

УДК 519.218.8, 621.376.2

Оценка циклической спектральной плотности мощности инфокоммуникационных сигналов

Ефимов Е.Н.*, Шевгунов Т.Я.**, Кузнецов Ю.В.***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

*e-mail: omegatype@gmail.com

**e-mail: shevgunov@gmail.com

***e-mail: kuznetsov@mai-trt.ru

Аннотация

В работе предложен блочный алгоритм усреднения циклических периодограмм для формирования при помощи временного сглаживания оценок циклической спектральной плотности мощности (ЦСПМ) сигналов, обрабатываемых в бортовых вычислительных комплексах летательных аппаратов. Исследованы особенности формирования матрицы оценок ЦСПМ, исключающей пропуски по циклической частоте за счёт учета формы и эффективной ширины элементов разрешения, заполняющих область носителя ЦСПМ. Так же в работе дано теоретическое описание предложенного алгоритма и приведены результаты имитационного численного моделирования, демонстрирующие его работу на примере смеси амплитудно-модулированных сигналов, в которых в качестве информационных модулирующих компонент используются стационарные случайные процессы. Анализ полученных с использованием предложенного алгоритма циклических характеристик позволил определить количество сигналов в

смеси, значения соответствующих им несущих частот, получить отдельно периодограммы каждого из процессов, а также сделать вывод о статистической независимости процессов.

Ключевые слова: циклостационарность, циклическая спектральная плотность мощности, непараметрические методы оценивания, периодограмма, спектрально-корреляционный анализ, периодически коррелированные сигналы

1. Введение

Характерной особенностью большинства сигналов, обрабатываемых в современных радиоэлектронных устройствах, бортовых вычислительных устройствах летательных аппаратов (ЛА), модульных бортовых телекоммуникационных комплексах и системах цифровой обработки данных (ЦОС), применяемых в беспилотных летательных аппаратах (БПЛА), является присущая им регулярная структурная повторяемость. При этом описание свойств таких сигналов с использованием спектральных методов анализа, основанных на модели периодического сигнала с переменными во времени параметрами, зачастую оказывается невозможным по причине того, что модулирующие информационные сигналы являются случайными. С другой стороны, применение сравнительно простых и хорошо исследованных методов обработки, на основе моделей из теории стационарных случайных процессов, приводит к меньшей точности оценки параметров вследствие того, что структурная периодичность такими моделями не учитывается. Для описания сигналов такого класса может быть использован

перспективный подход на основе теории циклостационарных случайных процессов [1, 2], которая активно развивается за рубежом на протяжении нескольких десятилетий, но при этом всё ещё остаётся малоизвестной среди отечественных исследователей. Получение практического результата при использовании моделей циклостационарных процессов потребует синтеза на её основе ряда методов и алгоритмов, позволяющих проводить оценивание параметров анализируемых сигналов [3]. При этом сигналы, обрабатываемые в современных инфокоммуникационных и радиолокационных системах [4, 5, 6], системах радиомониторинга [7], обработки акустических и биологических сигналов и ряде других систем [8], во многих случаях могут быть рассмотрены как реализации циклостационарных случайных процессов. Наибольшее число результатов было получено при исследовании циклостационарных в широком смысле процессов.

Процесс называют циклостационарным в широком смысле, если для него выполняются условия циклостационарности первого и второго порядка. Циклостационарность первого порядка состоит в периодическом повторении одномерной плотности вероятности случайного процесса, при этом математическое ожидание случайного сигнала является периодической функцией времени:

$$m_X(t) = m_X(t + T), m_X(t) = E[X(t)]. \quad (1)$$

Циклостационарность второго порядка проявляется в том случае, если периодической функцией оказывается двумерная плотность вероятности. В этом случае двумерная корреляционная функция, зависящая от текущего момента времени t и расстояния между моментами наблюдениями τ , является периодической функцией текущего времени:

$$R_x(t, \tau) = R_x(t + T, \tau), R_x(t, \tau) = E[X(t + 0,5\tau)X^*(t - 0,5\tau)]. \quad (2)$$

Циклостационарностью в широком смысле обладает ряд применяемых на практике сигналов, например, радиосигналы с квадратурной амплитудной модуляцией, фазо- и частотно-модулированные сигналы в системах связи, кодирующие битовые последовательности видеоимпульсы, пачки радиоимпульсов с периодически меняющимися параметрами. Такие сигналы могут быть описаны с использованием циклостационарных характеристик: циклической автокорреляционной функций (ЦАКФ) во временной области и циклической спектральной плотности мощности (ЦСПМ) – в частотной. Получение циклостационарных характеристик на основе вероятностных моделей случайных процессов с использованием усреднения по ансамблю, представлены, например, в [9]. На практике приходится иметь дело с конечными по длительности временными реализациями случайных процессов [10], для которых необходимо использовать алгоритмы цифровой обработки, решающие задачу оценки циклостационарных характеристик по измеренным отсчётам сигнала [11, 12].

При оценке циклостационарных спектральных характеристик накопление можно осуществлять во временной или в частотной области [13]. Наиболее интересными с практической точки являются алгоритмы с временным усреднением, являющиеся обобщением хорошо известного исследователям метода усредненных периодограмм Уэлча. Так, сечение ЦСПМ на нулевой циклической частоте является периодограммой Уэлча в её общепринятом смысле [14]. Такой подход открывает возможность интерпретации оцененных ЦСПМ по аналогии с тем, как

рассматриваются оценки ЦСПМ, используемые для описания свойств реализаций стационарных процессов [15, 16].

2. Методы оценки при помощи временного усреднения

Метод оценки ЦСПМ по реализации конечной длительности аналогового сигнала $x(t)$ при помощи временного усреднения [13] состоит в формировании функции двух переменных (частоты f и циклической частоты α) на основе разбиения наблюдаемой реализации на K в общем случае перекрывающихся интервалов длительности T каждый:

$$\hat{S}_x(f, \alpha) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} X_T \left(t_k, f + \frac{\alpha}{2} \right) X_T^* \left(t_k, f - \frac{\alpha}{2} \right), \quad (3)$$

где через t_k обозначены моменты времени начала каждого интервала сигнала, символ «*» обозначает комплексное сопряжение. Текущие спектры $X_T(t_k, f)$ вычисляются с помощью оконных преобразований Фурье от сигналов в каждом из фрагментов:

$$X_T(t_k, f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_k}^{t_k+T} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt. \quad (4)$$

На практике в качестве исходных данных для нахождения оценок ЦСПМ исследователям и инженерам приходится использовать последовательность отсчетов цифрового сигнала $x[n]$ конечной длительности N , полученную при равномерной дискретизации с периодом T_s сигнала $x(t)$ на интервале наблюдения общей протяженностью $T_x = NT_s$. В работе [17] показано, что для цифрового сигнала $x[n]$ в качестве носителя ЦСПМ достаточно рассмотреть область двухчастотной плоскости, ограниченную условием:

$$|\alpha| + 2|f| \leq F_s, \quad (5)$$

где $F_s = 1/T_s$ – частота дискретизации.

При использовании методов цифровой обработки сигналов, естественным подходом является вычисление оценок ЦСПМ на прямоугольной сетке узлов – центров элементов разрешения [19], покрывающей двухчастотную плоскость полностью. Равномерные шаги сетки вдоль координатных осей f и α , обозначаемых соответственно δf и $\delta \alpha$, необходимо выбирать в общем случае различными в силу того, что первый обратно пропорционален длительности фрагмента T , а второй – полной длительности наблюдаемого сигнала T_x . Тогда получаемым отсчётам оценки ЦСПМ для пары номеров l и m будут сопоставлены значения оценки ЦСПМ (3), вычисленные в соответствующих узлах сетки:

$$\hat{S}[m, l] = \hat{S}(m\delta f, l\delta \alpha).$$

Для полного представления оценки ЦСПМ в области её носителя, с учетом ограничения (5), достаточно вычислить её значения в точках двухчастотной области, соответствующих парам (l, m) , удовлетворяющих условию:

$$\delta \alpha |l| + 2\delta f |m| \leq F_s. \quad (6)$$

Высокая производительность алгоритма вычисления оценки ЦСПМ на основе метода усреднения во временной области может быть достигнута реализацией двух предложений: применением алгоритма БПФ всюду, где это возможно при вычислении отсчётов спектра, и использованием при вычислении отсчёта $\hat{S}[m, l]$ минимально возможного числа отсчётов спектра, найденных с помощью прямого БПФ от фрагментов сигнала. Однако в силу того, что ширина элемента разрешения

$\Delta\alpha$ вдоль оси циклических частот существенно меньше ширины элемента разрешения Δf вдоль оси частот, формирование оценок ЦСПМ сопровождается трудностью, состоящая в недостатке отсчётов спектра, необходимых для их попарного умножения. Одно из возможных решений этой проблемы обеспечивает алгоритм, представленный в настоящей работе.

Необходимо отметить, что непосредственным способом предотвращения пропусков по циклической частоте является применение спектральной интерполяции [18], направленной на увеличение числа отсчётов в спектре каждого фрагмента до $2N$, как это предложено в [19] в виде алгоритма $2N$ -БПФ. Однако в этом случае увеличение числа отсчетов в выборочных матрицах на этапе выполнения алгоритма приводит к увеличению требуемой вычислительной мощности и значительному росту объема оперативной памяти, требуемой для хранения матриц промежуточных вычислений. Также следует заметить, что в результате применения алгоритма $2N$ -БПФ будет получена оценка ЦСПМ в виде матрицы размерностью $2N \times 2N$, что делает затруднительной её последующую визуализацию в виде двумерного изображения для поиска характерных компонент.

3. Блочный алгоритм вычисления усреднённых циклических периодограмм

Для одновременного снижения объема требуемых вычислительных ресурсов и получения матрицы, графическое представление которой пригодно для визуального анализа, авторами был разработан блочный алгоритм вычисления усреднённых циклических периодограмм (БАУЦП). Алгоритм построен в результате проведения модификации основного метода оценки ЦС характеристик во временной

области [13], обеспечивающей сохранение одинакового размера элементов разрешения на всей области оценки характеристики. Предлагаемый алгоритм может быть использован как для полного анализа частотных корреляционных характеристик, так и для проведения более подробного (с меньшим шагом) анализа характеристик в выбранной полосе циклических частот. Последнее позволяет существенно сократить время полной оценки за счёт двухэтапного алгоритма поиска характерных циклических частот сигнала. Так на первом этапе проводится грубая оценка с шагом, допускающим визуальный анализ результирующей матрицы. На втором этапе выполняется точное определение каждой из характерных циклических частот сигнала за счёт поиска с малым шагом в окрестности значения циклической частоты, полученной на этапе грубой оценки.

Блочный алгоритм вычисления усреднённых циклических периодограмм определяет функцию $\tilde{S}_x(f, \alpha)$, представляющую собой интегральную характеристику, которая получается следующей модификацией выражения (3):

$$\tilde{S}_x(f, \alpha) = \frac{1}{H} \sum_{h=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left| \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} X_T \left(t_k, f + \frac{(\alpha + h\delta\alpha)}{2} \right) X_T^* \left(t_k, f - \frac{(\alpha + h\delta\alpha)}{2} \right) \right|, \quad (7)$$

где H – количество дополнительных точек в окрестности заданной циклической частоты, по которым производится усреднение, $\delta\alpha$ – шаг по оси циклической частоты, а $X_T(t_k, \alpha + h\delta\alpha)$ – текущие спектры, вычисляемые на основе фрагментов сигналов, наблюдаемых на каждом из подынтервалов согласно выражению (4).

Таким образом, значение предложенной интегральной характеристики $\tilde{S}_x(f, \alpha)$ при некоторой заданной циклической частоте представляет собой сумму модулей

значений ЦСПМ сигнала в окрестности выбранного значения циклической частоты. Для того, чтобы исключить пропуск по α , шаг сетки по циклической частоте $\delta\alpha$ выбирается, по аналогии с методом $2N$ -БФП, равным ширине элемента разрешения $\Delta\alpha$. При значении параметра $H = 0$ выражение (7) упрощается до выражения (3), фактически соответствуя определению ЦСПМ, как оно дано в [20].

При переходе к W отсчётам ($T_x = WT_s$) цифрового сигнала $x[n] = x(nT_s)$, следующих равномерно с интервалом равным периоду дискретизации T_s , практический смысл имеет использование для вычисления (4) дискретного преобразования Фурье (ДПФ), реализуемого на практике посредством вычислительно эффективных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), в которых количество отсчётов является степенью числа 2. В этом случае длина подынтервала T выбирается кратной периоду дискретизации: $T = NT_s$; заметим, что при таком выборе оказывается возможным непосредственное вычисление отсчётов спектра только на частотах кратных $1/T$. В силу того, что протяженности элемента разрешения оценки ЦСПМ по локальной частоте Δf и по циклической частоте $\Delta\alpha$ значительно различаются, без проведения дополнительной обработки оказывается невозможным плотно покрыть область носителя вдоль измерения «циклическая частота» элементами разрешения, значения ЦСПМ в центрах которых вычисляются непосредственно на основе отсчётов спектра в k -ой спектрограмме, определяемой с использованием БПФ:

$$X_T(t_k, f_m) = X_k[m] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=kR}^{kR+N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} mn\right),$$

где $f_m = m/T$ – частота m -ой комплексной гармоники.

Для определения отсчётов спектрограммы X_T на частотах $f + (\alpha + h\delta\alpha)/2$, не являющихся кратными $1/T$, нами предлагается использовать предварительное (выполняемое перед вычислением БПФ) преобразование сигнала $x[n]$, состоящее в смещении его спектра на требуемую величину $(\alpha + h\delta\alpha)/2$, не находящуюся (как было замечено выше) в общем случае, в кратном соотношении с $1/T$. Такое преобразование удобно выполнить над сигналом $x[n]$ во временной области путем получения двух цифровых сигналов:

$$\begin{aligned} u[n] &= x[n] \exp(-j\pi(\alpha + h\delta\alpha)nT_s), \\ v[n] &= x[n] \exp(+j\pi(\alpha + h\delta\alpha)nT_s). \end{aligned} \quad (8)$$

Спектры этих сигналов, $U[m]$ и $V[m]$ соответственно, будут представлять собой смещенные на заданную величину $\alpha + h\delta\alpha$ версии спектра $X[m]$:

$$\begin{aligned} U[f, \alpha, h] &= X \left[f + \frac{\alpha + h\delta\alpha}{2} \right], \\ V[f, \alpha, h] &= X \left[f - \frac{\alpha + h\delta\alpha}{2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{S}_x(f, \alpha) = \tilde{S}_x \left(\frac{m}{T}, \alpha \right) = \tilde{S}_x[m, b] = \frac{1}{H} \sum_{m=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K U_T[k, m, b, h] V_T^*[k, m, b, h] \quad (10)$$

где α также изменяется с дискретным шагом перестройки $2F_s/N_\alpha$ и может быть выражена с использованием целого индекса b при переходе к дискретной версии оценки: $\alpha = 2F_s b/N_\alpha$.

При реализации цифровой обработки сигналов предложенный блочный алгоритм вычисления усреднённых циклических периодограмм представляет ЦСПМ в виде агрегированной (aggregated) матрицы согласно выражению (10). При этом

оказывается возможным рассмотрение частотного поддиапазона эффективной ширины ΔF_α с некоторой центральной частотой f_c . Так, рассмотрение всей области носителя циклической характеристики советуется параметрам $f_c = 0$ и $\Delta F_\alpha = 2F_s$. При заданном количестве отсчетов N , определяемом на практике параметрами эксперимента, размерность такой матрицы задается параметрами W и N_α . При этом параметр H выбирается таким, чтобы учесть в выражении (7) значения ЦСПМ в центрах всех элементов разрешения по циклической частоте:

$$H = \frac{\Delta F_\alpha}{N_\alpha \delta\alpha},$$

где параметр ΔF_α в свою очередь корректируется так, чтобы обеспечить целое значение H . Таким образом, низкая размерность результирующей матрицы при больших значениях N достигается за счет увеличения параметра усреднения H .

4. Пример использования

Рассмотрим в качестве примера для блочного алгоритма вычисления усреднённых циклических периодограмм сигнал $s(t)$, соответствующий следующей модели:

$$s(t) = \sum_{i=1}^I s_i(t),$$

в которой слагаемые $s_i(t)$ определены следующим образом:

$$s_i(t) = a_i w_i(t) * h_i(t) \cos(2\pi f_i t + \phi_i),$$

где a_i – амплитуда i -ого сигнала, w_i – независимый случайный гауссовский процесс, h_i – импульсная характеристика идеального ФНЧ с граничной частотой $f_{\max,i}$, f_i –

несущая частота, φ_i – начальная фаза. В рассматриваемом примере количество сигналов $I = 2$, параметры сигналов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры тестовых сигналов

	a_i мВ	$f_{\max,i}$, МГц	f_i , МГц	φ_i , рад
$s_1(t)$	1.0	1.4	3.5	0
$s_2(t)$	1.0	1.0	5.0	$\pi/2$

На рис. 1 (а, б) приведены периодограммы Уэлча для сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ отдельно и для сигнала $s(t)$ соответственно. Следует отметить, что такие параметры, как полоса, занимаемая компонентами сигнала $s(t)$ в частотной области, и несущие частоты компонент подобраны так, чтобы обеспечить значительное перекрытие. Период дискретизации $T_s = 62$ нс, что соответствует частоте дискретизации $F_s = 15.971$ МГц.

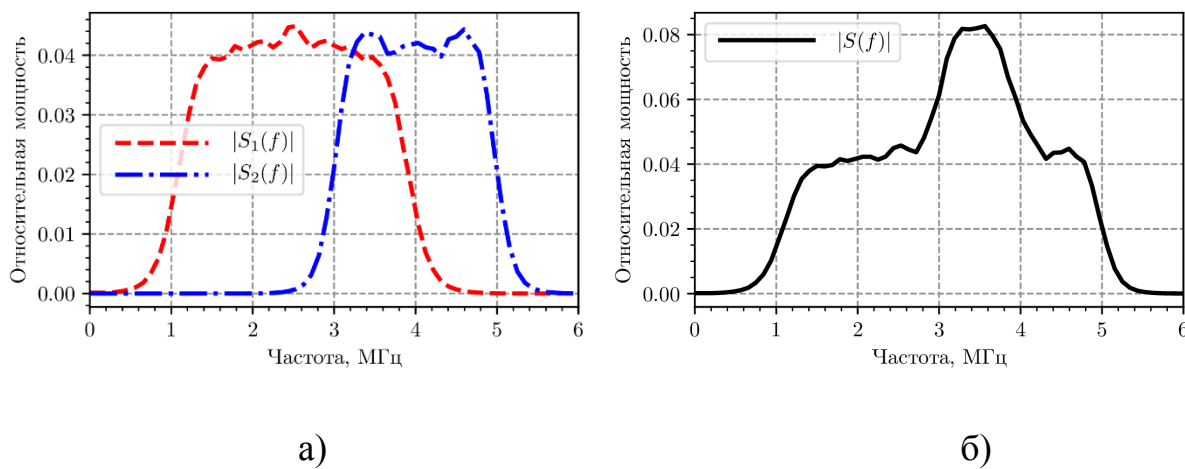


Рис. 1. Периодограммы Уэлча: а) компонентов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ отдельно, б) смеси сигналов $s(t)$

Оценим собственные циклические характеристики сигнала $s(t)$ при помощи предложенного блочного алгоритма вычисления усреднённых циклических периодограмм. На рис. 2 полностью показана область носителя ЦСПМ, что соответствует параметрам алгоритма $f_c = 0$ и $\Delta F_\alpha = 2F_s$, количество поддиапазонов

по циклической частоте $N_\alpha = 1024$. На рисунке явно наблюдается область, представляющая особый интерес при $\alpha \neq 0$. Более подробно эта область отображена на рис. 3, что соответствует параметрам алгоритма $f_c = 8.5$ МГц и $\Delta F_\alpha = 6$ МГц, $N_\alpha = 1024$.

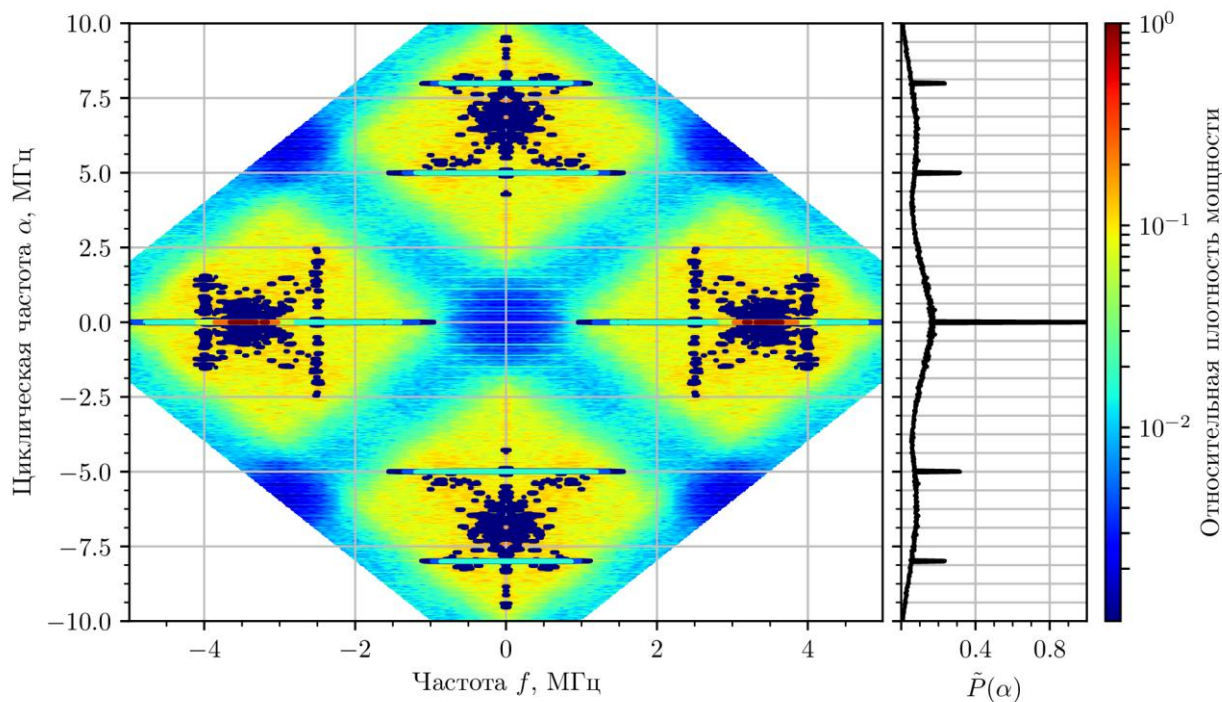


Рис. 2. Модуль ЦСПМ сигнала $s(t)$

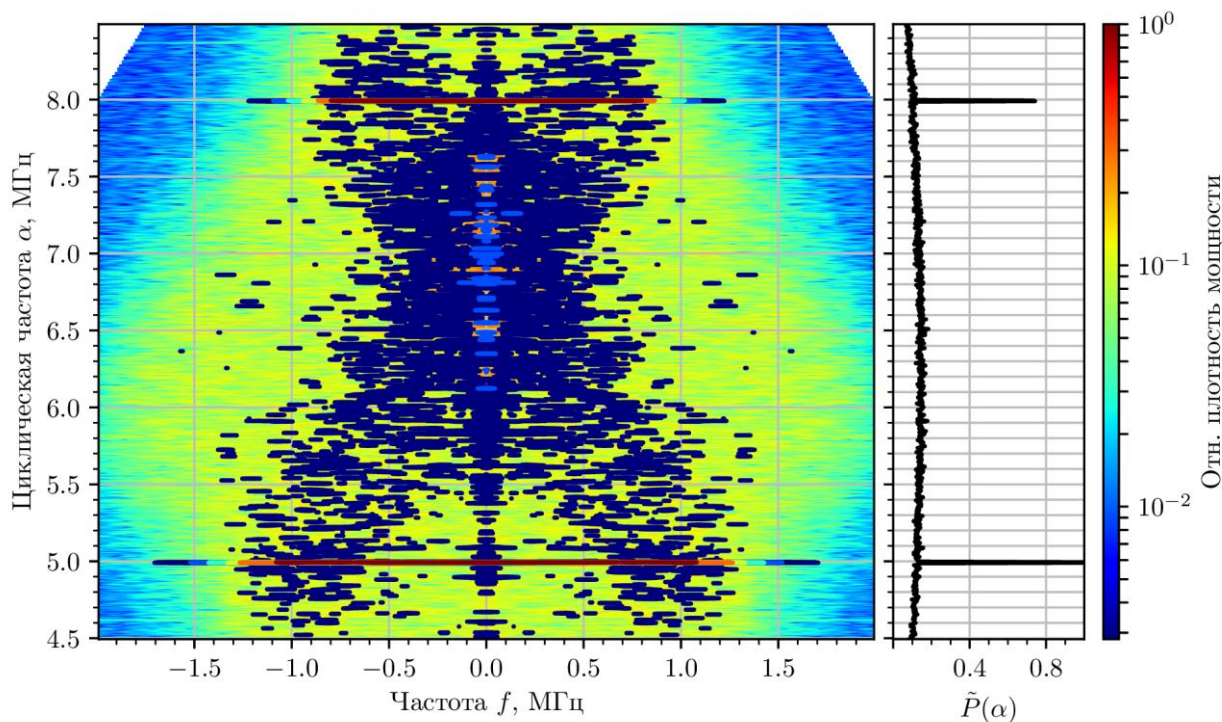


Рис. 3. Модуль участка ЦСПМ сигнала $s(t)$ в окрестности характерных циклических частот

Анализ модуля ЦСПМ на рис. 3 выявляет две характерные циклические частоты, соответствующие пикам интегральной характеристики $\tilde{P}(\alpha)$: $\hat{\alpha}_1 = 10$ МГц и $\hat{\alpha}_2 = 7$ МГц. Из теоретического описания циклостационарных сигналов с амплитудной модуляцией известно, что данные характерные частоты представляют собой удвоенные несущие частоты. Данный вывод соответствует исходным положениям:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= 2f_1 = 7 \text{ МГц}; \\ \hat{\alpha}_2 &= 2f_2 = 10 \text{ МГц}.\end{aligned}$$

Сечения ЦСПМ на данных характерных циклических частотах показаны на рис. 4. Следует отметить, что форма сечений соответствует периодограммам Уэлча, полученным отдельно для каждой из компонент и показанным на рис. 1 (а). Таким образом, анализ циклических характеристик с использованием предложенного алгоритма позволил определить количество сигналов в смеси, значения соответствующих им несущих частот, получить отдельно периодограммы процессов, а также сделать вывод о статистической независимости процессов, поскольку отсутствуют компоненты на комбинационных частотах.

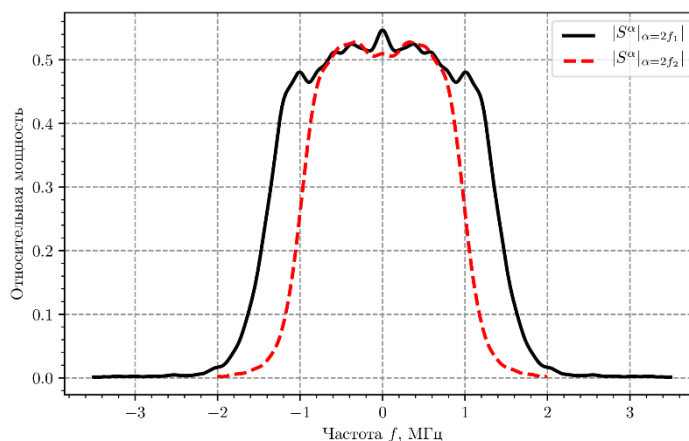


Рис. 4. Модули сечений ЦСПМ сигнала $s(t)$ при характерных частотах $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$

Заключение

Предложенный в работе блочный алгоритм усреднения циклических периодограмм для формирования оценки циклической спектральной плотности мощности при помощи метода временного усреднения учитывает особенности формирования оценок на двухчастотной плоскости, в частности, форму и эффективные ширины элементов разрешения, заполняющих область носителя ЦСПМ, позволяя исключить пропуски по циклической частоте. Приведенное в работе теоретическое описание алгоритма показало возможность снижения для больших значений N требуемых вычислительных ресурсов и получения матрицы, графическое представление которой пригодно для визуального анализа, по сравнению с существующим алгоритмом $2N$ -БПФ, являющимся одним из алгоритмов, применяющими спектральную интерполяцию при помощи БПФ для исключения пропусков по циклической частоте. Продемонстрированный в работе пример применения предложенного алгоритма для сигнала в виде смеси амплитудно-модулированных сигналов, в которых в качестве информационных сигналов используются стационарные случайные процессы, позволил показать

селективные возможности, открываемые исследователям при использовании свойства циклостационарности. Несмотря на то, что в рассмотренном примере слагаемые сигналы полностью перекрывались во времени и в значительной мере перекрывались в пространстве частоты, визуальный и инструментальный анализ ЦСПМ, оценка которой была получена при помощи предложенного алгоритма, позволили сделать выводы о том, что наблюдаемый сигнал представляет смесь двух независимых случайных процессов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № 8.8502.2017/БЧ), а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-08-08951 «а» и № 16-37-00395 «мол_а»

Библиографический список

1. Franks L.E. Signal Theory. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1969, 318 p.
2. Gardner W.A., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a century of research // Signal Processing, 2006, vol. 86, no. 4. pp. 639 – 697.
3. Roberts R.S., Brown W. A., Loomis H.H. Computationally efficient algorithms for cyclic spectral analysis // IEEE Signal Processing Magazine, 1991, vol. 8, no. 3, pp. 38 – 49.
4. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Формирование оценки направления прихода сигнала с использованием искусственных нейронных сетей // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58786>

5. Ефимов Е.Н., Шевгунов Т.Я. Идентификация точечных рассеивателей радиолокационных изображений с использованием нейронных сетей радиально-базисных функций // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41959>
6. Булыгин М.Л., Муллов К.Д. Формирователь зондирующего сигнала для радиолокатора с синтезированной апертурой // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=57040>
7. Antoni J., Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 2009, no. 23, pp. 987 - 1036.
8. Мартиросов В.Е., Алексеев Г.А. Квазикогерентный модулятор сигнала QPSK // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=57051>
9. Ефимов Е. Н., Шевгунов Т. Я. Циклостационарные модели радиосигналов с квадратурной амплитудной модуляцией // Электросвязь. 2016. № 11. С. 65 - 71.
10. Анциперов В.Е. Оценивание характера последствия случайных точечных процессов методами многомасштабного корреляционного анализа // Журнал радиоэлектроники. 2015. № 6. С. 12.
11. E. Karami, O. A. Dobre and N. Adnani, Identification of GSM and LTE signals using their second-order cyclostationarity // 2015 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC) Proceedings, Pisa, 2015, pp. 1108 - 1112.
12. E. Karami, O. A. Dobre, Identification of SM-OFDM and AL-OFDM Signals Based on Their Second-Order Cyclostationarity // IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2015, vol. 64, no. 3, pp. 942-953.

13. Gardner W., Measurement of spectral correlation // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, vol. 34, no. 5, pp. 1111 – 1123.
14. Welch P. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms // IEEE Transactions on Audio and Electromagnetics, 1967, vol. 15, no. 2, pp. 70 - 73.
15. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В., Случайные процессы. Примеры и задачи. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. Учебное пособие. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2012. – 400 с.
16. Шахтарин Б.И., Сизых В.В., Булатов А.В. Обнаружение сигналов неизвестной интенсивности в гауссовском шуме с неизвестной дисперсией (алгоритм с обучением) // Научный вестник Московского Государственного Технического Университета Гражданской Авиации. 2005. № 93. С. 36 - 44.
17. Gardner W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, IEEE Press, 1994, 504 p.
18. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
19. Шевгунов Т.Я., Ефимов Е.Н., Жуков Д.М., Алгоритм 2N-БПФ для оценки циклической спектральной плотности мощности // Электросвязь (ISSN 0013-5771). 2017. № 6. С. 50 – 57.
20. Gardner W.A. Statistical Spectral Analysis – A Nonprobabilistic Theory, Prentice Hall, 1988, 566 p.