких “пальцев”. Задача состоит в следующем. Изотропное пространство, заполнено вязкой жидкостью, с центром координат в точке $R = 0$. В эту точку подводится менее вязкая жидкость. В начале процесса менее вязкая жидкость имеет форму расширяющегося шара. Через некоторое время эта форма теряет свою устойчивость, и на поверхности шара появляются “отростки” - вязкие “пальцы”. Какое-то время они растут, а затем также теряют устойчивость и на их поверхности появляются “отростки”. Затем, все повторяется. Будем предполагать, что возникающий объект является вложенным в трехмерное пространство и самоподобным на разных масштабах. Это означает, что если посмотреть на область, занятую менее вязкой жидкостью с большим увеличением, то изначально расширяющийся шар окажется не однородным, а, так же как и остальная область, обладающий сложной - фрактальной структурой.

В точках потери устойчивости и возникновения нового каскада вязких “пальцев” происходит разрыв значений градиента объема, заполненного менее вязкой жидкостью.

Среднее по радиусу R значение градиента объема V легкой жидкости, может быть выражено в виде:

$$\left\langle \frac{dV}{dR} \right\rangle = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dV}{dR} dR. \quad (2.1)$$

Выражение для объема рассматриваемого объекта размерности D , может быть представимо в виде:

$$V = aR^D + b, \quad (2.2)$$

где R - сферическая координата в квазиизотропном трехмерном пространстве, с началом координат в точке подвода менее вязкой жидкости, a, b - константы, зависящие от формы области, занимаемой менее вязкой жидкостью (например, для круга: $b = 0$, $a = \pi$, $D = 2$; для шара: $b = 0$, $a = \frac{4}{3}\pi$, $D = 3$). При определении объема фрактального объекта, число масштабов рассмотрения должно быть ограничено. В этом случае объем фрактального объекта в евклидовом пространстве будет конечен, при этом $b \neq 0$.

Используя выражения (2.1)-(2.2), получим зависимость:

$$\left\langle \frac{dV}{dR} \right\rangle = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} aDR^{D-1} dR = \frac{1}{(aD)^{1/(D-1)}(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} ((aD)^{1/(D-1)} R)^{D-1} d((aD)^{1/(D-1)} R) = \frac{1}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} \int_{\tilde{R}_1}^{\tilde{R}_2} \tilde{R}^{D-1} d\tilde{R}, \quad (2.3)$$

где a и D - параметры фрактального объекта: D - размерность фрактала, a - константа, характеризующая его форму, $\tilde{R} = (aD)^{1/(D-1)} R$.

Изменения функции \tilde{R} можно достигать двумя способами: 1) изменяя R при фиксированном значении a и 2) изменяя a при фиксированном значении R . Фактически, переход от одного способа к другому является перенормировкой параметров. Использование приближения “идеального” фрактала позволяет производить эту перенормировку.

Выберем какой-либо масштаб рассмотрения в качестве нулевого. В нашем случае масштаб задается фиксированным радиусом шара R_0 . Объем этого шара можно определить в D -мерном пространстве, при этом коэффициент a примет новое значение a_D отличное от величины $\frac{4}{3}\pi$: $a_D \neq \frac{4}{3}\pi$.

Если в D -мерном пространстве рассматривать переход от шара радиуса R_0 к развитой фрактальной структуре внутри него, имеющую ту же, что и

пространство размерность D , то при этом в точке R_0 изменится коэффициент a от значения a_D до значения a_{D_fr} .

Переходя к принятым в методе разрывных функций переменным, выражение (2.3) можно записать в виде:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2 d\alpha, \quad \text{где } \alpha = \tilde{R}, \quad m = \tilde{R}^p, \quad p = (D-1)/2.$$

Для односвязного объекта, размерность D не может быть меньше единицы и, следовательно, величина p должна быть неотрицательной. Кроме того, $D \leq 3$. Таким образом, $0 \leq p \leq 1$.

При таком выборе параметров: $\Delta\alpha = \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1$, $m_1 = \tilde{R}_1^p$, $dm_1/d\alpha = p\tilde{R}_1^{p-1}$, $m_2 = \tilde{R}_2^p$, $dm_2/d\alpha = p\tilde{R}_2^{p-1}$.

Величины a , входящие в функции \tilde{R}_1 или \tilde{R}_2 будут соответственно a_1 или a_2 .

Подставив эти выражения в зависимость (1.3) и обозначив

$$\frac{\tilde{R}_1}{\tilde{R}_2} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{D-1}} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{2p}} = \gamma,$$

получим уравнение:

$$\gamma^{4p+2} + 2(3-p)\gamma^{3p+1} + 2p\gamma^{3p} - 4\gamma^{2p+1} - (1+p)^2\gamma^{2p} + 2(p^2+p)\gamma^{2p-1} - p^2\gamma^{2p-2} + 1 = 0. \quad (2.4)$$

А из соотношения (1.4) (в предположении минимальности дисперсии), следует:

$$2p\gamma^{2p+1} - 2p\gamma^{p+2} - (p^2-p)\gamma^{p+1} + 4(p^2-p)\gamma^p - 3p^2\gamma^{p-1} - 2(p^2-1)\gamma + 2(p^2+p) = 0. \quad (2.5)$$

Свойство самоподобия фрактала позволило выразить все неизвестные величины в соотношениях (1.3), (1.4) через два параметра p и γ и, тем самым, сделать эту систему определенной. В качестве автомодельной зависимости здесь выступает функция $\tilde{R} = (aD)^{1/(D-1)} R$, связывающая расстояние R ,

характеризующее масштаб рассмотрения фрактала, с параметром a , зависящим от формы и размеров элементов фрактала.

Выражения (2.4)-(2.5) определяют возможные соотношения размерностей физических фрактальных объектов и их геометрических параметров.

Решая численно систему уравнений (2.4)-(2.5), найдем ее корень: $p \approx 0.85 \Rightarrow D \approx 2.7$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными по росту фрактальных структур вложенных в трехмерное и квазитрехмерное пространство во многих природных фрактальных объектах, начиная от геофизических и заканчивая биологическими объектами, размерности которых находятся в окрестности найденного значения [10], [108-109]. Под квазитрехмерном пространством здесь понимается трехмерное пространство, в котором существуют границы в направлении одной из координат, и не существует в направлении двух других координат. В этом случае вязкие “пальцы” будут развиваться в плоскости, не имеющей границ. Размерность такой фрактальной структуры на плоскости будет равна $D_{пл} \approx 1.7$, но полная размерность, при этом, будет равна $D = 1 + D_{пл} \approx 1 + 1.7 = 2.7$.

Значение параметра γ , являющееся решением системы уравнений (2.4)-(2.5), при этом равно: $\gamma = (a_1/a_2)^{1/(D-1)} \approx 0.09$. Следовательно, $a_2 \approx 59.95a_1$.

Один из коэффициентов a_1 или a_2 должен характеризовать объем шара в пространстве с размерностью $D \approx 2.7$. Поскольку величина этой размерности мало отличается от тройки, то следует ожидать, что значение коэффициента будет незначительно отличаться от значения, равного $\frac{4}{3}\pi$. Из последнего соотношения видно, что таким коэффициентом может быть только коэффициент a_2 , так как в противоположном случае, значение a_2 будет чрезвычайно большим (что будет соответствовать объекту с очень большой плотностью). В данной работе такие «экзотические» объекты рассматриваться не будут. Поэтому, индекс “2” присвоим значениям функции m и ее

производной, характерным для начальной формы объекта без вязких пальцев, в нашем случае для шара, то есть $a_2 = a_D$, а индексом “1” будут обозначаться значения функции и ее производные, характерные для формы объекта с вязкими пальцами, то есть $a_1 = a_{D_fr}$.

Подчеркнем еще раз, что геометрические координаты R_1 и R_2 , при выбранном описании функций m_1 и m_2 совпадают: $R_1 = R_2 = R_0$, D - характеризует размерность пространства и, поэтому является постоянной величиной, а различие \tilde{R}_1 и \tilde{R}_2 обусловлено отличием коэффициентов a_1 и a_2 , определяющих градиент объема объекта, размерности D , на разных масштабах рассмотрения развития неустойчивости. Коэффициент a_2 - характеризует градиент объема шара в D -мерном пространстве. Если $D \neq 3$, то $a_2 \neq \frac{4}{3}\pi$.

Пересчет коэффициента a_2 на случай пространства с произвольной размерностью D можно выполнить, используя условие равенства производных от объемов по радиусу в точке R_0 для трехмерного и D -мерного пространства:

$$\left. \frac{d(a_2 R^D)}{dR} \right|_{R=R_0} = \left. \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{dR} \right|_{R=R_0} \implies a_2 D R_0^{D-1} = 4\pi R_0^2 \implies$$

$$\implies a_2 = \frac{4\pi}{D} R_0^{3-D} \approx \frac{4\pi}{2.7} R_0^{0.3} \approx 4.65 R_0^{0.3}.$$

Здесь R_0 - характерный масштаб рассмотрения.

Значение коэффициента a_1 будет определяться соотношением

$$a_1 \approx \frac{a_2}{59.95} \approx \frac{4.65}{59.95} R_0^{3-D} \approx 0.08 R_0^{0.3}.$$

Таким образом, производная объема, занимаемого фрактальной структурой, по радиальной координате на границе развития каскада неустойчивости будет определяться выражением:

$$\frac{dV}{dR} = a_1 D R^{D-1} \approx 0.08 \cdot 2.7 R_0^{0.3} R^{1.7} \approx 0.21 R_0^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{1.7},$$

или

$$\frac{dV}{d(R/R_0)} \approx 0.21 R_0^3 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{1.7} \Rightarrow \Delta V(R) \approx 0.08 R_0^3 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2.7} + const.$$

После того, как мы определили размерность фрактальной структуры вязких “пальцев” D и коэффициент, характеризующий ее форму - a_1 , можно вновь осуществить перенормировку параметров в функции $\tilde{R} = (aD)^{1/(D-1)} R$. А именно, считать теперь постоянной величиной параметр $a = a_1$, а переменной - координату R . В этом случае, $const$, входящая в выражение для объема, занимаемого фрактальной структурой, приобретает вполне определенное значение. Поскольку в точке $R = R_0$ должен происходить переход от трехмерного объекта (в нашем случае – шара) к фрактальной структуре (начинают “расти” вязкие “пальцы”), то в ней $V(R)|_{R=R_0} = \frac{4}{3} \pi R_0^3$.

Следовательно,

$$V(R) \approx \frac{4}{3} \pi R_0^3 + 0.08 R_0^3 \left[\left(\frac{R}{R_0} \right)^{2.7} - 1 \right], \text{ где } R \geq R_0. \quad (2.6)$$

Напомним, что параметр R_0 определяет масштаб рассмотрения. Одновременно он определяет границы области, на которой развивается “самый первый” каскад неустойчивостей. “Самый первый” масштаб, разумеется, имеет отношение не к “идеальному” математическому фракталу, а к реальному физическому объекту (к которому мы перешли в результате второй

перенормировки функции $\tilde{R} = (aD)^{W(D-1)} R$. На этом масштабе каскад неустойчивостей начинает развиваться в силу совокупности внутренних и внешних процессов, которые зависят от конкретных физических условий задачи: поверхностного натяжения, капиллярных сил и т.д. (см., например, [10]). И, следовательно, от этих условий будет зависеть величина R_0 , нахождение которой каждый раз является отдельной задачей, требующей разрешения.

Таким образом, с помощью полученных уравнений в работе найдена размерность фрактального пространства, образованного неустойчивостями в виде вязких “пальцев”, вложенного в трехмерное или квазитрехмерное пространство. Величина этой размерности $D \approx 2.7$ хорошо соответствует имеющимся экспериментальным данным [10], [108-109].

Получено выражение зависимости объема от радиуса R , занимаемого фрактальной структурой размерности $D \approx 2.7$.

2.2. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задаче о росте дендритов.

Второй класс задач, которые можно решать только на основе полученных соотношений (1.3)-(1.4) будет характеризоваться тем, что фрактальный объект является самоподобным только в определенном смысле: уменьшая масштаб рассмотрения мы будем видеть все более мелкие детали, которые не были видны ранее, крупные же детали будут оставаться неизменными (в них не будет прорисовываться более тонкая структура), равномасштабные структуры, при этом, возникают на разных расстояниях от начальной точки отсчета. В такой постановке невозможна перенормировка параметров, применяемая при решении задач первого класса. При этом важной характеристикой задач второго класса может служить то, что зона перехода от элементов одного масштаба к элементам другого масштаба осуществляется в малой области –

“тонком” слое. Приближение “тонкого” слоя проявляется в том, что в переходных зонах рост неустойчивостей происходит локализовано – по одному отростку, в отличие от задач первого класса, где этот процесс можно считать коллективным явлением, охватывающим сразу весь рассматриваемый масштаб. Это различие процессов определяется разницей масштабов переходных зон: $\Delta\alpha/\alpha_2 \sim 1$ - в задачах первого класса, и $\Delta\alpha/\alpha_2 \rightarrow 0$ - в задачах второго класса.

Примерами фрактальных объектов второго класса могут служить дендриты: кровеносная и нервная системы, стримеры, молнии, русла рек деревья... Такого рода фракталы называют “лохматыми” фракталами. Вначале они имеют форму близкую к цилиндрической или изогнутой цилиндрической, а после развития неустойчивостей приобретают вид фрактальных объектов, вложенных в трехмерное пространство.

Для определения параметров фракталов второго класса, так же как и в предыдущей задаче определим среднее значение градиента объема V , заключенного в пространстве, ограниченном сферами радиусами R_1 и R_2 , в виде (2.1).

Используя выражение для объема (2.2), вновь получим зависимость:

$$\left\langle \frac{dV}{dR} \right\rangle = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} a D R^{D-1} dR.$$

Но теперь мы не будем рассматривать одно значение размерности для всего пространства. Предположим, что в зоне неустойчивости: $R_1 < R \leq R_2$ происходит переход от трехмерного объекта (цилиндра), к объекту с фрактальной структурой размерности D_{fr} . При этом изменяется коэффициент a от значения $a = a_0$ до величины $a = a_{fr}$.

В отличие от предыдущей задачи из-за отсутствия автомодельных зависимостей в области перехода мы не можем производить перенормировку параметров. Поэтому, решая задачу с помощью метода разрывных функций, в

качестве переменной необходимо использовать непосредственно координату R . А именно, переходя к принятым в этом методе переменным, последнее выражение можно записать в виде:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2 d\alpha, \quad \text{где } \alpha = R, \quad m = \sqrt{aDR}^{\frac{D-1}{2}}.$$

Для односвязного объекта, размерность D_{fr} не может быть меньше единицы и, кроме того, $D_{fr} \leq 3$.

При таком выборе параметров: $\alpha_2 = R_2$, $\Delta\alpha = R_2 - R_1$, $m_2 = \sqrt{3a_0}R_2$, $\frac{dm_2}{d\alpha} = \sqrt{3a_0}$, $m_1 = \sqrt{a_{fr}D_{fr}}R_1^{\frac{D_{fr}-1}{2}}$, $\frac{dm_1}{d\alpha} = \sqrt{a_{fr}D_{fr}}\frac{D_{fr}-1}{2}R_1^{\frac{D_{fr}-3}{2}}$ (здесь, так же как и в задачах о фракталах первого класса, за устойчивое состояние “1” принимается геометрия фрактальной структуры, а за неустойчивое “2” – геометрия трехмерного объекта с геометрическим параметром $\sqrt{a_2D} = \sqrt{3a_0}$).

Если считать, что размер переходной области стремится к нулю:

$$\Delta\alpha = R_2 - R_1 \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad R_1 \rightarrow R_2 = R_0, \quad \text{то} \quad m_2 \approx \sqrt{3a_0}R_0, \quad \frac{dm_2}{d\alpha} = \sqrt{3a_0}, \quad m_1 = \sqrt{a_{fr}D_{fr}}R_0^{\frac{D_{fr}-1}{2}},$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha} = \sqrt{a_{fr}D_{fr}}\frac{D_{fr}-1}{2}R_0^{\frac{D_{fr}-3}{2}}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{a_{fr}D_{fr}}{3a_0}}R_0^{\frac{D_{fr}-3}{2}}, \quad \text{а уравнение (1.3) и}$$

соотношение (1.4) (в предположении минимальности дисперсии), преобразуются к виду:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^4 - 6\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^3 + 5\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = 1, \quad (2.7)$$

$$\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha}\right) + \frac{m_2}{2\alpha_2}\left(\frac{m_1}{m_2} - 2\right) = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) является алгебраическим уравнением четвертой степени для переменной m_1/m_2 . Его действительными решениями являются два корня:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_1 \approx 5.00994, \quad \left(\frac{m_1}{m_2}\right)_2 \approx -0.36887.$$

Уравнение (2.8), с учетом полученных решений, можно переписать в виде:

$$\frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} - k_i \frac{m_2}{\alpha_2} = 0, \quad \text{где} \quad k_i = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_i - 2}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_i - 1} \approx \begin{cases} 0.37531, & i = 1 \\ 0.86527, & i = 2. \end{cases}$$

или

$$\sqrt{\frac{a_{fr} D_{fr}}{3a_0} R_0^{\frac{D_{fr}-3}{2}} \frac{D_{fr}-1}{2}} = 1 + k_i.$$

Учитывая, что $\sqrt{\frac{a_{fr} D_{fr}}{3a_0} R_0^{\frac{D_{fr}-3}{2}}} = \frac{m_1}{m_2}$, получим выражение

$$D_{fr} = \frac{2(1+k_i)}{\left(m_1/m_2\right)_i} + 1 \approx \begin{cases} 1.54903, & i = 1 \\ -9.11370, & i = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что физический смысл имеет только первое решение: $D_{fr} \approx 1.55$.

И, следовательно, объем фрактальной области должен определяться выражением: $V \approx a_{fr} R^{1.55} + b$.

В задачах о “лохматых” фракталах изначальный трехмерный объект имеет форму, близкую к форме цилиндра, поэтому в точке R_0 должно выполняться соотношение:

$$a_{fr} R_0^{1.55} + b = SR_0 = \frac{S}{R_0^2} R_0^3 = a_0 R_0^3,$$

где S - площадь основания этого цилиндра, $a_0 = S/R_0^2$. И, кроме того,

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)_1 = \sqrt{\frac{a_{fr} 1.55}{3a_0}} R_0^{-0.725} \approx 5.01,$$

следовательно, $a_{fr} \approx 48.58 a_0 R_0^{1.45} = 48.58 SR_0^{-0.55}$, а $b \approx -47.58 SR_0$.

Окончательно выражение для объема фрактальных объектов, образовавшихся в результате таких динамических процессов, когда можно использовать приближение тонкого слоя зоны развития возмущений ($\Delta\alpha \rightarrow 0$), развивающихся на поверхности цилиндра, запишем в виде:

$$V(R) \approx 48.58SR_0(R/R_0)^{1.55} - 47.58SR_0. \quad (2.9)$$

Величина размерности $D_{fr} \approx 1.55$, полученная в работе, для дендритов хорошо совпадает с экспериментальными данными [11]-[12].

Первый рассмотренный в работе класс задач (для фракталов типа «вязкие пальцы») так же, как и класс задач по определению размерности дендритов, может быть решен в общей постановки разрывных функций (без использования процедуры перенормировок), но для таких задач неприемлемо допущение «тонкого» слоя развития возмущений. А без этого допущения задача становится переопределенной при использовании только системы (1.3)-(1.4) и, поэтому, при решении задачи первого класса в таком виде, даже на этапе определения общей зависимости $V(R)$, становится необходимым привлечение дополнительных экспериментальных или теоретических сведения о каждой конкретной решаемой задаче.

В задачах второго класса, так же как и в задачах первого класса, параметр R_0 определяет одновременно и масштаб рассмотрения и масштаб, на котором развивается неустойчивость. Величина этого параметра, также зависит от конкретных физических условий, таких как конвективные, капиллярные, поверхностные и прочие эффекты, и его нахождение так же является отдельной задачей.

Решение таких задач и, одновременно использование полученных в данной работе теоретических зависимостей $V(R)$ ((2.6), (2.9)), позволит в дальнейшем определять возможные геометрические структуры фракталов, рассмотренных классов.

2.3. Описание физических процессов в односвязных фрактальных системах с помощью дифференциальных уравнений без использования дифференциальных производных по времени в дробной степени.

Огромное количество физических процессов в окружающем нас мире протекают в пространствах, обладающих сложной геометрией, моделью для которых могут служить пространства с дробными размерностями – фрактальные пространства. Таковыми являются процессы перетекания жидкости внутри деревьев, течение крови по кровеносным сосудам, перколяция жидкостей, в том числе нефти, в пористых средах и многое другое.

Тем не менее, на протяжении столетий математика развивалась в направлении описания различных физических процессов с помощью дифференциальных уравнений в евклидовых пространствах. Эти модели хорошо работают и в тех случаях, когда необходимо описать процессы в локальных областях фрактальных пространств. Методы вычислительной математики позволяют все более детально рассчитывать отдельные участки таких пространств. Однако этот экстенсивный подход сталкивается с определенными трудностями связанными не только с необходимостью увеличения памяти машин и скорости счета, но и с трудностями методологического характера.

Проблемы, возникающие в такого рода задачах, аналогичны проблемам замыкания моментов при описании турбулентности с помощью уравнений Навье-Стокса. Впрочем, и сама турбулентность, как известно [13], является примером фрактального множества вихрей.

В последние десятилетия появились методы описания физических процессов, протекающих во фрактальных пространствах, с помощью уравнений в частных производных, описывающих протекание аналогичных процессов в пространствах с евклидовой геометрией, исходя из знания размерности фрактального пространства.

Обычно, в подобных случаях либо заменяют производные по времени и производные по пространственным переменным на производные в дробной степени, соответствующие производным типа Римана-Лиувилля [14-15], либо используют, так называемые, аномальные коэффициенты. Например, аномальный коэффициент диффузии, зависящий либо от времени, либо от координаты, либо от обеих переменных сразу [16].

Главным недостатком обоих подходов видится невозможность учета влияния масштаба структурного элемента фрактала на скорость протекания процесса, хотя в задачах подобного рода такая зависимость явно прослеживается.

В случае первого подхода, прослеживается еще и отсутствие четкой обоснованности перехода к дифференцированию с дробными производными.

Поясним сказанное. Начнем с обоснованности использования дифференциальных производных дробной степени на примере уравнения теплопроводности (диффузии).

Напомним, что при описании евклидовых (с целым числом измерений) пространств увеличение числа пространственных переменных в этом уравнении не влечет принципиального изменения вида самого уравнения. А именно, производная по времени всегда остается производной первой степени вне зависимости от числа пространственных переменных; «пространственная» часть уравнения представляет собой сумму производных второй степени по соответствующим пространственным переменным:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\chi(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right).$$

Здесь x_i , t - пространственные переменные и время, T - искомая функция, χ - коэффициент теплопроводности.

В результате при переходе от задачи в одномерной пространственной постановки к двух- и трехмерной, решения уравнения теплопроводности (диффузии) не приобретают принципиальных различий.

Совсем иное дело - переход к дробным степеням α и γ производных в уравнении теплопроводности (диффузии):

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} \left(\chi(T) \frac{\partial^\gamma T}{\partial x^\gamma} \right), \quad 0 < \alpha < 2.$$

В этом случае решение для $1 < \alpha < 2$, $\gamma < 1$ характеризуется волновыми свойствами, что обычно трактуется, как влияние «памяти» и «нелокальности» на рассматриваемый процесс во фрактальной структуре.

Проверка решений таких уравнений, в основном, сводится к переходу к пределу $\alpha = 1$ и $\gamma = 1$.

Алгоритм поиска степеней производных α и γ , как правило, не приводится, хотя всегда говорится, что их значения должны быть связаны с размерностью фрактального пространства.

Кроме того, производная в дробной степени не может быть вычислена без приведения ее к соответствующему интегралу, а это, в свою очередь, ведет к невозможности получения однозначного решения.

Таким образом, можно констатировать отсутствие строгого математического вывода уравнений с дробными производными и соотношений, связывающих величины α и γ с размерностью фрактального пространства, достаточной доказательной базы для сравнения полученных решений с экспериментальными данными, а также несоответствие изменения производной по времени в уравнениях при переходе к пространству с большей (меньшей) размерностью для евклидовых и фрактальных пространств даже при стремлении размерности к целочисленным значениям.

Вернемся теперь к невозможности учета влияния масштаба структурного элемента фрактала на скорость протекания процесса при использовании

уравнений с дробными производными и уравнений с аномальными коэффициентами.

Масштабом структурного элемента фрактала здесь и далее условимся называть характерный размер ограниченной области протекания физического процесса (например, размер сосуда в кровеносной системе или трещины в горной породе), в которой находится точка, с заданными координатами. Например, задав координату точки в теле человека, можно оказаться либо в области артерии, либо в области капилляра. Причем, координаты артерии и капилляра (например, расстояние от сердца и направление) могут отличаться очень незначительно, но при этом, скорость течения крови в сосудах с разными диаметрами может быть несоизмеримой. То же самое можно сказать и о других процессах: распространении волн, процессах диффузии и теплопроводности во фрактальных структурах и многое другое. Здесь напрашивается вывод о необходимости учета масштаба структурного элемента фрактала при описании физических процессов в такого рода задачах. А, поскольку в уравнения с дробными производными и в уравнения с аномальными коэффициентами не входят параметры, описывающие такой масштаб, и, соответственно, решения также не будут зависеть от него, то возникает желание исправить эту ситуацию и записать уравнения для описания физических процессов (в частности, теплопроводности и диффузии), протекающих во фрактальных структурах в иной форме [17], [65]. Остановимся на этом подробнее.

2.3.1 Учет масштаба фрактальной области при описании физических процессов в односвязных фрактальных системах.

Предположим, что на фиксированном масштабе фрактальной структуры мы исследуем изменение какого-либо параметра, рассматриваемого физического процесса на интервале времени $\Delta t_1 = t_1 - t_n$ ($\Delta t_1 \neq 0$). При переходе к другому масштабу (при сохранении всех прочих характеристик геометрии пространства), может оказаться, что для точно такого же изменения параметра

физического процесса потребуется другой интервал времени $\Delta t_2 = t_2 - t_n$. Прделав такую процедуру много раз, можно каждому масштабу δ_k поставить в соответствие свой интервал времени: $\Delta t_k = \Delta t_k(\delta_k)$.

Обычно в реальности масштаб меняется скачком (например, в точках ветвления кровеносных сосудов), но в качестве модели можно рассмотреть фазовое пространство с непрерывным изменением масштаба. То есть считать, что, обезразмеренные на единицу, масштабы фрактальной структуры плавно изменяются от начального – единичного масштаба: $\delta = 1$, до $\delta = \delta_0$, где $0 < \delta_0 \leq 1$. В этом случае изменение интервалов времени так же будет непрерывным: $\Delta t = \Delta t(\delta)$ ($\Delta t \neq 0$). Следовательно, можно найти производную

$$\frac{d(\Delta t(\delta))}{d\delta} = \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} = \frac{dt}{d\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

Здесь t_n - начало отсчета времени рассматриваемого физического процесса.

Необходимо отметить, что вышеприведенные рассуждения верны в том случае, если в рассматриваемом физическом процессе мы исследуем изменение либо только одного параметра, либо нескольких, но таких, для которых изменение интервалов времени на разных масштабах происходит согласовано для всех параметров. Безусловно, существуют случаи, когда все происходит не так. Например, если одновременно исследуются разномасштабные по времени процессы, то некоторые параметры могут “не замечать” изменение пространственных масштабов вообще, а другие сильно зависеть от их вариации. В этом случае для каждого j -го класса согласованных параметров будут существовать свои зависимости $\Delta t^j = \Delta t^j(\delta)$ и свои производные $\dot{\delta}^j$. Таких случаев в данной работе мы касаться не будем. Здесь будут рассмотрены только задачи, в которых исследуются процессы с согласованными изменениями интервалов времени.

Выше в работе были рассмотрены два класса фракталов, на предмет теоретического определения их размерности. К первому классу относятся системы с вязкими “пальцами”, ко второй – дендриты [10-12].

Было показано (см. также [17-18]), что объем, занимаемый односвязной фрактальной структурой, в пространстве, ограниченном сферой радиуса R , можно записать в виде: $V(R) = aR^D + b$, где D - размерность фрактала, a и b - константы, зависящие от масштаба рассмотрения R_0 .

В том случае, когда диапазон масштабов δ ограничен значениями: $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, где $0 < \delta_0 \leq 1$, объем, занимаемый фрактальной структурой $V(R)$, в приближении непрерывности изменения масштаба можно представить в виде:

$$V(R) = \int_{\delta_0}^1 G(R, \delta) d\delta, \quad (2.10)$$

где $G(R, \delta)$ - плотность распределения объема, занимаемого фрактальной структурой, по масштабам δ .

В силу того, что мы рассматриваем ограниченный диапазон масштабов δ , величина $V(R)$ - это именно объем, занимаемый фрактальной структурой, вложенной в евклидовое пространство R^n , а не мера множества дробной размерности. У такой структуры может быть измерен объем в евклидовом пространстве R^n (например, так, как это сделал Архимед с короной царя Сиракуз Гиерона, обладающей сложной формой). Можно это сделать и с помощью измерительных приборов. При этом полученное значение $V(R)$ будет ограничено, если в качестве единицы измерения линейных размеров брать самый маленький масштаб δ_0 .

Выражение (2.10) можно переписать в виде:

$$\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = 1, \quad (2.11)$$

где $\varphi(\delta) = G(R, \delta)/V(R)$ - удельная плотность распределения фрактальной структуры.

Будем рассматривать только самоподобные фракталы. Размерность подобия такого фрактала будет совпадать с фрактальной размерностью в выражении $V(R) = aR^D + b$ и может быть записана в виде соотношения [10]:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}} = \frac{\ln(G(R, \delta)/G(R, r\delta))}{\ln r^{-1}}, \quad (2.12)$$

где $r = const$ - коэффициент подобия, $N = G(R, \delta)/G(R, r\delta)$ - число элементов, которое получается из одного элемента фрактала при рассмотрении его на следующем более мелком масштабе. Для диапазона масштабов $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, где $0 < \delta_0 \leq 1$, $0 < r < 1$. Диапазон для коэффициента r , выбранный таким образом обеспечивает положительное значение размерности D . Однако реальный диапазон значений коэффициента r для самоподобного фрактала должен быть уже: $0 < r \leq 1/2$, поскольку минимальное количество элементов, получающихся из одного начального, не может быть меньше двух.

Значение размерности D для односвязной фрактальной области, вложенной в трехмерное пространство, должно быть больше единицы, поэтому $1 < D < 3$.

Выражение для размерности (2.12) задает скейлинговое соотношение:

$$G(R, r\delta) = r^D G(R, \delta). \quad (2.13)$$

Используя выражение (2.13), можно найти приближенное выражение для производной $\partial G/\partial \delta$. В самом деле,

$$\frac{\partial G(R, \delta)}{\partial \delta} = \lim_{\Delta \delta \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R, \delta) - G(R, r\delta)}{\delta - r\delta} = \frac{1 - r^D}{1 - r} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R, \delta)}{\delta}.$$

Таким образом, мы получили производную $\partial G/\partial \delta$ для малых значений δ (когда $0 < \delta \leq \delta_0$, $\delta_0 \rightarrow 0$). Но поскольку фрактал является самоподобным

объектом, то следует экстраполировать это выражение и на диапазон значений $\delta : \delta_0 \leq \delta \leq 1$. Поэтому окончательно можно записать:

$$\frac{\partial G(R, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1-r^D}{1-r} \frac{G(R, \delta)}{\delta} = \beta \frac{G(R, \delta)}{\delta}, \quad \text{где } \beta = \frac{1-r^D}{1-r}. \quad (2.14)$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta} = \beta \frac{\varphi}{\delta}. \quad (2.15)$$

Величина β является константой для каждого конкретного фрактала и принимает значения из диапазона: $1 < \beta < 2$, для любых значений $1 < D < 3$ и $0 < r \leq 1/2$.

Из уравнения (2.15) находим, что $\varphi(\delta) = \varphi_0 \delta^\beta$, где $\varphi_0 = const$. Значение φ_0 можно найти, решив уравнение

$$\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = \varphi_0 \int_{\delta_0}^1 \delta^\beta d\delta = 1.$$

Из него получаем:

$$\varphi_0 = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}}.$$

И, следовательно,

$$\varphi(\delta) = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \delta^\beta. \quad (2.16)$$

Плотность распределения $\varphi(\delta)$, описываемую выражением (2.16), можно использовать для определения средних для параметров, характеризующих процессы, протекающие во фрактальных структурах. Найдем среднее значение величины $(t(\delta) - t_n)/\delta$ на масштабе рассмотрения δ :

$$\left\langle \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle = \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \varphi(\delta) d\delta = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \delta^\beta d\delta = \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 (t(\delta) - t_n) d\delta^\beta.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle &= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \delta^\beta d\delta = \\
&= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \varphi(\delta) d\delta = \\
&= \frac{\beta + 1}{\beta(1 - \delta_0^{\beta+1})} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \right\rangle.
\end{aligned}$$

где $t_1 - t_n = t(\delta)|_{\delta=1} - t_n$ и $t_0 - t_n = t(\delta)|_{\delta=\delta_0} - t_n$ - интервалы времени, соответствующие процессу, рассматриваемому на масштабах $\delta = 1$ и $\delta = \delta_0$, при любом $\mathcal{S} : \delta_0 \leq \delta \leq 1$.

Полученное выражение можно переписать в виде:

$$\left\langle \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \right\rangle = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \beta \left\langle \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle$$

или

$$\left\langle \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \right\rangle = \left\langle \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle.$$

Так как фрактальное множество является самоподобным для различных значений δ , то равенство, которое выполняется для величин, осредненных по всем значениям δ , должно выполняться при осреднении по отдельным интервалам δ , а в предположении непрерывности δ (устремляя эти интервалы к нулю) и для самих этих величин, измеренных в локальных областях этого пространства. Поэтому от полученного уравнения для средних можно перейти к соотношению, связывающему выражения в точках локальных значений δ :

$$\frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} = \frac{\beta + 1}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \left((t_1 - t_n) - (t_0 - t_n)\delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta) - t_n}{\delta}, \quad t(\delta) > t_n. \quad (2.17)$$

Необходимо отметить, что $t(\delta)$ в полученном уравнении не может быть в точности равно началу отсчета времени физического процесса t_n , поскольку, несмотря на то, что это уравнение описывает продолжительность протекания

физического процесса в зависимости от масштаба в ограниченном масштабном интервале: $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, структура фрактала предполагается «идеальная» с математической точки зрения и, следовательно, имеющая бесконечный масштабный ряд. На других (за пределами рассматриваемых) масштабах время должно отсчитываться также от значения t_n и, следовательно, должны существовать меньшие интервалы времени $t(\delta) - t_n$ по сравнению с рассматриваемыми для значений масштабов $\delta_0 \leq \delta \leq 1$.

Решением уравнения (2.17), является выражение

$$t(\delta) - t_n = (t_0 - t_n) \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta + \frac{(t_1 - t_n) - (t_0 - t_n) \delta_0^\beta}{1 - \delta_0^{\beta+1}} \delta, \quad \text{где } t(\delta) > t_n.$$

Если в полученную зависимость подставить соотношение $t_1 - t_n = t(\delta)_{\delta=1} - t_n$ или $t_0 - t_n = t(\delta)_{\delta=\delta_0} - t_n$, то найдем, выражение, связывающее $t_1 - t_n$ и $t_0 - t_n$: $t_1 - t_n = (t_0 - t_n) \delta_0^\beta$. С учетом этого соотношения, можно окончательно записать:

$$t(\delta) - t_n = (t_0 - t_n) \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta = \frac{t_1 - t_n}{\delta^\beta}, \quad \text{где } t(\delta) > t_n, \delta_0 \leq \delta \leq 1, 0 < \delta_0 \leq 1. \quad (2.18).$$

А, поскольку, $\dot{\delta} = \frac{1}{d(t(\delta) - t_n)/d\delta}$, то из соотношения (2.18), следует

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1 - t_n)}, \quad \text{где } \beta = \frac{1 - r^D}{1 - r}, t_1 > t_n. \quad (2.19)$$

Совместное использование выражения (2.19) и уравнений, полученных для описания физических процессов в евклидовом пространстве, позволит описывать аналогичные процессы в пространстве с фрактальной геометрией.

Остановимся на этом подробнее. Для описания физических процессов, происходящих в евклидовом пространстве, в основном используются уравнения в частных производных (УЧП) в фазовом пространстве переменных (t, \vec{x}) (или в более простых случаях - дифференциальные уравнения). Для нахождения УЧП, описывающих конкретный физический процесс, вначале

записываются интегральные соотношения, определяющие протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий. Эти соотношения сводятся к интегрированию по объему, и в случае, если процесс не зависит от величины объема, осуществляется переход к уравнениям в частных производных. При этом уравнения приобретают вид: $df/dt = \hat{A}f$, (\hat{A} - дифференциальный оператор, вид которого зависит от конкретной задачи). Полная производная, стоящая в левой части уравнения должна определяться всеми возможными степенями свободы и в общем виде в фазовом пространстве переменных (t, \vec{x}) имеет вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Во фрактальных пространствах вид интегральных (осредненных) соотношений, описывающих рассматриваемый физический процесс, может не отличаться от их вида в евклидовом пространстве, при этом функциональная зависимость не ограничивается только временной и пространственными координатами. Функция, описывающая процесс, может определяться еще и масштабом рассмотрения фрактальной структуры. Введем дополнительную переменную δ , характеризующую масштаб фрактальной структуры, в фазовое пространство переменных, используемых в уравнениях в частных производных: $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, \vec{x}; \delta)$, $f = f(t, \vec{x}; \delta)$. В этом случае, полную производную по времени искомой функции необходимо записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \vec{x}, \delta)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в этом выражении, запишем:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, \delta + \Delta \delta)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \vec{x}, \delta + \Delta \delta)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x}, \delta + \Delta \delta) - f(t, \vec{x}, \delta)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta\bar{x} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, $\Delta\delta \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, в полученном выражение для полной производной первое слагаемое равно: $\frac{\partial f}{\partial t}$; второе слагаемое: $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}$; третье слагаемое: $\frac{d\delta}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \delta}$.

То есть, при описании такого процесса, полную производную $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ следует заменить новой полной производной, имеющей вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{\delta} \frac{\partial f}{\partial \delta}.$$

Производная $\dot{\delta}$ в этом соотношении задана выражением (2.19).

Если физический процесс является стационарным, то уравнение, описывающее его во фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной β (см. (2.19)), задается в виде:

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1 - t_n)} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f.$$

или для $f = f(\bar{x}; \tilde{\mu}(\delta))$:

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mu}} = \hat{A}f, \quad \text{где } \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\delta) = (t_1 - t_n)\delta^{-\beta}, \quad t_1 > t_n.$$

В стационарном случае во фрактальной структуре также может существовать зависимость искомой функции от масштаба, только эта зависимость будет стационарной. Параметр $(t_1 - t_n)$ является константой с размерностью времени. Он характеризует функцию на единичном масштабе. Его значение определяется видом конкретной задачи, а также начальными и граничными условиями к ней.

Если описываемый процесс является нестационарным, то время протекания физического процесса t_1 на единичном масштабе $\delta_1 = 1$ в выражении (2.19), является просто временем t ($t > t_n$), отсчитываемым от

начала рассмотрения физического процесса, при описании этого процесса с помощью дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. В этом случае, уравнение, описывающее нестационарный физический процесс во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной β (см. (2.19)), можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t-t_n)} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f, \quad \text{где } t > t_n.$$

или для $f = f(t, \bar{x}; \mu(\delta))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t-t_n} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \hat{A}f, \quad \text{где } \mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}, \quad t > t_n. \quad (2.20)$$

Дополнительная переменная δ (или $\mu(\delta)$) в дифференциальных уравнениях обеспечит учет влияния масштаба элемента фрактального множества на протекание физического процесса. Переменная δ в уравнениях находится для каждой рассматриваемой точки из построения конкретных фракталов.

Рассмотрим пример применения построенной математической модели для описания процессов в односвязных фрактальных системах.

2.3.2. Метод описания процессов теплопроводности в односвязном фрактальном пространстве.

Важной задачей, имеющей отношение к процессам, протекающим в средах с фрактальной геометрией, является проблема описания процесса теплопроводности во фрактальных структурах. Такими структурами могут быть, например, композитные материалы используемые в качестве теплозащиты в космической технике.

В качестве попытки валидации разработанного метода расширения фазового пространства за счет дополнительной масштабной переменной $\mu(\delta)$ при описании процессов, происходящих во фрактальных структурах, решим задачу распространения тепла от локализованного источника в бесконечное

пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее (плохо проводящее) тепло трехмерное пространство, при условии независимости коэффициента теплопроводности χ от искомой функции температуры T .

Для этого запишем уравнение теплопроводности в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{t-t_n} \frac{\partial T}{\partial \mu} = \chi \Delta T.$$

где $T = T(t, \vec{R}; \mu)$, $\chi = \chi(\mu)$, $\mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}$, $t > t_n$.

Далее будем считать, что $t_n = 0$. Поэтому уравнение теплопроводности перепишем в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial T}{\partial \mu} = \chi \Delta T. \quad (2.21)$$

Задачу будем решать в постановке независимости начальной температуры от масштаба рассмотрения фрактальной структуры, то есть с начальным условием:

$$T(t, \vec{R}; \mu) \Big|_{t=t_n=0} = T_0(\vec{R}) \quad \text{или} \quad T(t, \vec{R}; \delta) \Big|_{t=t_n=0} = T_0(\vec{R}). \quad (2.22)$$

Решение задачи (2.21)-(2.22) осложнено наличием параметра (коэффициента теплопроводности), который сам может являться функцией масштаба исследуемого структурного элемента фрактального пространства.

Для того чтобы найти коэффициент теплопроводности (диффузии), запишем его среднее значение на интервале $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, в виде:

$\langle \chi \rangle = \int_{\delta_0}^1 \chi(\delta) \varphi(\delta) d\delta$. Интегрируя правую часть этого соотношения по частям,

с учетом выражения (2.16), получаем выражение:

$$\langle \chi \rangle = \frac{\chi_1 - \chi_0 \delta_0^{1+\beta}}{1 - \delta_0^{1+\beta}} - \frac{1}{1+\beta} \left\langle \delta \frac{d\chi}{d\delta} \right\rangle. \quad (2.23)$$

Здесь $\left\langle \delta \frac{d\chi}{d\delta} \right\rangle = \int_{\delta_0}^1 \delta \frac{d\chi(\delta)}{d\delta} \varphi(\delta) d\delta$,

$$\chi_0 = \chi(\delta) \Big|_{\delta=\delta_0}, \quad \chi_1 = \chi(\delta) \Big|_{\delta=1}, \quad (2.24)$$

χ_0 и χ_1 - значения коэффициента теплопроводности соответственно на минимальном и максимальном масштабах рассмотрения фрактальной структуры.

Поскольку первое слагаемое в правой части выражения (2.23) является константой, это выражение можно переписать в виде:

$$\langle \chi \rangle = \left\langle \frac{\chi_1 - \chi_0 \delta_0^{1+\beta}}{1 - \delta_0^{1+\beta}} - \frac{1}{1+\beta} \delta \frac{d\chi}{d\delta} \right\rangle.$$

Учитывая свойство самоподобия фрактальной структуры на разных масштабах, можно “отбросить” в левой и правой частях этого соотношения скобки, обозначающие усреднение по масштабам, и перейти к дифференциальному уравнению:

$$\delta \frac{d\chi}{d\delta} + (1+\beta)\chi - (1+\beta) \frac{\chi_1 - \chi_0 \delta_0^{1+\beta}}{1 - \delta_0^{1+\beta}} = 0$$

с граничными условиями (2.24).

Решением этого уравнения является соотношение:

$$\chi(\delta) = -\frac{\chi_1 - \chi_0}{1 - \delta_0^{1+\beta}} \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{-1-\beta} + \frac{\chi_1 - \chi_0 \delta_0^{1+\beta}}{1 - \delta_0^{1+\beta}}.$$

Переходя к зависимости $\chi = \chi(\mu)$ ($\mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}$), записываем:

$$\chi(\mu) = \chi_1 \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \right), \quad \text{где } \mu_0 = \delta_0^{-\beta}. \quad (2.25)$$

Подставив полученное соотношение в уравнение (2.21), перепишем уравнение теплопроводности во фрактальной структуре в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial T}{\partial \mu} = \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \right) \chi_1 \Delta T, \quad (2.26)$$

с начальным условием (2.22).

Представим функцию $T(t, \bar{R}; \mu(\delta))$ в виде интеграла Фурье:

$$T(t, \bar{R}; \mu) = \int T_k(t; \mu) e^{i\bar{k}\bar{R}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (2.27)$$

где

$$T_k(t; \mu) = \int T(t, \bar{R}; \mu) e^{-i\bar{k}\bar{R}} d^3 x. \quad (2.28)$$

Подставляя выражение (2.28) в уравнение (2.26), получаем соотношение:

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} + \frac{1}{t} \frac{\partial T_k}{\partial \mu} + \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \right) k^2 \chi_1 T_k = 0. \quad (2.29)$$

Или

$$t \frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial \mu} + t \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \right) k^2 \chi_1 = 0, \quad (2.30)$$

где $f_k = f_k(t; \mu) = \ln(T_k/T_{0k})$, $T_{0k} = \text{const}$.

Делая в выражении (2.30) замену: $f_k = tM_k(\mu)$, получаем уравнение:

$$\frac{dM_k}{d\mu} + M_k + \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1} \right) k^2 \chi_1 = 0$$

или

$$\frac{dM_k}{d\mu} + M_k + qk^2 \mu^\gamma + pk^2 = 0, \quad 1 \leq \mu < \infty, \quad (2.31)$$

где $q = \frac{\chi_0 - \chi_1}{\mu_0^\gamma - 1}$, $p = \frac{\chi_1 \mu_0^\gamma - \chi_0}{\mu_0^\gamma - 1}$, $\gamma = 1 + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1-r}{1-r^D}$; $3/2 < \gamma < 2$.

Сделав замену $M_k(\mu) = qk^2 y(\mu) - pk^2$, от (2.31) перейдем уравнению

$$\frac{dy}{d\mu} + y + \mu^\gamma = 0,$$

решение этого линейного дифференциального уравнения можно представить в виде: $y(\mu) = e^{-\mu} \int \mu^\gamma e^\mu d\mu$.

Путем последовательного интегрирования полученного выражения по частям, решение уравнения (2.31) можно представить в виде выражения, включающего в себя бесконечный ряд:

$$M_k(\mu) = -qk^2 \mu^\gamma \left(1 - \gamma \mu^{-1} + \gamma(\gamma-1)\mu^{-2} + \dots + (-1)^n \gamma(\gamma-1) \dots (\gamma-n-1)\mu^{-n} + \dots \right) - pk^2.$$

По-другому это выражение может быть записано в виде соотношения:

$$M_k(\mu) = -k^2 \left(q\mu^\gamma \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \mu^{-n} \prod_{m=0}^{n-1} (\gamma - m) \right) \right) + p \right).$$

В общем случае, бесконечный ряд, входящий в это соотношение, является расходящимся. Однако, поскольку в практических задачах интервал масштабов фрактальной структуры ограничен, то суммирование ряда, должно быть ограничено исходя из границ диапазона масштабов рассмотрения системы каким-то конечным числом $n_{\max} = N$. И в этом случае, по крайней мере, для $\mu \geq N^{1/(\gamma-1)}$, точность решение уравнения (2.31) в виде:

$$M_k(\mu) = -k^2 \left(q\mu^\gamma \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \mu^{-n} \prod_{m=0}^{n-1} (\gamma - m) \right) \right) + p \right), \quad \text{где } \mu \geq N^{1/(\gamma-1)}, \quad (2.32)$$

будет не хуже, чем $O\left(\mu^{\gamma-N-1} \left| \prod_{m=0}^N (\gamma - m) \right|\right) \leq O\left(\frac{N!}{N^N}\right)$.

Таким образом, точность решения уравнения (2.31) будет неограниченно расти при стремлении μ к бесконечности: $N^{1/(\gamma-1)} \leq \mu = \delta^{-\beta} \rightarrow \infty$. При этом масштаб фрактальной структуры будет стремиться к значению δ_0 (если при этом $\delta_0 \ll 1$): $\delta \rightarrow \delta_0 \rightarrow 0$.

Используя выражение (2.32), можно записать:

$$T_k(t; \mu) \approx T_{0k} \exp \left(-k^2 t \left(q\mu^\gamma \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \mu^{-n} \prod_{m=0}^{n-1} (\gamma - m) \right) \right) + p \right) \right), \quad \text{где } \mu \geq N^{1/(\gamma-1)},$$

или, учитывая, что $\mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}$ и $\gamma = 1 + 1/\beta$,

$$T_k(t; \mu) \approx T_{0k} \exp \left(-k^2 t \left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right) \right), \quad (2.33)$$

где $\delta \leq N^{-1/\beta^2}$.

Учитывая начальные условия (2.22) в виде: $T(t, \vec{R}; \delta)_{t=0} = T_0(\vec{R})$, записываем:

$T_{0k} = \int T_0(\vec{R}) e^{-i\vec{k}\vec{R}} d^3x$. Подставляя это соотношение, а также выражение (2.33) в уравнение (2.27), находим

$$T \approx \int T_0(\vec{R}') \exp \left(-k^2 t \left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right) \right) \exp(i\vec{k}(\vec{R} - \vec{R}')) d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (2.34)$$

где $\delta \leq N^{-1/\beta^2}$.

Интеграл по d^3k разбивается на произведение трех одинаковых интегралов (см. [13]) вида: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha \xi^2) \cos(\gamma \xi) d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} \exp(-\gamma^2/4\alpha)$, где ξ - одна из компонент вектора \vec{k} . Аналогичный интеграл с функцией синус вместо косинуса в выражении (2.34) исчезает в силу нечетности функции синус. В результате получаем окончательное выражение:

$$T(t, \vec{R}; \delta) \approx \frac{1}{8 \left(\pi \left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right) \right)^{3/2}} \times \\ \times \int T_0(\vec{R}') \exp \left(-\frac{(\vec{R} - \vec{R}')^2}{4t \left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right)} \right) d^3x', \quad (2.35)$$

где $\delta \leq N^{-1/\beta^2}$.

Поскольку, $q = \frac{\chi_0 - \chi_1}{\mu_0^\gamma - 1} = \frac{\chi_0 - \chi_1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1}$, $p = \frac{\chi_1 \mu_0^\gamma - \chi_0}{\mu_0^\gamma - 1} = \frac{\chi_1 \delta_0^{-1-\beta} - \chi_0}{\delta_0^{-1-\beta} - 1}$, то в

принятом пределе малых масштабов: $\delta \rightarrow \delta_0 \rightarrow 0$, можно записать:

$$\left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right)_{\delta \rightarrow \delta_0 \rightarrow 0} \rightarrow \chi_0.$$

В этом случае выражение (2.34) примет вид:

$$T(t, \bar{R}; \delta) \Big|_{\delta \rightarrow \delta_0} \approx \frac{1}{8(\pi \chi_0)^{3/2}} \int T_0(\bar{R}') e^{-\frac{(\bar{R}-\bar{R}')^2}{4t\chi_0}} d^3 x', \quad \delta_0 \rightarrow 0. \quad (2.36)$$

При $\delta \rightarrow 1$ погрешность решения уравнения (2.31) в виде соотношения (2.32) становится слишком велика, и выражение (2.34) перестает быть решением уравнения (2.26). В этом случае, решение уравнения (2.31) стремится к значению $M_k = -k^2 \chi_1$, а решение уравнения (2.26) к выражению:

$$T(t, \bar{R}; \delta) \Big|_{\delta \rightarrow 1} \approx \frac{1}{8(\pi \chi_1)^{3/2}} \int T_0(\bar{R}') e^{-\frac{(\bar{R}-\bar{R}')^2}{4t\chi_1}} d^3 x'. \quad (2.37)$$

Отличие выражений (2.34) и (2.37) от соотношения для зависимости температуры от времени и пространственной координаты, полученной для процесса теплопроводности в неограниченном евклидовом пространстве [13]:

$$T(t, \bar{R}) \approx \frac{1}{8(\pi t \chi)^{3/2}} \int T_0(\bar{R}') e^{-\frac{(\bar{R}-\bar{R}')^2}{4t\chi}} d^3 x', \quad (2.38)$$

состоит в замене коэффициента теплопроводности χ соответственно на

произведение $\left(q \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + p \right)$ (где $q = \frac{\chi_0 - \chi_1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1}$,

$p = \frac{\chi_1 \delta_0^{-1-\beta} - \chi_0}{\delta_0^{-1-\beta} - 1}$) и величину χ_1 :

$$\chi|_{\delta \leq N^{-1/\beta^2}} = \left(\frac{\chi_0 - \chi_1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} \delta^{-1-\beta} \left(1 + \sum_{n=1}^N \left((-1)^n \delta^{\beta n} \prod_{m=0}^{n-1} (1/\beta + 1 - m) \right) \right) + \frac{\chi_1 \delta_0^{-1-\beta} - \chi_0}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} \right)_{\delta \rightarrow \delta_0 \rightarrow 0} \rightarrow \chi_0$$

и $\chi|_{\delta \rightarrow 1} \rightarrow \chi_1$.

Таким образом, при $\delta \ll 1$ и $\delta \rightarrow 1$ выражения (2.35), (2.36) и (2.37), являющиеся частными решениями поставленной задачи во фрактальном пространстве, имеют тот же вид, что и соотношение (2.38), полученное для процесса теплопроводности в неограниченном евклидовом пространстве.

Коэффициенты χ_0 и χ_1 являются характеристиками процесса теплопроводности соответственно на самом маленьком и самом большом масштабах рассмотрения фрактальной структуры. Они могут быть определены экспериментально, если известно начальное пространственное распределение температуры $T_0(\vec{R}')$. Для этого достаточно померить температуру в окрестности заданной точки \vec{R} в момент времени t (отсчитываемого от начала процесса нагрева образца) на самом маленьком и самом большом масштабах рассмотрения фрактальной структуры, и из соотношений (2.36) и (2.37) найти значения коэффициентов χ_0 и χ_1 , соответственно.

Значения этих коэффициентов можно использовать для нахождения температуры с помощью соотношений (2.35) или (2.37) в любой точке пространства в произвольный момент времени на масштабах рассмотрения фрактальной структуры из интервалов: $\delta_0 \leq \delta \ll 1$ и $\delta_0 \ll \delta \leq 1$, соответственно, для произвольного начального пространственного распределения температуры $T_0(\vec{R}')$.

Кроме того, зная значения коэффициентов теплопроводности χ_0 и χ_1 , можно определить динамику изменения температуры во всем диапазоне масштабов: $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, воспользовавшись численными методами нахождения

решения уравнения (2.29) (или (2.31)) с заданными пространственными граничными условиями.

В том случае, когда коэффициент теплопроводности на самом большом и самом маленьком масштабах оказываются одинаковыми, задача динамики изменения температуры во всем диапазоне масштабов: $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, может быть решена аналитически. В самом деле, если $\chi_0 = \chi_1 = \chi$, то из соотношения для зависимости теплопроводности от масштаба (2.25), следует, что коэффициент теплопроводности остается одинаковым на всех масштабах. В этом случае, уравнение (2.31) приобретает вид:

$$\frac{dM_k}{d\mu} + M_k + k^2 \chi = 0.$$

Из которого следует общее решение: $M_k(\mu) = A\chi e^{-\mu} - k^2 \chi$, где $A = const$.

Поэтому,

$$T_k = T_{0k} \exp\left(\left(Ae^{-\mu} - k^2\right)\chi t\right) = T_{0k} \exp\left(\left(Ae^{-1/\delta^\beta} - k^2\right)\chi t\right).$$

Повторяя цепочку вышеприведенных преобразований, получим соотношение:

$$T(t, \vec{R}; \delta) = \frac{\exp\left(A\chi t e^{-1/\delta^\beta}\right)}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(\vec{R}') e^{-\frac{(\vec{R}-\vec{R}')^2}{4\chi t}} d^3 x'. \quad (2.39)$$

Проанализируем полученное решение. Из соотношения (2.39) видно, что поведение решения зависит от константы A , характеризующей конкретный фрактал. А именно, положительное значение константы A при неограниченном временном интервале, может характеризовать процесс неограниченной «подкачки» энергии во фрактальную систему, так как характеризует бесконечное возрастание температуры с течением времени в любой точке пространства. В общем случае такое решение не является «физичным».

Нулевое значение константы A , характеризует решение, полностью совпадающее с зависимостью температуры от времени и пространственной координаты, полученной для процесса теплопроводности в неограниченном однородном евклидовом пространстве (2.38).

Отрицательное значение константы A , характеризует фрактальное пространство, в котором изменение температуры с течением времени происходит быстрее, чем в неограниченном однородном евклидовом пространстве. Это решение наиболее интересно, так как, в отличие от решения при нулевом значении константы A , характеризует процесс теплопроводности во фрактальном пространстве с учетом масштабной переменной. Значение константы для конкретного фрактального пространства будет зависеть от его геометрии и должно определяться сравнением решения (2.39) с известным распределением температуры в какой-либо момент времени во фрактальном пространстве на каком-либо масштабе рассмотрения или известной зависимостью температуры от времени в заданной точке фрактального пространства на определенном масштабе рассмотрения.

Если масштаб δ изменяется в интервале $0 < \delta_0 \leq \delta \leq 1$, то в бесконечном пространстве при конечном отрицательном значении константы A решение не является «физическим», поскольку стремится к решению в евклидовом пространстве при уменьшении масштаба рассмотрения δ , то есть при увеличении количества «вырезов».

Если масштаб «вырезов» δ изменяется в интервале $1 \leq \delta \leq 1/\delta_0 < \infty$ (что более естественно для неограниченного пространства, в котором ведется поиск решения данной задачи), то решение становится физически обоснованным. В самом деле, минимальный масштаб: $\delta = 1$, характеризует размер минимального «выреза» и решение принимает значение, минимально отличающееся от решения в евклидовом пространстве. С увеличением масштаба δ решение

стремится к функции:
$$T(t, \vec{R}; \delta) \Big|_{\delta \rightarrow \delta_0 \gg 1} \approx \frac{\exp(A\chi t)}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(\vec{R}') e^{-\frac{(\vec{R}-\vec{R}')^2}{4\chi t}} d^3x',$$

независящей от масштаба рассмотрения фрактальной системы и максимально отличающейся от решения в евклидовом пространстве. То есть усреднение параметров на больших масштабах перестает зависеть от изменения этих масштабов (решение сходится).

Можно продемонстрировать поведение решения (2.39) задачи теплопроводности во фрактальном пространстве на примере объемной фрактальной структуры «Губка Менгера» в случае распространения тепла от точечного источника в бесконечное пространство (на рис.2 представлена часть такого бесконечного пространства). «Вырезы» во фрактальной структуре являются непроводящими тепло областями.

Если $T_0(\vec{R}) = \text{const} \cdot \delta(R)$, соотношение (2.39) сводится к виду:

$$T(t, \vec{R}; \delta) = \frac{\exp(A\chi t e^{-1/\delta^\beta})}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\chi t}\right). \quad (2.40)$$

Для фрактального объекта «Губка Менгера» с ограниченным максимальным размером (см. рис.2) коэффициент подобия равен: $r = 1/3$, размерность подобия равна: $D = \ln 20 / \ln 3 \approx 2.73$, поэтому $\beta = \frac{1-r^D}{1-r} \approx 1.43$.

В бесконечном пространстве эти параметры фрактала сохраняются, однако, масштаб изменяется от единицы до бесконечности: $\delta_0 = 3^0 = 1$, $\delta_1 = 3^1 = 3$, $\delta_2 = 3^2 = 9$, ..., $\delta_k = 3^k$ За «единичный» масштаб принимается характерный размер минимального «выреза».

На рисунке 3 показана зависимость температуры от расстояния в заданный момент времени: $\tau = \chi t = 0.02$, на четырех масштабах рассмотрения этого фрактала при фиксированном отрицательном значении параметра $A = -100$ в формуле (2.40) (при условии равенства температуры в заданной точке в

начальный момент времени на всех масштабах рассмотрения), а также зависимость температуры от расстояния в заданный момент времени в бесконечном однородном (без «вырезов») евклидовом пространстве.

На рисунке 4 показана зависимость температуры от временного параметра $\tau = \chi t$ при фиксированном отрицательном значении параметра $A = -100$ в фиксированной точке $R = 0.01$ на четырех масштабах рассмотрения фрактала «Губка Менгера», а также зависимость температуры от временного параметра в этой же точке в бесконечном однородном евклидовом пространстве.

Можно заметить сходимость зависимостей температуры от расстояния или времени при изменении масштаба фрактала.

Рассмотренная в данной работе задача определения изменения температуры во фрактальном пространстве (см. также [17]), может служить примером, использования разработанной математической модели описания физических процессов, протекающих во фрактальных пространствах с использованием дифференциальных уравнений, описывающих аналогичные процессы в структурах с евклидовой геометрией с помощью введения дополнительной координаты, характеризующей масштаб рассмотрения фрактала.

Выводы к главе 2.

С использованием метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, являющиеся их характеристиками, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных, теоретически исследованы параметры фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими «пальцами» и дендритов. Теоретически определенные значения размерности фрактальных объектов для структур с вязкими «пальцами» и дендритов хорошо соотносятся с экспериментальными данными.

Разработан метод описания физических процессов в односвязных пространствах с дробной размерностью. Метод основан на расширении фазового пространства, используемого при описании аналогичных процессов в целочисленном - евклидовом пространстве с помощью дополнительной переменной, характеризующей масштаб рассмотрения фрактального пространства.

Решена задача распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее тепло трехмерное пространство: найдено частное решение в случае произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от масштаба рассмотрения системы и общее решение для коэффициента теплопроводности, не зависящего от масштаба рассмотрения системы.

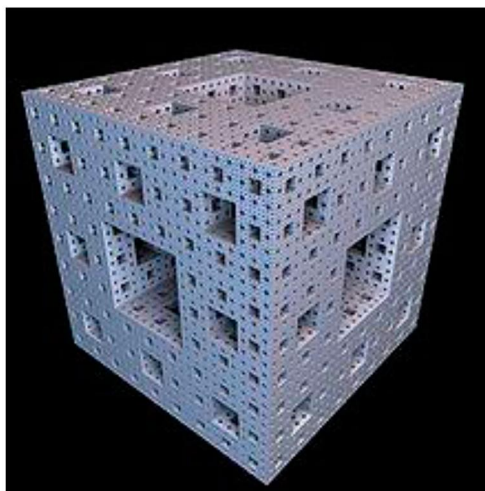


Рис. 2

Фрактал «Губка Менгера» на шестой итерации.

Автор: Niabot - File:Menger-Schwamm-6-iterations.png, CC BY-SA 4.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7933997>

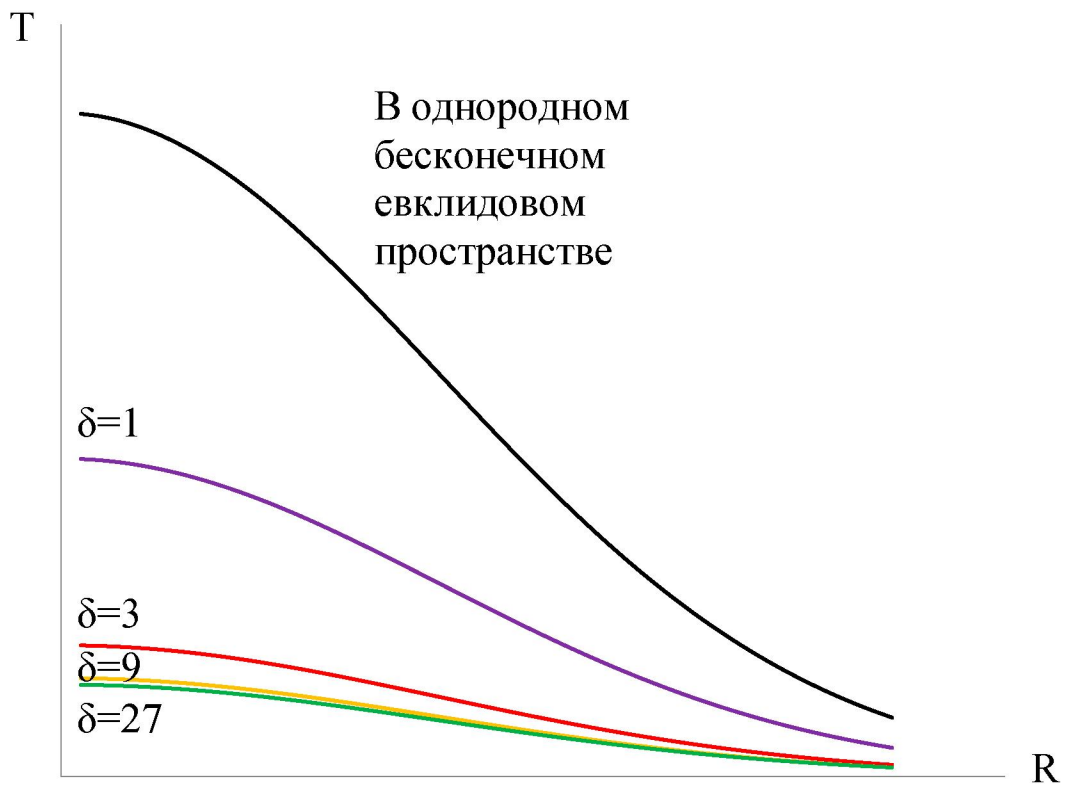


Рис. 3

Зависимость температуры от расстояния в заданный момент времени на четырех масштабах рассмотрения фрактала «Губка Менгера» при отрицательном значении параметра A и в однородном бесконечном евклидовом пространстве.

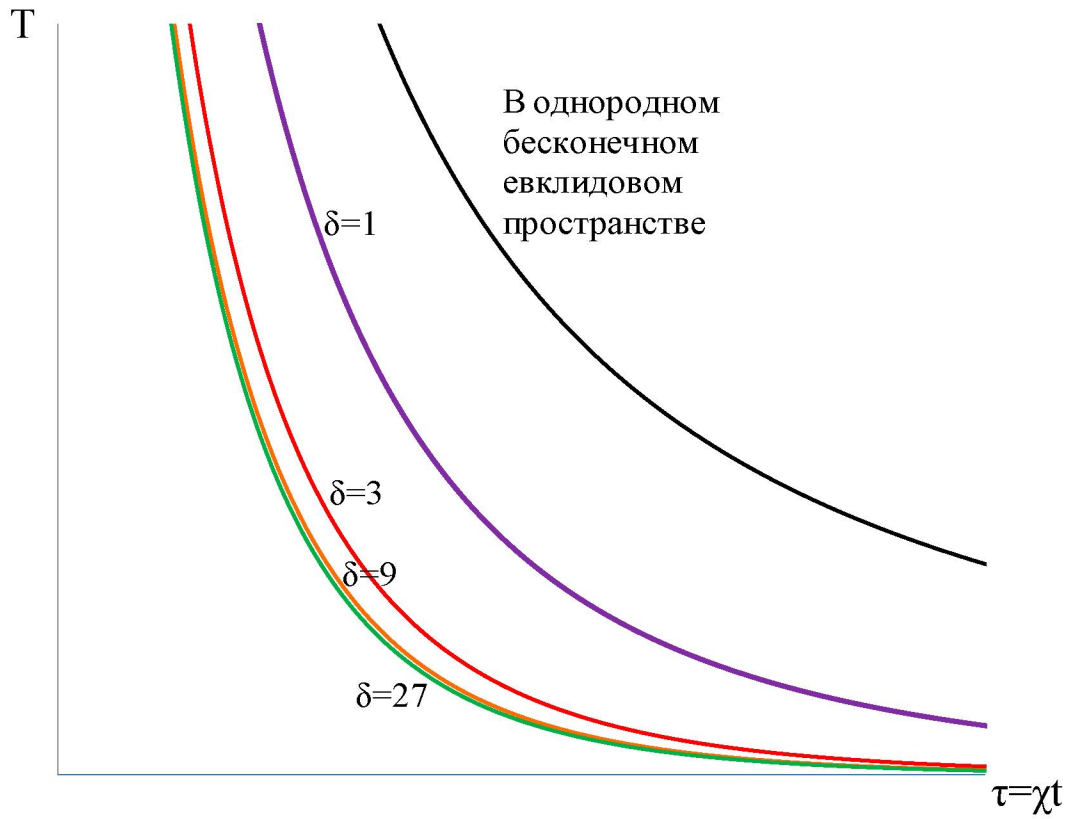


Рис. 4

Зависимость температуры от временного параметра в заданной точке пространства на четырех масштабах рассмотрения фрактала «Губка Менгера» при отрицательном значении параметра A и в однородном бесконечном евклидовом пространстве.

Глава 3. МЕТОД ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСШИРЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРЕМЕННЫХ.

В самых различных областях науки и техники зачастую приходится иметь дело не с детерминированными, а со стохастическими процессами и системами.

Стационарная плотность вероятности однозначно определяет распределение случайной величины при реализации ее на промежутке времени, в котором происходит достаточно много ее реализаций. В результате, основные моменты, характеризующие такой процесс: среднее, дисперсия и так далее, являются определенными и, соответственно, могут быть предсказаны на любом достаточно большом интервале времени.

В случае стационарной плотности вероятности реализации стоимости ценных бумаг, игра на бирже была бы просто не возможна в связи с высокой предсказуемостью результата «в среднем». При стационарном распределении можно было бы с очень высокой точностью предсказывать реализации и других стохастических процессов, таких как метеорологические, гидродинамические и так далее.

Однако большинство стохастических процессов являются в достаточной мере непредсказуемыми. Отсутствие определенности в них связано не только с вероятностным распределением возможных реализаций исследуемого процесса, но и с возможным нестационарным характером поведения плотности вероятности.

При исследовании таких систем часто подразумевают, что нахождение закона, согласно которому происходит эволюция плотности вероятности, позволит полностью решить задачу описания стохастического процесса. Однако если предположить, что для нахождения эволюционного закона для плотности вероятности необходимо решить какую-то более общую нелинейную задачу, то такое решение не обязано быть единственным. В случае

неединственности решения такой задачи, различные плотности вероятности реализации случайной величины сами могут реализовываться случайным образом. В этом случае неопределенность исследуемого процесса существенно повышается. Возможно, рассмотрение такого аспекта позволит объяснить некоторые особенности стохастических систем, в которых практически невозможно подобрать единственный закон, позволяющий достаточно полно «в среднем» описать их эволюцию.

Вопрос о том, по каким законам возникают и реализуются плотности вероятности в стохастических процессах, остается до сих пор открытым, несмотря на довольно пристальное внимание к нему со стороны ученых.

В качестве основных направлений исследований этого вопроса можно выделить следующие: во-первых, это исследование динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями, решения которых имеют хаотический характер (см., например, [26]); во-вторых, описание стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений [31]. Остановимся кратко на каждом из них.

Хаотический характер решений автономных дифференциальных уравнений, возникает из-за чрезвычайной высокой чувствительности решений к начальным данным, в результате чего, незначительное отклонение при задании траекторий в начальный момент времени, может привести к их расхождению в будущем, порождая, тем самым вычислительный хаос. Тем не менее, такой процесс необходимо отделять от истинно стохастических процессов, поскольку на математическом уровне строгости автономные дифференциальные уравнения подчиняются теореме о единственности. Проблема состоит в том, что такие уравнения не имеют аналитических решений, а вычислительные методы, всегда привносят неопределенность из-за конечности шага по времени. Причем происходит это не только при задании начальных условий, а на каждом шаге вычислений, что может явиться источником возникновения в фазовом

пространстве странного аттрактора [67].

Широко известными способами для описания таких хаотических систем являются методы, использующие операторный подход, например, операторы Купмана - фон Неймана или операторы Перрона-Фробениуса. Эти подходы, вместо рассмотрения эволюции во времени единственного решения, рассматривают эволюцию «трубки», состоящей из различных траекторий, стартующих в один момент времени. В конечном счете, операторные методы сводятся к уравнению Лиувилля и задают единственное решение для нестационарной плотности вероятности.

Методы описания стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений можно, в свою очередь, условно разделить на два класса:

- во-первых, это соотношения в форме уравнений Ланжевена, которые состоят из обычного детерминированного дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей случайный процесс [59]:

$$dx/dt = f(x) + \sum_{m=1}^n g^m(x) \eta_m(t),$$
 где f , g - произвольные функции, η_m - случайные функции от времени;

- во-вторых, это уравнения Ито [31]. Их форма напоминает уравнения Ланжевена, но записанных с использованием стохастических дифференциалов:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\delta W,$$
 где $a(x,t)$, $b(x,t)$ - коэффициенты сноса и волатильности; δW - бесконечно малый винеровский «шум». В стандартном винеровском процессе $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$, где $\varepsilon \sim N(0,1)$ - гауссова переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. В зависимости от способа задания коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x,t)$ выделяют такие процессы, как броуновское и логарифмическое блуждание, процесс Орнштейна-Уленбека и другие [28].

Такой подход, в отличие от методов исследования динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями, предполагает

задание неизменной во времени стохастической модели, накладываемой на детерминированное поведение системы. Этот подход основан на том, что «стохастика» процесса подбирается так, чтобы вычислительный эксперимент наиболее полно отражал эмпирический характер поведения системы. Общего метода по определению уравнения, которым должен описываться стохастический процесс не существует. Как правило, при описании реальных стохастических процессов не удается подобрать коэффициенты в стохастических уравнениях, которые бы удовлетворительно описывали процесс на довольно длительном промежутке времени. Выбор довольно простого вида стохастических дифференциальных уравнений обусловлен большой вычислительной сложностью численного интегрирования уравнений, содержащих случайные функции. В связи с этим возникает еще один аспект моделирования случайных процессов - практически невозможно сопрягать стохастические дифференциальные уравнения с обыкновенными детерминированными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, например, уравнениями Навье-Стокса. В этом случае, вычислительные сложности, связанные с интегрированием каждого вида этих уравнений, многократно возрастают. Кроме того, возникает взаимное влияние стохастических возмущений от искусственно задаваемых случайных процессов и вычислительных (модельных и сеточных) стохастических артефактов. Все это затрудняет использование стохастических дифференциальных уравнений при описании стохастических процессов и, что особенно важно, не позволяет в полной мере понять природу «стохастичности» исследуемых процессов.

От уравнений Ланжевена и Ито можно перейти к уравнениям типа Фоккера-Планка, но лишь в случае, когда характерное время корреляции случайной «силы» много меньше времени релаксации стохастической системы за счет диссипативной «силы» [30]. Таким требованиям удовлетворяют истинно марковские (без скрытых параметров) процессы. В этом случае при усреднении

случайных величин можно ограничиться рассмотрением двух первых моментов, что и приведет к ограничению членов уравнения в частных производных только диссипативным и диффузионным членами. Однако задавая такие жесткие требования к стохастической системе, мы, тем самым, упускаем очень важные аспекты этого процесса, о чем свидетельствуют эмпирические данные, показывающие сильную ограниченность применения описания реальных стохастических процессов с использованием уравнений типа Фоккера-Планка.

В любом случае, независимо от того используются ли стохастические дифференциальные уравнения или уравнения типа Фоккера-Планка для описания стохастических процессов, они также, как и операторные методы не позволяют получить в качестве решения неединственную плотность вероятности реализации стохастической переменной.

Таким образом, причины отсутствия возможной неединственности плотности вероятности в рассмотренных случаях разные: в одних, «принудительное» задание стохастического процесса, наиболее «близкого» к эмпирическим данным на некотором временном интервале; в других, задание «закона», соответствующего дифференциальным уравнениям, описывающим динамический процесс. Однако, конечный результат одинаков – эти методы описывают эволюцию во времени нестационарной плотности вероятности, являющейся единственным решением задачи в заданной постановке.

Для того чтобы понять, как формируются (возможно неединственным образом) и эволюционируют плотности вероятности случайных стохастических процессов, необходимо выйти за рамки принятых подходов. В отличие от подхода, принятого при описании хаотических динамических систем, мы не будем предполагать детерминированность (в математическом смысле) процесса - будем считать, что стохастичность процесса проявляется в том, что реализация значения исследуемой величины происходит случайным образом в

соответствии с плотностью (или плотностями) вероятности в заданный момент времени. А, в отличие от метода описания процессов с помощью стохастических уравнений, закон изменения плотности вероятности не будем считать наперед заданным и неизменным: изменение функции плотности (или плотностей) вероятности будет зависеть от того, какие значения случайной величины реализовались.

Итак, в данной работе будет построен метод описания стохастических процессов для систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности реализации, причем такое изменение не обязано быть малой величиной. При описании такой системы особое место занимает временной интервал ее рассмотрения. От этого интервала, в первую очередь, зависит задание начальных условий задачи в виде известного реализованного распределения значений исследуемой случайной величины на заданном временном интервале. Определяются плотности вероятности исследуемого процесса в заданный момент времени, при этом показывается, что такое решение может быть неединственным в определенном диапазоне возможной реализации случайной величины. В этом случае реализация самой плотности вероятности, в соответствии с которой и реализуются случайные величины, будет также происходить случайным образом. В соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдберга (условия, которой считаем выполненными), распределение реализованных исследуемых величин (при неединственной плотности вероятности и большом числе реализаций) будет стремиться к нормальному (гауссовскому) распределению.

С помощью анализа размерности фазового пространства определяются устойчивые и неустойчивые ветви решения для плотности вероятности в тех областях реализации случайной величины, где может реализовываться единственное решение.

3.1. Построение математической модели для описания стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

Рассмотрим стохастический процесс, описываемый реализуемыми в фиксируемые моменты времени t_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k, \dots$) значениями $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i)$. Причем множество реализованных значений $\tilde{Q}(\tilde{q}) = \{\tilde{q}\}$ является подмножеством множества $Q(q) = \{q\}$ всех возможных значений q : $\tilde{Q}(\tilde{q}) \subset Q(q)$. Реализация значения \tilde{q}_i в момент времени t_i происходит случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\varphi_i(q)$.

Будем считать, что также как и для марковских процессов, состояние исследуемого процесса будет определяться только предыдущим моментом времени, при этом не будет исключаться возможность влияния скрытых параметров (факторов). То есть, исследуемый процесс будем считать скрытой марковской моделью [59]. Скрытым фактором в случае рассмотрения стохастической системы, не имеющей выделенных состояний равновесия, будем считать ее свойство изменять функцию плотности вероятности реализации случайной величины вслед за реализацией одного из возможных значений, если это значение отлично от среднего. В случае, реализации значения, равного среднему, плотность вероятности в такой системе не изменяется.

Такая постановка задачи, в некотором смысле, близка к идеологии мартингалов – случайных процессов, в котором наилучшим (в смысле среднеквадратичного) предсказанием будущего является его настоящее состояние. И в рассматриваемом случае, и в случае мартингалов (а так же суб- и супермартингалов) система должна иметь внутренние механизмы, способные влиять на динамику стохастического процесса в ответ на реализацию случайных значений. Однако в отличие от принятой идеологии описания мартингалов, будем исходить не от определения статистики распределения, а

попытаемся исследовать процесс на более глубоком уровне - на уровне описания динамики плотности вероятности случайной величины.

Остановимся на построении математической модели такой системы [33], [60], [123]. Построим расширенное пространство переменных $(t, q; \varphi)$, в котором плоскость исследуемого процесса (t, q) является проекцией пространства $(t, q; \varphi)$ (см. рис. 5). Будем искать в пространстве $(t, q; \varphi)$ такие зависимости $\varphi = \varphi(t, q) = \varphi(\tilde{q}(t), q)$, которые связывают между собой значения реализованных величин \tilde{q} в различные моменты времени.

Предположим, что в каждый фиксируемый момент времени t_i , существует нормированная функция $\varphi(t_i, q) = \varphi_i(q)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q) dq = 1$, которая описывает вероятность реализации значения \tilde{q}_i .

В точке t_i реализованное значение \tilde{q}_i представимо в виде:

$$\tilde{q}_i = \langle q \rangle_i + (\Delta q)_i, \quad (3.1)$$

где $(\Delta q)_i$ ($\Delta q \in C^1(R)$) - отличие реализованного в момент времени t_i , значения \tilde{q}_i от среднего значения возможных реализаций величин q :

$$\langle q \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi_i(q) dq. \quad (3.2)$$

Поскольку рассматриваются стохастические системы марковского типа, не имеющие выделенных состояний равновесия, то предполагается, что в них в каждый фиксированный момент времени система “знает” только о реализованном в предыдущий момент времени значении (например, при анализе фондового рынка - о стоимости ценных бумаг) и не “подозревает” о существовании ни каких других “реперных точек”. В связи с этим, будем рассматривать такие процессы, в которых реализация на текущем шаге

значения \tilde{q} , отличного от среднего ($\tilde{q} \neq \langle q \rangle$), ведет на следующем шаге к изменению функции $\varphi(q)$, и следующая реализация происходит случайным образом в соответствии с новой плотностью вероятности. Если же, на текущем шаге, реализуется значение \tilde{q} , в точности равное среднему: $\tilde{q} = \langle q \rangle$, то при переходе к следующему шагу функция $\varphi(q)$ не изменяется и реализация значения \tilde{q} на следующем шаге происходит с вероятностью, определяемой плотностью вероятности, полученной на текущем шаге.

Для таких систем найдем зависимость, связывающую плотность вероятности $\varphi_k(q)$, реализуемую в момент времени t_k , с реализованными в момент времени t_{k-1} значением \tilde{q}_{k-1} и плотностью вероятности $\varphi_{k-1}(q)$.

Описывая исследуемый процесс в пространстве (t, q, φ) , заменим в выражениях (3.1)-(3.2) значения, реализуемые в фиксированные моменты времени t_i , значениями, реализуемыми в любой произвольный момент времени t : $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i) \rightarrow \tilde{q}(t)$, $(\Delta q)_i = (\Delta q)(t_i) \rightarrow (\Delta q)(t)$, $\varphi_i(q) = \varphi(t_i, q) \rightarrow \varphi(t, q)$. При этом считаем, что нормировка функции $\varphi(t, q)$ остается постоянной во времени. Исходя из выражений (3.1)-(3.2), запишем

$$\tilde{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + (\Delta q)(t).$$

Продифференцируем обе части полученного выражения по времени:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + \frac{d(\Delta q)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq + \frac{d(\Delta q)}{dt}.$$

Используя свойство постоянства нормировки функции $\varphi(t, q)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = 0, \text{ вычтем из правой части полученного соотношения нулевой}$$

член: $\kappa \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq$, где $\kappa = const$, и перепишем выражение в

виде:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}.$$

Поскольку не будут рассматриваться никакие другие механизмы изменения функции φ от времени, кроме вышеописанного – при реализации текущего значения \tilde{q} , то в линейном приближении выражение для производной функции φ по времени будет иметь вид:

$$\frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}(t), q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}}{dt}.$$

Используя его, мы исключаем возможность, например, самопроизвольного изменения функции φ . При этом, выражение для производной $d\tilde{q}/dt$, приобретает вид:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим проекцию описываемого процесса из пространства $(t, q; \varphi)$ на плоскость (t, q) . Поскольку рассматриваемый процесс на данном масштабе рассмотрения зависит только от предыдущего момента времени, то до момента времени t_{k-1} , отстоящего на шаг от исследуемого момента времени t_k , реализованные значения \tilde{q} нас интересовать не будут. Необходимо заметить, что введение на этом этапе двух моментов времени t_{k-1} и t_k , не означает обратного перехода от непрерывного к дискретному рассмотрению. Эти моменты времени вводятся только для удобства обозначения и их использование аналогично заданию граничных условий задачи. Никакие другие моменты в непрерывной постановке задачи использоваться не будут.

Доопределяя величину \tilde{q}_{k-1} , как постоянное значение, на интервал $t < t_k$, и доопределяя значение \tilde{q}_k , которое должно реализоваться в момент времени t_k , на интервал $t \geq t_k$, запишем функцию $\tilde{q}(t)$ на плоскости (t, q) в виде разрывной функции:

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & \text{если } t < t_k \\ \tilde{q}_k, & \text{если } t \geq t_k \end{cases} .$$

Введем дополнительную функцию H , которая будет принимать значение, равное нулю, везде до точки разрыва и, равное единице, везде после точки разрыва. Такая функция может иметь вид:

$$H = \frac{\tilde{q}(t) - \tilde{q}_{k-1}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = U_-(t - t_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_k \\ 1, & \text{при } t \geq t_k \end{cases}, \text{ где } \tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & \text{если } t < t_k \\ \tilde{q}_k, & \text{если } t \geq t_k \end{cases} . \quad (3.4)$$

Производная функции H по t будет равна

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{d(t - t_k)} = \delta(t - t_k), \text{ где } \delta - \text{ дельта-функция.}$$

В линейном приближении изменения функции $\phi(t, q)$ в окрестности точки t_k , можно записать:

$$\left(\frac{d\phi(t, q)}{dq} \right)_{q=\tilde{q}_k} \Big|_{t=t_k} \cdot (t - t_k) = \left(\frac{d\phi_k(q)}{dq} \right)_{q=\tilde{q}_k} \cdot (q - \tilde{q}_k).$$

Если в точке $q = \tilde{q}_k$ выполняется соотношение: $\left(\frac{d\phi_k(q)}{dq} \right)_{q=\tilde{q}_k} = 0$, то будет равна нулю и производная $\left(\frac{d\phi(t, q)}{dq} \right)_{q=\tilde{q}_k} \Big|_{t=t_k}$, то есть в следующий момент времени t_{k+1} плотность вероятности не изменится, и реализация следующего значения \tilde{q} на плоскости (t, q) произойдет случайным образом в соответствии с плотностью вероятности $\phi_{k+1}(q) = \phi_k(q)$. Если же

$(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} \neq 0$, то $(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k} \neq 0$ и $t-t_k = \frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}(q-\tilde{q}_k)$,

ПОЭТОМУ,

$$\frac{dH}{dt} = \delta(t-t_k) = \delta\left(\frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}(q-\tilde{q}_k)\right) = \left|\frac{(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}\right| \delta(q-\tilde{q}_k). \quad (3.5)$$

Чтобы придерживаться “единообразия” описания изменения функции $\varphi(t,q)$, можно, не теряя общности, не рассматривать те моменты времени t_j , когда равны нулю производные $(d\varphi_j(q)/dq)_{q=\tilde{q}_j}$, $(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_j}/dt)_{t=t_j}$, а рассматривать следующие за ними моменты времени t_{j+1} . Как будет показано ниже, полученные итерационные выражения для функции $\varphi(t,q)$, в линейной постановке задачи, не будут зависеть от шага времени Δt , и поэтому, такие временные переходы не являются запрещенными.

Используя зависимости (3.4)-(3.5), а так же выбирая в качестве константы κ значение $\kappa = \langle q \rangle_k$, перепишем выражение (3.3) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}}{dt} &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение константы $\kappa = \langle q \rangle_k$, выбиралось из соображения, чтобы в том случае, если $\tilde{q}_k = \langle q \rangle_k$, изменение \tilde{q} не зависело бы от изменения функции φ ,

то есть выполнялось бы соотношение: $d\tilde{q}/dt = d(\Delta q)/dt$.

Осредняя левую и правую часть полученного выражения по плотности вероятности $\varphi_k(q)dq$, получим соотношение:

$$\left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}. \quad (3.6)$$

$$\text{Здесь } \langle \cdot \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \varphi_k(q) dq.$$

Обратимся к левой части выражения (3.6). Используя выражения (3.4)-(3.5), получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\ &= (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ в правой части выражения (3.6) можно так же найти, используя выражения (3.4)-(3.5). Для этого заметим, что в случае рассмотрения любой неизменной во времени функции $\varphi(q)$, имеют место соотношения:

$$\langle \Delta q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \varphi(q) dq = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0.$$

Поэтому ненулевое значение величины $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ на интервале $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, может быть обусловлено только изменением функции $\varphi(t, q)$ во

времени. Следовательно, среднее значение производной $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$, можно записать:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q)/\partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q)/\partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\
&= \left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (3.6), приходим к зависимости:

$$\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} = \left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) \left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}.$$

В случае линейного приближения изменения функции на интервале времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ производная $(\partial \varphi(\tilde{q}, q)/\partial \tilde{q})_{q=\tilde{q}_k}$ может быть записана в виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}.$$

Тогда полученное выражение принимает вид:

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left(\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} \right) \left(\left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q)/\partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} \right).$$

Учитывая изменение функции φ на интервале времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$:

$$(\partial \varphi(t, q)/\partial q)_{t=t_{k-1}, q=\tilde{q}_k} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}, \quad (\partial \varphi(t, q)/\partial q)_{t=t_k, q=\tilde{q}_k} = (d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k},$$

получаем:
$$\left(\Delta \left(\frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} = \frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}/dq)_{q=\tilde{q}_k}}.$$

И, следовательно,

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left(\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k} \right) \left(\frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7), связывающее реализованное в момент времени t_k значение \tilde{q}_k с реализованным значением в момент времени t_{k-1} , а также с плотностью вероятности распределения и ее производной на текущем шаге, с плотностью вероятности распределения и ее производной на предыдущем шаге (все в точке \tilde{q}_k), является инвариантным относительно изменения временных масштабов рассмотрения исследуемых систем.

В самом деле, при выводе соотношения (3.7) выбирался произвольный шаг по времени Δt , однако его величина не вошла в окончательное выражение. Тем не менее, масштаб времени Δt опосредованно через значение функции $\varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}$ и значение производной $(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}$ влияет на значения прогнозируемых в следующий момент времени величин $\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q \rangle_k$.

Действительно, зафиксировав реализованное на текущем k -ом шаге значение \tilde{q}_k и взяв в качестве предыдущего, $(k-1)$ -го шага точку, отстоящую от точки k не на расстояние Δt , а на расстояние $n\Delta t$, где n - любое положительное число, мы получим другие эмпирические значения \tilde{q}_{k-1} , $\varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}$ и $(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}$, а следовательно (в соответствии с уравнением (3.7)), и другие значения функции $\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k}$, ее производной $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}$ и

величины $\langle q \rangle_k$ на текущем k -ом шаге. Полученные таким образом новые значения $\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q)/dq)|_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q \rangle_k$ будут являться характеристиками нового (большого, если $n > 1$, и меньшего, если $n < 1$) временного масштаба рассмотрения системы. Однако такое влияние масштаба времени Δt не носит регулярного характера на прогнозируемые величины – их одинаковые значения могут быть получены на разных временных масштабах рассмотрения.

Отсутствие параметра Δt в соотношении (3.7) ведет к тому, что при таком подходе отпадает необходимость специально вводить случайный процесс, описывающий вероятностные по времени скачки изменения системы, как это делают, например, при описании пуассоновских процессов [28].

Учитывая, что $\langle q \rangle_k$ и $\langle q \rangle_{k-1}$ - являются константами, характеризующие распределения φ_k и φ_{k-1} , выражение (3.7) можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})|_{q=\tilde{q}_k}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}} \right) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{1}{\left(\frac{d\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)}{d(q - \langle q \rangle_k)} \right)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{\left(\frac{d\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})}{d(q - \langle q \rangle_{k-1})} \right)_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}} \right).$$

Поскольку $\tilde{q}_k = q|_{q=\tilde{q}_k}$, то во всех выражениях для производных $(d\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})/d(q - \langle q \rangle_{k-1}))|_{q=\tilde{q}_k}$, $(d\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)/d(q - \langle q \rangle_k))|_{q=\tilde{q}_k}$ и для функций $\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})|_{q=\tilde{q}_k}$, $\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)|_{q=\tilde{q}_k}$, входящих в полученное соотношение, переменную q можно заменить новой переменной \tilde{q}_k . Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} \right) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{1}{d\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)/d(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})/d(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} \right).$$

Обозначив $\tilde{q}_k - \langle q \rangle_i := p_i$ (где $i = k-1, k$), запишем:

$$\frac{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)}{\varphi_k(p_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\varphi_k(p_k)} \right) \left(\left(\frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} \right) + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)} \right). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8), связывающее в двух точках t_{k-1} и t_k значения p_{k-1} и p_k (которые представляют собой отклонения величины \tilde{q}_k от средних значений $\langle q \rangle$ в этих точках), а также плотности вероятности реализации этих значений, также как и соотношение (3.7), можно, в рамках принятой модели, считать основным уравнением задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении. Оба этих уравнения необратимы по времени.

Покажем, как можно воспользоваться разработанной теорией для определения динамики макропроцессов [68-69], [124-125].

Предположим, что для описания физической системы рассматриваются интегральные уравнения, определяющие протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий. В случае независимости этих соотношений от рассматриваемого объема, по которому производится интегрирование, можно перейти к уравнениям в частных производных (УЧП) вида: $df/dt = \hat{A}f$ (\hat{A} - оператор, вид которого зависит от конкретной задачи). При рассмотрении детерминированных физических процессов, полная производная по времени в левой части этого уравнения определяется соотношением:

$$df/dt = \partial f / \partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f / \partial x_i .$$

В тех случаях, когда в системе возникают условия для возникновения стохастических возмущений, обусловленных внутренними процессами, вид интегральных соотношений, определяющих протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий, останется прежним, при этом функциональная зависимость в УЧП не будет ограничиваться только временной и пространственными координатами: ее необходимо рассматривать с учетом всех дополнительных независимых степеней свободы - стохастических возмущений. Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами является энтропия, и, следовательно, в таком процессе можно перейти от рассмотрения функциональной зависимости от отдельных независимых возмущений к рассмотрению зависимости функции от энтропии в целом: $f = f(t, \vec{x}; S)$.

В этом случае полную производную по времени функции f можно записать в виде: $\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t}$. Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в этом выражение, его можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta \vec{x} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$,

$\Delta S \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, в полученном выражение первое слагаемое равно: $\frac{\partial f}{\partial t}$; второе

слагаемое: $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = (\vec{V} \nabla) f$; третье слагаемое: $\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt}$.

Таким образом, учет влияния изменения энтропии приведет к изменению полных производных по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{dS}{dt}. \quad (3.9)$$

Включение дополнительного члена, характеризующего производство энтропии, в полную производную по времени аналогично добавлению конвективных членов, когда возникает необходимость в учете пространственных степеней свободы, например, при переходе от второго закона Ньютона, характеризующего движение твердых тел, к описанию движения жидкой «частицы» в поле течения в уравнениях Навье-Стокса.

На примере гидродинамических стохастических процессов (турбулентного режима течения) можно видеть, что температура в них практически не изменяется и, следовательно, нельзя учитывать только изменение термодинамической энтропии, связанной с процессом броуновского движения молекул. Учет изменения энтропии в таких процессах должен производиться на всех возможных масштабах. Поэтому в качестве соотношения для энтропии в стохастических процессах необходимо использовать выражение для дифференциальной энтропии:

$$S(\vec{x}, t; \tau) = - \int \varphi[p(\vec{x}, t; \tau)] \ln \varphi[p(\vec{x}, t; \tau)] d[p(\vec{x}, t; \tau)].$$

В этом выражении функция $\varphi[p(\vec{x}, t; \tau)]$ - это плотность вероятности реализации значения $p = q[(\vec{x}, t)] - \langle q[(\vec{x}, t; \tau)] \rangle$, $\langle q \rangle$ - среднее значение величины q в рассматриваемой точке пространства \vec{x} в заданный момент времени t на временном масштабе рассмотрения τ .

В случае, если количество реализованных величин на рассматриваемом промежутке времени достаточно большое, при этом, ни одна из реализаций не является доминирующей, то есть когда события происходят независимо друг от друга (некоррелированы), то дифференциальная энтропия для распределения с

ограниченной дисперсией максимальна в случае гауссова распределения вероятностей. Изменение энтропии в стохастической системе будет характеризовать возникновение коррелированных событий.

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий к уравнению в расширенном пространстве переменных. Чтобы этого избежать, представим выражение (3.9) через переменную определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt}. \quad (3.10)$$

Производная $\delta S / \delta \varphi$, входящая в уравнение (3.10), может быть определена как функциональная производная: $\delta S / \delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{S[\varphi + \varepsilon h] - S[\varphi]\} / \varepsilon$. Найдем ее значение:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle &= -\frac{d}{d\varepsilon} \int (\varphi(p) + \varepsilon h(p)) \ln(\varphi(p) + \varepsilon h(p)) dp \Big|_{\varepsilon=0} = \\ &= -\int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$. Поскольку, $-(\ln \varphi + 1)\delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$, перепишем уравнение (3.10) в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{dS}{dt} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

Из полученного соотношения, в частности, видно, что дополнительный член, отвечающий за учет стохастических возмущений, является ненулевым только при условии ненулевого производства энтропии в рассматриваемой системе.

Производство энтропии: dS/dt , можно охарактеризовать временным масштабом τ , на котором происходит изменение энтропии стохастической

системы на единицу. В результате, выражение для полной производной от функции f можно окончательно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

А, учитывая, что влияние на выделенную область внешних воздействий не изменяется, можно записать соотношение для нахождения функции $f = f(t, \vec{x}; \tilde{s}(p))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \hat{A}f. \quad (3.11)$$

Зависимость (3.11) совместно с уравнением (3.8), представляющего неявную форму соотношения для нахождения φ , будут описывать динамику процесса рассматриваемой системы с учетом внутренних стохастических процессов.

Уравнение (3.8) допускает аналитическое нахождение асимптот решения в двух предельных случаях. Во-первых, в случае мартингалов, когда реализованное значение на предыдущем шаге становится средним значением на шаге текущем: $\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$. Во-вторых, в случае больших значений производных:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} \gg 1 \quad (\text{или} \quad \frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1),$$

когда небольшое изменение реализованного значения параметра \tilde{q} приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

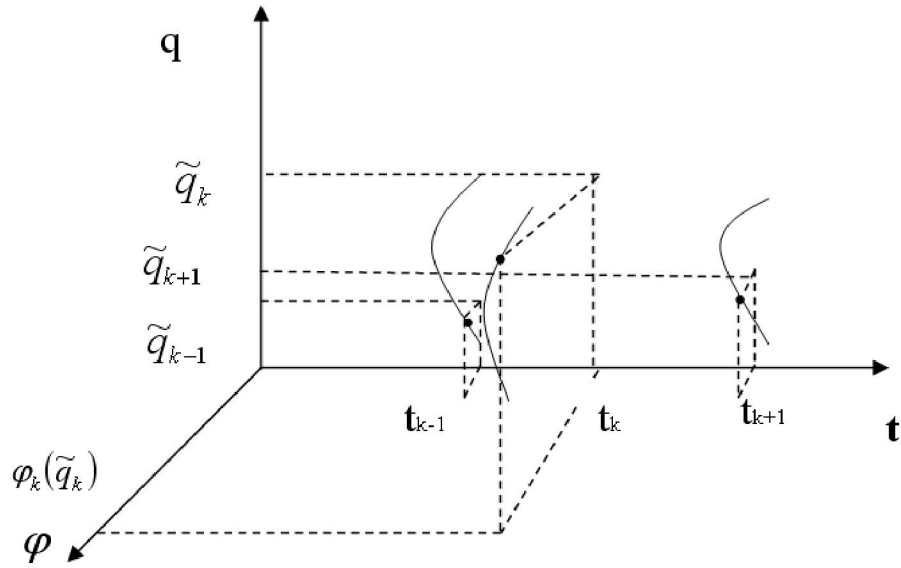


Рис. 5

В расширенном пространстве $(t, q; \varphi)$ ведется поиск зависимостей $\varphi = \varphi(t, q)$, определяющих плотности вероятности реализации случайной величины в различные моменты времени.

3.2. Метод описания мартингалов.

В предыдущем разделе (см. также [33], [60]) получено уравнение (3.8), связывающее в двух точках t_{k-1} и t_k значения p_{k-1} и p_k (которые представляют собой отклонения стохастической величины \tilde{q}_k от средних значений $\langle q \rangle$ в этих точках: $p_{k-1} = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1}$, $p_k = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_k$), а также плотности вероятности реализации этих значений.

Уравнение (3.8), в принятой модели, можно считать основным уравнением задачи определения динамики стохастического процесса. В данном разделе рассмотрим первый предельный случай, в котором можно получить асимптотики аналитических решений уравнения (3.8), а именно, опишем процессы, в которых реализованное значение на предыдущем шаге становится средним значением на шаге текущем. Такие процессы называются мартингалами.

Допущение: $\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$, позволяет преобразовать соотношение (3.8) к виду:

$$\frac{p_k}{\varphi_k(p_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_k(p_k)}{\varphi_{k-1}(p_{k-1})} \right) \left(\frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} - \frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} \right).$$

Зафиксируем значение \tilde{q}_k , плотность вероятности реализации которого нам хотелось бы вычислить. Тогда значение функции $\varphi_{k-1}(p_{k-1})$, значение ее производной $d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}$, а также среднее значение $\langle q \rangle_{k-1}$ являются определенными на предыдущем $(k-1)$ -ом шаге времени константами:

$$\varphi_{k-1}(p_{k-1}) := \varphi_{k-1} = const, \quad d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1} := d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = const,$$

$\langle q \rangle_{k-1} = \tilde{q}_{k-2} = const$ (где $p_{k-1} = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1} = \tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-2}$). Функция $\varphi_k(p_k)$ и производная $d\varphi_k(p_k)/dp_k$ зависят от изменяемого аргумента

$p_k = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_k = \tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}$, в котором переменной величиной является \tilde{q}_{k-1} . Для упрощения записи, индексы k в последнем выражении можно опустить. Подразумевая в дальнейшем, что аргументы и функции без индекса относятся к

текущему моменту времени, перепишем его в виде:

$$\frac{1}{\frac{d\varphi(p)}{dp}} = \frac{1}{\frac{d\varphi_{k-1}}{dp_{k-1}}} - \frac{p}{\varphi(p) \left(1 - \frac{\varphi(p)}{\varphi_{k-1}}\right)}. \quad (3.12)$$

Соотношение (3.12) – это обыкновенное дифференциальное уравнение.

Записав его в виде:

$$\varphi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{k-1}}\right) \frac{dp}{d\varphi} + p = \frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} \varphi \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{k-1}}\right),$$

и сделав замену

$$d\Omega = \frac{d\varphi}{\varphi(1 - \varphi/\varphi_{k-1})} = -d \left(\ln \left| \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_{k-1}} \right| \right),$$

перейдем к выражению:

$$\frac{dp}{d\Omega} + p = \pm \frac{\varphi_{k-1}^2}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} \frac{e^{-\Omega}}{(1 \pm \varphi_{k-1} e^{-\Omega})^2}, \quad \text{где} \quad \Omega = -\ln \left| \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_{k-1}} \right|.$$

Таким образом, уравнение (3.12) “расщепляется” на два соотношения – одно для верхнего, а второе для нижнего знаков, стоящих в последнем выражении.

Сделав в этом выражении подстановку $\Omega = \ln \omega$, где $\omega > 0$, получим соотношение

$$\frac{d(p\omega)}{d\omega} = \pm \frac{\varphi_{k-1}}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} \frac{\varphi_{k-1}/\omega}{(1 \pm \varphi_{k-1}/\omega)^2}, \quad \text{где} \quad \varphi_{k-1}/\omega = |\varphi_{k-1}/\varphi - 1|,$$

или

$$p = \pm \frac{\varphi_{k-1}}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} \frac{\varphi_{k-1}}{\omega} \int \frac{\varphi_{k-1}/\omega}{(1 \pm \varphi_{k-1}/\omega)^2} d(\omega/\varphi_{k-1}).$$

Проинтегрировав это выражение и сделав обратные преобразования: $\omega(\varphi(p)) \rightarrow \varphi(p)$, получим:

$$\frac{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}{\varphi_{k-1}} p = |\varphi_{k-1}/\varphi - 1| \left(\frac{1}{|\varphi_{k-1}/\varphi - 1|^{-1} \pm 1} \pm \ln \left| |\varphi_{k-1}/\varphi - 1|^{-1} \pm 1 \right| \right). \quad (3.13)$$

Вводя функцию: $\psi(p) = |\varphi_{k-1}/\varphi(p) - 1|$, перепишем выражение (3.13) в более компактной форме:

$$\frac{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}{\varphi_{k-1}} p = \psi(p) \left(\frac{\psi(p)}{1 \pm \psi(p)} \pm \ln \left| \frac{1 \pm \psi(p)}{\psi(p)} \right| \right). \quad (3.14)$$

Выражения (3.13)-(3.14) в неявном виде задают два класса соотношений (в зависимости от реализации знака «+» или «-») для функции $\psi(p) = \psi(\varphi(p))$, и четыре класса соотношений (дополнительные классы возникают после раскрытия модуля) для плотности вероятности $\varphi = \varphi(p)$, являющихся общими решениями задачи определения динамики стохастического процесса, в которой реализованный на предыдущем шаге параметр становится средним значением плотности вероятности на текущем шаге. Естественно, учитывать надо только действительные положительные решения этих уравнений.

Уравнение (3.14) допускает нахождение асимптотики аналитических решений: $\varphi(p) \approx \left| \frac{\varphi_{k-1}^2 / (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})}{p} \right|$, когда $\psi(p) = |\varphi_{k-1}/\varphi(p) - 1| \gg 1$ (или $\varphi(p) \ll \varphi_{k-1}$). Из зависимости $\varphi(p)$ видно, что условие асимптотики: $\varphi(p) \ll \varphi_{k-1}$, выполняется при достаточно больших значениях $|p|$ по сравнению с величиной $|\varphi_{k-1}/(d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})|$. В этом случае можно записать:

$$\varphi(p) \approx \left| \frac{\varphi_{k-1}^2 / (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})}{p} \right|, \quad \text{если } |p| \gg |\varphi_{k-1}/(d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})|. \quad (3.15)$$

Изменения значения $p = \tilde{q} - \langle q \rangle = \tilde{q} - \tilde{q}_{k-1}$ можно достигать двумя способами: либо варьируя \tilde{q} , либо изменяя величину $\langle q \rangle = \tilde{q}_{k-1}$. Переход от одного способа к другому можно считать перенормировкой параметров. При

выводе уравнений (3.13)-(3.14) такая перенормировка была произведена, когда фиксировалось значение \tilde{q} , а величина $\langle q \rangle = \tilde{q}_{k-1}$ считалась переменной. После нахождения решений уравнений (3.13)-(3.14): $\varphi = \varphi(p)$, можно осуществить процедуру перенормировки в обратном направлении - считать фиксированным значением $\langle q \rangle = \tilde{q}_{k-1}$, а величину \tilde{q} - переменной. Это позволит найти значения плотностей вероятности реализации величины \tilde{q} : $\varphi(q)|_{q=\tilde{q}}$. В этом случае, реализованное значение \tilde{q}_{k-1} определяется на предыдущем временном шаге, а произведение $\frac{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}}{\varphi_{k-1}} = \left(\frac{d\varphi_{k-1}(q)/dq}{\varphi_{k-1}(q)} \right) \Big|_{q=\tilde{q}}$ перестает быть константой - изменяется при варьировании величины \tilde{q} .

Значения плотности вероятности $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}}$ и ее производной $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}}$, стоящие в соотношениях (3.13)-(3.15), можно определить, используя данные распределения реализованных значений меньшего по времени масштаба. Поясним сказанное.

Функция $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}}$ описывает плотность вероятности реализации величины \tilde{q} в момент времени t_{k-1} . Разобьем промежуток времени, заключенный между моментами t_{k-1} и t_k , на интервалы $\Delta t = (t_k - t_{k-1})/n$. Здесь n - любое натуральное число, больше единицы. Величина шага $(t_j - t_{j-1})$ не входит в выражения (3.8), (3.12)-(3.14). То есть эти выражения являются инвариантными относительно временного шага. Зафиксировав момент времени t_{k-1} , и получая следующие реализованные величины через промежутки времени: $(t_k - t_{k-1})/n, 2(t_k - t_{k-1})/n, \dots, j(t_k - t_{k-1})/n, \dots, (t_k - t_{k-1})$ (все интервалы откладываются от момента t_{k-1}), мы вместо одного реализованного значения \tilde{q} увидим n реализаций. Каждую из них обозначим символом $\tilde{q}_{(k-1)_j}$, где

$j = 1, 2, \dots, n$; $\tilde{q}_{(k-1),j} \Big|_{j=1} = \tilde{q}_{k-1}$. Вновь переходя к шагу по времени $(t_k - t_{k-1})$, мы, тем самым, закладываем временную неопределенность исследования процесса, характеризуемую распределением величин $\tilde{q}_{(k-1),j}$ на интервале времени $t_{k-1} \leq t < t_k$. Проецируя этот промежуток времени в точку t_{k-1} - переносим временную неопределенность в неопределенность реализации величины \tilde{q} в момент времени t_{k-1} , характеризуемую плотностью вероятности $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}}$. Таким образом, можно ассоциировать распределение на интервале времени $t_{k-1} \leq t < t_k$ с плотностью вероятности в момент времени t_{k-1} . В таком подходе, исследуя интервал времени $t_{k-1} \leq t < t_k$ с шагом $\Delta t = (t_k - t_{k-1})/n$, для $n \gg 1$, и построив на нем распределение, мы, тем самым, определим значения параметров: $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}}$ и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}}$, стоящих в соотношениях (3.13)-(3.15).

Как было сказано выше, уравнения (3.13)-(3.14) в области не слишком больших значений $|p|$ допускают неединственность положительных вещественных решений $\varphi(p)$. В практических задачах растущие ветви решения $\varphi(p)$ ограничены пределами возможных ресурсов (например, энергии и импульса в физических процессах, общим размером финансов в экономических процессах и т.д.). Эти обстоятельства позволяют воспользоваться Центральной Предельной Теоремой (ЦПТ) Линдеберга [35] для определения характера распределения величин p .

ЦПТ Линдеберга формулируется следующим образом.

Пусть независимые случайные величины X_1, \dots, X_n, \dots определены на одном и том же вероятностном пространстве и имеют конечные математические ожидания и дисперсии: $E[X_i] = \mu_i$, $D[X_i] = \sigma_i^2$.

Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда $E[S_n] = m_n = \sum_{i=1}^n \mu_i$, $D[S_n] = s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. И пусть

выполняется условие Линдеберга:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{(X_i - \mu_i)^2}{s_n^2} \ell_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}} \right] = 0, \text{ где } \ell_{\{|X_i - \mu_i| > \varepsilon s_n\}} - \text{ функция-}$$

индикатор, тогда $\frac{S_n - m_n}{s_n} \rightarrow N(0,1)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Будем предполагать выполнение условия Линдеберга. Рассмотрим распределение реализованных величин p в промежутке времени от $t - \Delta t$ до t , где интервал Δt такой, что в течение этого времени происходит n ($n \rightarrow \infty$) реализаций значений p , причем эти реализации происходят в соответствии с различными плотностями вероятности, являющиеся решениями уравнений (3.13)-(3.14), при этом, ни одна из реализаций не является доминирующей (вклад каждого слагаемого в среднее арифметическое этих величин можно считать пренебрежимо малым по сравнению с итоговой суммой). Тогда, в соответствии с ЦПТ Линдеберга, распределение величин p на этом интервале будет стремиться к нормальному (гауссовскому) распределению для не слишком больших значений $|p|$. Для $|p| \gg |\varphi_{k-1} / (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})|$, распределение, также как и плотность вероятности $\varphi(p)$, будет описываться выражением (3.15).

3.2.1. Получение замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве для мартингалов.

Если нас интересуют не сами величины \tilde{q} , а их отклонения от средних значений, которые могут реализоваться на текущем шаге, то есть величины: $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$, можно говорить уже не только о нахождении вероятности реализации этих значений, но и о нахождении траекторий их изменения по

переменной p в многомерном фазовом пространстве. В этом случае отпадет необходимость поиска эмпирических данных для реализованных значений исследуемого параметра на временных шагах меньшего масштаба, как это было описано в предыдущем разделе.

Вернемся к уравнению (3.12). Вновь считая параметры φ_{k-1} и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$ в этом уравнении неизвестными константами, проведем некоторые операции, для того чтобы исключить их из рассмотрения в функциях $\varphi(p; \varphi_{k-1}, d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})$. Введя обозначение:

$$\frac{d\varphi}{dp} = \chi \quad (3.16)$$

и, продифференцировав выражение (3.12) по переменной p , получим:

$$\frac{\varphi^2(1 - \varphi/\varphi_{k-1})^2}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)} \frac{d\chi/dp}{\chi^3} = \frac{\varphi(1 - \varphi/\varphi_{k-1})}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)} \frac{1}{\chi} + p. \quad (3.17)$$

Обозначим:

$$\frac{\varphi^2(1 - \varphi/\varphi_{k-1})^2}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)} \frac{d\chi/dp}{\chi^3} = \xi, \quad (3.18)$$

тогда

$$\frac{d\chi}{dp} = \xi \chi^3 \frac{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)}{\varphi^2(1 - \varphi/\varphi_{k-1})^2}. \quad (3.19)$$

Заменив левую часть выражения (3.17) на ξ , получим соотношение:

$$\xi = \frac{\varphi(1 - \varphi/\varphi_{k-1})}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)} \frac{1}{\chi} + p.$$

Продифференцировав обе его части по p и учитывая (3.16), (3.18), получим выражение:

$$\frac{d\xi}{dp} = -\frac{\xi\chi}{\varphi(1 - \varphi/\varphi_{k-1})} - 2 \frac{(1 - \varphi/\varphi_{k-1})\varphi/\varphi_{k-1}}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)^2}. \quad (3.20)$$

Соотношения (3.16), (3.19) и (3.20) задают замкнутую автономную систему

уравнений, в которую производные $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$ явно не входят:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dp} = \chi \\ \frac{d\chi}{dp} = \chi^3 \xi \frac{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)}{\varphi^2(1 - \varphi/\varphi_{k-1})^2} \\ \frac{d\xi}{dp} = -\frac{\chi\xi}{\varphi(1 - \varphi/\varphi_{k-1})} - 2\frac{(1 - \varphi/\varphi_{k-1})\varphi/\varphi_{k-1}}{(2\varphi/\varphi_{k-1} - 1)^2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Если сделать замену: $\varphi = \varphi_{k-1}e^{\Delta s}$, и обозначить $\mathcal{G} = \frac{d\Delta s}{dp} = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp}$ (где

$\Delta s = \ln(\varphi/\varphi_{k-1}) = s - s_{k-1}$, $s = \ln \varphi$, $s_{k-1} = \ln \varphi_{k-1}$), то от системы (3.21) можно перейти к новой системе уравнений – без φ_{k-1} :

$$\begin{cases} \frac{d\Delta s}{dp} = \mathcal{G} \\ \frac{d\mathcal{G}}{dp} = -\mathcal{G}^2 + \mathcal{G}^3 \xi \frac{(2e^{\Delta s} - 1)}{(e^{\Delta s} - 1)^2} \\ \frac{d\xi}{dp} = \frac{\mathcal{G}\xi}{(e^{\Delta s} - 1)} + \frac{2e^{\Delta s}(e^{\Delta s} - 1)}{(2e^{\Delta s} - 1)^2} \end{cases} \quad (3.22)$$

Из полученной системы уравнений удастся исключить особенность в точках фазового пространства, в которых $\Delta s = 0$, если функцию $\mathcal{G}(p)$ представить в виде: $\mathcal{G}(p) = (e^{\Delta s(p)} - 1)\mu(p)$. В этом случае система уравнений (3.22) приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta s}{dp} = (e^{\Delta s} - 1)\mu \\ \frac{d\mu}{dp} = \mu^2(2e^{\Delta s} - 1)(\mu\xi - 1) \\ \frac{d\xi}{dp} = \mu\xi + \frac{2e^{\Delta s}(e^{\Delta s} - 1)}{(2e^{\Delta s} - 1)^2} \end{cases} \quad (3.23)$$

Еще одна замена: $\xi(p) = \eta(p) + \frac{1}{\mu(p)} - \frac{1}{\mu(p)(2e^{\Delta s(p)} - 1)}$, позволяет исключить в

системе уравнений (3.23) особенность при $\Delta s = -\ln 2$ и записать:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta s}{dp} = (e^{\Delta s} - 1)\mu \\ \frac{d\mu}{dp} = \mu^3 \eta (2e^{\Delta s} - 1) - \mu^2 \\ \frac{d\eta}{dp} = \mu \eta (2e^{\Delta s} - 1) \end{cases} \quad (3.24)$$

Система уравнений (3.24) описывает эволюцию траекторий в фазовом пространстве $(\eta, \mu, \Delta s; p)$ для стохастических процессов, являющихся мартингалами. Ее можно использовать для анализа таких процессов, однако, совместное использование с уравнением (3.11) напрямую не возможно, поскольку в систему уравнений (3.24) входит функция $\Delta s = \ln(\varphi/\varphi_{k-1})$, зависящая от плотности вероятности φ_{k-1} , реализующейся на предыдущем шаге по времени. Для уравнений системы (3.24) это не принципиально, поскольку, все уравнения зависят только от Δs , и отдельно φ_{k-1} в них не входит. Однако, слагаемое $\frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}$, стоящее в правой части уравнения (3.11) для

сопряжения с системой уравнений (3.22), должно быть переписано в виде:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \frac{1}{\tau} \frac{d\Delta s}{ds} \frac{1}{d\tilde{s}/ds} \frac{\partial f}{\partial \Delta s} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{e^s(1+s)} \frac{\partial f}{\partial \Delta s} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{e^{s_{k-1}} e^{\Delta s} (1 + s_{k-1} + \Delta s)} \frac{\partial f}{\partial \Delta s}.$$

В результате в уравнении появится параметр s_{k-1} , зависящий от реализации плотности вероятности на предыдущем шаге.

Гораздо более эффективным, с точки зрения возможности совместного использования уравнения (3.11) и уравнений, описывающих стохастический процесс, является второй предельный случай, когда уравнение (3.8) имеет аналитическое решение, а именно, когда небольшое изменение реализованного

значения стохастического процесса приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

3.3. Метод описания стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Уравнение (3.8), определяющее динамику стохастического процесса, можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})} = \frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)}. \quad (3.25)$$

В данном разделе рассмотрим второй предельный случай, в котором можно найти асимптотику аналитических решений уравнения (3.8) (или (3.25)). А именно, когда небольшие изменения реализованного значения исследуемого стохастического процесса на предыдущем шаге приводят к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности на шаге текущем [33], [60], [123]:

$$\frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = \frac{\varphi_k(p_k)|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_k} - \varphi_{k-1}(p_{k-1})|_{p_{k-1}=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_{k-1}}}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1.$$

К такому же предельному случаю можно перейти, если не рассматривать фиксированные моменты времени, а выбирать каждый раз в качестве t_{k-1} такие временные шаги, на которых уже реализовались интересующие нас (или близкие к ним) значения \tilde{q}_{k-1} : $\tilde{q}_{k-1} \approx \tilde{q}_k$ и при этом $\varphi_k(p_k)|_{p_k=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_k} \neq \varphi_{k-1}(p_{k-1})|_{p_{k-1}=\tilde{q}_k-\langle q \rangle_{k-1}}$. Эта процедура не является запрещенной, в связи с инвариантностью шага по времени (см. раздел 3.1).

В любом из этих случаев можно пренебречь членом, стоящим в левой части уравнения (3.25) и перейти к соотношению:

$$p_k = \varphi_k(p_k) \left(\frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} - \frac{1}{d\varphi_k/dp_k} \right). \quad (3.26)$$

Для упрощения записи, индексы k в последнем выражении можно опустить, подразумевая в дальнейшем, что аргументы и функции без индекса относятся к текущему моменту времени, перепишем соотношение (3.26) в виде:

$$\frac{1}{d\varphi/dp} = \frac{1}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} - \frac{p}{\varphi}, \quad \text{где } p = \tilde{q} - \langle q \rangle, \quad p_{k-1} = \tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1}. \quad (3.27)$$

Зафиксируем значение \tilde{q} , которое может реализоваться на текущем шаге, плотность вероятности реализации которого, мы хотим найти. Изменяемыми величинами будут плотность вероятности реализации величины \tilde{q} на текущем шаге – функция $\varphi(p) = \varphi(q)|_{q=\tilde{q}}$, среднее значение $\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(q) dq$ и переменная $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$. Значения функции $\varphi_{k-1}(p_{k-1}) = \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}}$ и ее производной $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}}$ на предыдущем $(k-1)$ -м шаге, в этом случае, являются константами (как уже реализованные величины). Тогда соотношение (3.27) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Его решениями, в случае $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \neq 0$, являются либо функции вида: $\varphi(p) = 2|d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \cdot p|$, либо:

$$\varphi(p) = p d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \pm \sqrt{p^2 (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})^2 + \alpha}, \quad (3.28)$$

где $\alpha \neq 0$ - константа (если значение \tilde{q} - фиксировано).

В качестве плотности вероятности принимаются только действительные положительные значения выражения (3.28).

При больших значениях $|p|$ функция $\varphi(p)$ имеет две асимптоты, одна из которых растет пропорционально первой степени p , а другая - наоборот, спадает как p^{-1} :

$$\varphi(p) \Big|_{p \rightarrow \infty} = \begin{cases} 2 \left| \frac{d\varphi_{k-1}}{dp_{k-1}} \cdot p \right| \\ \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha}{\frac{d\varphi_{k-1}}{dp_{k-1}} \cdot p} \right|. \end{cases} \quad (3.29)$$

Проблема конечной нормировки негаусовских функций, являющихся решениями уравнения (3.27), в практических задачах может быть разрешена благодаря ограниченности диапазона области определения значений переменных q или p , по которым эти функции интегрируются. За пределами таких диапазонов значения функций считаются нулевыми.

Если рассматривать конкретные физические системы, то ограничения на диапазоны значений переменных q или p часто накладываются естественным образом. Например, если $\varphi(p)$ - плотность вероятности реализации возможных значений стоимости акций на торгах какого-то предприятия в рассматриваемый момент времени, то можно смело отбросить слишком большие значения величин $|p|$, а не считать вероятность их реализации малой, но конечной величиной. То же самое можно сказать в случае, когда функция $\varphi(p)$ описывает плотность вероятности реализации пульсаций скорости или энергии в потоке жидкости. Ограничения сверху будут определяться, как максимум, величиной полной кинетической энергии рассматриваемой системы, хотя реальный диапазон значений будет значительно уже.

В случае неограниченного диапазона величин q или p (например, при рассмотрении в качестве этих переменных пространственных координат), для значений этих переменных, превышающих некоторые критические значения, могут реализовываться только решения, описываемые вторым выражением соотношения (3.29), то есть функцией типа $\varphi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} const/p$. Конечная нормировка таких функций может быть разрешена методом ренормгрупп.

Будем предполагать выполнение условия Линдберга. Рассмотрим

распределение реализованных величин p в промежутке времени от $t - \Delta t$ до t , где интервал Δt такой, что в течение этого времени происходит n ($n \rightarrow \infty$) реализаций значений p , причем эти реализации происходят в соответствии с различными плотностями вероятности, являющиеся решениями уравнений (3.13)-(3.14), при этом, ни одна из реализаций не является доминирующей (вклад каждого слагаемого в среднее арифметическое этих величин можно считать пренебрежимо малым по сравнению с итоговой суммой). Тогда, в соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдеберга [35], распределение величин p на этом интервале будет стремиться к нормальному (гауссовскому) распределению.

Для достаточно больших значений $|p|$, где может реализовываться только одна плотность вероятности, распределение, так же как и плотность вероятности будет иметь вид: $\sim 1/p$. То есть рассматриваемый стохастический процесс со скрытыми параметрами имеет степенной (с “тяжелыми хвостами”) характер распределения.

Изменения величины $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$ в выражении (3.28) можно достигать двумя способами: либо варьируя \tilde{q} , либо изменяя величину $\langle q \rangle$. Переход от одного способа к другому можно считать перенормировкой параметров. При выводе соотношения (3.28) такая перенормировка была произведена, когда фиксировалось значение \tilde{q} , а величина $\langle q \rangle$ считалась переменной. После нахождения решений уравнения (3.27) в виде соотношения (3.28), можно осуществить процедуру перенормировки в обратном направлении - считать фиксированным значением $\langle q \rangle$, а величину \tilde{q} - переменной. В этом случае, значения производной $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$ и параметра α перестают быть константами - изменяется при варьировании величины \tilde{q} : $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}}$, $\alpha = \alpha(\tilde{q})$.

Алгоритм определения плотности вероятности в $(k-1)$ -ый момент времени через распределение на временном интервале, отделяющем этот момент времени от k -го при разбиении его на n более мелких интервалов (где $n \gg 1$), может быть следующим. Пусть функция $\varphi_{k-1}(p_{k-1}) = \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}}$ описывает плотность вероятности реализации величины \tilde{q} в момент времени t_{k-1} . Зафиксируем момент времени t_{k-1} . Разобьем промежуток времени, заключенный между моментами t_{k-1} и t_k , на интервалы $\Delta t = (t_k - t_{k-1})/n$. Здесь n - любое натуральное число, много больше единицы. Исследуя реализованные величины через промежутки времени: $(t_k - t_{k-1})/n, 2(t_k - t_{k-1})/n, \dots, j(t_k - t_{k-1})/n, \dots, (t_k - t_{k-1})$ (все интервалы откладываются от момента t_{k-1}), мы вместо одного реализованного значения \tilde{q} увидим n реализаций. Каждую из них обозначим символом $\tilde{q}_{(k-1)_j}$, где $j = 1, 2, \dots, n$; $\tilde{q}_{(k-1)_j} \Big|_{j=n} = \tilde{q}$.

Вновь переходя к шагу по времени $(t_k - t_{k-1})$, мы, тем самым, закладываем временную неопределенность исследования процесса, характеризуемую распределением величин $\tilde{q}_{(k-1)_j}$ на интервале времени $t_{k-1} \leq t < t_k$. Проецируя этот промежуток времени в точку t_{k-1} - переносим временную неопределенность в неопределенность реализации величины \tilde{q} в момент времени t_{k-1} , характеризуемую плотностью вероятности $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}}$. Таким образом, можно ассоциировать распределение на интервале времени $t_{k-1} \leq t < t_k$ с плотностью вероятности в момент времени t_{k-1} . В таком подходе, исследуя интервал времени $t_{k-1} \leq t < t_k$ с шагом $\Delta t = (t_k - t_{k-1})/n$, для $n \gg 1$, и построив на нем распределение, мы, тем самым, определим и значения: $\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}}$ и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} = (d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}}$, стоящие в соотношениях (3.26)-(3.28).

Параметр $\alpha = \alpha(\tilde{q})$, являющийся характеристикой рассматриваемой стохастической системы для фиксированного значения \tilde{q} , может быть определен из решения уравнения (3.28) на предыдущем, уже реализованном, временном шаге. Для этого запишем уравнение (3.28) в виде:

$$\varphi_{k-1}(p_{k-1}) = p_{k-1} d\varphi_{k-2}/dp_{k-2} \pm \sqrt{p_{k-1}^2 (d\varphi_{k-2}/dp_{k-2})^2 + \alpha(\tilde{q})}.$$

Откуда следует соотношение:

$$\alpha(\tilde{q}) = \varphi_{k-1}^2(p_{k-1}) - 2p_{k-1}\varphi_{k-1}(p_{k-1})d\varphi_{k-2}/dp_{k-2}$$

где $\varphi_{k-1}(p_{k-1}) = \varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}}$, $d\varphi_{k-2}/dp_{k-2} = (d\varphi_{k-2}(q)/dq)|_{q=\tilde{q}}$, $p_{k-1} = \tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1}$.

Полученные таким образом в (k-1)-ый момент времени параметр $\alpha = \alpha(\tilde{q})$, плотность вероятности и соответствующее ей среднее значение будут зависеть от временного шага $\Delta t = t_k - t_{k-1}$. Как правило, стохастические процессы характеризуются определенными средними периодами “повторяемости” реализаций одного и того же значения \tilde{q} . Таких периодов может быть несколько. Каждый из них может выступать в качестве значения временного масштаба Δt , на котором рассматривается исследуемая система. Вычислив величину $\alpha = \alpha(\tilde{q})$ и подставив ее в выражение (3.28), получим интегро-дифференциальное уравнение (т.к. $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$, $\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} q\varphi(q)dq$), в неявном виде задающее соотношение для нахождения плотности вероятности реализации величины \tilde{q} . Такой метод определения плотности вероятности стохастической переменной довольно сложный, поэтому откажемся от прямого использования формулы (3.28) и построим замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве.

3.3.1. Получение замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом пространстве для стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Вновь считая фиксированными значения \tilde{q} , а, следовательно, и $d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}$, проведем следующие операции. Введя обозначение:

$$\frac{d\varphi}{dp} = \chi \quad (3.30)$$

и, продифференцировав выражение (3.27) по p , получим:

$$\frac{\varphi^2}{\chi^3} \frac{d\chi}{dp} = \frac{\varphi}{\chi} - p.$$

Обозначим:

$$\frac{\varphi^2}{\chi^3} \frac{d\chi}{dp} = \eta, \quad (3.31)$$

тогда

$$\frac{d\chi}{dp} = \frac{\eta\chi^3}{\varphi^2}. \quad (3.32)$$

Продифференцировав функцию η по p и учитывая (3.27), (3.30), (3.31), получим уравнение:

$$\frac{d\eta}{dp} = -\frac{\eta\chi}{\varphi}. \quad (3.33)$$

Выражения (3.30), (3.32) и (3.33) задают замкнутую автономную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dp} = -\frac{\eta\chi}{\varphi} \\ \frac{d\chi}{dp} = \frac{\eta\chi^3}{\varphi^2} \\ \frac{d\varphi}{dp} = \chi \end{cases} \quad (3.34)$$

Сделав замену переменных: $\varphi = e^s$, получим: $\chi e^{-s} = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp} = \mu$ (где $s = \ln \varphi$

- функция, среднее отрицательное значение от которой, является энтропией рассматриваемой стохастической системы $S = -\int \varphi(p) \ln \varphi(p) dp = -\int s(p) \varphi(p) dp$ [27]). От системы уравнений (3.34) можно перейти к новой системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dp} = -\eta\mu \\ \frac{d\mu}{dp} = \eta\mu^3 - \mu^2 \\ \frac{ds}{dp} = \mu \end{cases} \quad (3.35)$$

Из системы (3.35) видно, что первые два уравнения являются взаимосвязанными и не зависят от третьего. Поэтому в том случае, если интересуют только изменения функций η и μ , достаточно первых двух уравнений системы, а именно,

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dp} = -\eta\mu \\ \frac{d\mu}{dp} = \eta\mu^3 - \mu^2 \end{cases} \quad (3.36)$$

Необходимо подчеркнуть, что система уравнений (3.36) не позволяет определять непосредственно эволюцию плотности вероятности реализации случайной величины, поскольку функции η и μ являются комплексами, в которые входят и сама функция плотности вероятности φ , и ее производные

первой и второй степени. Однако, система уравнений (3.36) позволит оценить устойчивость стохастической системы, посредством анализа эволюции траекторий в фазовом стохастическом пространстве (η, μ, p) .

Для этого исследуем размерность Хаусдорфа-Безиковича [10]: $D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta^{-1}}$, где $N(\delta)$ – минимальное число элементов, с характерным размером δ , необходимых для покрытия множества, занимаемого траекториями в фазовом стохастическом пространстве (η, μ, p) , являющихся решениями уравнений системы (3.36).

Рассмотрим размерность этого пространства в виде:

$$D_{\eta\mu} = -\frac{\ln\left(\frac{\eta\mu}{\eta_0\mu_0}\right)}{\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)} \approx -\frac{d\left(\ln\left(\frac{\eta\mu}{\eta_0\mu_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)} = -\frac{d\left(\ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)} - \frac{d\left(\ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)}. \quad (3.37)$$

При выводе выражения (3.37) применено правило Лопиталья для случаев, когда $p \rightarrow p_0$. Таким образом, $D_{\eta\mu}$ является локальной размерностью пространства (η, μ, p) в окрестности точки $p = p_0$. Однако значение p_0 выбирается произвольно. Следовательно, процедуру вычисления $D_{\eta\mu}$ можно выполнить в окрестности любой заданной точки p .

Систему уравнений (3.36) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{d(\ln(\eta/\eta_0))}{d(\ln(p/p_0))} = -p\mu \\ \frac{d(\ln(\mu/\mu_0))}{d(\ln(p/p_0))} = p\mu(\eta\mu - 1) \end{cases}.$$

Подставив полученные уравнения в выражение (3.37), находим: $D_{\eta\mu} \approx p\mu(2 - \eta\mu)$. Эту зависимость можно представить как выражение, записанное через функцию $\varphi(p)$ и ее первую и вторую производные:

$$D_{\eta\mu} \approx 2 \frac{p}{\varphi} \frac{d\varphi}{dp} - \frac{p}{d\varphi/dp} \frac{d^2\varphi}{dp^2}. \quad (3.38)$$

В случае, когда $D_{\eta\mu} = 0$, можно говорить о достижении минимального значения размерности в фазовом стохастическом пространстве (η, μ, p) , что может свидетельствовать о минимальной степени стохастичности в описываемом процессе.

Приравнивая выражение (3.38) нулю, получаем два решения: $p = 0$ и $\varphi = \frac{const}{p+b} \approx \frac{const}{p}$, где b - произвольная константа.

Первое решение: $p = 0$, соответствует случаю достижения локального минимума стохастичности процесса в точках равновесия: $\tilde{q} = \langle q \rangle$, для любых функций $\varphi(p)$.

Второе решение: $\varphi = \frac{const}{p+b}$, соответствует случаю достижения минимума стохастичности процесса, описываемого этой функцией, для любых значений переменной p ($p \neq -b$). И в этом смысле функции вида: $\varphi = \frac{const}{p+b}$, можно считать устойчивыми решениями данной системы уравнений.

В этой связи интересно отметить следующие интересные аналогии. Если в качестве переменной p брать частоту f , то можно вспомнить, что решения, пропорциональные величине $1/f$, являются наиболее устойчивыми нестационарными решениями, соответствующими хорошо изученным [36] состояниям, называемыми фликкер шумами. Фликкер шумы инвариантны относительно изменения масштаба. Они возникают в различных физических системах: астрофизике, микроэлектронике, экономике, акустике и пр.

Для функций вида: $\varphi(p) = p d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \pm \sqrt{p^2 (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})^2 + \alpha}$ (см.

(3.28)), в случае когда $\alpha \neq 0$, размерность подобия $D_{\eta\mu}$ нигде не равна нулю, кроме точек равновесия $p = 0$ (или $\tilde{q} = \langle q \rangle$). Однако, поскольку при $p \rightarrow \infty$ одна из асимптот, пропорциональна функции $\frac{const}{p}$, то в этом случае, $D_{\eta\mu} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. И, следовательно, именно эту асимптоту можно считать устойчивым решением уравнения (3.26) для случаев больших значений p .

Рассматриваемые процессы описываются только двумя стохастическими функциями: η и μ , поэтому размерность $D_{\eta\mu}$ не должна быть больше двух. Причем значение: $D_{\eta\mu} = 2$, должно достигаться в случае максимальной стохастичности процесса. Приравнявая выражение (3.38) двум и решая полученное уравнение, находим, что $D_{\eta\mu} = 2$ для любых значений $p \neq 0$, если $\varphi = const \cdot p$.

Для функций вида: $\varphi(p) = p d\varphi_{k-1}/dp_{k-1} \pm \sqrt{p^2 (d\varphi_{k-1}/dp_{k-1})^2 + \alpha}$, при $p \rightarrow \infty$ одна из асимптот, пропорциональна функции $\varphi = const \cdot p$. Этот случай можно считать наиболее стохастичным и, в этом смысле, наименее устойчивым режимом рассматриваемого процесса.

Воспользуемся разработанной теорией для описания макропроцессов. А именно, при описании динамики стохастического процесса полную производную: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i$, заменим новой полной производной:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}$$

Принимая во внимание зависимость: $\tilde{s} = -\varphi \ln \varphi = -se^s$, и учитывая, что

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{d\tilde{s}/ds} \frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{1}{\tau} \frac{1}{e^s (s+1)} \frac{\partial f}{\partial s},$$

запишем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{1}{\tau} \frac{1}{e^s (s+1)} \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (3.39)$$

В данном разделе рассматриваются системы, в которых небольшие изменения реализованного значения исследуемого стохастического процесса на предыдущем шаге приводят к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности на шаге текущем:

$$\frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = \frac{\varphi_k(p_k)_{p_k = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_k} - \varphi_{k-1}(p_{k-1})_{p_{k-1} = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1}}}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1,$$

либо выбираются в качестве предыдущего такие моменты, на которых уже реализовались интересующие нас (или близкие к ним) значения \tilde{q}_{k-1} : $\tilde{q}_{k-1} \approx \tilde{q}_k$ (при этом отличие плотностей вероятности в эти два момента ненулевое).

Второе из этих условий является более универсальным. Поэтому остановимся именно на нем. То есть, будем выбирать шаг по времени Δt таким, чтобы он был равен интервалу времени, между исследуемым моментом и моментом времени в прошлом, в котором произошла реализация интересующего нас значения, при этом отличие значения плотностей вероятности в эти два момента времени было ненулевым.

Рассматриваемый в этом разделе метод описания стохастических процессов не может быть применен для описания мартингалов, исследованных в разделе 3.2. В самом деле, если в каждый момент времени в качестве шага по времени выбирать временной интервал, между исследуемым моментом и моментом времени в прошлом, в котором произошла реализация интересующего нас значения \tilde{q} , то в соответствии с определением стохастических процессов, являющихся мартингалами, во всех исследуемых временных точках значение \tilde{q} будет совпадать со средними значениями $\langle q \rangle$ для плотностей вероятности, реализованных в эти моменты времени. То есть $\langle q \rangle$ в рассматриваемые моменты времени будет оставаться постоянной

величиной. Следовательно, и плотность вероятности может оставаться постоянной. А это противоречит требованию, принятому в разделе 3.1 при выводе соотношения (3.5), не рассматривать те моменты времени, когда производные плотности вероятности по времени равны нулю.

Зависимость (3.39) совместно с системой уравнений (3.35), а также с уравнениями, задающими изменение полной производной функции $f(t, \vec{x}; p)$:

$df/dt = \hat{A} f$, будут описывать динамику процесса рассматриваемой системы с учетом стохастических процессов:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{1}{\tau^s (s+1)} \frac{\partial f}{\partial s} = \hat{A} f \\ ds/dp = \mu \\ d\mu/dp = \eta \mu^3 - \mu^2 \\ d\eta/dp = -\eta \mu \end{cases} \quad (3.40)$$

или по другому:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{1}{\tau^s (s+1)} \frac{\partial f}{\partial s} = \hat{A} f \\ s = \ln \left(p d\varphi_0 / dp_0 \pm \sqrt{p^2 (d\varphi_0 / dp_0)^2 + \alpha} \right) \end{cases} \quad (3.41)$$

Иногда расширение фазового пространства, за счет учета влияния дополнительной переменной s , может приводить к существенному изменению вида функции f , являющейся ее решением. При этом, зависимость полученной функции от стохастической переменной может быть слабой, так что теряет смысл рассмотрение дополнительных уравнений системы. В этих случаях вместо систем уравнений (3.40) и (3.41) можно использовать уравнение (3.11).

Используя систему уравнений (3.40) или уравнение (3.11) можно определять зависимости $f(t, \vec{x}, s; \tau)$, которые будут описывать стохастические процессы в расширенном фазовом пространстве.

3.3.2. Дискретное представление метода описания стохастических процессов в расширенном пространстве переменных для стохастических процессов, в которых небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Величины μ , η , S , полученные с помощью дифференциальных уравнений (3.35) имеют вид непрерывных по аргументу p функций. Однако в реальности, при рассмотрении эволюции стохастического процесса во времени, сами значения p будут изменяться дискретно. Чтобы это учесть, вернемся к уравнению (3.26). Если из обеих частей этого выражения вычтем величину p_{k-1} и обозначить $\Delta p_k = p_k - p_{k-1}$, то выражение примет вид:

$$\Delta p_k = \frac{\varphi_k}{d\varphi_{k-1}/dp_{k-1}} - \frac{\varphi_k}{d\varphi_k/dp_k} - p_{k-1} = \frac{e^{s_k - s_{k-1}}}{\mu_{k-1}} - \frac{1}{\mu_k} - p_{k-1}, \quad (3.42)$$

где $\mu_{k-1} \neq 0$, $\mu_k \neq 0$.

Здесь использованы соотношения $\frac{1}{\varphi_j} \frac{d\varphi_j}{dp_j} = \mu_j$, $\varphi_j = e^{s_j}$. Значение p на предыдущем шаге считается известной (для заданного значения \tilde{q}) константой, равной p_{k-1} . Таким образом, система уравнений (3.40) (с учетом (3.42)), представленная в виде итерационного отображения по переменной p , может быть записана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k = f_{k-1} - \Delta s_k e^{s_{k-1}} (s_{k-1} + 1) \tau \left(\hat{A} f_{k-1} - \frac{\partial f_{k-1}}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) \\ \mu_k = \mu_{k-1} + \Delta p_k (\eta_{k-1} \mu_{k-1}^3 - \mu_{k-1}^2) \\ \eta_k = \eta_{k-1} - \Delta p_k \eta_{k-1} \mu_{k-1} \\ \Delta s_k = \Delta p_k \mu_{k-1} \\ \Delta p_k = \frac{e^{s_k - s_{k-1}}}{\mu_{k-1}} - \frac{1}{\mu_k} - p_{k-1} \\ p_k = p_{k-1} + \Delta p_k \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Если в пятом уравнении системы (3.43) сделать замену: $\Delta p_k \mu_{k-1} = \Delta s_k$ (см. четвертое уравнение этой системы), то количество уравнений в системе можно сократить:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k = f_{k-1} - \Delta s_k e^{s_{k-1}} (s_{k-1} + 1) t \left(\hat{A} f_{k-1} - \frac{\partial f_{k-1}}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) \\ \Delta s_k = e^{\Delta s_k} - \frac{1}{1 + \Delta s_k (\eta_{k-1} \mu_{k-1} - 1)} - p_{k-1} \mu_{k-1} \\ \mu_k = \mu_{k-1} (1 + \Delta s_k (\eta_{k-1} \mu_{k-1} - 1)) \\ \eta_k = \eta_{k-1} (1 - \Delta s_k) \\ p_k = p_{k-1} + \frac{\Delta s_k}{\mu_{k-1}} \end{array} \right. , \text{ где } \mu_{k-1} \neq 0. \quad (3.44)$$

Индекс k в уравнениях системы играет роль порядкового номера в последовательности реализаций величин $p_j = \tilde{q}_k - \langle q \rangle_j$ в заданной точке стохастической системы для $j = k-1; k$. Использование системы уравнений (3.44) позволит иметь дело непосредственно с дискретным спектром значений p и связанных с ним величин μ , η , s и f . Однако, данная система рекуррентных уравнений может быть использована для предсказания этих величин только на один шаг вперед – при переходе от t_{k-1} к t_k . Поясним сказанное.

Хотя, в принятом здесь описании исследуемых стохастических систем с резко меняющейся плотностью вероятности, величина \tilde{q} постоянна во все моменты рассмотрения системы: $\tilde{q} = \tilde{q}_{k-1} = \tilde{q}_k = \tilde{q}_{k+1} = \dots$, сами моменты времени t_j не фиксированы. В прошлом они могут быть определены, как моменты времени, в которые реализовано значение \tilde{q} , и поэтому считаются известными. А в будущем это сделать невозможно, так как неизвестно, когда именно реализуется значение \tilde{q} из ансамбля возможных значений, определяемых

плотностями вероятности $\varphi_j(q)$ для $t_j > t_k$ (нет привязки по времени моментов реализации этой величины).

Последние три уравнения системы служат только для перехода к следующему временному шагу. Поэтому их можно опустить и переписать систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} f_k = f_{k-1} + \Delta s_k e^{s_{k-1}} (s_{k-1} - 1) \tau \left(\hat{A} f_{k-1} - \frac{\partial f_{k-1}}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) \\ \Delta s_k = e^{\Delta s_k} - \frac{1}{1 + \Delta s_k (\eta_{k-1} \mu_{k-1} - 1)} - p_{k-1} \mu_{k-1} \end{cases}, \text{ где } \mu_{k-1} \neq 0. \quad (3.45)$$

Второе уравнение системы (3.45) является нелинейным относительно Δs_k , что в определенном диапазоне значений (например, при отрицательных значениях Δs_k , когда $e^{\Delta s_k}$ не велико) может служить источником, порождающим бифуркацию решений системы.

Алгоритм решения системы уравнений (3.45) может быть следующим.

1). Моменту времени, в котором исследуется система, присваивается значение $t = t_k$.

2). Выбирается произвольное значение $q = \tilde{q}$ и момент времени в прошлом, когда это значение было реализовано. Этому моменту времени присваиваем значение $t = t_{k-1}$.

3). Интервал $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ разбивается на n ($n \gg 1$) временных подынтервалов. Исследуется распределение значений q , реализованных в полученные моменты времени. Это распределение ассоциируется с плотностью вероятности $\varphi_{k-1}(q)$.

4). Определяются значения:

$$\mu_{k-1} = \frac{1}{\varphi_{k-1}(p_{k-1})} \frac{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{dp_{k-1}} \equiv \frac{1}{\varphi_{k-1}(q)} \frac{d\varphi_{k-1}(q)}{dq} \Big|_{q=\tilde{q}},$$

$$\eta_{k-1} = \frac{\varphi_{k-1}^2(p_{k-1})}{(d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1})^3} \frac{d^2\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{dp_{k-1}^2} \equiv \frac{\varphi_{k-1}^2(q)}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)^3} \frac{d^2\varphi_{k-1}(q)}{dq^2} \Bigg|_{q=\tilde{q}},$$

$$p_{k-1} = \tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1} = \tilde{q} - \int q \varphi_{k-1}(q) dq.$$

5). Из второго уравнения системы (3.45) находятся значения Δs_k .

Поскольку $\Delta s_k = s_k - s_{k-1} = \ln \left(\frac{\varphi_k(q)}{\varphi_{k-1}(q)} \right) \Bigg|_{q=\tilde{q}}$, можно определить соответствующие им

значения плотности вероятности реализации величины $\tilde{q} : \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}}$.

6). Найденные значения Δs_k подставляются в первое уравнение системы (3.45) для определения соответствующих им величин $f_k = f(t, \vec{x}; q) \Big|_{\substack{t=t_k, \\ q=q}}$, которые реализуются в точке с координатой \vec{x} в исследуемый момент времени $t = t_k$ на временном масштабе рассмотрения системы $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ в случае реализации значения $q = \tilde{q}$.

Задача о нахождении возможных значений функции f_k может решаться

подстановкой не одних начальных значений $\begin{pmatrix} s_{k-1} \\ \mu_{k-1} \\ \eta_{k-1} \\ p_{k-1} \end{pmatrix}$ в систему уравнений (3.45), а

нескольких – тех, которые будут соответствовать на предыдущем $(k-1)$ -ом шаге разномасштабным начальным условиям. Найденные решения функции f_k будут так же соответствовать набору возможных значений этой функции на разных масштабах рассмотрения.

Для исследования вероятности реализации и воздействия на функцию f_k других возможных значений q (или других временных масштабов) необходимо проделать процедуру, описанную в пунктах 1-7 соответствующее количество раз.

Дополнительная переменная $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$, в описываемых моделях, в частности, может играть роль возмущений самой функции f . В этом случае $f = \langle p \rangle = \langle q \rangle$. При этом в общем случае величина возмущений функции f не обязана быть мала по сравнению с номинальным значением функции f или ее изменением ($f_k - f_{k-1}$). То есть разработанная модель может быть применена тогда, когда использование линейных приближений является некорректным.

3.4. Использование метода описания стохастических процессов в расширенном пространстве переменных на примере задачи распространение акустических возмущений малых амплитуд.

Задачу распространения акустических возмущений малых амплитуд в жидкости будем рассматривать для случая, когда флуктуации гидродинамических параметров: давления, скорости и т.д. становятся сопоставимы с амплитудами акустических возмущений.

В соответствии с выражением (3.11), запишем модифицированное уравнение неразрывности и модифицированное уравнение Эйлера в пространстве с дополнительной стохастической переменной $s(p)$, задав или экспериментально определив (в случае рассмотрения конкретной динамической системы) величину временного масштаба τ (или масштабной частоты $\varpi = 1/\tau = dS/dt$, определяющей производство энтропии в рассматриваемой системе):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varpi \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{s}} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varpi \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{s}} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}, \quad \text{где } t > 0. \quad (3.46)$$

Слагаемые: $\varpi \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{s}}$ и $\varpi \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{s}}$, в полученных выражениях характеризуют, соответственно, изменения плотности и скорости жидкости из-за влияния стохастических возмущений.

Записывая функции P и ρ в виде: $P = P_0 + P'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$ ($P' \ll P_0, \rho' \ll \rho_0$), где P_0, ρ_0 - постоянные равновесные давление и плотность жидкости, а P' и ρ' - их изменения в звуковой волне с учетом стохастических возмущений, преобразуем модифицированное уравнение неразрывности и модифицированное уравнение Эйлера (3.46) в пространстве с дополнительной стохастической переменной $s(p)$ к виду:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \varpi \frac{\partial \rho'}{\partial \tilde{s}} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varpi \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\nabla P'}{\rho_0} = 0.$$

Малое изменение давления P' связано с малым изменением плотности ρ' соотношением: $P' = (\partial P / \partial \rho)_{S_T} \rho'$. Здесь S_T - термодинамическая (определяемая на уровне броуновского движения частиц и несвязанная со стохастическими возмущениями на мезо- и макромасштабах) энтропия системы. Обозначив $(\partial P / \partial \rho)_{S_T} = c^2$, заменим с его помощью ρ' на P' в модифицированном уравнении неразрывности:

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \varpi \frac{\partial P'}{\partial \tilde{s}} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Вводя потенциал скорости в виде: $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$, из модифицированного уравнение Эйлера, получим равенство, связывающее P' с ϕ :

$$P' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \varpi \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{s}} \right).$$

Из двух последних выражений, получим волновое уравнение в расширенном фазовом пространстве с дополнительной стохастической переменной:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \varpi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{s}^2} + 2\varpi \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \tilde{s}} - c^2 \Delta \phi = 0, \quad \text{где } t > 0.$$

Рассмотрим поставленную задачу в одномерной постановке по пространственным координатам, когда звук распространяется, в основном, вдоль направления l :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \varpi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{s}^2} + 2\varpi \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \tilde{s}} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial l^2} = 0, \quad \text{где } t > 0. \quad (3.47)$$

Легко видеть, что учет дополнительных стохастических переменных ведет к тому, что распространение плоских звуковых волн уже не описываются произвольными функциями типа: $\phi = f_1(l - ct) + f_2(l + ct)$. Решение уравнения (3.47) будем искать методом разделения переменных [19] в виде: $\phi(t, l, \tilde{s}) = F(t, \tilde{s})L(l)$. В результате этой подстановки уравнение (3.47) разобьется на два других:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \varpi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{s}^2} + 2\varpi \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \tilde{s}} = \pm \omega^2 F, \quad (3.48)$$

$$c^2 \frac{d^2 L}{dl^2} = \pm \omega^2 L, \quad (3.49)$$

где $t > 0$, ω – константа, которая характеризует частоту распространения акустических колебаний в отсутствии стохастических возмущений.

Бесконечно растущие вдоль координаты l решения являются «нефизичными». Затухающие решения мало влияют на процесс. Наиболее интересными являются решения, соответствующие гармоническим колебаниям, распространяющимся вдоль координаты l . Такими решениями уравнения (3.49) являются функции: $L = L_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} l}$, полученные при отрицательном знаке в правой части этого соотношения. В уравнении (3.48) нужно оставить также только те решения, которые соответствуют знаку «минус» в его правой части. Решениями уравнения (3.48) в этом случае будут выражения вида:

$$F(t, \tilde{s}) = F_0 e^{\pm i \omega t - \frac{\varpi}{\varpi_*} \omega t + \frac{\varpi}{\varpi_*} \tilde{s}}, \quad \text{где } \varpi_* - \text{ константа, смысл которой станет ясен позднее.}$$

Таким образом, решениями уравнения (3.47) являются функции вида:

$$\phi = \phi_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} l \pm i \omega t - \frac{\omega}{\omega_*} \alpha + \frac{\omega}{\omega_*} \tilde{s}} \quad (3.50)$$

Норма решения (3.50) затухает по времени $\|\phi\| < C e^{-\frac{\omega}{\omega_*} \alpha}$ и растет при уменьшении временного масштаба (или с ростом производства энтропии):

$\|\phi\| \sim e^{\frac{\omega}{\omega_*} \tilde{s}} = e^{\frac{\tau_*}{\tau} \tilde{s}} \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow 0$. Если энергию звуковой волны оценить как сумму по всем частотам ω (или временным масштабам τ), то условие ограниченности нормы (энергии) позволит определять нижнюю границу временных масштабов (верхнюю границу производства энтропии), которые влияют на распространение акустических возмущений.

Изменение давления в звуковой волне, будет определяться выражением:

$$P' = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{s}} \right) = \mp i \phi_0 \rho_0 \omega e^{\pm i \frac{\omega}{c} l \pm i \omega t - \frac{\omega}{\omega_*} \alpha + \frac{\omega}{\omega_*} \tilde{s}} \quad (3.51)$$

Анализируя уравнения (3.51) можно заключить, что в пределе малых частот: $\omega \ll \omega_*$, или больших периодов стохастических возмущений, на малых временах: $t \ll \omega_* / \omega^2$, зависимость пульсаций давления в волне подчиняется обычному гармоническому закону распространению акустических возмущений, а на больших временах пульсации давления в волне экспоненциально затухают. Время затухания характеризуется масштабом ω_* / ω^2 . При этом давление $P'(t)$ практически не зависит от величины \tilde{s} .

Переход к рассмотрению больших частот (или малых периодов) стохастических возмущений означает учет большого числа масштабов этих возмущений.

Если акустические возмущения распространяются в нелинейной среде, в которой небольшие изменения реализованного значения приводят к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности, то в силу неединственности плотности вероятности реализаций стохастических

возмущений $\varphi(p)$, а, следовательно, и функции: $\tilde{s} = -\varphi(p)\ln\varphi(p)$, возможно существование двух или трех ветвей функции $P'(t)$, которые будут описывать затухающие возмущения большой и малой амплитуды. На малых временах возмущения с большой амплитудой могут превосходить гармонические пульсации акустических колебаний без влияния стохастических возмущений.

Таким образом, стохастические возмущения могут приводить как к ослаблению акустических пульсаций, так и к их локальному по времени усилению. Внутренней характеристикой рассматриваемой системы, определяющей масштаб воздействия стохастических возмущений на акустические пульсации, является параметр ϖ_* .

На реализацию зависимости $\varphi(p)$, а, следовательно, $\tilde{s}(\varphi(p))$ и $P'(t)$, будут влиять граничные условия конкретной физической задачи, а так же ограничения, связанные с величиной, подводимой к рассматриваемой системе энергии.

Полученное разнонаправленное влияние акустических возмущений на стохастические пульсации давления в жидкой среде, соответствует экспериментальным данным (см., например, [37]).

3.5. О возникновении «стохастичности» в детерминированных дифференциальных уравнениях.

Интересно отметить, что довольно часто удается имитировать стохастические (хаотические) процессы не прибегая собственно к их математическому моделированию, а интегрируя дифференциальные уравнения или уравнения в частных производных численными методами. Так, например, методы прямого численного моделирования уравнений Навье-Стокса позволяют описывать турбулентное течение жидкости [63].

В вопросах возникновения стохастических (или хаотических) решений при численном интегрировании дифференциальных уравнений и уравнений в

частных производных, многие исследователи ссылаются на практику численного интегрирования системы уравнений Лоренца, в результате которой в определенном диапазоне параметров находятся решения, которые в фазовом пространстве образуют странный аттрактор. Попытаемся разобраться в этом вопросе.

Начало исследованиям динамических систем, проявляющих свойства хаоса положила работа Лоренца, численно исследовавшего систему дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих конвекцию жидкости:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}, \text{ где } \sigma = 10, b = 8/3, r = 28 \text{ -параметры.} \quad (3.52)$$

Им была обнаружена чрезвычайно высокая чувствительность СДУ (3.52) к начальным данным, а также найдено «притягивающее» решение множество в виде странного аттрактора, обладающего фрактальной структурой в узком диапазоне вариации параметров σ , b и r (см. рис. 6-7).

В дальнейшем были обнаружены другие системы дифференциальных уравнений, обладающих аналогичными свойствами.

Природа хаотичности таких СДУ до конца не выяснена, несмотря на многочисленные работы, посвященные этой проблеме. Основное, что всегда подчеркивается в этих работах – это отсутствие аналитических решений таких СДУ, наличие в системе не менее трех уравнений и отличие хаоса, порождаемого системой и описываемой СДУ, от стохастического – полностью недетерминированного процесса. Для решений СДУ вводится термин – детерминированный хаос.

Попробуем понять природу детерминированного хаоса, порождаемого численным решением СДУ [67]. Рассмотрим СДУ в общем трехмерном случае:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varphi(x, y, z) \end{cases} \quad (3.53)$$

Условие совместности уравнений, входящих в СДУ (3.53), можно представить в виде:

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x, y, z)} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{g(x, y, z)} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\varphi(x, y, z)}.$$

Или по-другому,

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \frac{\partial^2(f^{-1})}{\partial y \partial z} dx dy dz = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \frac{\partial^2(g^{-1})}{\partial x \partial z} dx dy dz = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} \frac{\partial^2(\varphi^{-1})}{\partial x \partial y} dx dy dz.$$

Откуда следует, что для достаточно гладких функций $f(x, y, z) \neq 0$, $g(x, y, z) \neq 0$ и $\varphi(x, y, z) \neq 0$ должно выполняться условие:

$$\frac{\partial^2(f^{-1})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2(g^{-1})}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2(\varphi^{-1})}{\partial x \partial y}. \quad (3.54)$$

Если обратиться к СДУ (3.52), то можно увидеть, что для функций: $f(x, y, z) = -\alpha x + \sigma y$, $g(x, y, z) = rx - xz - y$, $\varphi(x, y, z) = xy - bz$, это условие в пространстве (x, y, z) в глобальном смысле не выполняется.

При невыполнении условия совместности, нахождение численного решения автономной СДУ должно сопровождаться выбором в каждом уравнении своего дискретного шага по времени, который, к тому же должен меняться от точки к точке. В противном случае, при численном итерационном определении производных по времени \dot{x} , \dot{y} и \dot{z} в СДУ (3.52) в силу структуры правых частей уравнений, нарушающих условие совместности (3.54), на каждом итерационном шаге нарушается гладкость отображения и происходит “перескок” с одной траектории решения на другую, порождая численный хаос. Такой же результат, разумеется, может быть получен и для СДУ, содержащих больше трех уравнений.

Решений в виде странного аттрактора при численном интегрировании двумерной СДУ не возникает, поскольку систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ всегда можно определить без введения дополнительной переменной – времени - только в пространстве (x, y) : $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = F(x, y)$.

Заметим, что для возникновения странного аттрактора при численном решении СДУ (3.53) условие нарушения совместности является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным, поскольку также важно, чтобы траектория решения СДУ время от времени возвращалась в окрестность заданной точки. Это условие определяет вид правых частей СДУ – они должны быть такими, чтобы растяжение фазового пространства траекторий в одних направлениях компенсировалось сжатием в других. СДУ типа Лоренца такими свойствами обладают. Таким образом, артефакт, возникающий при численном интегрировании СДУ (3.52), (3.53) в виде странного аттрактора может быть результатом отсутствия выполнения условия совместности (3.54) и, как следствие, результатом множественных “перескоков” с одной траектории решения на другую, с одной стороны, и ограниченностью объема в фазовом пространстве решений, с другой.

Довольно часто на практику численного интегрирования СДУ, типа Лоренца, ссылаются и исследователи, пытаясь объяснить возникновения численного хаоса в методах прямого численного интегрирования уравнений Навье-Стокса (УНС). Здесь необходимо подчеркнуть следующее. Без дополнительного уравнения теплопроводности они, вообще говоря, не сводятся к уравнениям Лоренца, и у них не выполняется условие сохранения объема в фазовом пространстве. Однако отсутствие выполнения последнего условия можно компенсировать вынужденными гармоническими возмущениями граничных условий, которые будут периодически возвращать в ограниченную

область фазового пространства численные решения при хаотических “перескоках” с одной траектории на другую.

По-видимому, именно таким образом и получают решения УНС сильно напоминающие эмпирические турбулентные режимы в методах прямого численного моделирования, где, с одной стороны, всегда существует масштаб, который задает минимально возможный шаг по времени, а с другой стороны, в качестве граничных условий задаются периодические возмущения, например, на оси трубы [63]. Без задания периодических граничных условий переход к “турбулентному” режиму в методах прямого численного моделирования не происходит.

Наличие двух масштабов: минимального, обусловленного сеточным масштабом, и максимального, обусловленного заданием гармонических граничных условий, при определенных условиях позволяют наиболее эффективно моделировать возмущения и на промежуточных масштабах. Вероятно поэтому, уравнения Навье-Стокса, вывод и форма которых соответствует описанию детерминированных режимов течения жидкости, при интегрировании их численными методами с использованием дополнительных – гармонических - граничных условий позволяют получать решения, хорошо совпадающие с экспериментальными данными для стохастических режимов течения. В этом случае уместно было бы говорить о моделировании турбулентного режима на «аналоговом» принципе. Безусловно, приведенные рассуждения являются качественными и требуют дальнейшего теоретического исследования.

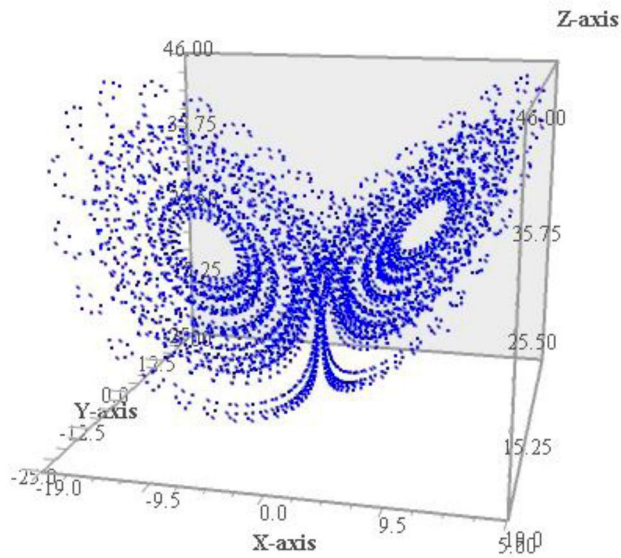


Рис. 6

Решение системы Лоренца (аттрактор Лоренца). Поточечное представление.

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e1/Lorenz-28.jpg>

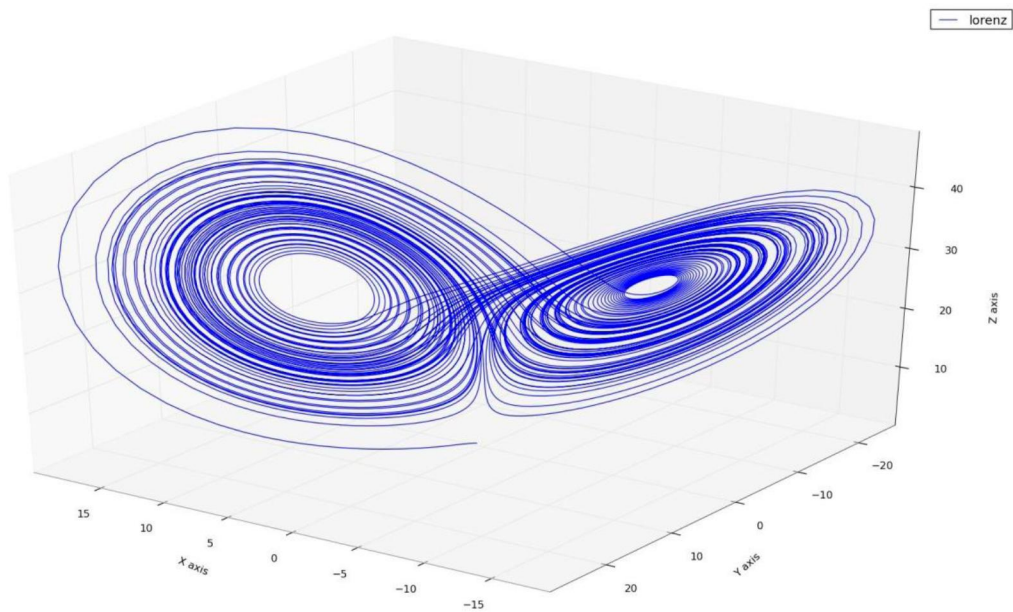


Рис. 7

Аттрактор Лоренца. Траектории.

<https://zkchong.files.wordpress.com/2010/04/view1.jpg>

Выводы к главе 3:

Расширение пространства переменных и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности, позволило получить соотношение, связывающее отклонение случайной величины от средних значений в двух временных точках, а также плотности вероятности этих реализаций для стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

В двух предельных случаях описания стохастических систем: когда небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности, и в случае мартингалов, получены соотношения, характеризующие плотность вероятности реализации случайной величины в заданный момент времени.

Показано, что в определенном интервале значений случайной величины такое решение не единственно. В связи с этим, на основе Центральной Предельной Теоремы Линдберга удается сделать вывод, что появление гауссовских распределений с «тяжелыми» степенными хвостами можно считать следствием возникновения в системе скрытых факторов, влияющих на динамику плотности вероятности: когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности.

Проведен анализ размерности фазового стохастического пространства, на основе которого найдены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

Решена задача распространения акустических возмущений в нелинейной стохастической среде. Показано, что стохастические возмущения могут приводить как к ослаблению акустических пульсаций, так и к их локальному по времени усилению.

Представлена модель возникновения «стохастичности» при численном интегрировании автономных дифференциальных уравнений.

Глава 4

КЛАССИФИКАЦИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ЯВЛЕНИЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ.

Во многих областях механики, физики, химии, биологии, экономики довольно часто встречаются процессы, в которых можно наблюдать зависимость измеряемых функций, не только от варьируемого аргумента, но и от направления изменения этого аргумента. Подобные явления принято называть гистерезисными явлениями.

Ниже речь будет идти в основном о явлениях, связанных с аэродинамическим гистерезисом, однако многие выводы будут иметь общий характер и могут быть применены в других областях исследования.

Изучение гистерезиса в аэродинамике имеет довольно давнюю историю (см., например, [43]), однако является актуальным и по сей день.

4.1 Классификация аэродинамических гистерезисных явлений.

Обычно, аэродинамические гистерезисы подразделяют на динамические и статические. К сожалению, неизвестны работы, в которых дано подробное описание отличий этих видов гистерезисов друг от друга. Из названия типов гистерезисов следует только, что первый из них зависит от скорости, а второй нет. Однако это не позволяет строить математические модели таких гистерезисов. Чтобы исправить эту ситуацию, в работах [43]-[44], [66] дана классификация аэродинамических гистерезисных функций с подробным описанием математических и физических отличий их друг от друга.

В соответствии, с этой классификаций все гистерезисные явления в аэродинамике и соответствующие им функциональные зависимости можно разделить на два основных типа и тип, обладающий “смешанными” свойствами.

К первому типу относятся те явления, которые зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости изменения этого аргумента. Ко второму относятся явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от величины (модуля) скорости изменения аргумента. “Смешанные” гистерезисные явления, имеют отличительные черты явлений и первого и второго типов, которые будут более подробно представлены ниже.

Рассмотрим в отдельности физические и математические особенности явлений обоих типов.

Начнем с описания явлений, относящихся к первому типу. Предположим, мы исследуем зависимость функции m от варьируемого аргумента α . Поскольку, априори известно, что исследуемые процессы зависят еще и от скорости изменения аргумента $\dot{\alpha}$, то есть $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$, то, очевидно, что изображение зависимости исследуемой функции m только от самого аргумента α на координатной плоскости (m, α) является проекцией фазового пространства большей размерности (как минимум, трехмерного пространства) на пространство меньшей размерности (на плоскость). Поэтому, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае, может существовать неопределенность в зависимости, исследуемой функции m только от одного аргумента, что, в свою очередь, может привести ее к гистерезисному виду на плоскости (m, α) . Такие гистерезисные функции, как правило, имеют вид “петель” с вырожденными концами, в местах изменения направления варьирования аргумента (на рис. 8 область $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$). Если проводить исследование зависимости $m(\alpha)$ при малой скорости изменения аргумента $\dot{\alpha}$ ($\dot{\alpha} \rightarrow 0$), должно произойти “вырождение” гистерезисной функции в однозначную функцию $m(\alpha)$ на плоскости (m, α) .

Физические аспекты, относящиеся к гистерезисным явлениям первого типа, связаны с эффектом запаздывания реакции рассматриваемой системы при воздействии на нее внешних сил. В аэродинамике, таким эффектом является демпфирование. Происходит аэродинамическое демпфирование следующим образом. При положительном вращении углы атаки обтекаемых поверхностей, расположенных позади ЦМ, увеличиваются, а у тех, что впереди - уменьшаются. Таким образом, вращение приводит к тому, что дополнительная подъёмная сила позади ЦМ летательного аппарата направлена вверх, а впереди ЦМ - вниз, и в случае, если центр масс аппарата не совпадает с его геометрическим центром, появляется дополнительный (демпфирующий) момент.

Для процессов, относящихся ко второму типу гистерезисных явлений, характерно отсутствие зависимости исследуемой функции от модуля скорости изменения варьируемого аргумента. Такие функции на плоскости $(m; \alpha)$, как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода (см. рис. 1). Точки разрыва при изменении направления варьируемого аргумента, как правило, не совпадают.

Примером таких явлений может служить зависимость силы сопротивления обтекаемой сферы от числа Рейнольдса $C_x(Re)$ при переходе от ламинарного к турбулентному режиму обтекания и обратно в дозвуковом потоке, а так же изменение давления на цилиндре за угловой кромкой тел конус-цилиндр при увеличении и уменьшении числа Маха или угла атаки в районе критических чисел Маха, характеризующихся переходом от безотрывного обтекания угловой кромки к отрывному и наоборот [45]. Возникновение таких явлений обусловлено возможностью существования различных режимов процесса в одном диапазоне значений варьируемого аргумента.

Гистерезисы “смешанного” типа, как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода, что характерно для гистерезисов второго

типа, однако, при этом зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости изменения этого аргумента, так же как гистерезисы первого типа. Гистерезисы “смешанного” типа, обычно, возникают в тех случаях, когда в рассматриваемой системе существуют физические предпосылки возникновения гистерезисов обоих типов и, в результате, происходит их суперпозиция.

Отметим, что если исходить только из деления гистерезисов на динамические и статические, то гистерезисы “смешанного” типа должны были быть отнесены к динамическим гистерезисам. Это приводит к отличию представленной классификацией от общепринятой.

4.2. Гистерезисные функции первого типа.

Остановимся подробнее на описании гистерезисных функций первого типа. В настоящей работе будем рассматривать гистерезисные кривые, полученные в результате описания процесса гармонического колебания тела.

Если подходить к описанию процессов, описываемых гистерезисными функциями первого типа, отталкиваясь от полученных для стационарных случаев экспериментальными или численными методами зависимостей функции $m_{st}(\alpha)$, то можно привести следующие рассуждения.

В точках нулевой скорости изменения аргумента α , функция $m(\alpha)$ не будет зависеть от направления изменения аргумента: $m(\alpha, \dot{\alpha})|_{\dot{\alpha}=0} = m(\alpha) = m_{st}(\alpha)$. Это позволяет предположить непрерывную зависимость функции m от скорости изменения аргумента.

В области $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, где $\dot{\alpha} \neq 0$ функция $m(\alpha, \dot{\alpha})$ имеет некоторое распределение, зависящее от скорости $\dot{\alpha}$. Будем считать, что это распределение непрерывно, гладко, и что среднее значение функции $m(\alpha, \dot{\alpha})$ в каждой точке α равняется ее стационарному значению $m_{st}(\alpha)$ в этой точке.

Рассмотрим распределение значений m по скоростям $\dot{\alpha}$ в точке α :

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\alpha}) \rangle = \frac{1}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)} \int_{\dot{\alpha}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\alpha}) d\dot{\alpha}.$$

Если перейти к безразмерной переменной по скорости

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)},$$

то можно записать выражение для распределения

значений m в виде:

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\phi}) \rangle = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi}. \quad (4.1)$$

Предполагая, что ветви гистерезисной функции знакопостоянны (выполняется условие: $m_{st} \neq 0$), поделив обе части равенства на величину $m_{st}(\alpha)$, запишем соотношение:

$$\langle M^2(\alpha) \rangle = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} M^2(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi} = 1,$$

где $M^2(\alpha, \dot{\phi}) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)}$ - плотность распределения по скоростям $\dot{\phi}$ в точке α .

В случае, если гистерезисная область разделена осью абсцисс на две части, то вначале преобразованием координат можно сместить всю область в одну полуплоскость относительно оси абсцисс, провести вычисления по определению «ширины» гистерезисной области, а затем, произвести обратные преобразования координат.

Гистерезисная кривая представляет собой реализацию вполне определенных значений скорости $\dot{\phi}$ в каждой точке α . Этими значениями являются $\dot{\phi}_{\min}(\alpha)$ и $\dot{\phi}_{\max}(\alpha)$. Введем обозначения соответствующих им значений

функции $M^2(\alpha)$: $M_A^2(\alpha) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \Big|_{\dot{\phi}=\dot{\phi}_{\min}} = \frac{m_A(\alpha)}{m_{st}(\alpha)}, \quad M_B^2(\alpha) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \Big|_{\dot{\phi}=\dot{\phi}_{\max}} = \frac{m_B(\alpha)}{m_{st}(\alpha)},$

где $m_A(\alpha)$ и $m_B(\alpha)$ - значения функции $m(\alpha)$ в точке α на нижней и верхней

ветвях гистерезисной кривой. Остальным (нереализованным) значениям скорости $\dot{\phi}$: $\dot{\phi}_{\min}(\alpha) < \dot{\phi} < \dot{\phi}_{\max}(\alpha)$ будут соответствовать $M^2(\alpha)$: $M_A^2(\alpha) < M^2(\alpha) < M_B^2(\alpha)$ (см. рис. 9).

Построим ячейку, соответствующую точке α , образованную областью четырехугольника с вершинами в точках с координатами: (α_A, m_A) , (α, m_A) , (α_B, m_B) , (α, m_B) (см. рис. 8) или (α_A, M_A^2) , (α, M_A^2) , (α_B, M_B^2) , (α, M_B^2) (см. рис. 9). Для этого в выбранной точке α строим вертикальную прямую до пересечения с ветвями гистерезиса. В точках пересечения строим две горизонтальные прямые так же до пересечения с гистерезисной кривой. Полученные таким образом крайняя левая и крайняя правая точки будут, соответственно, иметь координаты: $\alpha_A(\alpha)$ и $\alpha_B(\alpha)$.

Каждому значению $M^2(\alpha)$ из диапазона: $M_A^2(\alpha) < M^2(\alpha) < M_B^2(\alpha)$ соответствует определенный интервал $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)}$. Причем, для любого значения $M_A^2(\alpha) \leq M^2(\alpha) \leq M_B^2(\alpha)$ верно неравенство: $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)} \leq \alpha_B - \alpha_A$. Величина $\alpha_B - \alpha_A = \Delta\alpha_{M_B^2} + \Delta\alpha_{M_A^2}$ (где $\Delta\alpha_{M_A^2} = \alpha - \alpha_A$, $\Delta\alpha_{M_B^2} = \alpha_B - \alpha$) – определяет дисперсию параметра α в заданной точке.

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение в рассматриваемой ячейке, являющейся подобластью гистерезисной области в точке α : $\alpha_A < \alpha < \alpha_B$, перейдем к рассмотрению гильбертового пространства $H^1(\Omega \subset R^1)$, в котором в качестве нормы скалярного произведения базисных

функций определено соотношение:
$$\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} M^2(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi} = 1.$$
 Скалярное

произведение на пространстве $L^2[\dot{\phi}_{\min}(\alpha), \dot{\phi}_{\max}(\alpha)]$ задается равенством:

$$(f, g) = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} f g d\dot{\phi}.$$
 В качестве множества элементов гильбертового пространства

будут выступать функции M , а также функции, являющиеся результатом действия операторов на базисную функцию M . Операторы действуют в H^1 и переводят векторы из H^1 в векторы того же пространства.

Рассмотрим коммутационное соотношение эрмитовых операторов: оператора сдвига вдоль скорости изменения аргумента $\hat{k} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}$ и оператора

$$\text{умножения } \hat{\alpha} = \alpha : [\hat{k}\hat{\alpha}]M = \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}} M.$$

Для них можно записать соотношения:

$$\Delta_M^k = \left[(\hat{k}^2 M, M) - (\hat{k}M, M)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^\alpha = \left[(\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha}M, M)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq \frac{1}{2} |([\hat{k}\hat{\alpha}]M, M)|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве.

Таким образом, в пространстве с дополнительной переменной – скоростью изменения аргумента, имеем:

$$(\hat{k}M, M) = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \frac{1}{2} (M_B^2(\alpha) - M_A^2(\alpha));$$

$$(\hat{k}^2 M, M) = \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\varphi}^2} d\dot{\varphi} =$$

$$= \left(M_B(\alpha) \frac{dM_B(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A(\alpha) \frac{dM_A(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right) - \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 d\dot{\varphi}.$$

Здесь $M_A(\alpha)$ и $M_B(\alpha)$ - соответственно минимальное и максимальное значения функции M в точке α (значения функции на нижней и верхней ветвях гистерезисной кривой).

Интеграл $\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 d\dot{\varphi}$, стоящий в правой части этого выражения, в

выбранной области - ячейке, соответствующей точке α , можно записать в виде:

$$\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 d\dot{\varphi} \approx \left(\frac{M_B(\alpha) - M_A(\alpha)}{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha) - \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right)^2 (\dot{\varphi}_{\max}(\alpha) - \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)) = (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

Тогда полученное выражение для $(\hat{k}^2 M, M)$ примет вид:

$$(\hat{k}^2 M, M) \approx \left(M_B(\alpha) \frac{dM_B(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A(\alpha) \frac{dM_A(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

И, следовательно,

$$\Delta_M^k \approx \left[\left(M_B \frac{dM_B}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{dM_A}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B - M_A)^2 - \frac{1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.2)$$

Среднеквадратичное отклонение по аргументу:

$\Delta_M^\alpha = \left[(\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha} M, M)^2 \right]^{1/2} = \left(\langle \alpha^2 \rangle - \langle \alpha \rangle^2 \right)^{1/2}$, для ячейки замкнутой гистерезисной кривой в точке α должно быть равно половине расстояния, заключенного между точками $\alpha_A(\alpha)$ и $\alpha_B(\alpha)$, то есть

$$\Delta_M^\alpha \approx \frac{1}{2} |\alpha_B(\alpha) - \alpha_A(\alpha)|. \quad (4.3)$$

Остается найти значение скобок Пуассона от коммутатора операторов в точке α :

$$\left| \left[\hat{k} \hat{\alpha} \right] M, M \right\rangle = \left| \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}} M^2 d\dot{\varphi} \right| = \left| \int_{\alpha_A(\alpha)}^{\alpha_B(\alpha)} M^2 d\alpha \right| \approx \frac{1}{2} \left| (M_B^2(\alpha) - M_A^2(\alpha)) (\alpha_B(\alpha) - \alpha_A(\alpha)) \right|. \quad (4.4)$$

Наконец, вернемся к дисперсионному соотношению в фазовом пространстве: $\Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq \frac{1}{2} \left| \left[\hat{k} \hat{\alpha} \right] M, M \right\rangle$. Из него следует, что минимум дисперсии функции $M(\alpha)$ по скоростям изменения аргумента $\dot{\varphi}$ на участке $\alpha_A(\alpha) \leq \alpha \leq \alpha_B(\alpha)$ будет достигаться, в случае равенства левой и правой частей

этого соотношения. Однако в случае действия диссипативных сил, левая часть этого соотношения будет больше правой. Для того чтобы от неравенства перейти к равенству, введем коэффициент $\gamma \geq 1$. Он будет характеризовать степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента. В этом случае рассматриваемое соотношение примет вид:

$$\Delta_M^k \Delta_M^\alpha = \frac{\gamma}{2} \left| \left[\hat{k} \hat{\alpha} \right] M, M \right|.$$

Подставляя в это соотношение выражения (4.2)-(4.4), запишем уравнение:

$$\left(M_B \frac{dM_B}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{dM_A}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B - M_A)^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2.$$

Или, переходя обратно к физическим величинам, получим

$$\frac{1}{2} m_{st} (\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)) \left(\frac{dm_B/d\alpha}{d\dot{\alpha}_{\max}(\alpha)/d\alpha} - \frac{dm_A/d\alpha}{d\dot{\alpha}_{\min}(\alpha)/d\alpha} \right) - m_{st} (\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2 \quad (4.5)$$

При гармоническом режиме изменений аргумента α по времени t , нетрудно найти зависимость $\dot{\alpha}(\alpha) = \dot{\alpha}(\alpha(t))$. Действительно, в этом режиме для аргумента $\alpha(t)$ должно выполняться соотношение:

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \alpha_1 < \alpha < \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 - крайняя левая и крайняя правая точки гистерезиса (точки разворота), T - период гармонических изменений аргумента.

Следовательно,

$$\dot{\alpha}_{\min}^{\max} = \frac{\pi}{T} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \pm \frac{2\pi}{T} \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}. \quad (4.6)$$

Поэтому,

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}}, \quad (4.7)$$

Из уравнения (4.5) с учетом (4.6), (4.7), получим соотношение:

$$2\left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha}\right)^{-1} m_{st} \left(\frac{dm_B}{d\alpha} + \frac{dm_A}{d\alpha}\right) - m_{st} (\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2,$$

где $\alpha_1 < \alpha < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ и $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} < \alpha < \alpha_2$.

При переходе от уравнения (4.5) к данному соотношению была произведена “привязка” к границам всей гистерезисной области – точкам α_1 и α_2 . В результате, полученное соотношение перестало быть инвариантным по отношению к выбору начала отсчета значений функции $m(\alpha)$. Чтобы полученное уравнение адекватно описывало гистерезисные явления при гармонических колебаниях тела, нужно сместить начало отсчета значений функции $m(\alpha)$ так, чтобы в “серединной” точке: $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, стационарное значение функции было нулевым. Для этого сделаем замену: $m(\alpha) \rightarrow m(\alpha) - m_{st.cp.}$, где $m_{st.cp.} = m_{st}(\alpha)|_{\alpha = \alpha_{cp.} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2} = const$. В результате уравнение преобразуется к виду:

$$2(m_{st} - m_{st.cp.}) \left(\frac{dm_B}{d\alpha} + \frac{dm_A}{d\alpha}\right) - \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha}\right) (m_{st} - m_{st.cp.}) (\sqrt{m_B - m_{st.cp.}} - \sqrt{m_A - m_{st.cp.}})^2 =$$

$$= \frac{\gamma^2 + 1}{4} \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha}\right) (m_B - m_A)^2. \quad (4.8)$$

Полную производную функции $m(\alpha, \dot{\alpha})$ по переменной α можно представить в виде: $\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha}$. Для стационарной функции $m_{st}(\alpha)$ полная производная по α равна ее частной производной: $\frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha}$. В рассматриваемом гармоническом режиме изменений аргумента α , с учетом выражения (4.7) можно записать:

$$\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \frac{dm_{st}}{d\alpha} \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}.$$

При проецировании пространства $(m; \alpha, \dot{\alpha})$ на плоскость $(m; \alpha)$, полные производные $\left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\min}^{\max}$ задают значения производных для верхней и нижней ветвей кривой гистерезиса:

$$\left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\max} = \frac{dm_B(\alpha)}{d\alpha} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\min} = \frac{dm_A(\alpha)}{d\alpha}.$$

Поэтому, при гармоническом режиме изменений аргумента α по t , можно записать:

$$\frac{dm_B}{d\alpha} = \frac{dm_{st}}{d\alpha} + \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}, \quad (4.9)$$

$$\frac{dm_A}{d\alpha} = \frac{dm_{st}}{d\alpha} - \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}. \quad (4.10)$$

Из зависимостей (4.9)-(4.10) следует, что сумма производных $\left(\frac{dm_B(\alpha)}{d\alpha} + \frac{dm_A(\alpha)}{d\alpha} \right)$ в выражении (4.8) равна удвоенному стационарному

значению производной функции m_{st} в точке α : $\left(\frac{dm_B(\alpha)}{d\alpha} + \frac{dm_A(\alpha)}{d\alpha} \right) = 2 \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha}$. В

этих случаях выражение (4.8) приобретает наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} 4(m_{st} - m_{st.sp.}) \frac{dm_{st}}{d\alpha} - \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_{st} - m_{st.sp.}) \left(\sqrt{m_B - m_{st.sp.}} - \sqrt{m_A - m_{st.sp.}} \right)^2 = \\ = \frac{\gamma^2 + 1}{4} \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_B - m_A)^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 4(m_{st}(\alpha) - m_{st.sp.}) \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} = \\ = (m_B(\alpha) - m_A(\alpha))^2 \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) \left(\frac{\gamma^2 + 1}{4} + \frac{m_{st}(\alpha) - m_{st.sp.}}{\left(\sqrt{m_A(\alpha) - m_{st.sp.}} + \sqrt{m_B(\alpha) - m_{st.sp.}} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая, выражение для разности значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке α :

$$\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha), \text{ а так же соотношения: } m_A(\alpha) = m_{st}(\alpha) - \frac{1}{2}\Delta m(\alpha),$$

$$m_B(\alpha) = m_{st}(\alpha) + \frac{1}{2}\Delta m(\alpha), \text{ в случае, когда } \left| \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}} \right| < 1, \text{ получим}$$

$$\left(\sqrt{m_A(\alpha) - m_{st.cp.}} + \sqrt{m_B(\alpha) - m_{st.cp.}} \right)^2 \approx$$

$$\approx 4(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}) \left(1 - \frac{1}{16} \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}} \right)^2 \right) \approx 4(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}).$$

Подставив это соотношение в выражение (4.11), запишем

$$\Delta m(\alpha) \approx \sqrt{\frac{16}{\gamma^2 + 2}} \sqrt{\left| (m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}) \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha} \right|}, \quad (4.12)$$

где $\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha)$, $\gamma \geq 1$, $\alpha_1 \leq \alpha < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ и $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} < \alpha \leq \alpha_2$.

Выражение (4.12) может быть использовано для оценки зависимости разности значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой $\Delta m(\alpha)$ от расчетных значений $m_{st}(\alpha)$ и $dm_{st}(\alpha)/d\alpha$, в точках $\alpha \neq (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, в которых выполняется соотношение:

$$\left| \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}} \right| < 1.$$

Коэффициент γ в уравнении (4.12), характеризующий степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента, можно узнать, если иметь экспериментальные данные, хотя бы для одной гистерезисной кривой, полученной в аналогичных условиях (достаточно знать «ширину» гистерезиса в одной точке). Так, например, для аэродинамических

гистерезисных кривых, полученных в натуральных испытаниях для корабля “Союз” [47], при гиперзвуковых скоростях $\gamma \sim 8$, поэтому $\sqrt{\frac{16}{\gamma^2 + 2}} \sim \frac{1}{2}$.

Значение $\gamma = 1$ может быть использовано для оценки “сверху” разности значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой.

К сожалению, выражение (4.12) не может быть использовано для оценки разности значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в окрестности “серединой” точки гистерезисной области, где $m_{st}(\alpha) = m_{st.cp.}$, поскольку там не выполняется соотношение:

$$\left| \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}} \right| < 1$$

Кроме того, выражение (4.12) неправильно описывает гистерезисную кривую в окрестности точек, в которых производные $dm_{st}(\alpha)/d\alpha$ равны нулю. В этих точках правая часть выражения (4.12) равна нулю, при этом реальная величина Δm может быть ненулевой. Некорректность выражения (4.12) в точках, в которых $dm_{st}(\alpha)/d\alpha = 0$, объясняется тем, что в них, как правило, не

выполняется соотношение $\left(\frac{dm_B(\alpha)}{d\alpha} + \frac{dm_A(\alpha)}{d\alpha} \right) = 2 \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha}$, так как в разложении

полной производной функции m по α становится необходимым учитывать вторые (а возможно и следующие) производные переменной α по времени:

$$\frac{dm}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} + \frac{\partial m}{\partial \ddot{\alpha}} \frac{d\ddot{\alpha}}{d\alpha} + \dots, \quad \text{то есть рассматривать зависимости}$$

$m = m(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)$, дополняя, при этом фазовое пространство переменными: $\ddot{\alpha}, \dots$

К адекватному описанию гистерезисной кривой практически во всей гистерезисной области можно прийти, если не ограничиваться рассмотрением плотности распределения по скоростям в одной точке α , а исследовать ее в пространстве (α, ϕ) . Такой подход позволит создать замкнутую расчетно-

теоретическую модель описания гистерезисных функций первого типа, исключив, при этом, из модели эмпирический коэффициент γ . Остановимся на этом подробнее.

Поделив обе части равенства (4.1) на функцию $m_{st}(\alpha)$ (при условии, что $m_{st} \neq 0$), получим соотношение:

$$\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\varphi} = 1, \quad (4.13)$$

где $m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha)$ плотность распределения по скоростям $\dot{\varphi}$ в точке α .

Для среднего стационарного значения \bar{m}_{st} стационарной функции $m_{st}(\alpha)$, определенной на интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, где α_1 и α_2 - крайняя левая и крайняя правая граничные точки заданной гистерезисной области (точки разворота),

можно записать соотношение: $\bar{m}_{st} = \langle m_{st}(\alpha) \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_{st}(\alpha) d\alpha$. Подставив в

него функцию $m_{st}(\alpha)$ из соотношения (4.1), получим выражение:

$$\bar{m}_{st} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\varphi}) d\dot{\varphi} d\alpha$$

или

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\varphi})}{\bar{m}_{st}} d\dot{\varphi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = 1.$$

Функция $m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha)$ вводилась, как плотность распределения возможных значений функции в заданной точке α при реализации скорости изменения аргумента $\dot{\varphi}$ из интервала возможных значений $[\dot{\varphi}_{\min}(\alpha), \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)]$.

Гладкая непрерывная функция $m_{st}(\alpha)/\bar{m}_{st}$ характеризует плотность распределения функции m_{st} на интервале варьирования аргумента α

гистерезисной области: $[\alpha_1, \alpha_2]$. Следовательно, функция $m(\alpha, \dot{\phi})/\bar{m}_{st}$ в полученном выражении характеризует плотность распределения $m(\alpha, \dot{\phi})$ в пространстве гистерезисной области $(\alpha, \dot{\phi})$. Поэтому для гистерезисной области можно определить энтропию S в виде соотношения:

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Энтропия S , в данном случае, не является термодинамической энтропией, так как в приведенном для него выражении не используется плотность вероятности реализации значений кинетической энергии молекул какого-либо вещества. В тоже время, это выражение совпадает с определением для дифференциальной энтропии: $S = - \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \psi(q, p) \ln \psi(q, p) \frac{dq dp}{\Delta q \Delta p}$. В нем используется плотность вероятности реализации $\psi = m/\bar{m}_{st}$ величин $q = \alpha$ и $p = \dot{\phi}$, и в этом смысле, S может считаться энтропией рассматриваемой динамической системы - гистерезисной области.

Полученное выражение преобразуется к виду

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \left(\ln \left(\frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) + \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Вводя обозначение: $\delta m(\alpha, \dot{\phi}) = m(\alpha, \dot{\phi}) - m_{st}(\alpha)$, можно записать

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \\ - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Учитывая уравнение (4.13) во втором интегральном выражении правой части соотношения для энтропии, его можно преобразовать к виду:

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} \right) \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} \right) d\dot{\varphi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Если отказаться от рассмотрения точек, в окрестности которых функция $m_{st}(\alpha)$ стремится к нулю и считать, что $\delta m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha) < 1$, то, учитывая непрерывность и гладкость функции, раскладывая выражение под знаком логарифма в первом интегральном выражении правой части в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (включая вторую степень величины $\delta m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha)$), получим соотношение:

$$S \approx - \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\delta m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\dot{\varphi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \frac{\delta m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\varphi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.14)$$

Поскольку, в настоящей работе рассматриваются гистерезисные кривые, полученные в результате описания процесса гармонического колебания тела, то, воспользовавшись соотношением (4.6), запишем:

$$\dot{\varphi}_{\min} = \alpha_{\min} / (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) = -1/2 \quad \text{и} \quad \dot{\varphi}_{\max} = \alpha_{\max} / (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) = 1/2.$$

Учитывая это, а также симметричное расположение ветвей гистерезисной кривой относительно стационарного значения в каждой точке α , можно заметить, что второе интегральное выражение в правой части соотношения (4.14) в случае гармонических колебаний тела принимает нулевое значение.

В первом интегральном выражении правой части соотношения (4.14)

можно выделить интеграл $\int_{\dot{\varphi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\delta m(\alpha, \dot{\varphi})}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\dot{\varphi}$, который представляет собой

дисперсию распределения функции $m(\alpha, \dot{\varphi})/m_{st}(\alpha)$ по скоростям $\dot{\varphi}$ относительно стационарного значения в каждой точке α . Дисперсия распределения является квадратом наиболее вероятного среднеквадратичного отклонения от его среднего значения. Гистерезисная кривая представляет собой реализацию

вполне определенных значений функции $m(\alpha, \phi)$ в каждой точке α . Именно эти значения и нужно считать наиболее вероятными значениями реализации.

Поэтому, можно записать соотношение:
$$\int_{\phi_{\min}(\alpha)}^{\phi_{\max}(\alpha)} \left(\frac{\delta m(\alpha, \phi)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\phi = \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{2m_{st}(\alpha)} \right)^2,$$
 где

$\Delta m(\alpha)$ - разность значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой.

В результате выражение (4.14) примет вид:

$$S \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.15)$$

Можно заметить, что правая часть выражения (4.15), характеризующего значение энтропии гистерезисной области, состоит из двух частей.

Выражение $S_0 = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left(\frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$ характеризует энтропию,

производимую при изменении функции $m(\alpha, \phi)$ в стационарном режиме.

Выражение

$$\delta S = S - S_0 \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (4.16)$$

описывает производство энтропии, полученное непосредственно за счет совершения гармонических колебаний в результате нестационарного характера изменения скорости на всем интервале изменения $\alpha : \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Задача описания гармонических колебаний тела решается в неподвижной системе координат, связанной с его ЦМ. Ограничимся малым промежутком времени рассмотрения системы так, чтобы можно было пренебречь изменением высоты. В постановке квазизамкнутой системы аналогично уравнениям термодинамики можно записать соотношение для производства энтропии в окрестности точки α :

$$\tilde{T} \delta S(\alpha) = \delta A(\alpha) \quad (4.17)$$

где $\delta S(\alpha)$ - производство энтропии в точке α , обусловленное колебанием тела, $\delta A(\alpha)$ - работа, произведенная в результате колебания тела в точке α . Величина \tilde{T} с размерностью энергии, в данном случае, не является температурой системы. Она определяет значение энергии, от которого ведется отсчет энергетических уровней.

Работа, совершаемая при гармонических колебаниях тела в точке α , определяется кинетической энергией. Поэтому, учитывая уравнение (4.6), можно записать:

$$A(\alpha) = 2 \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2(\alpha) = \frac{4I\pi^2}{T^2} (\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1). \quad (4.18)$$

Множитель двойка здесь введен для того, чтобы учесть разность значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой (а не между одной из ветвей и стационарным значением функции).

Значение $\delta S(\alpha)$ можно найти из выражения (4.16) если провести интегрирование от ближайшей точки разворота α_j , $j = 1, 2$, до рассматриваемой точки α :

$$\delta S(\alpha) = \frac{(-1)^j}{8} \int_{\alpha_j}^{\alpha} \frac{m_{st}(a)}{\bar{m}_{st}} \left(\frac{\Delta m(a)}{m_{st}(a)} \right)^2 \frac{da}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.19)$$

Уравнения (4.17)-(4.19), (4.12), а также выражение: $\tilde{T} = \delta A(\alpha, T_1) / \delta S(\alpha, T_1)$ с известным для бездиссипативного (при $\gamma = 1$) периода колебаний T_1 отношением производства работы к производству энергии, представляют собой систему уравнений для определения зависимости $\Delta m(\alpha)$ в случае произвольного задания функции $m_{st}(\alpha)$. В общем случае решение такой системы может быть найдено численными методами.

В случае рассмотрения достаточно монотонных стационарных функций $m_{st}(\alpha)$, для которых, с допустимой в расчете точностью, верно соотношение:

$\bar{m}_{st} := \langle m_{st}(\alpha) \rangle \approx m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_{cp}} := m_{st.cp.}$, где $\alpha_{cp} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ - “серединая” точка гистерезисной области, можно аналитически определить зависимость $\Delta m(\alpha)$. В линейном приближении можно записать:

$$m_{st}(\alpha) \approx m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j} - 2(-1)^j \frac{\alpha - \alpha_j}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(m_{st.cp.} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j} \right),$$

$j = 1, 2$, $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j} = const$. Здесь значение $\alpha_j = \alpha_1$ или $\alpha_j = \alpha_2$ также выбирается из условия максимальной близости к рассматриваемой точке α . Сместим начало отсчета для функции $m(\alpha)$: $\hat{m}(\alpha) = m(\alpha) - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}$. Тогда,

$$\hat{m}_{st}(\alpha) = m_{st}(\alpha) - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \hat{m}_{st.cp.} = m_{st.cp.} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \Delta \hat{m}(\alpha) = \Delta m(\alpha).$$

Вариацию энтропии в новой системе отсчета, запишем в виде:

$$\delta \hat{S}(\alpha) \approx \frac{(-1)^j}{8} \int_{\alpha_j}^{\alpha} \frac{\hat{m}_{st}(a)}{\hat{m}_{st.cp.}} \left(\frac{\Delta m(a)}{\hat{m}_{st}(a)} \right)^2 \frac{da}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (\text{см. (4.19)}). \quad \text{Подставив в это выражение}$$

зависимость $\hat{m}_{st}(a) \approx -2(-1)^j \frac{a - \alpha_j}{\alpha_2 - \alpha_1} \hat{m}_{st.cp.}$, получим

$$\delta \hat{S}(\alpha) \approx -\frac{1}{16 \hat{m}_{st.cp.}^2} \int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(a))^2 \frac{da}{a - \alpha_j}.$$

Учитывая, что $\int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(a))^2 \frac{da}{a - \alpha_j}$ есть среднее значение величины $(\Delta m(a))^2$ на

интервале $\alpha_j \leq a \leq \alpha$, а также то, что в точке α_j верно соотношение:

$(\Delta m(a))^2|_{a=\alpha_j} = 0$, в линейном приближении можно записать:

$\int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(a))^2 \frac{da}{a - \alpha_j} \approx \frac{1}{2} (\Delta m(\alpha))^2$. И, следовательно,

$$\delta \hat{S}(\alpha) \approx -\frac{(\Delta m(\alpha))^2}{32 \hat{m}_{st.cp.}^2}. \quad (4.20)$$

Если зафиксировать точку α : $\alpha = \alpha_*$ ($\alpha_1 < \alpha_* < \alpha_2$), и подставить выражения (4.18), (4.20) в (4.17) при фиксированном значении периода колебания тела T : $T = T_\gamma$, то можно найти величину начального уровня энергии \tilde{T} , от которого будет вестись отсчет других энергетических уровней при смещенном начале отсчета функции $m(\alpha)$:

$$\tilde{T} \approx -128 \frac{I\pi^2}{T_\gamma^2} (\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha_1) \frac{\hat{m}_{st.sp.}^2}{\left(\Delta m_\gamma(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*}\right)^2},$$

где $\Delta m_\gamma(\alpha) = \Delta m(\alpha; T)\big|_{T=T_\gamma}$ - разность значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции m в точке α , когда период гармонического колебания тела T принимает значение, равное T_γ .

Подставляя полученное соотношение для \tilde{T} , а так же выражения (4.18), (4.20) в уравнение (4.17), получим соотношение для определения разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции m в любой точке α : $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, при произвольном значении периода гармонического колебания тела T :

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{T_\gamma}{T} \Delta m_\gamma(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*} \sqrt{\frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha_1)}}. \quad (4.21)$$

В полученное уравнение не входят функции со смещенным началом отсчета $\hat{m}(\alpha)$, поэтому дальнейшее использование этого уравнения не зависит от выбора начала отсчета функций.

Выражением (4.21) можно воспользоваться, если имеются экспериментальные или расчетные сведения о разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции m в любой точке $\alpha = \alpha_*$, при любом известном значении периода гармонического колебания тела T_γ .

Однако можно обойтись и без использования экспериментальных или расчетных сведений о разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции m , если принять во внимание соотношение (4.12).

Коэффициент γ в уравнении (4.12) характеризует степень влияния диссипативных сил. Так при $\gamma=1$ процесс демпфирования идет без затухания колебаний (влияние диссипативных сил – незначительно), при этом разность значений величин m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой – максимальна:

$$\Delta m_1(\alpha) = \Delta m(\alpha)|_{\gamma=1} \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left| \left(m_{st}(\alpha) - m_{st.sp.} \right) \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha} \right|}. \quad (4.22)$$

Совместное использование выражений (4.21) и (4.22) позволит определить значение $\Delta m_\gamma(\alpha)|_{\gamma=1} = \Delta m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*}$ для периода колебания тела $T_\gamma|_{\gamma=1} = T_1$, соответствующего бездиссипативному характеру колебаний:

$$\Delta m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left| \left(m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.sp.} \right) \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_*}} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \right|}. \quad (4.23)$$

Здесь $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*}$ и $dm_{st}(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_*}$ значения стационарной функции $m_{st}(\alpha)$ и ее производной в фиксированной точке $\alpha = \alpha_*$, в которой $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} \neq 0$ и $dm_{st}(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_*} \neq 0$.

Очевидно, что для улучшения точности расчетов, следует избегать выбора точки α_* в окрестности экстремумов функции $m_{st}(\alpha)$ и в областях, где $m_{st}(\alpha) \rightarrow m_{st.sp.}$. Подставив выражение (4.23) в (4.21), получим соотношение для определения разности значений функции m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке α для тела, совершающего гармонические колебания с произвольным периодом T :

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{T_1}{T} \sqrt{\left| \frac{(m_{st}(\alpha) - m_{st.sp.}) dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha} \right|}.$$

В случае рассмотрения достаточно монотонных стационарных функций $m_{st}(\alpha)$, для которых, с допустимой в расчете точностью, верно равенство:

$$\sqrt{\left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.sp.}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_*}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right|,$$

полученное соотношение можно переписать в виде:

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} \left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}. \quad (4.24)$$

Величины $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*}$, $dm_{st}(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_*}$ или, $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$, $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$ могут быть получены численными методами при проведении стационарных аэродинамических расчетов, которые гораздо точнее и требуют меньших затрат времени их нестационарных аналогов.

Предполагая, что отношение периодов колебаний тела в набегающем потоке для бездиссипативного и диссипативного случаев обусловлено различием вихреобразования позади колеблющегося тела, значение отношения T_1/T можно получить, используя гипотезу подобия течения и число Струхалья: $T_1/T \approx Lf/V = St$, где $T_1 \sim L/V$, L - характерный размер колеблющегося тела, V - скорость набегающего потока, $T \sim f^{-1}$, f - частота вихреобразования. Для чисел Рейнольдса, больших примерно 1000, значение числа Струхалья изменяется в небольшом диапазоне: $0,2 \leq St \leq 0,3$ (см. [48]). Следовательно, при таких значениях чисел Рейнольдса, можно считать, что $0,2 \leq T_1/T \leq 0,3$.

Таким образом, задача определения разности значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой первого типа становится замкнутой только в рамках расчетно-теоретической модели.

В семидесятых годах прошлого века предприятием НПО “Энергия” (ныне РКК “Энергия”) были проведены летные динамические испытания спускаемого аппарата (СА) “Союз”. В ходе этих испытаний СА с помощью двигателей подвергался принудительной раскачке в плоскости тангажа в течение, примерно, 10 секунд, после чего совершал свободные колебания относительно центра масс, длительностью, примерно, 30 секунд, а затем стабилизированный полет с работающими струйными органами. Плоскость угла атаки СА была перпендикулярна горизонтальной плоскости Земли. Полет на всем участке спуска происходил в режиме максимального аэродинамического качества (угол крена 0°). Первый цикл возмущенного движения начинался на высоте $H \approx 85 \text{ км}$ при гиперзвуковых скоростях ($M \approx 28$) [47].

Сравнение теоретических гистерезисных кривых, полученных с помощью соотношения (4.24) при значении отношения периодов $T_1/T = 0,25$ и экспериментальных кривых, полученных в летном эксперименте с принудительной раскачкой аппарата по углу атаки на гиперзвуковых скоростях полета, приведены на рисунках 10,11,13.

Для достаточно монотонных стационарных функций $C_{\tau_{st}}(\alpha)$ и $C_{n_{st}}(\alpha)$ видно хорошее соответствие экспериментальных и теоретических гистерезисных кривых $C_\tau(\alpha)$ и $C_n(\alpha)$ (см. рис. 10-11). Для функции $m_z(\alpha)$ такое соответствие ухудшается из-за недостаточной монотонности стационарной функции $m_{z_{st}}(\alpha)$ (см. рис. 12-13), однако, его все же можно считать вполне удовлетворительным.

Иногда монотонность функции $m_{z_{st}}(\alpha)$ изменяется в зависимости от положения центра масс аппарата. В этом случае, в расчетах можно выбрать центровку, для которой реализуется наиболее монотонная зависимость $m_{z_{st}}(\alpha)$ на интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, построить для нее гистерезисную кривую $m_z(\alpha)$, а затем, используя зависимости гистерезисных функций $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$,

осуществить перерасчет ветвей гистерезисной функции $m_z(\alpha)$ на нужную центровку аппарата.

Стоит еще раз отметить, что полученная в настоящей работе математическая модель, в которой стационарные аэродинамические характеристики используются для определения разности значений функций на верхней и нижней ветвях нестационарной гистерезисной кривой первого типа, является замкнутой в рамках только расчетно-теоретической модели, что существенно повышает ее эффективность.

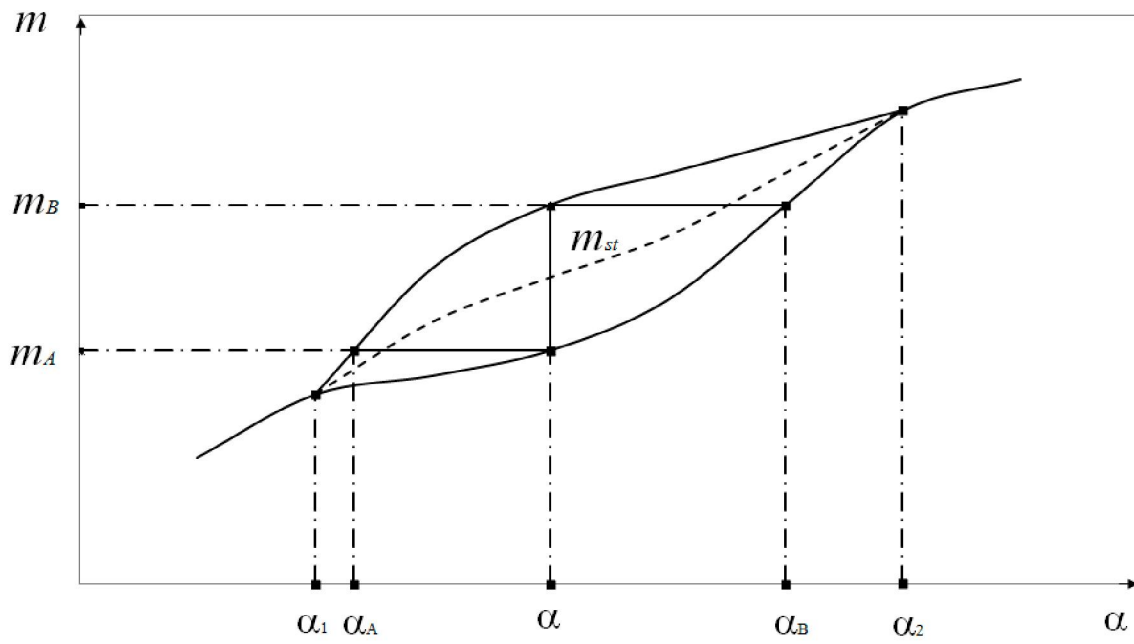


Рис. 8

Схематичное изображение гистерезисной кривой первого типа.

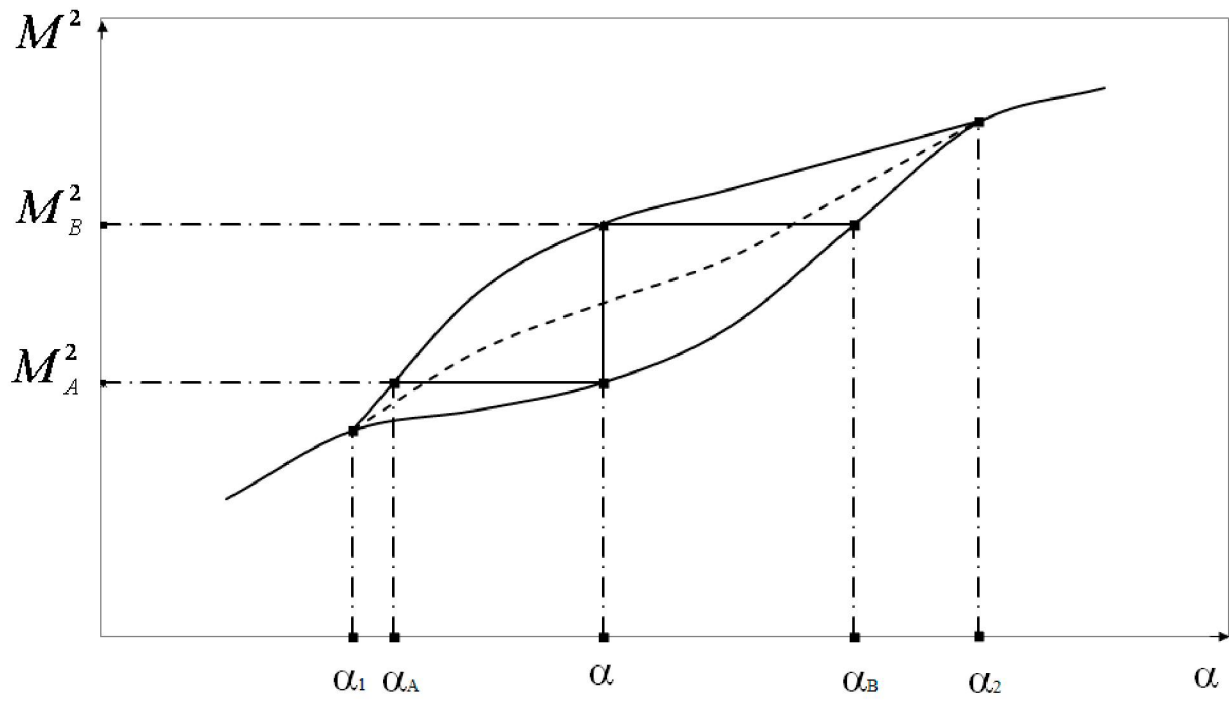


Рис. 9

Зависимость плотности распределения M^2 функции m по скоростям $\dot{\phi}$ от координаты α .

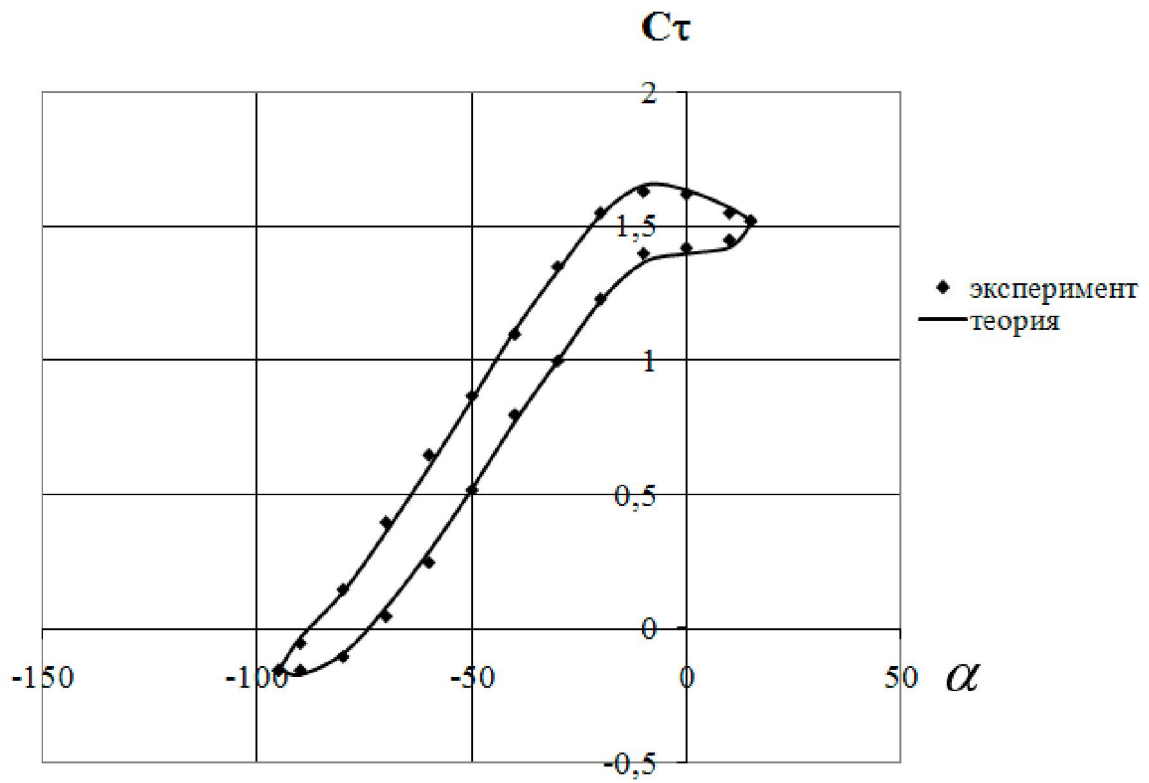


Рис. 10

Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретической гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента тангенциальной силы.

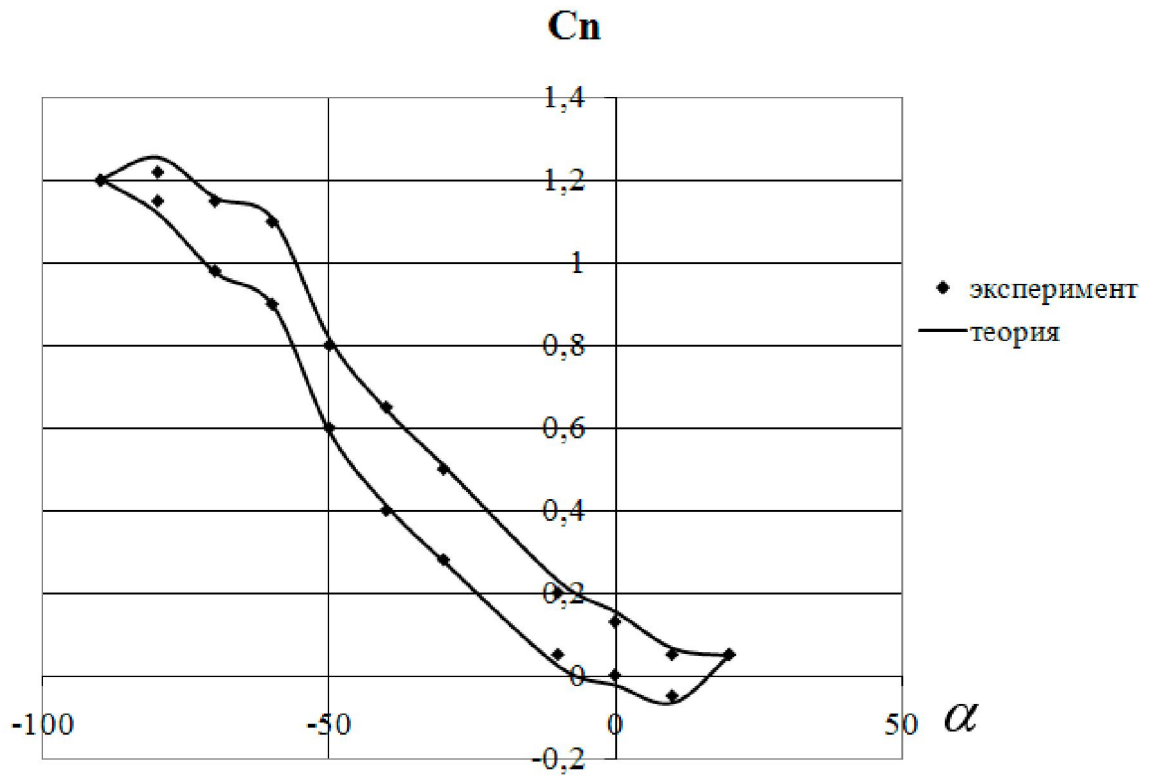


Рис. 11

Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретических гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента нормальной силы.

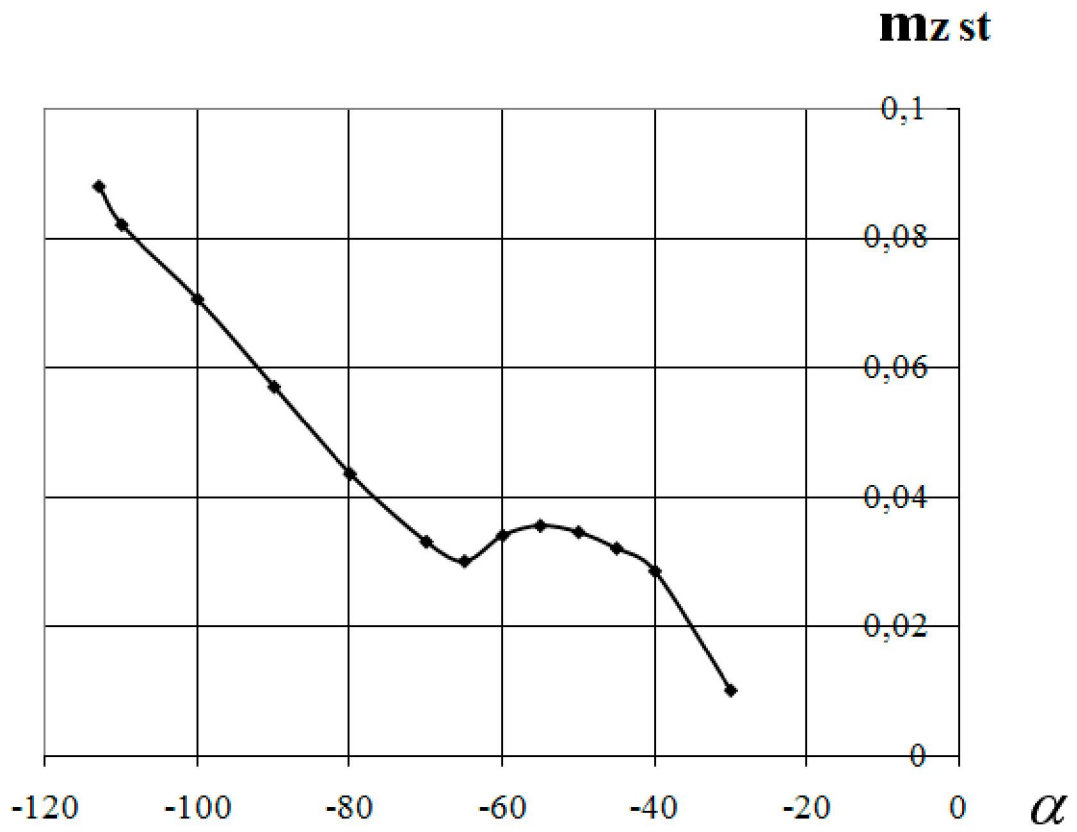


Рис. 12

Зависимость стационарного значения коэффициента m_z от угла атаки.

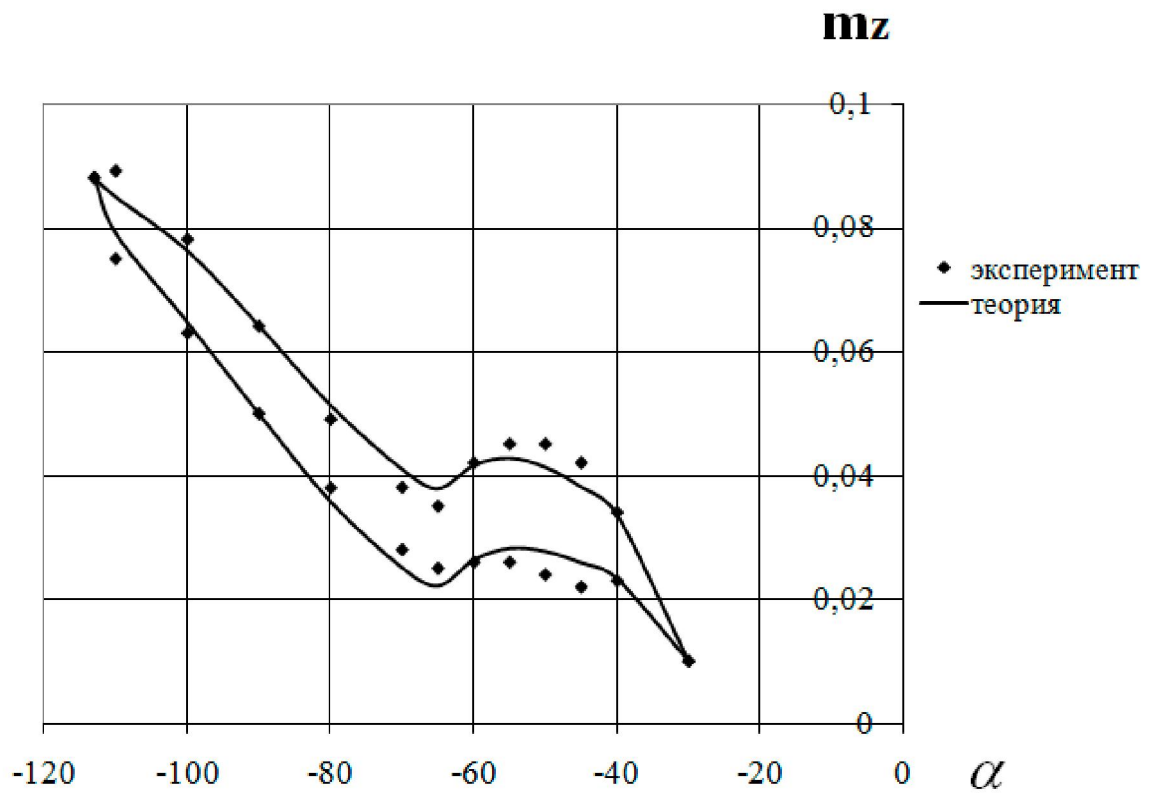


Рис. 13

Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретических гистерезисных кривых для коэффициента m_z .

4.3. Гистерезисные функции второго типа.

Перейдем к рассмотрению гистерезисных аэродинамических явлений, относящихся ко второму типу. В соответствии с классификацией, приведенной в разделе 5.1 (см. также [43]-[44], [66]), ко второму типу гистерезисных явлений относятся те явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от модуля скорости изменения аргумента.

Гистерезисные явления второго типа обусловлены возможностью существования различных режимов процесса, то есть возможностью существования нескольких решений в диапазоне параметров варьируемого аргумента. Переход из состояния, обусловленного одним решением, в состояние, обусловленное другим решением, происходит скачкообразно. Из-за инертности системы точки «разрыва» функций при изменении направления варьируемого аргумента, как правило, не совпадают. В результате, при обращении направления изменения аргумента возникает гистерезисная функция с разрывами первого рода (см. рис. 1 на стр.28).

Математическим аппаратом для описания гистерезисных явлений второго типа может служить, разработанный ранее (см. главу 1, а также [9], [18]), метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, описывающие их, скачком изменяют значения и/или значения своих производных. В данной главе (см. также [44], [66]) предлагается подход к описанию гистерезисных функций второго типа, позволяющий найти соотношение, для определения энергии перехода между двумя стационарными состояниями системы, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

Так же как и модель, построенная для описания гистерезисных функций первого типа, данная модель может быть замкнутой только в рамках расчетно-теоретического подхода, то есть может применяться без использования эмпирических параметров. Остановимся на этом подробнее.

Предположим, мы исследуем зависимость функции m от варьируемого аргумента α . Если априори известно о возможности существования двух (или более) стационарных состояний рассматриваемой системы в некотором диапазоне изменения аргумента, то, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае, может существовать неопределенность в зависимости, исследуемой функции m только от одного аргумента, что, в свою очередь, может явиться причиной гистерезисного вида функции на плоскости $(m; \alpha)$.

Для гистерезисов, относящихся к первому типу, также существовала неопределенность при описании функции m на плоскости $(m; \alpha)$. Однако, ее существенным отличием от рассматриваемого случая было то, что введение в рассмотрение дополнительной переменной – скорости $\dot{\alpha}$ - и переходе к описанию функции $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$ в пространстве $(m; \alpha, \dot{\alpha})$ позволяло полностью снять эту неопределенность.

В соответствии с приведенной классификацией, тестом на определение типа гистерезисной кривой можно считать именно “чувствительность” функции к скорости $\dot{\alpha}$ изменения аргумента α . Для гистерезисов второго типа эта зависимость существовать не должна.

Поскольку в рассматриваемом случае речь идет о реализации различных возможных стационарных состояний системы в некотором диапазоне изменения аргумента, то необходимо определить: переход к какому расширенному пространству снимет неопределенности описания процесса. То есть, процедура расширения фазового пространства будет применена и в этом случае. Переход от плоскости $(m; \alpha)$ к фазовому пространству с дополнительным параметром позволит “расщепить” в этом пространстве ветви гистерезисной кривой второго типа.

Предположим, что существует только два стационарных состояния системы в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента. Расширение

фазового пространства произведем за счет введения дополнительной переменной η : $(m; \alpha) \rightarrow (m; \alpha, \eta)$, $m(\alpha) \rightarrow m(\alpha, \eta)$. Будем считать, что переменная η равна нулю при нахождении системы в состоянии, описываемой одной ветвью функции, и равна единице, при нахождении системы в состоянии, описываемой другой ветвью функции.

Рассмотрим процесс перехода с одной ветви гистерезисной функции на другую при изменении по времени аргумента $\alpha = \alpha(t)$ в одном направлении. Для определенности обозначим: $m(\alpha, \eta)|_{\eta=1} = m_1(\alpha)$, $m(\alpha, \eta)|_{\eta=0} = m_2(\alpha)$, α_1 - точка, в которой становится возможен «уход» с ветви $m_1(\alpha)$, α_2 - точка, в которой становится возможен «приход» на ветвь $m_2(\alpha)$ (см. рис. 1, стр.28), причем, диапазон: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, считаем малым. До точки α_1 ($\alpha \leq \alpha_1$) и за точкой α_2 ($\alpha \geq \alpha_2$) функция m принимает однозначные значения в каждой точке α : $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, соответственно. При вероятностном переходе из одного состояния системы в другое (с одной ветви функции на другую) переменная η изменяется в диапазоне: $0 \leq \eta \leq 1$. При этом α изменяется в диапазоне $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Переходная область $(\alpha_1; \alpha_2) \times (0; 1)$ - является областью неопределенности нахождения на ветвях гистерезисной кривой.

Зная значение функции $m_1(\alpha)$ и ее производной $dm_1(\alpha)/d\alpha$ в точке α_1 , ветвь $m_1(\alpha)$ можно линейно интерполировать на диапазон $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$:

$$m_1(\alpha) \approx m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha - \alpha_1), \text{ где } \alpha_1 < \alpha < \alpha_2.$$

Зная значение функции $m_2(\alpha)$ и ее производной $dm_2(\alpha)/d\alpha$ в точке α_2 , ветвь $m_2(\alpha)$ можно также линейно интерполировать на диапазон $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$:

$$m_2(\alpha) \approx m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} + \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} (\alpha - \alpha_2), \text{ где } \alpha_1 < \alpha < \alpha_2.$$

В дальнейшем для краткости соответствующие константы будем обозначать в виде:

$$m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1, \quad m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2, \quad \left. \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = m'_1, \quad \left. \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_2} = m'_2.$$

В области $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, где $m(\alpha)$ является еще и функцией переменной η : $m = m(\alpha, \eta)$, будем предполагать непрерывность и гладкость функции $m = m(\alpha, \eta)$, и считать, что среднее по η значение

$$m_{12}(\alpha) := \langle m(\alpha, \eta) \rangle = \int_0^1 m(\alpha, \eta) d\eta, \quad (4.25)$$

в каждой точке α равно среднеарифметическому между интерполированным значением функции $m_1(\alpha)$ и интерполированным значением функции $m_2(\alpha)$ в рассматриваемой точке:

$$m_{12}(\alpha) = \frac{1}{2}(m_1(\alpha) + m_2(\alpha)) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(m'_1 \alpha_1 + m'_2 \alpha_2) + \frac{1}{2}(m'_1 + m'_2) \alpha \quad (4.26)$$

где $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Функция $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$ - плотность вероятности реализации величины η в точке α :

$$\int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta = 1.$$

Кроме того, функцию $m_{12}(\alpha)$ можно усреднить по α :

$$\bar{m} := \langle m_{12}(\alpha) \rangle = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_{12}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.27)$$

Используя выражение (4.26), получим

$$\bar{m} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(m'_1 \alpha_1 + m'_2 \alpha_2) + \frac{1}{4}(m'_1 + m'_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.28)$$

Подставив в уравнение (4.27) соотношение для $m_{12}(\alpha)$ в виде (4.25) и поделив левую и правую части полученного выражения на константу \bar{m} , запишем соотношение для области $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = 1. \quad (4.29)$$

Из выражения (4.29) видно, что функция $m(\alpha, \eta)/\bar{m}$ - плотность вероятности в пространстве $(\alpha; \eta)$, поэтому для переходной области гистерезиса второго типа можно определить произведенную энтропию ΔS в виде соотношения:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Так же, как и в разделе 5.2, энтропия S не является термодинамической энтропией. Ее можно охарактеризовать, как дифференциальную энтропию динамической системы – переходной области гистерезиса второго типа.

Полученное выражение преобразуется к виду:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \left(\ln \left(\frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) + \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Вводя обозначение: $\delta m(\alpha, \eta) = m(\alpha, \eta) - m_{12}(\alpha)$, можно записать

$$\begin{aligned} \Delta S = & - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \\ & - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \end{aligned}$$

Учитывая уравнение (4.25), во втором интегральном выражении правой части соотношения для энтропии, его можно преобразовать к виду:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Если отказаться от рассмотрения точек, в окрестности которых функция $m_{12}(\alpha)$ стремится к нулю и считать, что $\delta m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha) < 1$, то, учитывая непрерывность и гладкость функции, раскладывая выражение под знаком логарифма в первом интегральном выражении правой части в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (включая вторую степень величины $\delta m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$), получим соотношение:

$$\Delta S \approx -\frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \int_0^1 \left(\frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \int_0^1 \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.30)$$

Функция $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$ в переходной области $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ является симметричной относительно среднего значения, так как $m_{12}(\alpha)$ является среднеарифметическим для значений функции на двух ее ветвях в каждой точке α . Поэтому, $\int_0^1 \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta = 0$, и второе интегральное выражение в правой части уравнения (30) принимает нулевое значение.

В первом интегральном выражении правой части соотношения (4.30) можно выделить интеграл $\int_0^1 \left(\frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta$, который представляет собой дисперсию распределения функции $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$ по η в каждой точке α .

Поскольку переходная часть гистерезисной области ограничена линейно интерполированными в нее ветвями функций, то можно записать соотношение:

$$\int_0^1 \left(\frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta \approx \left(\frac{\Delta m(\alpha)}{2m_{12}(\alpha)} \right)^2, \text{ где } \Delta m(\alpha) - \text{разность значений функции } m \text{ на двух}$$

ветвях гистерезисной кривой в точке α :

$$\Delta m(\alpha) = m_2(\alpha) - m_1(\alpha) = m_2 - m_1 - \left(m_2' \alpha_2 - m_1' \alpha_1 \right) + \left(m_2' - m_1' \right) \alpha \quad (4.31)$$

В результате выражение (4.30) примет вид:

$$\Delta S \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\Delta m(\alpha))^2}{m_{12}(\alpha) \bar{m}} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (4.32)$$

Можно заметить, что правая часть выражения (4.32), характеризующего значение энтропии гистерезисной области, состоит из двух частей.

Выражение $S_{st} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left(\frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$ характеризует энтропию,

произведенную в результате квазистационарного (без учета влияния скорости) изменения среднего значения $m_{12}(\alpha)$ функции $m(\alpha, \eta)$ на участке $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Как будет показано ниже, значение S_{st} становится нулевым, в случае, когда переход из одного стационарного состояния в другое происходит скачкообразно: $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$.

Выражение $S_{jump} = S - S_{st} \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\Delta m(\alpha))^2}{m_{12}(\alpha) \bar{m}} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$ описывает энтропию,

произведенную непосредственно за счет смены стационарных состояний в интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Используя выражения (4.26), (4.28) и (4.31) можно найти значения S_{st} и S_{jump} :

$$S_{st} \approx -\frac{F}{2D(\alpha_2 - \alpha_1)} \times \left(\left(\frac{B + D\alpha_2}{F} \right)^2 \ln \left(\frac{B + D\alpha_2}{F} \right) - \left(\frac{B + D\alpha_1}{F} \right)^2 \ln \left(\frac{B + D\alpha_1}{F} \right) - \frac{(B + D\alpha_2)^2 - (B + D\alpha_1)^2}{2F^2} \right) \quad (4.33)$$

$$S_{jump} \approx -\frac{1}{2DF(\alpha_2 - \alpha_1)} \times \left[\left(A - \frac{BC}{D} \right)^2 \ln \left| \frac{B + D\alpha_2}{B + D\alpha_1} \right| + C^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2} + C \left(2A - \frac{BC}{D} \right) (\alpha_2 - \alpha_1) \right]. \quad (4.34)$$

Здесь, константы A, B, C, D, F зависят только от значений функций $m_1(\alpha)$, $m_2(\alpha)$ и их производных в точках α_1 и α_2 , соответственно:

$$A = m_2 - m_1 - \left(m_2' \alpha_2 - m_1' \alpha_1 \right), \quad B = m_1 + m_2 - \left(m_1' \alpha_1 + m_2' \alpha_2 \right),$$

$$C = m_2' - m_1', \quad D = m_1' + m_2', \quad F = B + D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$m_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}, \quad m_2 = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}, \quad m_1' = \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1}, \quad m_2' = \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2}.$$

Часто, переход из одного стационарного состояния системы в другое происходит скачкообразно в очень узком диапазоне изменения аргумента $\delta\alpha$. В этом случае при изменении аргумента α в интервале $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 - \delta\alpha$, где $\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$, не происходит смены состояния рассматриваемой системы – система описывается ветвью гистерезисной функции $m_1(\alpha)$, а в интервале $\alpha_2 - \delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_2$ происходит “перескок” с ветви $m_1(\alpha)$ на ветвь гистерезисной функции $m_2(\alpha)$. При этом, в диапазоне: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 - \delta\alpha$, приращение энтропии определяется только величиной $\tilde{S}_{st} \approx S_{st}$ (выражение (4.33)). В диапазоне: $\alpha_2 - \delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\tilde{S}_{st} = S_{st} \Big|_{\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1} \approx 0$, а величина \tilde{S}_{jump} :

$$\tilde{S}_{jump} = S_{jump} \Big|_{\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1} \approx -\frac{1}{2\tilde{D}(\tilde{B} + \tilde{D}\alpha_2)} \left[\left(\tilde{A} - \frac{\tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{D}} \right)^2 \frac{\tilde{D}}{\tilde{B} + \tilde{D}\alpha_2} + \tilde{C}^2 \alpha_2 + \tilde{C} \left(2\tilde{A} - \frac{\tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{D}} \right) \right]$$

где

$$\tilde{A} = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1 - \left(\tilde{m}_2' \alpha_2 - \tilde{m}_1' (\alpha_2 - \delta\alpha) \right), \quad \tilde{B} = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 - \left(\tilde{m}_1' (\alpha_2 - \delta\alpha) + \tilde{m}_2' \alpha_2 \right),$$

$$\tilde{C} = \tilde{m}_2' - \tilde{m}_1', \quad \tilde{D} = \tilde{m}_1' + \tilde{m}_2';$$

$$\tilde{m}_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2-\delta\alpha} = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha_2 - \delta\alpha - \alpha_1) \approx m_1 + m_1'(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\tilde{m}_2 = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_2,$$

$$\tilde{m}'_1 = \left. \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_2-\delta\alpha} = \left. \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = m'_1, \quad \tilde{m}'_2 = \left. \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_2} = m'_2.$$

То есть в приближении линейной интерполяции ветвей гистерезисной функции $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ в переходной области: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, в случае, когда $\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$, можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\approx m_2 - m_1 - \left(m'_2 \alpha_2 - m'_1 \alpha_1 \right) = A, & \tilde{B} &\approx m_1 + m_2 - \left(m'_1 \alpha_1 + m'_2 \alpha_2 \right) = B, \\ \tilde{C} &= C, & \tilde{D} &= D. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, когда процесс перехода из одного квазистационарного состояния системы в другое происходит скачкообразно в окрестности точки α_2 ($\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$), полное производство энтропии $\tilde{\delta S}$ в переходной области: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, определяется выражениями:

$$\tilde{\delta S} = \tilde{S}_{st} + \tilde{S}_{jump},$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{st} &\approx -\frac{F}{2D(\alpha_2 - \alpha_1)} \times \\ &\times \left(\left(\frac{B + D\alpha_2}{F} \right)^2 \ln \left(\frac{B + D\alpha_2}{F} \right) - \left(\frac{B + D\alpha_1}{F} \right)^2 \ln \left(\frac{B + D\alpha_1}{F} \right) - \frac{(B + D\alpha_2)^2 - (B + D\alpha_1)^2}{2F^2} \right), \\ \tilde{S}_{jump} &\approx -\frac{1}{2D(B + D\alpha_2)} \left[\left(A - \frac{BC}{D} \right)^2 \frac{D}{B + D\alpha_2} + C^2 \alpha_2 + C \left(2A - \frac{BC}{D} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

В постановке квазизамкнутой системы в переходной области: $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, аналогично уравнениям термодинамики можно записать соотношение, связывающее энергию $\Delta U = U_{II2} - U_{I1}$, затрачиваемую или выделяемую в процессе квазистационарного перехода из одного стационарного состояние в другое, с производством энтропии $\Delta S = S_{st} + S_{jump}$ (см. (4.33)-(4.34)), обусловленное этим переходом: $\tilde{T}\Delta S = \Delta U$. Здесь U_{Ki} (где $K = I, II$; $i = 1, 2$) - энергия системы, находящейся в состоянии, описываемом I -й или II -й ветвью

гистерезисной кривой (функции $m_1(\alpha)$ или $m_2(\alpha)$, соответственно), в точках α_i ($i=1$ или $i=2$).

Величина \tilde{T} с размерностью энергии, в данном случае, не является температурой системы. Она определяет значение энергии, от которого ведется отсчет энергетических уровней и, в силу аддитивности энтропии и энергии, может быть найдена из соотношения: $\tilde{T} = \tilde{U}_{jump} / \tilde{S}_{jump}$, где производство энтропии \tilde{S}_{jump} определяется выражением (4.35), а изменение энергии $\tilde{U}_{jump} = U_{II2} - U_{I1}$ может быть найдено в результате численного эксперимента, как разность значений энергии системы при нахождении ее на одной и на другой ветвях гистерезисной кривой в точке перехода α_2 .

Зная параметр \tilde{T} и используя выражения (4.33), (4.34), можно определить величину $\Delta U = U_{II2} - U_{I1}$, характеризующую разность значений энергии системы в точках α_1 и α_2 на двух разных ветвях гистерезисной кривой:

$$\Delta U = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} \Delta S = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} (S_{st} + S_{jump}). \quad (4.36)$$

Величина ΔU характеризует также минимальную работу (без учета затрат энергии на изменение самого параметра α) необходимую для перевода системы из точки α_1 в точку α_2 (при переходе с одной ветви на другую).

С другой стороны, если известны значения энергии системы, находящейся в состоянии, описываемом одной из ветвей гистерезисной функции ($m_1(\alpha)$ или $m_2(\alpha)$) в двух точках α_1 и α_2 , можно найти разность значений энергии системы в одной точке, но находящейся в двух разных состояниях (описываемой разными ветвями гистерезисной функции).

В самом деле, пусть, для определенности, известны значения энергии системы U_{I1} и U_{I2} при нахождении ее в точках α_1 и α_2 в состоянии, описываемом l -й ветвью гистерезисной кривой (функцией $m_l(\alpha)$), тогда

$$\Delta U = U_{II2} - U_{I1} = (U_{II2} - U_{I2}) + (U_{I2} - U_{I1}) = \tilde{U}_{jump} + \Delta U_I$$

где $\tilde{U}_{jump} = U_{II2} - U_{I2}$, $\Delta U_I = U_{I2} - U_{I1}$.

Исходя из уравнения (4.36), можно записать:

$$\frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} = \frac{\Delta U}{\Delta S} = \frac{\tilde{U}_{jump} + \Delta U_I}{\Delta S} = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} \frac{\tilde{S}_{jump}}{\Delta S} + \frac{\Delta U_I}{\Delta S}.$$

Следовательно,

$$\tilde{U}_{jump} = \frac{\Delta U_I}{\Delta S - \tilde{S}_{jump}} \tilde{S}_{jump} = \frac{U_{I2} - U_{I1}}{S_{st} + S_{jump} - \tilde{S}_{jump}} \tilde{S}_{jump}, \quad (4.37)$$

где значения энтропии S_{st} , S_{jump} , \tilde{S}_{jump} определяются соотношениями (4.33), (4.34) и (4.35), соответственно.

Уравнение (4.37) так же, как и уравнение (4.36), вместе с выражениями (4.33)-(4.35) и зависимостями для определения величины энергии в двух точках α на одной ветви или в одной точке, но на разных ветвях гистерезисной функции, образуют замкнутую в рамках расчетно-теоретического подхода модель для определения энергии в других точках или состояниях.

4.3.1. Аэродинамический гистерезис второго типа в задаче о пересечении косых скачков уплотнения.

При пересечении косых скачков уплотнения существует диапазон чисел Маха и углов отклонения потока, в котором могут одновременно существовать как режим регулярного взаимодействия ударных волн, так и маховская конфигурация. На рисунке 14 представлены изолинии плотности на регулярном режиме, на рисунке 15 изолинии на маховском режиме ($M=3.45$) (расчеты и графики, представленные на рис. 14-17, выполнены дф-мн Алексеевым А.К. ПАО «РКК «Энергия» [58]). Теоретическое, расчетное и экспериментальное исследование этого явления можно найти в [54]-[55].

На рисунке 16 представлена гистерезисная кривая (бифуркационная диаграмма) в плоскости чисел Маха и угла отклонения потока (M, Θ) .

Как известно, по теореме Пригожина, состояние *линейной открытой* системы со стационарными граничными условиями изменяется в направлении уменьшения *производства* энтропии, пока не достигнет состояния текущего равновесия, при котором производство энтропии минимально [56]. При этом речь идет об энтропии, являющейся характеристикой плотности вероятности реализации микросостояний, то есть об энтропии в термодинамическом смысле. Ниже она будет обозначаться буквой S_T , а ее производство ΔS_T (в отличие от энтропии гистерезисной области S и ее производства ΔS). Поэтому, выражения (4.36)-(4.37), могут быть записаны в терминах производства энтропии S_T , которое определяет энергию системы U : $\Delta U = T\Delta S_T$ (где T - средняя температура системы). В результате чего, они примут вид:

$$T_{II2}\delta S_{T\ II2} - T_{I1}\delta S_{T\ I1} = \frac{T_{II2}\delta S_{T\ II2} - T_{II1}\delta S_{T\ II1}}{\tilde{S}_{jump}} (S_{st} + S_{jump}),$$

$$T_{II2}\delta S_{T\ II2} - T_{I2}\delta S_{T\ I2} = \frac{T_{I2}\delta S_{T\ I2} - T_{I1}\delta S_{T\ I1}}{S_{st} + S_{jump} - \tilde{S}_{jump}} \tilde{S}_{jump}. \quad (4.38)$$

Здесь T_{Ki} , $\delta S_{T\ Ki}$ (где $K = I, II$; $i = 1, 2$) – средняя температура и производство термодинамической энтропии δS_T , соответственно, в выделенной области рассматриваемой системы, находящейся в состоянии, описываемом I -й или II -й ветвью гистерезисной кривой (функции $m_1(\alpha)$ или $m_2(\alpha)$, соответственно), в точках α_i ($i = 1$ или $i = 2$).

Если есть возможность существования нескольких макросостояний системы, о минимуме производства энтропии в термодинамическом смысле

можно говорить только с позиции локальных значений минимума производства энтропии в окрестностях квазистационарных состояний. Поэтому не следует исключать возможность скачкообразного роста производства энтропии при переходе системы из одного квазистационарного состояния в другое.

В работе [58] рассмотрено производство энтропии в двумерном стационарном течении в области неединственности. Использована модель взаимодействия двух плоскопараллельных сверхзвуковых потоков воздуха, образующихся при обтекании симметричных клиньев и двумерные нестационарные уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k)}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k U_i + P \delta_{ik})}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k h_0)}{\partial x^k} &= 0.\end{aligned}$$

Начальные условия: $\rho_0(x, y), U_0(x, y), V_0(x, y), T_0(x, y)$. Пространственная область расчета: $\Omega = (0 < x < X_{\max}, 0 < y < Y_{\max})$, временной интервал: $(0 < t < t_f)$.

Здесь $U_1 = U$, $U_2 = V$, $h_0 = (U^2 + V^2)/2 + h$, $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \gamma e$, $E = \rho \left(e + \frac{1}{2}(U^2 + V^2) \right)$,

$$e = \frac{RT}{\gamma - 1}, \quad P = \rho RT.$$

На входной границе в работе [58] приняты условия втекания, соответствующие пересекающимся скачкам уплотнения. На боковых границах приняты условия втекания, соответствующие пересекающимся скачкам уплотнения и течению за веером волн разрежения, имитирующему обратный разворот потока на нижней по течению кромке клиньев. В данном течении веер волн разрежения выполняет существенную роль. В его отсутствие на маховском режиме скачок уплотнения прижимается к левой границе. Веер волн разрежения обеспечивает разгон течения в “жидком сопле Лавалья” до

сверхзвуковых скоростей, что обеспечивает существование данной схемы течения и существенно облегчает постановку граничных условий на правой (выходной) границе. На выходной границе задавались условия вытекания. Схема течения на обоих режимах представлена на рисунках 14-15.

Расчеты проведены сотрудником РКК «Энергия» доктором физико-математических наук Алексеевым А.К. в области неединственности по M, Θ , где одновременно возможны две структуры течения. При тестировании прямой задачи получены неединственные решения для чисел Маха $3.45 \div 6$ и углов отклонения потока $\theta \in (19^\circ, 30^\circ)$. Уравнения Эйлера решались методом второго порядка точности MUSCL, задача Римана решалась методом работы [58].

В расчетах контролировалось производство термодинамической энтропии в течении через баланс потоков на границе:

$$\Delta S_T = \int_{\Gamma} \rho u_n (C_V \ln(e_{in}) - R \ln(\rho_{in})) d\Gamma.$$

Нормированное на поток энтропии через границу втекания производство энтропии

$$\Delta S_T / \Delta S_{T_\infty} = \frac{\int_{\Gamma} \rho u_n (C_V \ln(e_{in}) - R \ln(\rho_{in})) d\Gamma}{\int_{X=0} \rho u_\infty (C_V \ln(e_{in}) - R \ln(\rho_{in})) d\Gamma}$$

представлено на рисунке 17 в зависимости от угла отклонения потока. Верхняя часть получена для маховского режима при уменьшении угла, нижняя - для регулярного режима при увеличении угла отклонения потока. Наблюдается скачкообразное изменение состояния при переходе между двумя режимами обтекания, что позволяет идентифицировать функциональную зависимость, как гистерезис второго типа. Причем, при переходе от регулярного к маховскому отражению происходит рост производства термодинамической энтропии, не свойственный линейным системам. Аналогичные гистерезисные кривые, были

получены Алексеевым А.К. для локальных значений термодинамических и гидродинамических величин: давления, плотности, скорости.

В диапазоне погрешности исходных данных $\pm 5\%$ сравнение разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в области перехода для локальных значений термодинамических величин, а также интегральных характеристик: средней температуры и производства энтропии, с формулой (4.38) дает соответствие с точностью, не хуже 10% (см. рис. 17).

Сравнение проводилось следующим образом. На нижней кривой, соответствующей регулярному отражению (ветвь I), выбиралась расчетная точка максимально приближенная к области перехода на ветвь, соответствующую Маховскому режиму (точка E_I на рисунке 17). Затем выбиралась вторая точка на ветви I (точки A_I , B_I , C_I или D_I на рисунке 17) и по формулам (4.37), (4.33)-(4.35) определялось производство энергии (термодинамической энтропии), необходимое для перехода от регулярного к Маховскому режиму. На рисунке 17 символами A_{II} , B_{II} , C_{II} и D_{II} обозначены теоретически найденные значения точек перехода от регулярного к Маховскому режиму, определенные с использованием значений функций и производных в точках A_I , B_I , C_I и D_I , соответственно.

Обнаружено достаточно хорошее соответствие между расчетными и теоретическими решениями.

Выводы к главе 4.

Приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений, в соответствии с которой, можно выделить два основных типа гистерезисных явлений: гистерезисные явления, зависящие от скорости изменения аргумента и гистерезисные явления от нее независимые, а также тип гистерезисных явлений, который является результатом интерференции явлений первого и второго типов.

Предложены теоретические методы описания гистерезисных функций первого и второго типов. Оба метода являются замкнутыми в рамках только расчетно-теоретических моделей.

Метод описания гистерезисных функций первого типа позволяет определять разность значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в каждой точке гистерезисной области с использованием данных только о стационарных значениях функции.

Предлагаемый теоретический подход описания гистерезисных функций второго типа позволяет решать задачу определения энергии затрачиваемой или выделяемой при переходе между двумя стационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

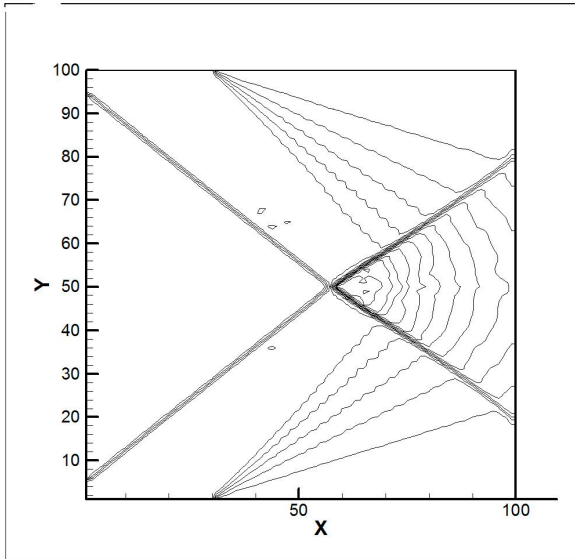


Рис. 14

Изолинии плотности,

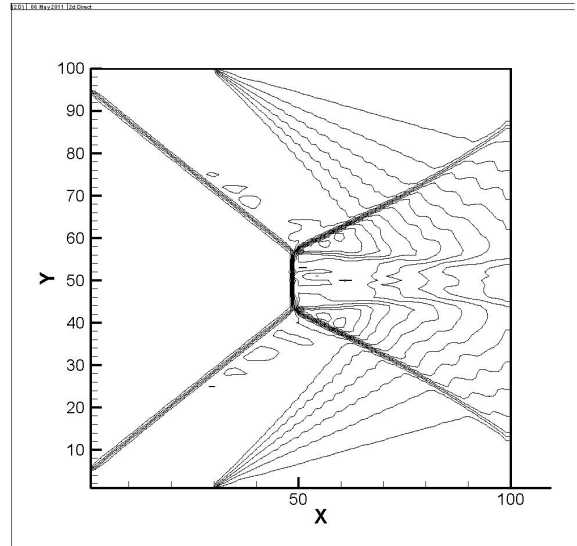


Рис. 15

Изолинии плотности

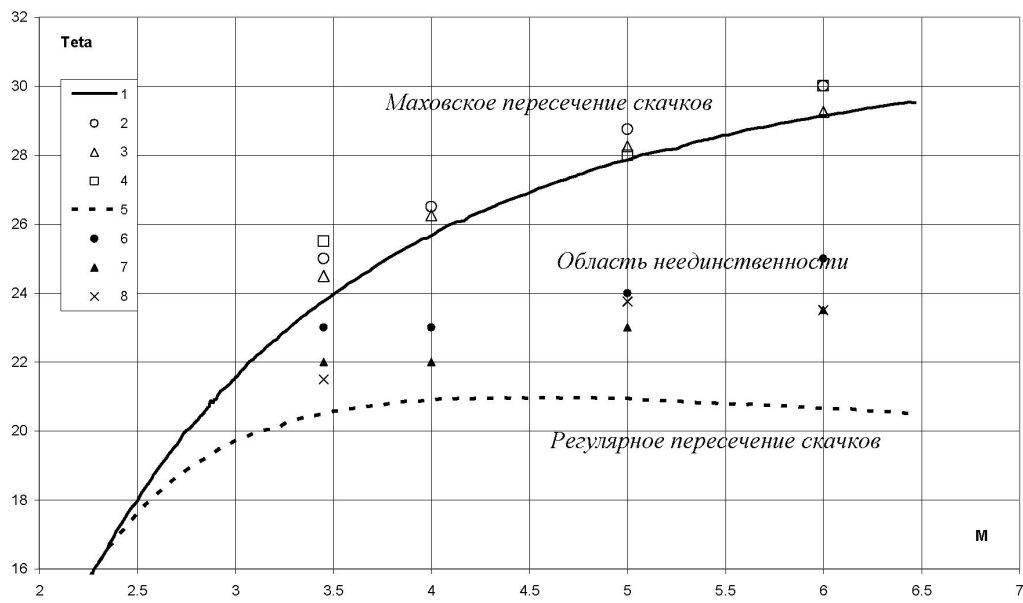


Рис. 16

Гистерезисная кривая перехода между регулярным и маховским режимами в зависимости от угла отклонения потока и числа Маха.

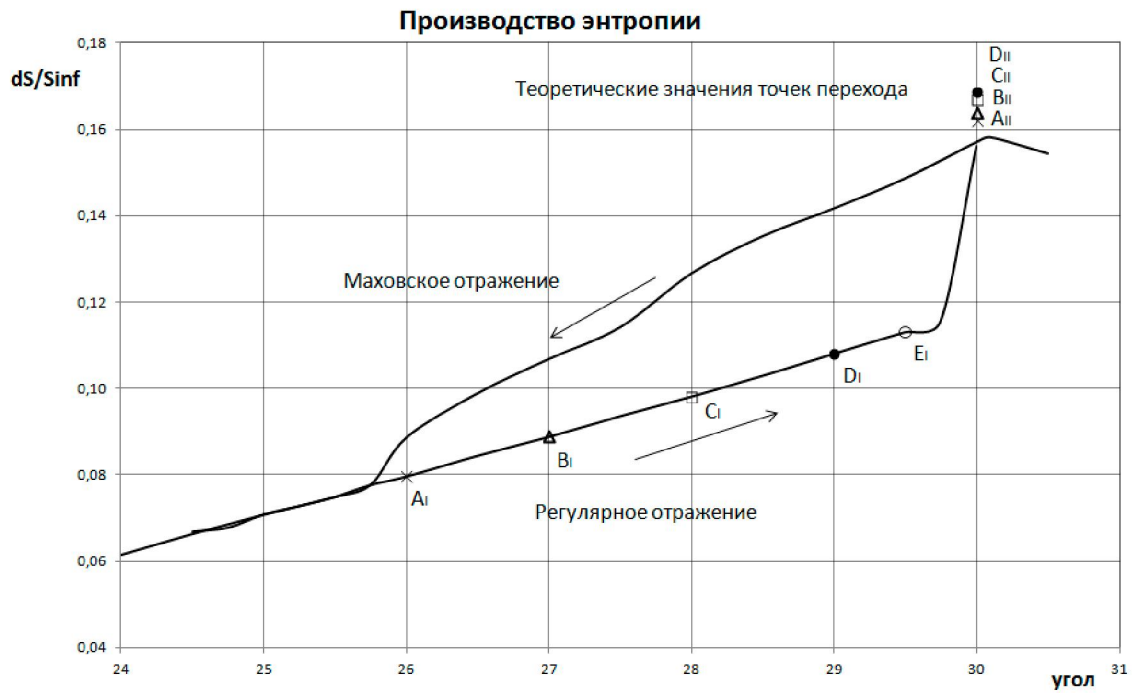


Рис. 17

Гистерезисная кривая перехода между регулярным и маховским режимами в зависимости от угла отклонения потока для числа $M=6$.

Символами A_{II} , B_{II} , C_{II} и D_{II} обозначены теоретически найденные значения точек перехода от регулярного к Маховскому режиму.

Глава 5.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА КОЭФФИЦИЕНТОВ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЕМПФИРОВАНИЯ.

Большинство линейных дифференциальных уравнений, используемых в качестве моделей для описания задач механики, на самом деле являются некоторым приближением нелинейных дифференциальных уравнений. В каких-то случаях такое приближение вполне допустимо и хорошо отражает динамику процесса. Однако достаточно часто возникают ситуации, когда расширение диапазона исследуемых параметров приводит к тому, что линейное приближение перестает адекватно «работать».

Классическим примером механических систем, не подчиняющихся линейному описанию, являются системы, в фазовых портретах которых имеются предельные циклы. Одним из хорошо изученных видов нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих такой класс динамических систем с самовозбуждением, является уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{q} - \varepsilon(1 - q^2)\dot{q} + q = 0.$$

Замена этого уравнения с нелинейным диссипативным членом на линейное: $\ddot{q} - \lambda\dot{q} + q = 0$, приведет к тому, что в качестве решения мы получим либо затухающие (при $\lambda > 0$), либо возрастающие (при $\lambda < 0$) моды колебаний.

Разумеется, наилучшим способом решения задачи исследования колебаний ЛА было бы нахождение (или подбор) такого вида уравнения движения с нелинейными коэффициентами, которое адекватно описывало бы все режимы колебания: для разных чисел Маха, разных амплитуд и так далее. Однако такой подход практически не реализуем, в первую очередь, из-за того, что сам вид нелинейных коэффициентов уравнения движения в общем случае изменяется при изменении режимов колебания, кроме того, в некоторых случаях

существуют несколько возможных режимов колебания в одном и том же диапазоне параметров.

Поэтому, более реалистичным способом решения поставленной задачи представляется исследование отдельных режимов колебания и определение для каждого из них коэффициентов уравнения движения (преимущественно констант), наилучшим образом обеспечивающих соответствие решений этих уравнений с экспериментальными данными. Именно такой подход применяется в аэродинамике.

Процесс колебательного движения летательных аппаратов (ЛА) (в отсутствии изменения вертикальной скорости при движении центра масс) в литературе по аэродинамике [70] принято описывать в виде уравнения движения:

$$\ddot{\alpha} + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right) \frac{qSL^2}{I_z V_\infty} \dot{\alpha} + \omega_0^2 (\alpha - \alpha_{cp.}) = 0,$$

в котором множитель, стоящий при диссипативном члене: $\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)$, называется «комплексом аэродинамических производных демпфирования»,

$m_z^{\bar{\omega}_z} = \partial m_z / \partial \bar{\omega}_z$ - производная демпфирования аэродинамического коэффициента m_z по безразмерной угловой скорости вращения $\bar{\omega}_z = \frac{L}{V_\infty} \omega_z$,

$m_z^{\bar{\alpha}} = \partial m_z / \partial \bar{\alpha}$ - производная демпфирования аэродинамического коэффициента m_z по безразмерной угловой скорости изменения угла атаки

$\bar{\alpha} = \frac{L}{V_\infty} \dot{\alpha}$, $q = \rho V_\infty^2 / 2$ - скоростной напор; V_∞ , ρ - скорость и плотность набегающего потока; S , L - характерные площадь и длина ЛА;

$\omega_0 = \sqrt{-m_z^\alpha qSL / I_z}$ - собственная частота колебаний ЛА; I_z - момент инерции ЛА относительно оси OZ связанной системы координат с началом в центре

масс; α - угол атаки набегающего потока, α_{cp} - значение балансирующего угла, относительно которого совершаются колебания ЛА. Параметры: $m_z^{\bar{\omega}_z}$ и $m_z^{\bar{\alpha}}$, могут являться функциями угла атаки α .

Метод определения комплекса аэродинамических производных демпфирования $(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}})$ в численных или физических экспериментах заключается в определении степени затухания колебания тела при осреднении по одному или нескольким периодам (или амплитудам) колебаний. Таким образом, по сути, комплекс аэродинамических производных демпфирования является коэффициентом диссипации, осредненным по периоду или амплитуде и должен быть записан в виде: $(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle)$, а уравнение движения представлено в виде линейного соотношения:

$$\ddot{\alpha} + \left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle \right) \frac{qSL^2}{I_z V_\infty} \dot{\alpha} + \omega_0^2 (\alpha - \alpha_{cp}) = 0. \quad (5.1)$$

Здесь $\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle = \langle \partial m_z / \partial \bar{\omega}_z \rangle = const$ и $\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle = \langle \partial m_z / \partial \bar{\alpha} \rangle = const$ - производные демпфирования, осредненные по амплитуде колебания.

При записи уравнения (5.1) подразумевается, что существует однозначное соответствие между значением комплекса аэродинамических производных демпфирования и степенью затухания колебательного процесса: большее (по модулю) значение комплекса аэродинамических производных демпфирования описывает колебательный процесс с более сильным затуханием – демпфированием, и наоборот. Кроме того, в литературе встречается определение коэффициента $m_z^{\bar{\omega}_z}$, выраженного через “ширину” гистерезиса, из которого следует, что в случае отсутствия гистерезисного характера колебания этот коэффициент равен нулю. В экспериментах же можно наблюдать при приблизительно одинаковых аэродинамических производных демпфирования совершенно разный характер колебательного движения ЛА и по степени

затухания и по вероятности возникновения гистерезисной зависимости аэродинамических характеристик.

Все эти разногласия возникают из-за перехода к линейной модели уравнения движения при описании нелинейного процесса колебания ЛА.

В настоящей работе (см. также [64]) предпринята попытка разрешить это противоречие. В частности, показано, что, отсутствие гистерезисного характера колебания ЛА не влечет, автоматически отсутствия диссипативного члена в уравнении (5.1). К тому же гистерезисный характер колебания ЛА может приводить к ослаблению демпфирования.

Кроме того, при невыполнении условия для моментной характеристики: $m_z^\alpha = const$, значение демпфирующего коэффициента $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle \right)$ является ненулевым при гармоническом (без демпфирования) характере колебаний ЛА по углу атаки набегающего потока, и поэтому при построении линеаризованной модели нелинейного процесса колебания ЛА в ограниченном диапазоне параметров, уравнение (5.1) должно быть изменено. Остановимся на этом подробнее.

Как уже было сказано выше, ненулевая константа, стоящая в качестве множителя в уравнении движения в диссипативном члене, свидетельствует либо о наличии демпфирования (затухания), либо о наличии антидемпфирования (раскачки) колебания, в зависимости от знака коэффициента диссипации. Гармонические колебания описываются уравнением движения в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 (\alpha - \alpha_{cp.}) = 0.$$

Покажем, какой вид приобретает комплекс аэродинамических производных демпфирования в случае гармонического характера колебания тела, чтобы понять является ли уравнение (5.1) соотношением, правильно описывающим процесс колебания. Если коэффициент диссипации в уравнении

движения - комплекс $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle\right)$ - окажется ненулевым при гармоническом колебании, то уравнение (5.1) не является корректным для описания гармонического колебания, а, следовательно, не является корректным и в общем случае произвольного колебания тела.

Будем рассматривать колебания ЛА в плоскости угла атаки набегающего потока. Учитывая, что

$$m_z = \frac{I_z}{qSL} \ddot{\alpha}, \quad (5.2)$$

запишем:

$$m_z^{\bar{\alpha}} = \frac{I_z}{qSL} \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \bar{\alpha}}. \quad (5.3)$$

Для гармонического колебания тела, можно записать зависимость $\alpha(t)$ в виде:

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \text{где } \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (5.4)$$

Следовательно,

$$\dot{\alpha} = \frac{\pi}{T} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \pm \omega_0 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}, \quad \text{где } \omega_0 = 2\pi/T. \quad (5.5)$$

Переходя к новой координате: $\delta\alpha = \alpha - \alpha_{cp.} = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ (где $\alpha_{cp.} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$), получим:

$$\dot{\alpha} = \pm \omega_0 \sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}, \quad \text{где } \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \delta\alpha = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$$

или

$$\bar{\alpha} = \pm \omega_0 \frac{L}{V_\infty} \sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}. \quad (5.6)$$

Используя уравнения (5.5) и (5.4), можно записать:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\omega_0^2}{2} \Delta\alpha \cos(\omega_0 t) = \omega_0^2 \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \alpha \right) = -\omega_0^2 \delta\alpha. \quad (5.7)$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{d\ddot{\alpha}/d(\delta\alpha)}{d\dot{\alpha}/d(\delta\alpha)} = \frac{V_\infty}{L} \frac{\omega_0^2}{\omega_0 \delta\alpha / \sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}} = \bar{\omega}_0 \left(\frac{V_\infty}{L} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha} \right)^2 - 1},$$

где $\bar{\omega}_0 = \frac{L}{V_\infty} \omega_0$.

Подставляя это выражение в соотношение (5.3), запишем:

$$\left(m_z^{\ddot{\alpha}}(\delta\alpha) \right)_{harmonic} = \frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3} \bar{\omega}_0 \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha} \right)^2 - 1}. \quad (5.8)$$

Учитывая, что безразмерная частота собственных колебаний равна:

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{-m_z^\alpha qSL^3 / (I_z V_\infty^2)} \quad \text{или} \quad \bar{\omega}_0 = \sqrt{-m_z^{\delta\alpha} qSL^3 / (I_z V_\infty^2)},$$

выражение (5.8) можно переписать в виде:

$$\left(m_z^{\ddot{\alpha}}(\delta\alpha) \right)_{harmonic} = \sqrt{-\frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3} m_z^{\delta\alpha}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha} \right)^2 - 1}.$$

Нетрудно убедиться, что если $m_z^{\delta\alpha} := m_z^\alpha = const$, среднее значение:

$$\left\langle m_z^{\ddot{\alpha}} \right\rangle_{harmonic} = \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2} \left(m_z^{\ddot{\alpha}}(\delta\alpha) \right)_{harmonic} d(\delta\alpha),$$

равно нулю. В этом случае в отсутствие аэродинамического гистерезиса уравнение (5.1) может быть использовано для описания процесса колебания ЛА.

При невыполнении условия $m_z^{\delta\alpha} = const$, а, следовательно, и условия $m_z^\alpha = const$, значение $\left\langle m_z^{\ddot{\alpha}} \right\rangle_{harmonic}$ - ненулевое, несмотря на гармонический характер колебания ЛА.

Для того чтобы коэффициент при диссипативном члене уравнения движения был нулевым в случае гармонического характера колебания ЛА, уравнение (5.1) должно быть переписано в виде:

$$\ddot{\alpha} + \left(\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle \right) - B_{harmonic} \right) \frac{qSL^2}{I_z V_\infty} \dot{\alpha} + \omega_0^2 (\alpha - \alpha_{cp.}) = 0, \quad (5.9)$$

где

$$B_{harmonic} = \langle m_z^{\dot{\alpha}} \rangle_{harmonic} = \sqrt{\frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3}} \frac{1}{\Delta\alpha} \int_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2} \sqrt{-m_z^{\delta\alpha}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha} \right)^2 - 1} d(\delta\alpha). \quad (5.10)$$

Еще одним важным аспектом процесса аэродинамического демпфирования является аэродинамический гистерезис. Необходимость его исследования, в частности, связана с возможностью перехода с одного балансировочного угла летательного аппарата на другой в случае гистерезисного характера зависимости $m_z(\alpha)$.

Наличие или отсутствие гистерезиса в колебательном процессе напрямую не является свидетельством наличия или отсутствия демпфирования (антидемпфирования) в этом процессе. И в том и в другом случае характер колебательного движения может быть как гармоническим, так и затухающим (с раскачкой). С точки зрения рассмотрения уравнения движения это означает, что коэффициент при диссипативном члене в случае гистерезисного характера колебания тела должен быть вновь изменен. Оптимальным решением проблемы был бы подбор нелинейного коэффициента при диссипативном члене, обеспечивающим на фазовой плоскости появление предельного цикла, соответствующего экспериментальным данным исследуемой динамики процесса. Однако, как было уже сказано выше, такой путь представляется довольно сложным, а иногда и практически нереализуемым, в частности, из-за возможности реализации нескольких режимов колебаний в одном и том же диапазоне параметров.

Другим путем поиска решения задачи (рассматриваемым в данной работе и используемым в практической аэродинамике) является моделирование процесса колебания ЛА в терминах линеаризованного дифференциального уравнения в некотором диапазоне режимов колебания. А именно, подбор

коэффициента $B_{harmonic}$ в уравнении (5.9), который должен быть записан с учетом дополнительной производной, характеризующей гистерезисный характер колебаний тела в гармоническом приближении.

В главе 4, была дана классификация гистерезисов и рассмотрены физические и математические особенности гистерезисных явлений двух типов.

Уравнение (5.9) не дает информации о существовании или отсутствии гистерезисной зависимости аэродинамических характеристик (АХ) в колебательном процессе. Рассматривая колебательный процесс только в пространстве (α, t) , невозможно его описать в полной мере, необходимо рассматривать полное фазовое пространство, в котором представлены гистерезисные зависимости.

Гистерезисный вид зависимости $m_z(\alpha)$ второго типа приведет в пространстве (α, t) к нерегулярному изменению амплитуды от времени (“биениям”) из-за нерегулярного “попадания” на разные ветви функции $m_z(\alpha)$, с разными производными $m_z^{\delta\alpha} := m_z^{\alpha}$ даже в процессе гармонического изменения угла $\delta\alpha(t)$ (см. соотношение (5.10)). К такому же эффекту в этом пространстве может приводить нелинейный вид зависимости коэффициента, стоящего в уравнении (5.9) перед параметром $\dot{\alpha}$. Поэтому, переход от пространства большей размерности к описанию зависимости $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) должно сопровождаться появлением нелинейных (возможно стохастических) коэффициентов в уравнении (5.9), стоящих перед $\dot{\alpha}$.

Качественная оценка влияния гистерезисов второго типа на коэффициенты демпфирования может быть проведена, если в соотношении (5.10) в качестве производной $m_z^{\delta\alpha}$ использовать не один параметр, а два или более (в зависимости от количества ветвей разрывной функции). Это позволит оценить диапазон, в котором будут находиться значения коэффициентов

демпфирования в случае реализации гистерезиса второго типа, например, при изменении положения точки отрыва потока.

В тех случаях, когда возможно существование гистерезисной зависимости $m_z(\alpha)$ первого типа, одна и та же зависимость $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) может наблюдаться при разных значениях производной демпфирования, в зависимости от того реализовался гистерезис или нет. В случае существования гистерезиса эта производная будет больше, так как в каждой точке α из интервала $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ изменение частоты колебания ω будет приводить к дополнительному изменению момента m_z , связанному с вариацией ширины гистерезисной области (разностью значений m_z на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой $m_z(\alpha)$). Поэтому для описания зависимости $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) с помощью уравнения (5.9) для процесса с гистерезисом первого типа производную демпфирования для гармонических колебаний $B_{harmonic}$ необходимо заменить на производную демпфирования с учетом гистерезисного коэффициента:

$$B_{harmonic} = \left(\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster} \right)_{harmonic} \quad (5.11)$$

Для квазистационарных гистерезисных функций первого типа в главе 4 найдено соотношение для определения разности значений величин обобщенных аэродинамических характеристик m на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке α для тела, совершающего гармонические колебания с периодом T :

$$\Delta m(\alpha, T) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{T_1}{T} \sqrt{\left| \left(m_{st}(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.sp.} \right) \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_*} \right|} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \right|}. \quad (5.12)$$

Здесь $m_{st}(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_*}$, $dm_{st}(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_*}$ значения стационарной функции $m_{st}(\alpha) = m(\alpha, \dot{\alpha}) \Big|_{\dot{\alpha} \rightarrow 0}$ и ее производной в произвольной точке α_* из диапазонов:

$\alpha_1 \leq \alpha_* < \alpha_{st.cp}$, $\alpha_{st.cp} < \alpha_* \leq \alpha_2$, где α_1 и α_2 - граничные точки гистерезисной области (точки разворота ЛА); $m_{st.cp} = m_{st}(\alpha)|_{\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2}$ - значение стационарной функции в “серединной” точке гистерезисной области. T_1 - период квазистационарных гармонических колебаний тела в бездиссипативном случае, когда вся кинетическая энергия набегающего потока расходуется на компенсацию действия сил трения колеблющегося тела о воздух.

Для достаточно монотонных функций, для которых, с допустимой в расчете точностью, верно равенство:

$$\sqrt{\left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.cp}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_*}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right|,$$

и соотношение (5.12) можно переписать в виде:

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} \left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)} \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} |m_{st}^\alpha| \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}.$$

Здесь m_{st}^α - производная функции $m_{st}(\alpha)$ по переменной α .

Переходя к переменной $\delta\alpha$: $\delta\alpha = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, и полагая, что $T_1/T \approx Lf/V_\infty = St$ - число Струхала, где $T_1 \sim L/V_\infty$, L - характерный размер колеблющегося тела, V_∞ - скорость набегающего потока; $T \sim f^{-1}$, f - частота вихреобразования, запишем полученное выражение в виде:

$$\Delta m(\delta\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} |m_{st}^{\delta\alpha}| \sqrt{((\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2)} St.$$

Здесь $m_{st}^{\delta\alpha} := m_{st}^\alpha$ - производная функции $m_{st}(\delta\alpha)$ по переменной $\delta\alpha$, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ - удвоенная амплитуда колебания.

В точке нулевого отклонения от начального положения: $\delta\alpha : \delta\alpha = 0$, (то есть в “серединной” точке: $\alpha = \alpha_{cp} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$), «ширина» гистерезиса будет равна:

$$\Delta m(\delta\alpha, T)_{\delta\alpha=0} \approx \frac{2}{\sqrt{6}} |m_{st}^{\delta\alpha}| \Delta\alpha \cdot St \approx |m_{st}^{\delta\alpha}| \Delta\alpha \cdot St. \quad (5.13)$$

В случае существования гистерезиса первого типа, дополнительное значение производной демпфирования: $\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster}$ в области $-\Delta\alpha/2 < \delta\alpha < \Delta\alpha/2$ (или $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$), обусловленное разностью значений между верхней и нижней ветвями гистерезисной кривой $m_z(\delta\alpha)$, в линейном приближении можно представить в виде:

$$\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster} \approx -\frac{\langle \Delta m_z(\delta\alpha; \bar{\omega}_z) \rangle - \langle \Delta m_z(\delta\alpha; \bar{\omega}_z(T)) \rangle \Big|_{T \rightarrow \infty}}{\langle \bar{\omega}_z \rangle - \langle \bar{\omega}_z(T) \rangle \Big|_{T \rightarrow \infty}} \approx -\frac{\Delta m_z(\delta\alpha; \bar{\omega}_z)_{\delta\alpha=0} / 2}{\langle \bar{\omega}_z \rangle}. \quad (5.14)$$

Здесь $\Delta m_z(\delta\alpha)_{\delta\alpha=0}$ - «ширина» гистерезиса в точке нулевого отклонения тела от начального положения.

Учитывая соотношение (5.13), выражение (5.14) можно переписать в виде:

$$\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster} \approx -\frac{|m_z^{\delta\alpha}| \Delta\alpha}{2\langle \bar{\omega}_z \rangle} St.$$

Безразмерную угловую скорость можно представить в виде:

$$\langle \bar{\omega}_z \rangle = \frac{L}{V_\infty} \langle \omega_z \rangle = \frac{L}{V_\infty} \frac{\Delta\alpha}{2T} = \frac{\Delta\alpha}{4\pi} \bar{\omega}_0.$$

Учитывая это, запишем:

$$\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster} \approx -2\pi \frac{|m_z^{\delta\alpha}|}{\bar{\omega}_0} St = -2\pi \sqrt{\frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3}} \sqrt{-m_z^{\delta\alpha}} St. \quad (5.15)$$

Таким образом, в случае реализации режима гармонических колебаний ЛА с собственной частотой колебаний ω_0 и гистерезисным видом зависимости $m_z(\delta\alpha)$ первого типа, полная производная демпфирования (см. (5.11)) будет характеризоваться суммой демпфирующих коэффициентов (5.10) и (5.15):

$$B_{harmonic} = \sqrt{\frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3}} \left(\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2} \sqrt{-m_z^{\delta\alpha}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1} d(\delta\alpha) - 2\pi St \sqrt{-m_z^{\delta\alpha}} \right). \quad (5.16)$$

Используя данные вычислительных или физических экспериментов для определения величины производной демпфирования $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle\right)$, а также выражения (5.10), (5.15), (5.16) можно определить возможный характер колебательного движения.

Разработанная методика может помочь оценить возможность появления гистерезиса аэродинамических характеристик первого типа при возникновении колебательного движения летательного аппарата.

А именно, если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования: $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle\right)$, меньше коэффициента демпфирования, полученного для гармонических колебаний в отсутствие гистерезиса: $\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle_{harmonic}$, то возможна реализация процесса антидемпфирования с увеличением амплитуды колебания.

В случае равенства расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования: $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle\right)$ значению $\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle_{harmonic}$, будут реализовываться гармонические колебания.

Если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования: $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle\right)$, меньше суммы коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний: $\left(\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}_{hyster}\right)_{harmonic}$, но при этом больше коэффициента демпфирования, соответствующего гармоническим колебаниям без гистерезиса: $\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle_{harmonic}$, то

модель обладает демпфирующими свойствами на исследуемом режиме, и при этом не проявляются гистерезисные свойства зависимости $m_z(\alpha)$.

Равенство суммы коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний: $\left(\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z} \right)_{harmonic}$ и расчетных (или экспериментальных) $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle \right)$, может характеризовать переход к режиму с потерей демпфирования - автоколебательный характер движения тела с гистерезисной зависимостью функции $m_z(\alpha)$ и собственной частотой колебаний ω_0 .

Если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования превосходит сумму коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний: $\left(\langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z} \right)_{harmonic}$, то можно говорить о том, что модель обладает демпфирующими свойствами на исследуемом режиме. При этом затухающие колебания могут характеризоваться гистерезисными свойствами зависимости $m_z(\alpha)$.

В этой связи, чрезвычайно полезным представляется разработка и внедрение расчетных методов, которые позволят определять комплексы аэродинамических производных демпфирования $\left(\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \rangle + \langle m_z^{\bar{\alpha}} \rangle \right)$ с целью их непосредственного сравнения со значениями коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний с гистерезисной зависимостью и без нее. Анализ этих данных позволит более точно предсказывать поведение ЛА в режиме колебания.

Выводы к главе 5.

В инженерной практике исследования колебательных движений летательных аппаратов широко используются комплексы аэродинамических

производных демпфирования, являющихся коэффициентами при диссипативных членах в линейных уравнениях движения.

Расширение диапазона исследуемых параметров приводит к тому, что линейное приближение описания процесса колебания летательного аппарата перестает адекватно «работать».

В настоящей работе разработана методика, позволяющая характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование метода расширения фазового пространства позволило разработать подходы к исследованию целого ряда нелинейных процессов и систем в задачах механики сплошных сред и аэродинамики.

В качестве дополнительных переменных в задачах использовались масштабный параметр, отклонение стохастической переменной от ее среднего значения, скорость изменения исследуемого аргумента, а также искусственно введенные параметры η , позволяющие произвести “расслоение” пространства переменных на два подпространства.

Методы расширения фазового пространства в рассмотренных задачах позволяют не только упростить подходы к их решению, но и зачастую выявить новые физические сущности и закономерности.

К основным научным результатам, сформулированным в диссертации, относятся следующие:

Разработан метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, являющиеся их характеристиками, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных.

С использованием этого метода теоретически исследованы параметры фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов.

Разработан метод описания физических процессов в односвязных пространствах с дробной размерностью. Метод основан на расширении фазового пространства, используемого при описании аналогичных процессов в целочисленном - евклидовом пространстве с помощью дополнительной переменной, характеризующей масштаб рассматриваемой области фрактального пространства.

С помощью этого метода решена задача распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее

односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее (плохо проводящее) тепло трехмерное пространство: найдено частное решение в случае произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от масштаба рассмотрения системы и общее решение для коэффициента теплопроводности, не зависящего от масштаба рассмотрения системы.

Расширение пространства переменных и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности, позволило получить соотношение, связывающее отклонение случайной величины от средних значений в двух временных точках, а также плотности вероятности этих реализаций для стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

В двух предельных случаях описания стохастических систем: когда небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности, и в случае мартингалов, получены соотношения, характеризующие плотность вероятности реализации случайной величины в заданный момент времени.

Показано, что в определенном интервале значений случайной величины такое решение не единственно. В связи с этим, на основе Центральной Предельной Теоремы Линдберга удается сделать вывод, что появление гауссовских распределений с «тяжелыми» степенными хвостами можно считать следствием возникновения в системе скрытых факторов, влияющих на динамику плотности вероятности: когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности.

Проведен анализ размерности фазового стохастического пространства, на основе которого найдены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

Решена задача распространения акустических возмущений в нелинейной стохастической среде. Показано, что стохастические возмущения могут приводить как к ослаблению акустических пульсаций, так и к их локальному по

времени усилению. На этом примере показана возможность применения разработанного метода при описании гидро-газодинамических стохастических систем.

Представлена модель возникновения «стохастичности» при численном интегрировании автономных дифференциальных уравнений.

Приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений, в соответствии с которой, можно выделить два основных типа: гистерезисные явления, зависящие от скорости изменения аргумента и гистерезисные явления от нее независимые. Выделен тип гистерезисных функций, имеющий «смешанные» черты двух основных типов.

Предложены теоретические методы описания аэродинамических гистерезисных функций первого и второго типов. Оба метода являются замкнутыми в рамках только расчетно-теоретических моделей.

Метод описания аэродинамических гистерезисных функций первого типа позволяет определять разность значений функции на верхней и нижней ветвях.

Метод описания аэродинамических гистерезисных функций второго типа позволяет решать задачу определения энергии затрачиваемой или выделяемой при переходе между двумя стационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

Разработана методика, позволяющая характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: «Мир», 1993.
3. Pieronero, L. (1987). "The Fractal Structure of the Universe: Correlations of Galaxies and Clusters". *Physica A* (144): 257.
4. Gefter A 2007 Is the Universe a Fractal? *New Scientist* 9 March.
5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая — Ижевск: «РХД», 2001.
6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.
7. Мандельброт Бенуа, Ричард Л. Хадсон (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = *The Misbehavior of Markets* — М.: «Вильямс», 2006. — С. 400
8. Хатунцева О.Н. Метод математического моделирования функций в областях скачкообразных изменений параметров. – // *Аэродинамика*/ Под ред. Р.Н. Мирошина. – СПб.: “ВВМ”. 2004 – 287 с.
9. Хатунцева О.Н. Операторный подход к описанию разрывных функций. Методы моделирования диссипативных и гистерезисных явлений. М., журнал «Математическое моделирование» N8, 2005, с. 111-120.
10. Федер Е. Фракталы. М. Мир, 1991. С.34.
11. Балханов В.К. Введение в теорию фрактального исчисления. - Улан-Удэ.: Изд. Бурятского гос. ун-та, 2001, 58 с.
12. Носков М.Д., Малиновский А.С., Закк М., Шваб А.И. Моделирование роста дендритов и частичных разрядов в эпоксидной смоле // *ЖТФ*, 2002, том 72, вып. 2, с. 121-128.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С.282.

14. Сагтаров Р.М., Нагиев Ф.Б., Мамедов Р.М. Процессы теплопереноса в реологически сложных жидкостях с фрактальной структурой// Минский международный форум, ММФ-96 "Тепломассообмен". Минск 1996. т.VI, С. 198-205.
15. Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды// Успехи физических наук. 1993. т.163, №12. С.1-48.
16. Hentschel H.G.E., Procaccia I. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. Phys. Rev., 1983. A27, 1266-1269.
17. Хатунцева О.Н Особенности описания физических процессов во фрактальных системах. "Сибирский журнал вычислительной математики" Т13, N1, 2010 г., стр.101-109.
18. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких "пальцев" и росте дендритов. М., "Сибирский журнал вычислительной математики" N2, 2009 г. стр.231-241.
19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
20. Бойко А. В., Горев В. Н., Козлов В. В. Переход к турбулентности в пограничных слоях: успехи и перспективы. Вестник НГУ. Серия Физика. 2006. Т.1, выпуск 2.
21. Литвиненко М.В., Козлов В.В., Козлов Г.В., Грек Г.Р. Влияние продольных полосчатых структур на процесс турбулизации круглой струи. Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, N3.
22. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М., "Наука", 1969, 824 с.
23. Гриценко А.В., Мыслицкая Н.А., Иванов А.М., Самусев И.Г. Исследование пограничного слоя ламинарного потока жидкости в гладкой

трубе методом фотокорреляционной спектроскопии. Известия КГТУ N15 2009 г.

24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С.282.

25. Chorin A. Numerical study of slightly viscous flow. J.F.M. v.57, №4, 1973.

26. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. Петров А.С. Применение теории к решению уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости.// «Обозрение прикладной и промышленной математики», 2005, т.12, в. 2, с. 253-264.

27. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527с.

28. Анищенко В.С., Вадисова Т.Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статическое описание колебательных систем. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2005.-156 с.

29. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. “Статистика случайных процессов”, Наука, М., 1974.

30. Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы, Мир, 1984.

31. Ito K. Stochastic Differential Equations, Memoirs of the American Math. Soc. 4 (1951).

32. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы, Наука, 1985, 1990.

33. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных. Журнал “Ученые записки ЦАГИ” №1 2011 г., с. 62-85.

34. Харин Ю.С., Зуев Н.М. Теория вероятностей. Учебное пособие. Мн.: БГУ, 2004. -199 с.

35. Букенгем М. Шумы в электронных приборах и системах. Пер. с англ. -

М.: Мир, 1986.-399 с.

36. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: ФИЗМАЛИТ, 2008. 368 с.

37. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: «Наука», 1974. 711 с.

38. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: «Наука», 1978. 736 с.

39. И.М. Соболев, Численные методы Монте-Карло, М., Физматлит, 1973

40. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M.N., Teller A. H., Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. J. Chem. Phys . 2 1, 1087–1092, 1953.

41. Green P. J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. Biometrika 82, 711–732, 1995.

42. Петров К.П. Аэродинамика тел простейших форм. – М., “Факториал”, 1998, 432 с.

43. Хатунцева О.Н. Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях СА “Союз” на гиперзвуковом участке спуска. “Сибирский журнал прикладной механики и технической физики ” Т.52, N4, 2011 с. 52-62.

44. Хатунцева О.Н. Классификация гистерезисных функций. Теоретические модели и методы описания. Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-02-29-001.pdf 1.

45. Любимов А.Н., Тюмнев Н.М., Хут Г.И. Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. – М., “Наука”, 1995, 397 с.

46. Решетин А.Г. Аэродинамический гистерезис при обтекании спускаемого аппарата космического корабля "Союз" гиперзвуковым вязким потоком. Результаты натурных испытаний. - Космонавтика и ракетостроение, 2000, N19, 150 с.

47. Довгаль А.В., Сорокин А.М. Взаимодействие колебаний больших и малых масштабов при отрыве ламинарного пограничного слоя.// ЖПМТФ, 2004 г., Т.45, №4.
48. Боголюбов Н.Н. Избранные труды по статистической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1979.
49. Шелест А.В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. – М.: Наука, 1990. -159 с.
50. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.V. Статистическая физика. - М.: Наука, 1976. С.583.
51. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. ТМФ, 1992, 90:3, 354-368.
52. Бейбалаев В.Д. Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой. Диссертация к.ф.-м.н., Таганрог, 2009г., С. 132.
53. Хатунцева О.Н. Теоретический подход к построению возможных гистерезисных кривых в различных областях физики, в частности, в аэродинамике. - Космонавтика и ракетостроение, 2002, N 2 (27), стр.57-66.
54. M.S. Ivanov, D. Vandromme, V.M. Fomin, A.N. Kudryavtsev, A. Hadjadj, D.V. Khotyanovsky, Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results, Shock Waves (2001) 11: 199–207
55. Li H, Ben-Dor G. Application of the principle of minimum entropy production to shock wave reflections—I. Steady flows. J Appl Phys 1996;80(4):2027–37
56. В. Эбелинг, Образование структур при необратимых процессах, М. Ижевск, 2004
57. Sun M., Katayama K., An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations, JCP, v. 189, pp. 305-329, 2003

58. Алексеев А.К. О переходе между регулярным и Маховским режимами взаимодействия ударных волн под действием возмущения температуры. Известия РАН, сер. Механика жидкости и газа, N 5, 2012, С. 95-101.

59. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение. Журнал «Успехи физических наук». Т.164 №8 1994 г. стр. 811-844.

60. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса. Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf

61. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости // М. «Физмалит», 2005, 288 с.

62. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика // М., «Наука», Часть 1, 1965, 640 с.; Часть 2, 1967, 720 с.

63. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, 1994 №6, 14–26

64. Дядькин А.А., Хатунцева О.Н. Метод определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования. Теплофизика и аэродинамика. 2014 г. Т.21, №5, стр. 607-616.

65. Хатунцева О.Н. Метод описания процессов теплопроводности во фрактальных системах с использованием масштабной переменной. “Сибирский журнал вычислительной математики” Т18, N1, 2015 г., стр.95-105.

66. Хатунцева О.Н. О возможности оценки энергетических затрат, обусловленных гистерезисным видом зависимостей аэродинамических характеристик, при совершении колебательных движений летательными аппаратами. Известия РАН. Энергетика. 2014 г., №5, стр.111-121.

67. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Журнал естественных и технических наук. 2017 № 11, стр. 255-258.
68. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>
69. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96567>
70. Липницкий Ю.М., Красильников А.В., Покровский А.Н., Шманенков В.Н. Нестационарная аэродинамика баллистического полета. М.: Физматлит, 2003. 174 с
71. Хатунцева О.Н. Описание процессов теплопереноса в фрактальных структурах// Минский международный форум, ММФ-2000 "Тепломассообмен". Минск 2000. т. III, С. 173-176.
72. Хатунцева О.Н. Математическая модель физических процессов в кровеносных системах и других фрактальных структурах.// Тезисы докладов III Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. 2000 г.
73. Хатунцева О.Н. Определение зависимости функции распределения размеров фрактальных структур типа вязких "пальцев". Тезисы докладов XLII научной конференции МФТИ. 1999 г.
74. Хатунцева О.Н. Математическое описание физических процессов, протекающих с необратимым по времени изменением масштабов во фрактальных структурах. Тезисы докладов XLII научной конференции МФТИ. 1999 г.
75. Хатунцева О.Н. Определение зависимости функции распределения размеров фрактальных структур типа вязких пальцев. Тезисы докладов XV

научно-технической конференции молодых ученых и специалистов РКК “Энергия” им. С.П.Королева. 1999 г.

76. Хатунцева О.Н. Математическая оценка ширины гистерезисных кривых в различных физических процессах. Тезисы докладов XI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2001 г. Стр. 327-329.

77. Хатунцева О.Н. Возможные критерии вырождения гистерезисных функций. Тезисы докладов IV Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. 2002 г. Стр.420-421.

78. Хатунцева О.Н. Математическое моделирование разрывных гистерезисных функций. Тезисы докладов II Международной научно-технической конференции молодых ученых и специалистов «Современные проблемы аэрокосмической науки и техники».

79. Хатунцева О.Н. Исследование тонов Короткова с позиции фрактальности кровеносной системы. Тезисы докладов XII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2003 г. Стр. 630-631.

80. Хатунцева О.Н. К вопросу о разрывных гистерезисных функциях. Тезисы докладов XII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2003 г. Стр. 631-634.

81. Хатунцева О.Н. Теоретическое описание пограничных слоев в трубах для ламинарных, турбулентных и переходных режимов с использованием модели разрывных функций. Тезисы докладов XIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2005 г.

82. Khatuntseva O.N. Mathematical model for estimation of parameters of disturbances that stabilize unstable processes. Conference EUCASS. Moscau. 2005.

83. Хатунцева О.Н Описание нестационарных процессов в односвязных фрактальных структурах с помощью метода расщепления переменных" Тезисы докладов VI Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения" Казань. 2005 г.

84. Хатунцева О.Н Метод моделирования переходных процессов, описываемых разрывными функциями, с помощью дисперсионного соотношения в гильбертовом пространстве. Тезисы докладов VI Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения" Казань. 2005 г.

85. Хатунцева О.Н Определение характеристик устойчивого движения плоского вихря в приближении метода разрывных функций. Тезисы докладов VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. С. Петербург. 2006 г.

86. Хатунцева О.Н Определение соотношений параметров, характеризующих физические фрактальные объекты. Тезисы докладов VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. С. Петербург. 2006 г.

87. Хатунцева О.Н Определение параметров, характеризующих устойчивое движение плоского вихря, с помощью метода описания разрывных функций. Тезисы докладов Международной конференции "Тихонов и современная математика" Москва 2006 г.

88. Хатунцева О.Н Метод описания физических явлений при одновременной зависимости их от детерминированных и марковских процессов. Тезисы докладов XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2007 г.

89. Хатунцева О.Н Разработка метода теоретического определения размерности физических фрактальных объектов. Тезисы докладов XV

Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2007 г.

90. Хатунцева О.Н., Алексеев А.К., Михалин В.А. Применение сеточно-характеристического метода к решению сопряженных уравнений. Тезисы докладов XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2007 г.

91. Хатунцева О.Н. Аналитическое определение размерности фрактального объекта в задаче о вытеснении жидкости с образованием вязких “пальцев”. Тезисы докладов Седьмой международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 5-14 июня 2007 г.

92. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности фрактальной структуры вязких “пальцев”. Тезисы докладов VII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Алушта. 2008г.

93. Хатунцева О.Н. Описание динамики стохастических процессов с использованием разрывных функций. Тезисы докладов VII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Алушта. 2008г.

94. Хатунцева О.Н. Построение математической модели динамики марковских процессов с использованием разрывных функций. Тезисы докладов VIII международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2008 г.

95. Хатунцева О.Н. Учет масштабной инвариантности при описании физических процессов во фрактальных структурах. Тезисы докладов IX международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2009 г.

96. Дядькин А.А., Хатунцева О.Н. Построение математической модели описания гистерезисов аэродинамических сил и моментов. Тезисы докладов IX международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2009 г.

97. Хатунцева О.Н. К вопросу об устойчивости стохастических систем. Тезисы докладов XVI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам 2009 г.

98. Хатунцева О.Н. Построение модели образования односвязных фрактальных объектов в задачах о росте дендритов и развитие структур типа вязких “пальцев”. Тезисы докладов Международной научной конференции “Современные проблемы вычислительной математики и математической физики” Москва, 16-18 июня 2009г.

99. Хатунцева О.Н. Операторный метод определения параметров течения жидкости в переходных режимах. Тезисы докладов X международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2010 г.

100. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса. Сборник докладов 4-ой Всероссийской школы-семинара "Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем". 8-9 декабря 2010 г. Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва

101. Хатунцева О.Н.. Метод учета изменения плотности вероятности случайных величин в стохастических процессах. XXII Научно-техническая конференция по аэродинамике. 3-4 марта 2011 г. пос. Володарского, Московская область.

102. Хатунцева О.Н. О возможности описания турбулентности, как стохастического процесса, без использования дробных дифференциалов по времени. Тезисы докладов XX Международной конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. 5-11 февраля 2012 г. Звенигород.

103. Хатунцева О. Н. Особенности и методы математического моделирования гистерезисных функций первого и второго типов. XIX Всероссийской конференции “Теоретические основы и конструирование

численных алгоритмов для решения задач математической физики”, посвященной памяти К.И. Бабенко. Новороссийск 2012г.

104. Хатунцева О. Н. О возможности описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений для систем, не имеющих выделенных состояний равновесия. VI Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова. Новороссийск 2012г.

105. Хатунцева О.Н. О возможности нахождения логарифмического профиля скорости течения жидкости в трубе кругового сечения на основе стохастической модели турбулентности. Тезисы докладов XXI Международной конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. 25 февраля -4 марта 2014 г. Звенигород.

106. Хатунцева О.Н. Описание процесса теплопроводности в односвязной фрактальной системе с помощью метода расширения фазового пространства с использованием масштабной переменной. Тезисы докладов XXI Международной конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. 25 февраля -4 марта 2014 г. Звенигород.

107. Хатунцева О.Н. Что необходимо учитывать при описании процессов теплопроводности в пространствах, обладающих фрактальной структурой. Тезисы докладов XV международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2015 г.

108. Хатунцева О.Н. Методы расширения фазового пространства при решении нелинейных задач. Фракталы. Стохастические процессы. Гистерезисы. 2011. Издательство “LAP LAMBERN Academic Publishing & Co.KG” (Германия). ISBN: 978-3-8465-9707-1.

109. Хатунцева О.Н. О возможности описания турбулентности с помощью уравнений Навье-Стокса с модифицированными левыми частями – полными производными по времени. Тезисы докладов XXII Международной

конференции “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. 2016 г. Звенигород.

110. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания. Успехи физ. наук. 1986. Т. 150, N 2. С. 221 - 256.

111. Turcotte D.L. Fractals and chaos in geology and geophysics. Cambridge University Press, 1992.

112. Павельев А.А., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Федосеев С.Г. О нижнем критическом числе Рейнольдса для течения в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. 2003 г., №4 С.35-43.

113. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ., 1955. 519 с.

114. Хатунцева О.Н. О природе вычислительного хаоса при интегрировании уравнений Навье-Стокса методом прямого численного моделирования. Тезисы докладов XVI международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2016 г.

115. Хатунцева О.Н. О возможности описания особенностей динамики Вселенной с позиции фрактальной структуры без использования понятий «темная энергия» и «темная материя». Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", посвященная памяти К.И.Бабенко. 2016 г.

116. Хатунцева О.Н. Об учете изменения энтропии стохастических возмущений в уравнениях Навье-Стокса при описании турбулентности. Тезисы докладов XX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017) 24-31 мая 2017 г. Алушта, Крым.

117. Хатунцева О.Н. К вопросу о существовании альтернативы использования понятий «темная материя» и «темная материя» при описании аномальных эффектов динамики объектов Вселенной. Тезисы докладов XVII международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2017 г.

118. Хатунцева О.Н. О возможности теоретического описания турбулентного режима течения жидкости и определения критического числа Рейнольдса в трубе кругового сечения. Тезисы докладов XVII международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2017 г.

119. Хатунцева О.Н. О возможной неединственности плотности вероятности реализации случайной величины в стохастических процессах. XXVI Сессия совета РАН по нелинейной динамике. Москва. 2017.

120. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения «тяжелых хвостов» распределений в стохастических процессах. Тезисы докладов XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018) 24-31 мая 2018 г. Алушта, Крым.

121. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения неединственности плотности вероятности реализации случайной величины в стохастических процессах. Тезисы докладов XVIII международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2018 г.

122. Хатунцева О.Н. О возможности описания турбулентного профиля скорости течения несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта на основе уравнений Навье-Стокса, записанных с учетом производства энтропии. Тезисы докладов XVIII международной школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. Евпатория 2018 г.

123. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми»

степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>

124. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>

125. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>