УДК 531.55

Единая параметризация для трех типов баллистических траекторий

Денисов М.М., Денисова И.П.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: kaf.pmitet.mai@yandex.ru*

Аннотация

Исследуется задача о параметрическом задании движения космического аппарата по трем типам баллистических траекторий – эллиптической, параболической и гиперболической. Существующие формулы параметрического задания движения космических аппаратов обладают одним серьезным недостатком: при непрерывном изменении эксцентриситета (в результате работы двигателей или под действием возмущающих сил) одна параметризация не переходит в другую. Для устранения этого неаналитического поведения формул при переходе эксцентриситета через значение, равное единице, в работе построена единая параметризация, которая позволяет проводить такой переход.

Ключевые слова: параметризация траекторий, эксцентриситет, задача Кеплера.

Введение

В небесной механике [1-4] и в космодинамике при решении различных задач в качестве невозмущенного движения используется движение по трем типам траекторий, которые в плоскости орбиты описываются единым выражением и отличаются величиной эксцентриситета:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}, \tag{1}$$

где p - параметр, e - эксцентриситет и φ- угол истинной аномалии.

Угловая координата φ связана с временем t дифференциальным уравнением

$$dt = \frac{r^2}{\sqrt{pGM}} d\phi, \tag{2}$$

где G - гравитационная постоянная, M - масса тяготеющего центра.

Если проинтегрировать это уравнение, то получим очень громоздкое выражение, которое очень неудобно [1] для теоретических исследований. Поэтому в небесной механике переходят к параметрическому заданию уравнения траектории r=r(ξ), φ= φ (ξ) и закона движения по этой траектории t=t(ξ), где роль параметра ξ играет эксцентрическая аномалия.

В результате для каждого типа траектории получают разные выражения [5].

1. Для движения по эллиптической траектории ($\boldsymbol{e < 1}$):

$$r = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e\cos\xi), \tag{3}$$

$$\sin\phi = \frac{\sqrt{1 - e^2}\sin\xi}{1 - e\cos\xi},$$

$$\cos\phi = \frac{\cos\xi - e}{1 - e\cos\xi},$$

$$t = t_0 + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM}(1 - e^2)^{3/2}}(\xi - e\sin\xi).$$

Здесь и далее t_0 – постоянная интегрирования.

2. Для движения по параболической траектории (e=1):

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{p}{2}(1+\xi^2), \\
\sin\phi &= \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \\
\cos\phi &= \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}, \\
t &= t_0 + \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{GM}}\left(\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

3. Для движения по гиперболической траектории ($e > 1$):

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{p}{e^2-1}(ech\xi - 1), \\
\cos\phi &= \frac{e - ch\xi}{ech\xi - 1}, \\
\sin\phi &= \frac{\sqrt{e^2-1}sh\xi}{ech\xi - 1}, \\
t &= t_0 + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM}(e^2-1)^{3/2}}(esh\xi - \xi).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Общепринятые формулы (3) – (5) параметрического задания движения космических аппаратов обладают одним серьезным недостатком: они имеют разный функциональный вид для каждого типа траектории. До начала космической эры это обстоятельство не вызывало особого беспокойства, так как при движении небесных тел переход с одного типа траектории на другой тип был практически невозможен. С появлением космических аппаратов, оснащенных двигателями малой тяги, такие переходы стали возможными, так как работа двигателей изменяет величину эксцентриситета. Существовавшая параметризация не могла быть использована для теоретического исследования таких переходов, поскольку при непрерывном изменении эксцентриситета от значений $0 \le e < 1$ к значению $e=1$ и далее к $e>1$ одна параметризация не переходит в другую. Поэтому при таких расчетах неудобно описывать переход космических аппаратов с одной орбиты на другую, и не понятно в какой момент необходимо начинать пользоваться другой параметризацией.

Для устранения этого неаналитического поведения формул (3) – (5) при $e \to 1$, построим единую параметризацию, которая позволяет проводить такой переход.

Предлагаемая единая параметризация для трех типов траекторий

Запишем $r = r(\xi)$ в виде:

$$r = a(1 - e\cos\beta\xi), \tag{6}$$

где a и β – некоторые константы, а ξ - параметр.

Потребуем, чтобы при φ=0 и ξ обращалась в ноль. Тогда из выражений (1) и (6) получим: $a=p/(1-e^2)$. Подставляя это соотношение в выражение (6) и приравнивая его соотношению (1), будем иметь:

$$\cos\phi = \frac{\cos\beta\xi - e}{1 - e\cos\beta\xi}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$\sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\beta\xi}{1-e\cos\beta\xi}.$$

Возьмем дифференциалы от правой и левой частей этого равенства. В результате получим:

$$\cos\phi d\phi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\beta(\cos\beta\xi - e)}{(1-e\cos\beta\xi)^2}d\xi.$$

Воспользуемся уравнением, связывающим в задаче Кеплера дифференциалы времени и угла истинной аномалии (2). Подставляя в него выражения (6) и (7), приведем его к виду:

$$d\phi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\beta}{(1-e\cos\beta\xi)}d\xi.$$

Из уравнения (2) следует, что

$$dt = \frac{p^{3/2}\beta}{\sqrt{GM}\,(1-e^2)^{3/2}}(1-e\cos\beta\xi)d\xi.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим:

$$t = t_0 + \frac{p^{3/2}\beta}{\sqrt{GM}\,(1-e^2)^{3/2}}\left(\xi - \frac{e}{\beta}\sin\beta\xi\right).$$

Таким образом, единая параметризация для задачи Кеплера должна иметь вид:

$$\begin{aligned}
&r = \frac{p}{1-e^2}(1-e\cos\beta\xi),\\
&\sin\phi = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\beta\xi}{1-e\cos\beta\xi},\\
&\cos\phi = \frac{\cos\beta\xi - e}{1-e\cos\beta\xi},\\
&t = t_0 + \frac{p^{3/2}\beta}{\sqrt{GM}\,(1-e^2)^{3/2}}\left(\xi - \frac{e}{\beta}\sin\beta\xi\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Для того, чтобы эти выражения имели смысл и при $e \to 1$, необходимо потребовать, чтобы параметр β был функцией эксцентриситета $\beta=\beta(e)$ и при $e \to 1$ должно выполняться условие: $\lim \beta(e)=0$. Найдем зависимость $\beta=\beta(e)$. Устремим в последнем из выражений (8) e к 1. Так как при этом β →0, то воспользуемся следующими формулами разложения в ряд Тейлора:

$$\sin\beta\xi = \beta\xi - \frac{\beta^3\xi^3}{3!},$$

$$\cos\beta\xi = 1 - \frac{\beta^2\xi^2}{2!}.$$

Тогда $\lim\limits_{e\to 1} t = t_0 + \lim\limits_{e\to 1} \frac{p^{3/2}\beta}{\sqrt{GM}\,(1-e^2)^{3/2}}\left[(1-e)\xi + \frac{e\xi^3\beta^2}{6}\right].$

Так как этот предел должен быть конечным при любых конечных значениях параметра ξ, то отсюда следует, что при e→ 1 функция β=β(e) должна стремиться к нолю не медленнее, чем $\beta = \sqrt{1-e^2}$. Это выражение мы и примем для β(e).

Покажем, что если $\beta = \sqrt{1-e^2}$, то при изменении эксцентриситета от $e < 1$ к $e = 1$ и далее к $e > 1$ формулы (8) непрерывным образом переходят от законов движения по эллиптической траектории ($e < 1$) к движению по параболической траектории ($e = 1$), а затем к движению по гиперболической траектории ($e > 1$).

Полагая, что $\beta = \sqrt{1-e^2}$, несложно показать, что при e→ 1 формулы (8) примут вид:

$$\lim_{e\to 1} r = \frac{p}{2}(1+\xi^2),$$
$$\lim_{e\to 1} \sin\phi = \frac{2\xi}{1+\xi^2},$$
$$\lim_{e\to 1} \cos\phi = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2},$$
$$\lim_{e\to 1} t = t_0 + \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{GM}}\left(\xi + \frac{1}{3}\xi^3\right).$$

Таким образом, единая параметризация (8) при $e \to 1$ непрерывным образом перешла в параметризацию параболического движения (4).

Рассмотрим теперь гиперболическое движение. Для него в формулах (8) необходимо считать, что $e > 1$. Тогда константа β становится мнимой:

$$\beta = \sqrt{1-e^2} = i\alpha.$$

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{i\xi} = cos\xi + isin\xi$.

Это позволяет записать тригонометрические функции от мнимого аргумента через гиперболические функции:

$$\sin\beta\xi = \frac{e^{-\alpha\xi} - e^{\alpha\xi}}{2i} = -\frac{e^{\alpha\xi} - e^{-\alpha\xi}}{2i} = -\frac{sh\alpha\xi}{i},$$

$$\cos\beta\xi = \frac{e^{-\alpha\xi} + e^{\alpha\xi}}{2} = ch\alpha\xi.$$

Подставим эти выражения в формулы (8). В результате получим:

$$r = \frac{p}{(e^2-1)}(ech\alpha\xi - 1),$$

$$\cos\phi = \frac{ch\alpha\xi - e}{1 - ech\alpha\xi} = \frac{e - ch\alpha\xi}{ech\alpha\xi - 1},$$

$$\sin\phi = -\frac{\sqrt{1-e^2}\,sh\alpha\xi}{i(1-ech\alpha\xi)} = \frac{\sqrt{e^2-1}\,sh\alpha\xi}{(ech\alpha\xi-1)},$$

$$t = t_0 + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{GM}\,\alpha^2}\left(\frac{e}{\alpha}sh\alpha\xi - \xi\right).$$

Таким образом, предлагаемая параметризация сохраняет свою применимость и в случае гиперболического движения.

Заключение

Проведенное исследование показало, что в задаче Кеплера существует единая параметризация законов движения космического аппарата по всем типам траекторий. Это позволяет проводить описание движения космических аппаратов под действием двигателей малой тяги с непрерывным переходом с одного типа орбиты на другой тип, используя найденную единую параметризацию для организации итерационной схемы метода последовательных приближений (метод оскулирующих элементов в более общей схеме [6]). В этой схеме в начальном приближении эксцентриситет, параметр и углы ориентации орбиты в пространстве считаются неизменными. В следующем приближении учитывается малое изменение этих элементов орбиты под действием двигателя малой тяги. Последовательное применение этой итерационной схемы с единой параметризацией позволяет получить как аналитическое, так и численное решение задачи о движении космических аппаратов с переходом с одного типа орбиты на другой.

Библиографический список

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. - М.: Наука, 1968.- 799 с.

2. Shatina A.V., Sherstnyov E.V. Satellite motion in the gravitational field of a viscoelastic planet with a core // Cosmic Research. 2015. Т. 53. № 2. С. 163-170.

3. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. - М.: Наука, 2002. – 392 с.

4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Издательство УРСС, 2000. - 408 с.

5. Петкевич В.В. Теоретическая механика. - М.: Наука, 1981. – 496 с.

6. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. - М.: Наука, 1972. - 382 с.