Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 534.1

DOI: 10.34759/trd-2021-121-05

МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Татьяна Витальевна Гришанина[1✉], Евгения Егоровна Гусева[2]

[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

[1]t.grishanina@mai.ru✉

[2]evgenia-kesha@mail.ru

Аннотация. Представлен новый подход для составления уравнений колебаний упругих конструкций, имеющих циклически симметричную структуру. Упругие элементы конструкции, работающие на растяжение, кручение и изгиб, соединенные между собой, рассматриваются как конечные элементы. Перемещения и углы поворотов в узлах, которые расположены симметрично относительно центральной оси конструкции, выражаются через шесть обобщенных координат узла. Для такого представления используются тригонометрические функции ортогональные на дискретном множестве равноотстоящих точек. Таким образом, уравнения колебания распадаются на отдельные группы уравнений, имеющих размерность шестого порядка.

Ключевые слова: циклически симметричные системы, стержневые системы, антенна, уравнения колебаний, несвязанные уравнения

Для цитирования: Гришанина Т.В., Гусева Е.Е. Метод расчета упругих колебаний циклически симметричной конструкции // Труды МАИ. 2021. № 121 DOI: 10.34759/trd-2021-121-05

METHOD FOR CALCULATING ELASTIC VIBRATIONS OF A CYCLICALLY SYMMETRIC STRUCTURE

Tatiana V. Grishanina[1✉], Evgeniia E. Guseva[2]

[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[1]t.grishanina@mai.ru✉

[2]evgenia-kesha@mail.ru

Abstract. The article presents a new approach to the oscillation equations composing of elastic structures with cyclically symmetric structure. A cyclically symmetric elastic system is under consideration. At the $k = 0, 1, 2, ..., N - 1$ nodes of the system, located on a circle at equidistant points with angular coordinates of θ_k, the identic elastic rods of constant cross-section are being connected, working in tension-compression, torsion and bending-shear in and out of the plane of the system. To compose the oscillations equations of the system, both displacement and rotation angles components, symmetrical with respect to the radial plane passing through the k-th node, are being represented as cosine

expansions in the circumferential direction, while skew symmetric ones are represented as sine expansions with wave numbers of $n = 0, 1, 2, \ldots, N/2$.

Expressions of potential and kinetic energies for all elements of the system are being composed. With account for the cos $n\theta_k$ and sin $n\theta_k$ functions orthogonality conditions for different n on a system of equidistant points, the terms of these expressions for different n from the set of $n = 0, 1, 2, ..., \leq N/2$ are being obtained uncoupled among themselves. As the result, the Lagrange equations in generalized coordinates for a cyclically symmetric system with $6N$ degrees of freedom disintegrate into separate groups of six equations for each number n being accounted for.

Thus, the solution of the problem of a cyclically symmetric system oscillations of ерy $6N$ order is being reduced to solving a number of problems for uncoupled subsystems of equations of the sixth order, representing separately harmonics $n = 0, 1, 2, ..., \leq N/2$.

Keywords: cyclically symmetric systems, rod systems, antenna, oscillation equations, uncoupled equations

For citation: Grishanina T.V., Guseva E.E. Method for calculating elastic vibrations of a cyclically symmetric structure. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: 10.34759/trd-2021-121-05

Введение

Антенна является одним из основных элементов бортового радиокомплекса космического аппарата, предназначенного для обеспечения связи с наземными и другими объектами. Космические аппараты обычно оснащены малыми антеннами, которые, как правило, имеют монолитную структуру. Большие антенны, которые развертываются непосредственно в космосе, представляют собой стержневую систему, на которые натягивается отражающая пленка [1-9]. Схема такой антенны, вынесенной на трехгранной штанге стержневой конструкции, приведена на рис. 1.

В настоящее время составные конструкции разворачивающихся антенн рассчитывают, используя программные комплексы, основанные на методе конечных элементов [10-12]. Для расчета конструкций, имеющих регулярную структуру, можно использовать редуцированные модели с использованием условий цикличности [13, 14], а также – условий ортогональности синусов и косинусов на дискретном множестве равноотстоящих точек [15, 16].

Расчетная модель циклических систем

Рассмотрим метод расчета колебаний циклически симметричных систем, представляющих конструкцию развертывающейся антенны. Данная конструкция состоит из следующих основных элементов (см. рис. 2): 1 – рама из упругих стержней (в развернутом состоянии стержни в местах соединения друг с другом (узлах) жестко фиксируются, образуя правильный многоугольник); 2 – центральная стойка, расположенная в центре рамы, перпендикулярно её плоскости; 3 – растяжки, связывающие узлы рамы с крайними точками стойки; 4 – пленочные элементы, расположенные в плоскости рамы.

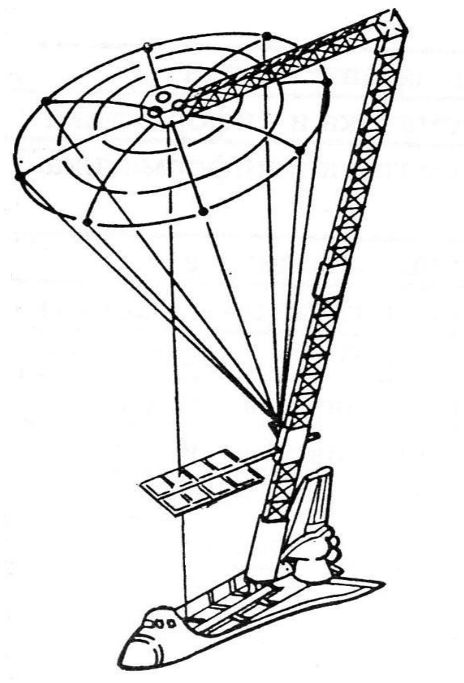


Рис. 1. Схема антенны

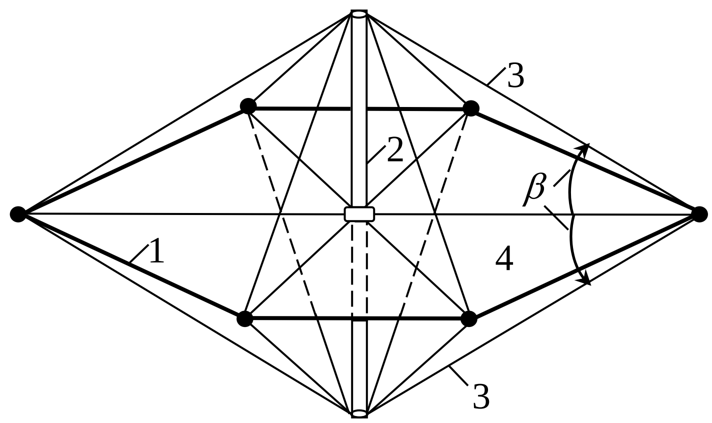
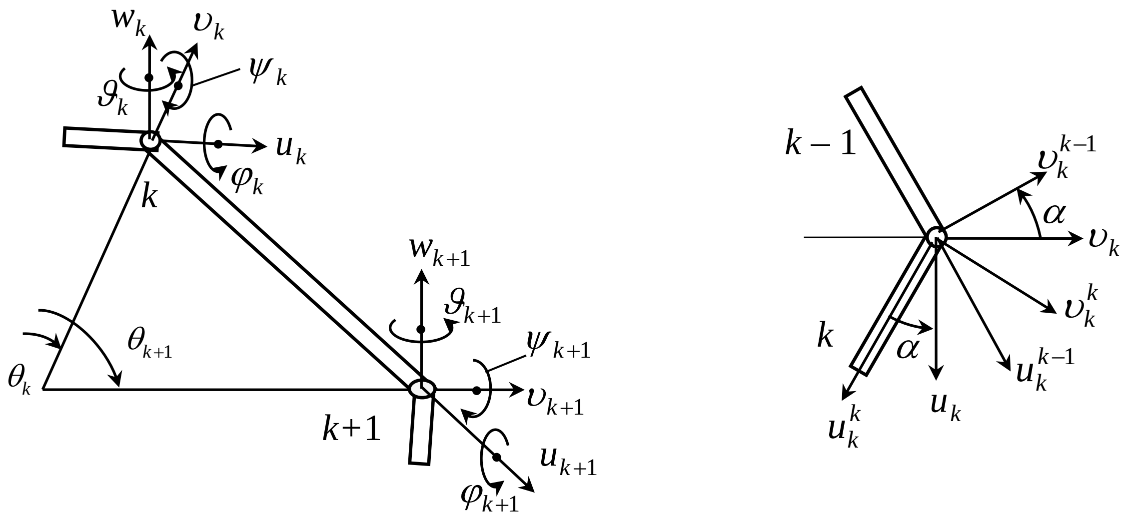


Рис. 2. Циклически симметричная конструкция

Каждый узел такой антенны при пространственных колебаниях имеет шесть степеней свободы, представляющих перемещения в трех ортогональных направлениях и поворотам относительно осей, совпадающих с этими направлениями. Если система имеет N узлов, то общее число степеней свободы (без учета растяжек и стойки) будет равно $6N$. Ортогональность функций $\sin n\theta_k$ и $\cos n\theta_k$ на дискретном множестве N равностоящих точек при n =0, 1, …, $\leq N/2$ [16] позволяет выразить перемещения и углы поворота в узлах через эти функции. Тогда для циклически симметричной системы из уравнений Лагранжа при $0 \leq n \leq N/2$ получим шесть уравнений, определяющих свободные колебания этой системы, для каждого n. Коэффициенты жесткостей и масс элементов можно получить из выражений потенциальной и кинетической энергии системы, записанных в обобщенных координатах.



а) б)

Рис. 3 Перемещения в узлах рамы

Перемещения и углы поворота узлов целесообразно рассматривать относительно двух систем координат: системы, связанной непосредственно со стержнем; системы, связанной с центром симметрии.

Рассмотрим k-ый стержень рамы, соединяющий узлы k и $k + 1$, (рис. 3). Его положение определяется углом θ_k, который отсчитывается от плоскости симметрии:

$$\theta_k = \theta_0 + 2k\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{N} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1); \quad \theta_0 = 0.$$

Кинематические условия сопряжения в k-ом узле:

$$\begin{aligned} &\upsilon_k^k = u_k \sin\alpha + \upsilon_k \cos\alpha, \quad \psi_k^k = \psi_k \cos\alpha + \varphi_k \sin\alpha, \quad \varphi_k^k = \varphi_k \cos\alpha - \psi_k \sin\alpha, \\ &u_k^k = u_k \cos\alpha - \upsilon_k \sin\alpha, \quad w_k^k = w_k, \quad \vartheta_k^k = \vartheta_k. \end{aligned} \tag{1}$$

В (k+1)-ом узле:

$$\begin{aligned} &\upsilon_{k+1}^k = \upsilon_{k+1} \cos\alpha - u_{k+1} \sin\alpha, \quad \psi_{k+1}^k = \psi_{k+1} \cos\alpha - \varphi_{k+1} \sin\alpha, \\ &\varphi_{k+1}^k = \varphi_{k+1} \cos\alpha + \psi_{k+1} \sin\alpha, \quad u_{k+1}^k = u_{k+1} \cos\alpha + \upsilon_{k+1} \sin\alpha, \quad w_{k+1}^k = w_{k+1}, \quad \vartheta_{k+1}^k = \vartheta_{k+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ортогональность функций $\sin n\theta_k$ и $\cos n\theta_k$ при $0 \le n \le \dfrac{N}{2}$ на дискретном множестве N равностоящих θ_k точек позволяет принять:

$$\begin{aligned} &\upsilon_k = q_1 \cos n\theta_k, \quad \varphi_k = q_2 \cos n\theta_k, \quad w_k = q_3 \cos n\theta_k, \\ &\psi_k = q_4 \sin n\theta_k, \quad u_k = q_5 \sin n\theta_k, \quad \vartheta_k = q_6 \sin n\theta_k, \end{aligned} \tag{3}$$

где $q_i = q_i(t)$ (i = 1, 2, …, 6) – обобщенные координаты в узле k = 0.

Далее ограничимся рассмотрением случая когда $1 \le n \le \dfrac{N}{2}$.

Потенциальная энергия рамы равна сумме потенциальных энергий её элементов, которые состоят из энергии растяжения, энергии кручения и энергии изгиба-сдвига стержня в двух плоскостях [1, 17, 18]. Поперечные сечения стержней в пределах их длин будем считать постоянными.

1) Растяжение

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\frac{EF}{l}\sum_{k=0}^{N-1}(u_{k+1}^k - u_k^k)^2, \tag{4}$$

где E – модуль упругости, F – площадь поперечного сечения стержня, l – длина стержня.

Используя выражения (1) и (2) с учетом (3) выражение (4) преобразуется к виду:

$$\Pi_1 = \frac{EF}{l}\sum_{k=0}^{N-1}(A\cos n\theta_k + B\sin n\theta_k)^2.$$

Здесь $A = 2\cos n\alpha(q_5 \cos\alpha \sin n\alpha + q_1 \sin\alpha \cos n\alpha)$,

$B = -2\sin n\alpha(q_5 \cos\alpha \sin n\alpha + q_1 \sin\alpha \cos n\alpha)$.

Функции $\sin n\theta_k$ и $\cos n\theta_k$ ортогональны при различных n = 0, 1, 2, … $\le N/2$.

Кроме того, выполняются условия

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin^2 n\theta_k = \frac{N}{2}, \quad \sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 n\theta_k = \frac{N}{2}, \quad \sum_{k=0}^{N-1}\sin n\theta_k \cos n\theta_k = 0.$$

Таким образом: $\mathit{П}_1 = \frac{1}{2}\frac{EF}{l}\frac{N}{2}(A^2 + B^2)$

или

$$\mathit{П}_1 = \frac{1}{2}\frac{EF}{l}\frac{N}{2}4(q_5\cos\alpha\sin n\alpha + q_1\sin\alpha\cos n\alpha)^2 \tag{5}$$

2) <u>Кручение</u>

$$\mathit{П}_2 = \frac{1}{2}\frac{GJ_{\text{кр}}}{l}\sum_{k=0}^{N-1}(\varphi_{k+1}^k - \varphi_k^k)^2, \tag{6}$$

где $GJ_{\text{кр}}$ – крутильная жесткость стержня.

После аналогичных преобразований координат выражение (6) принимает вид:

$$\mathit{П}_2 = \frac{1}{2}\frac{GJ_{\text{кр}}}{l}\frac{N}{2}4(q_2\cos\alpha\sin n\alpha - q_4\sin\alpha\cos n\alpha)^2 \tag{7}$$

3) <u>Изгиб-сдвиг в плоскости рамы</u> [17, 19]

$$\mathit{П}_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(b_3(\upsilon_{k+1}^k - \upsilon_k^k)^2 - 2c_3(\upsilon_{k+1}^k - \upsilon_k^k)(\vartheta_{k+1}^k + \vartheta_k^k) + d_3(\vartheta_{k+1}^k - \vartheta_k^k)^2 + 2c_3 l\vartheta_{k+1}^k\vartheta_k^k) \tag{8}$$

где

$$b_3 = 12EI\frac{\kappa}{l^3}; \quad c_3 = 6EI\frac{\kappa}{l^2}; \quad d_3 = EI\frac{1+3\kappa}{l}; \quad \kappa = \left(1 + \frac{12}{l^2}\frac{EI}{GF_{\text{с}}}\right)^{-1};$$

параметры EI, $GF_{\text{с}}$ определяются в плоскости рамы.

После перехода к центральным координатам, с учетом ортогональности получим следующее выражение для потенциальной энергии изгиба в плоскости рамы:

$$\begin{aligned}
&\Pi_3=\frac{1}{2}\frac{N}{2}\cdot 4[b_3(q_5\sin\alpha\cos n\alpha+q_1\cos\alpha\sin n\alpha)^2+\\
&+c_3(q_5\sin\alpha\cos n\alpha+q_1\cos\alpha\sin n\alpha)q_6\cos n\alpha+\\
&+d_3q_6^2\sin^2 n\alpha+\frac{1}{2}c_3lq_6^2(\cos^2 n\alpha-\sin^2 n\alpha)].
\end{aligned} \tag{9}$$

4) <u>Изгиб-сдвиг из плоскости рамы</u>

Аналогично (8) получаем:

$$\Pi_4=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(b_4(w_{k+1}^k-w_k^k)^2+2c_4(w_{k+1}^k-w_k^k)(\psi_{k+1}^k+\psi_k^k)+d_4(\psi_{k+1}^k-\psi_k^k)^2+2c_4l\psi_{k+1}^k\psi_k^k)\,, \tag{10}$$

где

$$b_4=12EI\frac{\kappa}{l^3};\quad c_4=6EI\frac{\kappa}{l^2};\quad d_4=EI\frac{1+3\kappa}{l};\quad \kappa=\left(1+\frac{12}{l^2}\frac{EI}{GF_\text{с}}\right)^{-1};$$

параметры EI, $GF_\text{с}$ определяются для плоскости, перпендикулярной плоскости рамы.

$$\begin{aligned}
&\Pi_4=\frac{1}{2}\frac{N}{2}[4b_4q_3\sin^2 n\alpha-8c_4q_3\sin n\alpha(q_2\sin\alpha\sin n\alpha+q_4\cos\alpha\cos n\alpha)+\\
&+4d_4(q_2\sin\alpha\cos n\alpha-q_4\cos\alpha\sin n\alpha)^2+2c_4l(q_4^2\cos^2\alpha(\cos^2 n\alpha-\sin^2 n\alpha)-\\
&-q_2^2\sin^2 n\alpha(\cos^2 n\alpha-\sin^2 n\alpha)+4q_2q_4\sin\alpha\cos\alpha\sin n\alpha\cos n\alpha)].
\end{aligned} \tag{11}$$

Потенциальная энергия всей рамы

$$\Pi_\text{рама}=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4$$

Её можно записать в виде:

$$\Pi_\text{рама}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}k_{ij,\text{рама}}q_iq_j\,, \tag{12}$$

где $k_{ij,\text{рама}}$ – коэффициенты обобщенных жесткостей рамы ($k_{ij,\text{рама}} = k_{ji,\text{рама}}$).

В частности: $k_{11} = N\dfrac{EF}{l}2\sin^2\alpha\cos^2 n\alpha + 2Nb_3\cos^2\alpha\sin^2 n\alpha, \quad k_{12} = 0$, и т.д.

Аналогично формуле (4) записывается потенциальная энергия растяжения для нижних и верхних растяжек, неподвижно закрепленных на крайних сечениях стойки

$$\Pi_{\text{раст.}} = \frac{1}{2}\frac{EF_{\text{раст.}}}{l_{\text{раст.}}}\sum_{k=0}^{N-1}(u^2_{k,\text{верх.}} + u^2_{k,\text{ниж.}}).$$

Учитывая кинематические условия сопряжения верхней и нижней растяжек с k-ым узлом

$$u_{k,\text{верх.}} = w_k\sin\beta - \upsilon_k\cos\beta \quad \text{и} \quad u_{k,\text{нижн.}} = w_k\cos\beta + \upsilon_k\sin\beta,$$

потенциальная энергия всех растяжек примет вид

$$\Pi_{\text{раст.}} = \frac{1}{2}\frac{EF_{\text{раст.}}}{l_{\text{раст.}}}\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2 n\theta_k(q_3^2 + q_1^2) = \frac{1}{2}\frac{EF_{\text{раст.}}}{l_{\text{раст.}}}\frac{N}{2}(q_3^2 + q_1^2).$$

Таким образом, потенциальная энергия всей циклически симметричной конструкции запишется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}k_{ij}q_iq_j, \tag{13}$$

где $k_{ij} = k_{ij,\text{рама}} + k_{ij,\text{раст.}}$ ($k_{ij} = k_{ji}$).

Кинетическая энергия системы в общем случае записывается аналогично (13)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{14}$$

где m_{ij} – коэффициенты обобщенных масс ($m_{ij} = m_{ji}$).

В первом приближении конструкцию можно представить в виде сосредоточенных в узлах масс, соединенных невесомыми стержнями. Кинетическую энергию растяжек и инерцию вращения можно не учитывать. Тогда кинетическая энергия конструкции записывается в виде:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[m(\dot{u}_k^2 + \dot{\upsilon}_k^2 + \dot{w}_k^2)] = \frac{1}{2}m\frac{N}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_5^2),$$

где m – масса, сосредоточенная в узле.

Уравнения свободных колебаний системы получаем как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах [17, 20] по отдельности для каждой гармоники n = 0, 1, 2, … $\leq N/2$:

$$\sum_{j=1}^{6}(m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \tag{15}$$

Используя эти уравнения, можно получить собственные частоты и формы колебаний циклически симметричной системы.

Выводы

Приведенный метод преобразования циклически симметричной системы к основным обобщенным координатам, в которых уравнения для каждого n при $0 \leq n \leq N/2$ распадаются на отдельные группы, может быть также использован и в общих случаях, например для упругого диска с лопатками и др.

Представленный в статье метод позволяет составить удобную программу для компьютера, с помощью которой можно определять соответственные частоты и формы колебаний циклических систем.

Список источников

1. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. - М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.

2. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологи имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 2. С. 51–57.

3. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор Конструкций современных трансформируемых космических антенн // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологи имени Академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 3. С. 78–81.

4. Сгадова Н.А., Струлев И.М. Анализ формы отражающей поверхности параболической антенны деформированной под действием весовой нагрузки // Труды МАИ. 2010. № 38. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=14168

5. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика раскрытия космической зонтичной антенны, состоящей из многозвенных гибких радиальных стержней // Космонавтика и ракетостроение. 2020. № 2 (113). С. 86-98.

6. Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Расчет формообразования космической зонтичной антенны при сильном изгибе радиальных стержней, связанных по параллелям растяжными тросами // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 5. С. 99-112. DOI: 10.31857/S0572329921050093

7. Куи М.Х. Геометрические модели внешней компоновки солнечных антенн космических аппаратов // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58836

8. Русских С.В., Нагорнов А.Ю., Шавня Р.А. Метод численного решения нелинейной задачи формообразования зонтичных антенн, состоящих из гибких радиальных стержней, соединенных растяжимыми тросовыми элементами // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018»: тезисы докладов. (Москва, 19-23 ноября 2018). – М.: Люксор, 2018. С. 341-342.

9. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. – М.: Радио и связь, 1987. - 72 с.

10. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 390 с.

11. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций. – М.: Изд-во «Факториал», 1997. - 302 с.

12. Цурков В.И. Динамические задачи большой размерности. – М.: Изд-во «Наука», 1998. – 288 с.

13. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

14. Шклярчук Ф.Н., Бобылев Д.С. Колебания упругих систем, образованных из последовательно соединенных однотипных модулей // Вопросы прочности тонкостенных конструкций: сборник статей. – М.: Изд-во МАИ, 1989. С. 52-56.

15. Власов В.З. Избранные труды. Т I. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.

16. Власов В.З. Избранные труды. Т III. – М.: Изд-во АН СССР, 1964. – 472 с.

17. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Колебания упругих систем. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 100 с.

18. Гришанина Т.В. Задачи по теории колебаний упругих систем. – М.: Изд-во МАИ, 1998. - 48 с.

19. Гнездилов В.А., Гришанина Т.В., Нагорнов А.Ю. Деформация плоской статически неопределимой стержневой системы при потере устойчивости стержней // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84435

20. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. - 560 с.

References

1. Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika konstruktsii kosmicheskoi tekhniki* (Construction mechanics of space technology structures), Moscow, Mashinostroenie, 1988, 392 p.

2. Lopatin A.V., Rutkovskaya M.A. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta nauki i tekhnologi imeni Akademika M.F. Reshetneva*, 2007, no. 2, pp. 51–57.

3. Lopatin A.V., Rutkovskaya M.A. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta nauki i tekhnologi imeni Akademika M.F. Reshetneva*, 2007, no. 3, pp. 78–81.

4. Sgadova N.A., Strulev I.M. *Trudy MAI*, 2010, no. 38. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=14168

5. Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2020, no. 2 (113), pp. 86-98.

6. Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2021, no. 5, pp. 99-112. DOI: 10.31857/S0572329921050093

7. Kui M.Kh. *Trudy MAI,* 2015, no. 82. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58836

8. Russkikh S.V., Nagornov A.Yu., Shavnya R.A. *17-ya Mezhdunarodnaya konferentsiya «Aviatsiya i kosmonavtika – 2018»,* Moscow, Lyuksor, 2018, pp. 341-342.

9. Gryanik M.V., Loman V.I. *Razvertyvaemye zerkal'nye antenny zontichnogo tipa* (Deployable umbrella-type mirror antennas), Moscow, Radio i svyaz', 1987, 72 p.

10. Obraztsov I.F., Savel'ev L.M., Khazanov Kh.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov* (The finite element method in the problems of structural mechanics of aircraft), Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 390 p

11. Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M. et al. *Mekhanika bol'shikh kosmicheskikh konstruktsii* (Mechanics of large space structures), Izd-vo «Faktorial», 1997, 302 p.

12. Tsurkov V.I. *Dinamicheskie zadachi bol'shoi razmernosti* (Dynamic problems of large dimension), Moscow, Izd-vo «Nauka», 1998, 288 p.

13. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebanii* (Theory of mechanical vibrations), Moscow, Vysshaya shkola, 1980, 408 p.

14. Shklyarchuk F.N., Bobylev D.S. *Voprosy prochnosti tonkostennykh konstruktsii* (Issues of strength of thin-walled structures, collection of articles), Moscow, Izd-vo MAI, 1989, pp. 52-56.

15. Vlasov V.Z. *Izbrannye Trudy* (Selected works). Vol. I. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1962, 528 p.

16. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy* (Selected works). Vol. III. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1964, 472 p.

17. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Kolebaniya uprugikh system system* (Vibrations of elastic systems), Moscow, Izd-vo MAI, 2013, 100 p.

18. Grishanina T.V. *Zadachi po teorii kolebanii uprugikh system* (Problems in the theory of oscillations of elastic systems), Moscow, Izd-vo MAI, 1998, 48 p.

19. Gnezdilov V.A., Grishanina T.V., Nagornov A.Yu. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84435

20. Babakov I.M. *Teoriya kolebanii* (Theory of vibrations), Moscow, Nauka, 1968, 560 p.

Статья поступила в редакцию 25.10.2021; одобрена после рецензирования 30.10.2021; принята к публикации21.12.2021.

The article was submitted on 25.10.2021; approved after reviewing on 30.10.2021; accepted for publication on 21.12.2021.