

ОАО «МОСКОВСКИЙ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ЗАВОД – КОМПОЗИЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ»

На правах рукописи

Белов Петр Анатольевич

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ ДЕФЕКТНЫХ СРЕД**

01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор технических наук,
профессор Лурье Сергей Альбертович

Москва 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1 ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ГРАДИЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕД.....	12
1.1. ТЕОРИЯ СРЕД КОССЕРА (1909ГОД).....	12
1.2. ТЕОРИЯ СРЕД ДЖЕРЕМИЛЛО (1929ГОД).	15
1.3. ТЕОРИЯ СРЕД АЭРО-КУВШИНСКОГО (МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ, 1960ГОД)...	18
1.4. ТЕОРИЯ СРЕД МИНДЛИНА (1964ГОД).....	21
1.5. ТЕОРИЯ СРЕД ТУПИНА (1964ГОД).	23
1.6. «ПРОСТЕЙШАЯ» ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ (2009Г.).	25
1.7. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ГРАДИЕНТНЫХ ТЕОРИЙ.	27
ГЛАВА 2 ОБЩАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ ДЕФЕКТОВ	30
2.1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНЫХ БЕЗДЕФКТНЫХ СРЕД	30
2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ПО ГЛАДКОСТИ.	34
2.3. ОБЩАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДЕФЕКТНЫХ СРЕД.	40
2.3.1. <i>Кинематическая модель сред соскалярным полем дефектов.</i>	<i>41</i>
2.3.2. <i>Кинематическая модель сред с векторным полем дефектов.</i>	<i>45</i>
2.3.3. <i>Новая классификация дислокаций на основе введения типов.....</i>	<i>51</i>
2.3.4. <i>Кинематическая модель сред с тензорным полем дефектов.</i>	<i>57</i>
2.3.5. <i>Кинематическая модель дефектных сред ранга N.....</i>	<i>65</i>
2.4. РАЗРЫХЛЕНИЕ ИЛИ ОБРАТИМОЕ ОБРАЗОВАНИЕ НОВОГО ОБЪЕМА ТЕЛА.	70
2.5. РАЗРЫХЛЕНИЕ, ИЛИ ОБРАТИМОЕ ОБРАЗОВАНИЕ НОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	71
2.6. СТРУКТУРА ПОЛЯ РАЗРЫВОВ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	72
2.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	75
ГЛАВА 3 «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ» ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП.....	78
3.1. «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ» ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.	78
3.2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СРЕД В СООТВЕТСТВИИ С «КИНЕМАТИЧЕСКИМ» ВАРИАЦИОННЫМ ПРИНЦИПОМ.	79
3.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СРЕД ПАПКОВИЧА-КОССЕРА.	80
3.3.1. <i>Общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций</i>	<i>81</i>

3.3.2.	<i>«Простейшая» модель сред с сохраняющимися дислокациями.</i>	84
3.3.3.	<i>Когезионно-адгезионная модель среды.</i>	86
3.3.4.	<i>«Полная» модель среды с сохраняющимися дислокациями.</i>	87
3.4.	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	88
ГЛАВА 4 ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.		89
4.1.	ОБЩАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ПОЛЯМИ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ДИСЛОКАЦИЙ.	90
4.2.	«КОНСТРУКТОР» МОДЕЛЕЙ СРЕД.	99
4.3.	МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДЕННЫХ ДИСЛОКАЦИЯМИ СРЕД ТУПИНА.	101
4.4.	СТРОГИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СРЕД С ПОЛЯМИ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ДИСЛОКАЦИЙ.	105
4.4.1.	<i>«Классическая» модель сред Миндлина.</i>	106
4.4.2.	<i>Модель сред с не взаимодействующими типами дислокаций.</i>	107
4.4.3.	<i>«Простейшая» модель сред с сохраняющимися дислокациями.</i>	109
4.4.4.	<i>Модель сред с ω-дислокациями (теория сред Коссера).</i>	110
4.4.5.	<i>Модель сред с θ-дислокациями (теория пористых сред).</i>	111
4.4.6.	<i>Модель сред с γ-дислокациями.</i>	111
4.4.7.	<i>Алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями.</i>	112
4.5.	СТРОГИЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИДЕАЛЬНЫХ (БЕЗДЕФЕКТНЫХ) ГРАДИЕНТНЫХ СРЕД.	112
4.5.1.	<i>Модель идеальных (бездефектных) сред Тупина.</i>	113
4.5.2.	<i>Модель сред Аэро-Кувшинского.</i>	115
4.5.3.	<i>Модель сред Джеремилло.</i>	116
4.5.4.	<i>«Простейшая» модель когезионных взаимодействий.</i>	117
4.6.	МОДЕЛИ СРЕД С АДГЕЗИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.	117
4.6.1.	<i>Модель «антисимметрично градиентной» адгезии.</i>	118
4.6.2.	<i>Модель «симметрично градиентной» адгезии.</i>	119
4.6.3.	<i>Модель упрощенной «градиентной» адгезии.</i>	120
4.6.4.	<i>Модель «поврежденной» адгезии.</i>	120
4.6.5.	<i>Модель идеальной адгезии.</i>	121
4.7.	ОБЪЯСНЕНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ «МОМЕНТНЫХ» МОДУЛЕЙ.	122
4.8.	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	123
ГЛАВА 5 ТЕОРИЯ КОГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.		127
5.1.	АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ.	128
5.2.	«ПРОСТЕЙШАЯ» ТЕОРИЯ КОГЕЗИОННОГО ПОЛЯ.	133

5.3.	Уточненная модель идеальных (бездефектных) сред Тупина.	141
5.4.	Теория сред Коссера (теория ω – дислокаций).	144
5.5.	Теория пористых сред (теория θ – дислокаций).	150
5.6.	Теория сред с γ – дислокациями.	153
5.7.	Уточненная модель сред Миндлина.	157
ГЛАВА 6 ТЕОРИЯ АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.		164
6.1.	Модель идеальной адгезии.	164
6.1.1.	<i>Модель давления Лапласа и поверхностного натяжения.</i>	<i>165</i>
6.1.2.	<i>Модель аналогов давления Лапласа в касательных напряжениях.</i>	<i>167</i>
6.1.3.	<i>Поверхностные волны адгезионной природы.</i>	<i>168</i>
6.1.3.1.	Нормальные поверхностные волны W – типа.	169
6.1.3.2.	Тангенциальные поверхностные волны U, V – типа.	171
6.1.3.3.	Поверхностные волны θ – типа.	172
6.1.3.4.	Поверхностные волны ω – типа.	173
6.2.	Модель «поврежденной» адгезии.	175
6.3.	«Простейшая» когезионно-адгезионная модель.	178
ГЛАВА 7 ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДЕФЕКТНЫХ СРЕД.		180
7.1.	К теории мелкодисперсных композитов, армированных микрочастицами (Эффект Мивы).	180
7.1.1.	<i>Аналитическая оценка модулей упругости мелкодисперсного композита.</i>	<i>181</i>
7.1.2.	<i>Задача идентификации.</i>	<i>184</i>
7.1.3.	<i>Математическое обоснование гипотез осреднения.</i>	<i>189</i>
7.1.3.1.	Математическое обоснование гипотезы эффективного включения.	190
7.1.3.2.	Математическое обоснование гипотезы эффективной матрицы.	191
7.1.3.3.	Математическое обоснование гипотезы эквивалентного континуума. ...	192
7.1.3.4.	Математическое обоснование гипотезы трех фаз.	193
7.1.4.	<i>Модель мелкодисперсного композита как классической неоднородной структуры.</i>	<i>195</i>
	Заключение.	196
7.2.	К теории нанокompозитов, армированных SWNT (Эффекты Одегарда).	199
7.2.1.	<i>Эффект Одегарда на коротких волокнах.</i>	<i>199</i>
7.2.2.	<i>Эффект Одегарда на длинных волокнах.</i>	<i>203</i>
7.3.	К теории тонких пленок.	211

7.3.1.	<i>Растяжение тонких пленок.</i>	211
7.3.2.	<i>Изгиб тонких пленок.</i>	213
7.3.3.	<i>Механические свойства 2D-структур.</i>	216
7.3.3.1.	<i>Механические свойства 2D-структуры при деформировании в плоскости.</i>	218
7.3.3.2.	<i>Механические свойства 2D-структуры при изгибе.</i>	220
7.4.	К МЕХАНИКЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ.	222
7.4.1.	<i>Классическое решение для трещины.</i>	226
7.4.2.	<i>Несингулярная трещина Баренблатта.</i>	228
7.4.3.	<i>Обобщения критерия Гриффитса.</i>	234
7.4.3.1.	<i>Первая энергетическая теорема.</i>	235
7.4.3.2.	<i>Вторая энергетическая теорема.</i>	236
7.4.3.3.	<i>Теорема Клапейрона для дефектной среды.</i>	238
7.4.3.4.	<i>Варианты обобщения критерия Гриффитса.</i>	238
7.5.	МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ГРАДИЕНТАХ ДЕФОРМАЦИЙ.	241
7.5.1.	<i>Теорема эквивалентности.</i>	241
7.6.	К ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНОГО МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ.	244
7.6.1.	<i>Теорема о межфазном слое.</i>	244
7.6.2.	<i>Теорема Клапейрона в теории межфазного слоя.</i>	248
7.6.3.	<i>Лагранжиан теории межфазного слоя.</i>	249
7.6.4.	<i>Прикладная теория «поврежденного» межфазного слоя.</i>	249
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	251
	ГЛАВА 8 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	254
	ГЛАВА 9 ПРИЛОЖЕНИЯ	259
9.1.	ФОРМАЛЬНАЯ ТЕХНИКА ПОСТРОЕНИЯ ТЕНЗОРОВ МОДУЛЕЙ.	259
9.2.	СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ МОДУЛЕЙ ЧЕТВЕРТОГО РАНГА	259
9.2.1.	<i>Структура тензора C_{ijmn}^{11} для анизотропной среды.</i>	259
9.2.1.	<i>Структура тензора C_{ijmn}^{11} для ортотропной среды.</i>	264
9.2.2.	<i>Структура тензора C_{ijmn}^{11} для трансверсально-изотропной среды.</i>	266
9.2.3.	<i>Структура тензора C_{ijmn}^{11} для изотропной среды.</i>	267
9.3.	СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ МОДУЛЕЙ ШЕСТОГО РАНГА.	268
9.3.1.	<i>Требование существования потенциальной энергии.</i>	

9.3.2.	<i>Определение «существенных» и «несущественных» модулей.</i>	272
9.3.3.	<i>Теорема о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий.</i>	273
9.3.4.	<i>Структура тензора Миндлина C_{ijkml}^{22}.</i>	277
9.3.5.	<i>Структура тензоров C_{ijkml}^{12} и C_{ijkml}^{21}.</i>	278
9.3.6.	<i>Структура тензора Тупина C_{ijkml}^{11}.</i>	280
9.4.	ГИПОТЕЗА ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ТИПОВ ДИСЛОКАЦИЙ.	283
9.5.	СТРУКТУРА И СВОЙСТВА АДГЕЗИОННЫХ ТЕНЗОРОВ ЧЕТВЕРТОГО РАНГА.	285
9.6.	СТРУКТУРА И СВОЙСТВА АДГЕЗИОННЫХ ТЕНЗОРОВ ПЯТОГО РАНГА.	288
9.6.1.	<i>Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{22}.</i>	290
9.6.2.	<i>Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{12}.</i>	290
9.6.3.	<i>Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{21}.</i>	290
9.6.4.	<i>Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{11}.</i>	291
9.7.	СТРУКТУРА И СВОЙСТВА АДГЕЗИОННЫХ ТЕНЗОРОВ ШЕСТОГО РАНГА.	292
9.7.1.	<i>Структура адгезионного тензора Миндлина A_{ijkml}^{22}.</i>	296
9.7.2.	<i>Структура адгезионных тензоров A_{ijkml}^{12} и A_{ijkml}^{21}.</i>	297
9.7.3.	<i>Структура адгезионного тензора Тупина A_{ijkml}^{11}.</i>	298
9.8.	ЛЕММА О ТРОЙНОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ТЕНЗОРА ПЯТОГО РАНГА $(T_{ijkml}\varphi_m)_{,nlk}$.	299
ГЛАВА 10 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.		300

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Имеется достаточно большой ряд экспериментальных фактов, фиксирующих существование масштабных эффектов в сплошных средах. Анализ современного уровня исследований в области механики мелкодисперсных композитов и сред с микро- и нано- структурой показывает, что потребность в последовательных моделях механики, способных описать масштабные эффекты, является своевременной и актуальной. При этом, несмотря на значительные усилия, можно констатировать, что фактически отсутствует последовательная теория механики деформируемых сред с масштабными эффектами, которая бы позволила установить общие закономерности внутренних взаимодействий на неоднородностях субатомного уровня, связанных с микро- и наноструктурами. Классическая механика сплошной среды не может в принципе описать масштабные эффекты. Эта ситуация, несомненно, ограничивает возможности моделирования аномальных свойств новых материалов с внутренними структурами (нанокомпозитов, наноустройств, тонких пленок и т.д.). Развитие технологии производства нанообъектов и наноустройств требует создания теории, способной описать как свойства существующих нанообъектов и структур, так и свойства проектируемых. Как правило, нанообъекты используются не сами по себе, а в композиции с макрообъектами. Поэтому важную роль играет технология создания композиции и умение её моделировать. Знание физических механизмов, и умение управлять такими явлениями, как смачиваемость, капиллярность, адгезия, имеет большое значение при разработке и самих композиционных материалов, и технологии их производства. С другой стороны - нет монографии, или учебника с систематическим изложением основ теории, способной с единой точки зрения описать достаточно широкий круг известных масштабных эффектов. Отсутствует методика оценки

применимости выбираемой модели к конкретной среде с фиксированным набором кинематических свойств. Нет методики построения моделей различной сложности (конструктора моделей). С этой точки зрения методы механики сплошной среды представляются наиболее последовательными и корректными, и могут служить основой для построения моделей механики дефектных сред. Более точно: должны быть развиты модели деформирования сред с учетом масштабных эффектов, связанных с существованием в сплошной среде неоднородностей масштаба 10^{-9} м. В основание таких моделей должен быть заложен факт существования дефектов сплошности, таких как дислокации, дисклинации и дефекты более высокого ранга. При этом, конечно, описание громадного количества изолированных дефектов типа дислокаций целесообразно заменить полевым представлением. Реализация такого подхода, даже в рамках линейных моделей, позволяет развить механику дефектных сред как некоторое естественное обобщение классической механики деформируемых сред.

Целью работы является: обоснование и формулировка спектра моделей дефектных сред (сред с полями сохраняющихся дислокаций), их классификация, исследование их общих свойств и специфики, построение на их основе прикладных инженерных моделей.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Построена общая кинематическая теория полей дефектов, дана их классификация, исследованы их общие свойства и индивидуальные особенности.
- Сформулирован и применен к построению моделей дефектных сред «кинематический» вариационный принцип, который является частным случаем принципа возможных перемещений со связями. Специфика «кинематического» вариационного принципа заключается в том, что совокупность выбранных кинематических связей, названная кинематической моделью дефектной среды, позволяет для линейных моделей однозначно

определить соответствующую силовую модель. Под силовой моделью подразумевается спектр силовых взаимодействий, вывод формул Грина, формулировка уравнений обобщенного закона Гука.

– Сформулирован спектр моделей сред с полями сохраняющихся дислокаций. Часть из них сопоставлена с уже известными моделями: средой Миндлина, средой Коссера.

– Сформулирован спектр моделей бездефектных градиентных сред. Часть из них сопоставлена с уже известными моделями: средой Тупина, средой Аэро-Кувшинского и средой Джеремилло.

- Дано теоретическое объяснение достаточно большого круга известных масштабных эффектов в рамках сформулированной механики дефектных сред.

Практическое значение работы.

1. Теория сред с сохраняющимися дислокациями позволяет сформулировать прикладные модели мелкодисперсных композитов, межфазных слоев, тонких пленок, механики хрупкого разрушения. Она в состоянии описать широкий спектр известных масштабных эффектов и предсказать новые эффекты, требующие экспериментальной проверки.

2. Теория когезионных взаимодействий, как корректно упрощенная форма теории сред с сохраняющимися дислокациями, позволяет представить дефектную среду как совокупность двух вложенных друг в друга сред – классической (бездефектной) среды и «когезионной». Она дает возможность получать наглядные решения в виде классического решения и «когезионной» поправки к нему, и исследовать эти решения.

3. Теория адгезионных взаимодействий позволяет глубже понять, изучить и использовать на практике адгезионные свойства контактирующих тел. Исследованные различные механизмы адгезии позволяют рационально подбирать материалы контактирующих тел с целью улучшения функциональных свойств проектируемых конструкций и устройств.

4. Общая и прикладная теория межфазного слоя дает возможность изучать, моделировать и проектировать свойства композиционных материалов, а также оптимизировать их состав.

Реализация результатов работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, используются в Учреждении Российской Академии Наук Институте Прикладной механики РАН, Московском Государственном техническом Университете им.Н.Э.Баумана, Воронежском Государственном Техническом Университете, ГК «Ростехнологии».

Достоверность результатов обусловлена применением классических методов и инструментов: вариационным методом построения моделей, применением тензорной алгебры и тензорного анализа в индексной форме, прямых вариационных методов и методов уравнений математической физики при решении тестовых задач. Для сравнения предсказаний теории с экспериментом, брались экспериментальные данные из публикаций независимых источников.

Апробация работы. По теме диссертационной работы сделан 31 доклад на общероссийских и международных научных конференциях.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 40 статей и две монографии.

На защиту выносятся:

- Общая кинематическая теория полей дефектов.
- «Кинематический» вариационный принцип.
- Теория сред с сохраняющимися дислокациями.
- Теория когезионных взаимодействий.
- Теория адгезионных взаимодействий.
- Общая и прикладная теория межфазного слоя.
- Теория волокнистых микро- и нанокомпозитов.
- Теория мелкодисперсных микро- и нанокомпозитов.

Объём и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, 7 глав, заключения, списка используемой литературы и 9

приложений. Она содержит 313 страниц, в том числе 299 страниц основного текста, 23 рисунка, 5 таблиц. Список используемой литературы включает 128 наименований (из них 48 на иностранном языке).

ГЛАВА 1

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ГРАДИЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕД

1.1. Теория сред Коссера (1909год).

Теория сред Коссера [1] является самой старой неклассической моделью сплошной среды. В общем случае лагранжиан L теории сред Коссера может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$A = \iiint P_i^V R_i dV + \oiint P_i^F R_i dF$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 8\chi^{12} (-R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} / 2) \omega_k^2 + 4\chi^{22} \omega_k^2 \omega_k^2 + C_{ijmn}^{Cosserat} \omega_{i,j}^2 \omega_{m,n}^2] / 2$$

Здесь A - работа внешних объёмных P_i^V и поверхностных P_i^F сил, U_V - объёмная плотность потенциальной энергии, R_i - вектор перемещений, $R_{i,j}$ - градиент вектора перемещений (тензор стесненной дисторсии), ω_k^2 - псевдовектор свободных поворотов, которые по определению не могут быть представлены как ротор перемещений, δ_{ij} - тензор Кронекера, \mathcal{E}_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивиты. Тензоры модулей имеют следующую структуру:

$$C_{ijmn}^{11} = \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{11} + \chi^{11}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{11} - \chi^{11}) \delta_{in} \delta_{jm}$$

$$C_{ijmn}^{Cosserat} = C_1^C \delta_{ij} \delta_{mn} + (C_2^C + C_3^C) \delta_{im} \delta_{jn} + (C_2^C - C_3^C) \delta_{in} \delta_{jm},$$

λ^{11}, μ^{11} - классические коэффициенты Ламе, $\chi^{11}, \chi^{12}, \chi^{22}$ - неклассические модули, имеющие ту же размерность, что и классические модули, C_1^C, C_2^C, C_3^C - моментные модули, по размерности отличающиеся от классических модулей на размерность квадрата длины.

Эта теория характерна тем, что каждой точке среды приписывается шесть степеней свободы: три компоненты вектора перемещений R_i и три

компоненты псевдовектора свободных поворотов ω_k^2 , которые не являются вихрями поля перемещений. Таким образом, каждая точка такой среды ведет себя как абсолютно твердое тело. Независимые кинематические переменные R_i и ω_k^2 определяют кинематическую модель среды Коссера.

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии теории сред Коссера следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - 2\chi^{12} \omega_k^2 \mathcal{E}_{ijk} \\ m_k &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_k^2} = -2\chi^{12} R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} + 4\chi^{22} \omega_k^2 \\ m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_{i,j}^2} = C_{ijmn}^{Cosserat} \omega_{m,n}^2\end{aligned}$$

Таким образом, теория сред Коссера допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: несимметричного тензора напряжений σ_{ij} , псевдовектора объемных моментов m_k и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} .

Вариационное уравнение теории сред Коссера получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_i \delta \omega_i^2 + m_{ij} \delta \omega_{i,j}^2] dV = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + (m_{ij,j} - m_i) \delta \omega_i^2] dV + \iint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i + (-m_{ij} n_j) \delta \omega_i^2] dF = 0\end{aligned}$$

Вариационное уравнение теории сред Коссера в кинематических переменных:

$$\begin{aligned}\delta L &= \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + 2\chi^{12} \omega_{m,n}^2 \mathcal{E}_{mni} + P_i^V) \delta R_i + \\ &+ (2\chi^{12} R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} - 4\chi^{22} \omega_i^2 + C_{ijmn}^{Cosserat} \omega_{m,nj}^2) \delta \omega_i^2] dV + \\ &+ \iint [(P_i^F - C_{ijmn}^{11} n_j R_{m,n} - 2\chi^{12} \omega_m^2 n_n \mathcal{E}_{mni}) \delta R_i + (-C_{ijmn}^{Cosserat} n_j \omega_{m,n}^2) \delta \omega_i^2] dF = 0\end{aligned}$$

Уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{j,ji} + (\mu^{11} + \chi^{11})(R_{i,jj} - R_{j,ji}) + 2\chi^{12} \omega_{m,n}^2 \mathcal{E}_{mni} + P_i^V = 0 \\ 2\chi^{12} R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} - 4\chi^{22} \omega_i^2 + (C_2^C + C_3^C)(\omega_{i,jj}^2 - \omega_{j,ji}^2) + (C_1^C + 2C_2^C) \omega_{j,ji}^2 = 0 \end{cases}$$

Дивергенция уравнений равновесия моментов дает:

$$\frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}}\omega_{,kk} - \omega = 0$$

Здесь введено обозначение $\omega = \omega_{,i,i}^2$.

Ротор уравнений равновесия сил при $\chi^{12} \neq 0$ дает:

$$(\omega_{,i,jj}^2 - \omega_{,j,ji}^2) = \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{2\chi^{12}} R_{p,jjq} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{1}{2\chi^{12}} P_{p,q}^V \mathcal{E}_{pqi}$$

Тогда уравнение равновесия моментов можно записать относительно ω_i^2 в алгебраическом виде:

$$\omega_i^2 = \frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}} R_{p,q} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{8\chi^{12}\chi^{22}} R_{p,jjq} \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_2^C + C_3^C)}{8\chi^{12}\chi^{22}} P_{p,q}^V \mathcal{E}_{pqi} + \frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}} \omega_i$$

Подставляя ω_i^2 в уравнение равновесия сил, можно получить:

$$(2\mu^{11} + \chi^{11})R_{j,ji} + (\mu^{11} + \chi^{11} - \frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})(R_{i,jj} - R_{j,ji}) - \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{4\chi^{22}}(R_{i,jj} - R_{j,ji})_{,kk} +$$

$$+ P_i^V - \frac{(C_2^C + C_3^C)}{4\chi^{22}}(P_{i,jj}^V - P_{j,ji}^V) = 0$$

Таким образом, теория сред Коссера может быть описана решением распадающейся системы уравнений относительно вектора перемещений R_i и псевдоскаляра ω :

$$(2\mu^{11} + \chi^{11})R_{j,ji} + (\mu^{11} + \chi^{11} - \frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})(R_{i,jj} - R_{j,ji}) - \frac{(C_2^C + C_3^C)(\mu^{11} + \chi^{11})}{4\chi^{22}}(R_{i,jj} - R_{j,ji})_{,kk} +$$

$$+ P_i^V - \frac{(C_2^C + C_3^C)}{4\chi^{22}}(P_{i,jj}^V - P_{j,ji}^V) = 0$$

$$\frac{(C_1^C + 2C_2^C)}{4\chi^{22}}\omega_{,kk} - \omega = 0$$

При этом краевая задача при $\chi^{12} \neq 0$ остается связанной и содержит шесть граничных условий в каждой неособенной точке поверхности. Следует обратить внимание на то, что разрешающие уравнения теории не содержат одной из трех линейных комбинаций «моментных» модулей, а именно: $(C_2^C - C_3^C)$. Она фигурирует только в формулировке статических граничных условий на «моментные» напряжения.

1.2. Теория сред Джеремилло (1929год).

Теория сред Джеремилло [2] также является давно известной, но незаслуженно забытой, неклассической моделью сплошной среды. В общем случае лагранжиан L теории сред Джеремилло может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 + C_{ijkml}^J \varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1] / 2$$

$$\varepsilon_{ij}^1 = (R_{i,j} + R_{j,i}) / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{11} = C_{mnij}^{11}$$

$$C_{ijkml}^J = C_{mnljk}^J$$

Кроме того, так как тензор шестого ранга $\varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1$ симметричен при перестановке индексов внутри пар i, j и m, n , антисимметричные по этим индексам компоненты тензора модулей C_{ijkml}^J не войдут в выражение потенциальной энергии $C_{ijkml}^J \varepsilon_{ij,k}^1 \varepsilon_{mn,l}^1 / 2$ и их можно без ущерба для общности положить равными нулю. Отсюда:

$$C_{ijmn}^{11} = \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$$

$$C_{ijkml}^J = C_1^J (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} +$$

$$+ \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) +$$

$$+ C_2^J (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl})$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Джеремилло является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают

уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n}$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkmnl}^J R_{m,nl}$$

Таким образом, теория сред Джеремилло допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} и тензора моментных напряжений m_{ijk} .

Вариационное уравнение теории сред Джеремилло получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk}) dV = \\ &= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) \delta R_{i,j} dV - \oint m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} dF = \\ &= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} \} dF = \\ &= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j + (m_{ijk} \delta_{pj}^* n_k)_{,p}] \delta R_i - m_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i \} dF - \sum \oint m_{ijk} v_j n_k \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Здесь точкой над переменной обозначена нормальная к поверхности производная $\dot{R}_i = R_{i,j} n_j$. $\delta_{jk}^* = \delta_{jk} - n_j n_k$ - «плоский» тензор Кронекера, v_j - орт криволинейной ортогональной системы координат, связанной с ребром кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело $s_i v_j n_k \mathcal{E}_{ijk} = 1$, s_i - орт касательной к ребру, $f_i = m_{ijk} v_j n_k$ - «реберные» силы.

В перемещениях вариационное уравнение теории сред Джеремилло имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkmnl}^J R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ &+ \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkmnl}^J R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkmnl}^J \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i - C_{ijkmnl}^J n_j n_k R_{m,nl} \delta \dot{R}_i \} dF - \\ &- \sum \oint C_{ijkmnl}^J v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения Эйлера теории дают систему трех уравнений четвертого порядка с шестью граничными условиями в каждой неособенной

точке поверхности.

Характерной особенностью теории является наличие условий на ребрах:

$$\sum \oint f_i \delta R_i ds = 0$$

Условия на ребрах можно трактовать как условия непрерывности (при переходе по поверхности через ребро) вектора перемещений R_i и вектора «реберных» сил $f_i = C_{ijkml}^J v_j n_k R_{m,nl}$.

1.3. Теория сред Аэро-Кувшинского (моментная теория упругости, 1960год).

Теория сред Аэро-Кувшинского [3] также является неклассической моделью сплошной среды. В отличие от теории сред Коссера в ней за дополнительные параметры состояния выбраны не свободные повороты ω_i^2 , а вихри перемещений $\omega_i^1 = -R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} / 2$. Доказано [4], что если постулировать пропорциональность свободных поворотов вихрям перемещений (гипотезу Аэро-Кувшинского), теория сред Аэро-Кувшинского является строгим следствием теории Коссера. С другой стороны, теория сред Аэро-Кувшинского может рассматриваться как некая альтернатива теории Джеремилло. Действительно, если градиентная часть потенциальной энергии в теории Джеремилло содержит только градиенты симметричной части градиента перемещений (тензор стесненных деформаций), то градиентная часть в теории Аэро-Кувшинского содержит только градиенты антисимметричной части градиента перемещений (тензор стесненных поворотов или псевдовектор стесненных поворотов). Лагранжиан L теории сред Аэро-Кувшинского может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$
$$U_V = [C_{ijmn}^{11} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{mn}^1 + 4C_{pkql}^{AK} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{11} = C_{mnij}^{11}$$
$$C_{ijmn}^{AK} = C_{mnij}^{AK}$$

Причем при формулировке теории заранее требовалась такая симметрия тензора «моментных» модулей, чтобы выражение объёмной плотности потенциальной энергии содержало только градиенты вихрей перемещений.

Действительно, при выбранной структуре тензора C_{ijmn}^{AK} , выражение объёмной плотности потенциальной энергии приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& 4C_{pkql}^{AK} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1 / 2 = \\
& = 4C_{pkql}^{AK} (-R_{i,jk} \mathcal{E}_{ijp} / 2) (-R_{m,nl} \mathcal{E}_{mnq} / 2) / 2 = (C_{pkql}^{AK} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq}) R_{i,jk} R_{m,nl} / 2 = \\
& = C_{ijkml}^{AK} R_{i,jk} R_{m,nl} / 2
\end{aligned}$$

Кроме того, так как псевдотензор второго ранга $\omega_{p,k}^1$ имеет нулевой след, свертки $C_{pkql}^{AK} \delta_{pk}$ и $C_{pkql}^{AK} \delta_{ql}$, содержащие один и тот же «моментный» модуль, не войдут в выражение потенциальной энергии $C_{ijkml}^{AK} R_{i,jk} R_{m,nl} / 2$, и его можно без ущерба для общности положить равными нулю. Отсюда:

$$\begin{aligned}
C_{ijmn}^{11} &= \lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \\
C_{ijkml}^{AK} &= C_{pkql}^{AK} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} \\
C_{pkql}^{AK} &= (C_1^{AK} + C_2^{AK}) \delta_{pq} \delta_{kl} + (C_1^{AK} - C_2^{AK}) \delta_{pl} \delta_{kq}
\end{aligned}$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Аэро-Кувшинского является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} \\
m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \omega_{i,j}^1} = 4C_{ijkml}^{AK} \omega_{m,n}^1
\end{aligned}$$

Таким образом, теория сред Аэро-Кувшинского допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} .

Вариационное уравнение теории сред Аэро-Кувшинского получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ij} \delta \omega_{i,j}^1] dV = \\
&= \iiint (\sigma_{ij,j} + m_{pq,qj} \mathcal{E}_{ijp} / 2 + P_i^V) \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} + m_{pq,q} \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j - (m_{pq} n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{ijp} / 2)_{,k}] \delta R_i + (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta \dot{R}_i \} dF - \\
&- \sum \oint (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) v_j \delta R_i ds = 0
\end{aligned}$$

Здесь точкой над переменной обозначена нормальная к поверхности производная $\dot{R}_i = R_{i,j} n_j$. $\delta_{jk}^* = \delta_{jk} - n_j n_k$ - «плоский» тензор Кронекера, v_j - орт криволинейной ортогональной системы координат, связанной с ребром кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело $s_i v_j n_k \mathcal{E}_{ijk} = 1$, s_i - орт касательной к ребру, $f_i = (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) v_j$ - «реберные» силы.

В кинематических переменных (перемещениях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint [(2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{k,ki} + \mu^{11} (R_{i,jj} - R_{j,ij}) - (C_1^{AK} + C_2^{AK}) (R_{i,jj} - R_{j,ij})_{,qq} + P_i^V] \delta R_i dV + \\
&+ \oint \{ P_i^F - \lambda^{11} R_{k,k} n_i - \mu^{11} (R_{i,j} + R_{j,i}) n_j + (C_1^{AK} + C_2^{AK}) (R_{i,j} - R_{j,i})_{,qq} n_j + \\
&+ [(C_1^{AK} + C_2^{AK}) R_{m,nq} n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{mnp} \mathcal{E}_{ijp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK}) R_{m,np} n_q \delta_{jk}^* \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp}]_{,k} \} \delta R_i dF - \\
&- [(C_1^{AK} + C_2^{AK}) R_{m,nq} \mathcal{E}_{mnp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK}) R_{m,np} \mathcal{E}_{mnq}] n_q n_j \mathcal{E}_{ijp} \delta \dot{R}_i \} dF - \\
&- \sum \oint [(C_1^{AK} + C_2^{AK}) n_k v_j \mathcal{E}_{mnp} \mathcal{E}_{ijp} + (C_1^{AK} - C_2^{AK}) n_q v_j \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijk}] R_{m,nk} \delta R_i ds = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, формулировка теории сред Аэро-Кувшинского определяется тремя дифференциальными уравнениями повышенного (четвертого) порядка специального вида. Специальный вид определен тем, что из двух векторов, которые возможно построить из вектора перемещений путем четырехкратного дифференцирования, в уравнениях фигурирует только одна их линейная комбинация. Спектр краевых задач определен пятью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности. Действительно, при выделении из $\delta \dot{R}_i$ её проекции по нормали к поверхности, можно убедиться, что соответствующий «статический» множитель тождественно равен нулю за счет свертки симметричного $n_i n_j$ и антисимметричного \mathcal{E}_{ijp} тензоров по индексам i, j :

$$\begin{aligned}
(m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta \dot{R}_i &= (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta \dot{R}_k (\delta_{ik}^* + n_i n_k) = \\
&= (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta (\dot{R}_k \delta_{ik}^*) + (m_{pq} n_q / 2) (n_i n_j \mathcal{E}_{ijp}) \delta (\dot{R}_k n_k) = (m_{pq} n_q \mathcal{E}_{ijp} / 2) n_j \delta (\dot{R}_k \delta_{ik}^*)
\end{aligned}$$

Характерной особенностью теории является наличие условий на ребрах:

$$\sum \oint f_i \delta R_i ds = 0$$

Условия на ребрах можно трактовать как условия непрерывности (при переходе по поверхности через ребро) вектора перемещений R_i и вектора «реберных» сил f_i .

1.4. Теория сред Миндлина (1964год).

Теория сред Миндлина [5] является наиболее общей неклассической моделью сплошной среды. В отличие от теории Коссера в ней учитываются не только антисимметричная часть тензора свободной дисторсии (свободные повороты), а все компоненты тензора свободной дисторсии D_{ij}^2 . Так же не делается никаких предположений о структуре тензора моментных модулей. Лагранжиан L теории Миндлина может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV$$

$$A = \iiint P_i^V R_i dV + \iint P_i^F R_i dF$$

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^M D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{pq} = C_{mnij}^{qp} \quad p, q = 1, 2$$

$$C_{ijkml}^M = C_{mnljk}^M$$

Отсюда:

$$C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^M = & \\
= & C_1^M (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^M (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\
& + C_3^M (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^M (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\
& + C_5^M \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^M \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + C_7^M \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^M \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \\
& + C_9^M \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^M \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^M \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}
\end{aligned}$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Миндлина является наиболее сложной из всех общепризнанных теорий и определяется независимыми кинематическими переменными R_i и D_{ij}^2 . В отличие от теории Коссера, каждая точка среды Миндлина ведет себя не как абсолютно твердое тело, а как упругое тело. Соответственно, независимыми степенями свободы являются не только вектор перемещений R_i и псевдовектор свободных поворотов $\omega_i^2 = -D_{mn}^2 \mathcal{E}_{mni} / 2$ (что свойственно средам Коссера), но и тензор свободных (несовместных) деформаций $\varepsilon_{ij}^2 = (D_{ij}^2 + D_{ji}^2) / 2$.

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 \\
\sigma_{ij}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} = C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \\
m_{ijk} &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij,k}^2} = C_{ijkml}^M D_{mn,l}^2
\end{aligned}$$

Таким образом, теория сред Миндлина допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: в общем случае несимметричных тензоров напряжений σ_{ij}^1 и σ_{ij}^2 второго ранга и тензора моментных напряжений m_{ijk} третьего ранга.

Вариационное уравнение теории сред Миндлина получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{ijk} \delta D_{ij,k}^2] dV = \\
&= \iiint [(\sigma_{ij,j}^1 + P_i^V) \delta R_i + (m_{ijk,k} - \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \iint \{(P_i^F - \sigma_{ij}^1 n_j) \delta R_i + (-m_{ijk} n_k) \delta D_{ij}^2\} dF = 0
\end{aligned}$$

В кинематических переменных (перемещениях и свободных дисторсиях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + (C_{ijkml}^M D_{mn,lk}^2 - C_{ijmn}^{21} R_{m,n} - C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\ + \iint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i + (-C_{ijkml}^M n_k D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2 \} dF = 0$$

Таким образом, формулировка теории сред Миндлина определяется двенадцатью дифференциальными уравнениями второго порядка. Спектр краевых задач определен двенадцатью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

1.5. Теория сред Тупина (1964год).

Теория сред Тупина [6] является одной из наиболее популярных неклассических моделей сплошной среды. В отличие от теории Аэро-Кувшинского и теории Джеремилло в ней не делается никаких предположений о структуре тензора моментных модулей. Лагранжиан L теории Тупина может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \iiint U_V dV \\ U_V = [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml}^T R_{i,jk} R_{m,nl}] / 2$$

Из факта существования плотности потенциальной энергии следует, что тензоры модулей обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{ijmn}^{11} = C_{mnij}^{11} \\ C_{ijkml}^T = C_{mnljk}^T$$

Кроме того, в силу симметрии тензоров стесненных кривизн $R_{i,jk}$ и $R_{m,nl}$ относительно перестановок индексов j,k и n,l , тензор Тупина C_{ijkml}^T так же должен быть симметричным при перестановках в этих парах индексов. Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^T = & \\
= C_1^T (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + & \\
+ C_2^T (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml}) + & \\
+ C_3^T (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + & \\
+ C_4^T (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + & \\
+ C_5^T \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} &
\end{aligned}$$

Отметим, что кинематическая модель теории сред Тупина, так же, как и в теориях Аэро-Кувшинского и Джеремилло, является классической и определяется независимыми кинематическими переменными R_i .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} \\
m_{ijk} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = C_{ijkml}^T R_{m,nl}
\end{aligned}$$

Таким образом, теория сред Тупина допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: симметричного тензора напряжений σ_{ij} второго ранга и тензора моментных напряжений m_{ijk} третьего ранга.

Вариационное уравнение теории сред Тупина получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \iiint [\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_{ijk} \delta R_{i,jk}] dV = & \\
= \delta A - \iiint (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) \delta R_{i,j} dV - \oint m_{ijk} n_k \delta R_{i,j} dF = & \\
= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta R_{i,p} (\delta_{pj}^* + n_p n_j) \} dF = & \\
= \iiint (\sigma_{ij,j} - m_{ijk,jk} + P_i^V) \delta R_i dV + & \\
+ \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij} - m_{ijk,k}) n_j + (m_{ijk} \delta_{pj}^* n_k)_{,p}] \delta R_i - m_{ijk} n_j n_k \delta \dot{R}_i \} dF - \sum \oint m_{ijk} v_j n_k \delta R_i ds = 0 &
\end{aligned}$$

Отметим, что формулировки теорий Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло в «напряжениях» совпадают, а в перемещениях отличаются в

силу различной структуры тензоров моментных модулей C_{mnljk}^T , C_{mnljk}^{AK} и, соответственно, C_{mnljk}^J .

В кинематических переменных (перемещениях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^T R_{m,nlk} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ & + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - C_{ijkml}^T R_{m,nlk}) n_j + (C_{ijkml}^T \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i - C_{ijkml}^T n_j n_k R_{m,nl} \delta \dot{R}_i \} dF - \\ & - \sum \oint C_{ijkml}^T v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, формулировка теории сред Тупина определяется тремя дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Спектр краевых задач определен шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности.

Общей характерной особенностью теорий Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло является наличие условий на ребрах.

1.6. «Простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями (2009г.).

«Простейший» вариант теории сред с сохраняющимися дислокациями (ССД) сформулирован в предположении существования в среде полей сохраняющихся дислокаций [7]. Эта модель характеризуется тем, что градиентная часть потенциальной энергии является квадратичной формой компонентов псевдотензора $\Xi_{ij} = D_{ip,q}^2 \mathcal{E}_{pqj}$ плотности дислокаций Де Вита. Наличие ненулевого псевдотензора плотности дислокаций определяет существование в среде полей дислокаций. Тожественное равенство нулю дивергенции этого псевдотензора определяет локальный закон сохранения полей дислокаций. Таким образом, в данной модели поля дислокаций не могут рождаться или исчезать, а только локально менять свою концентрацию. Лагранжиан L теории может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dV$$

Тензор моментных модулей C_{ipmq}^{BL} имеет следующую структуру:

$$C_{ipmq}^{BL} = C_3^{BL} \delta_{ip} \delta_{mq} + (C_1^{BL} + C_2^{BL}) \delta_{im} \delta_{pq} + (C_1^{BL} - C_2^{BL}) \delta_{iq} \delta_{pm}$$

Отметим, что кинематическая модель теории ССД, совпадает с кинематической моделью теории Миндлина и определяется независимыми кинематическими переменными R_i и D_{ij}^2 .

Из выражения объемной плотности потенциальной энергии U_V следуют формулы Грина, которые определяют силовую модель теории, и дают уравнения закона Гука для соответствующих силовых факторов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} = C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \\ m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}} = C_{ijmn}^{BL} \Xi_{mn} \end{aligned}$$

Таким образом, теория ССД допускает существование в среде следующих внутренних силовых факторов: в общем случае несимметричных тензоров напряжений σ_{ij}^1 и σ_{ij}^2 второго ранга и псевдотензора моментных напряжений m_{ij} второго ранга.

Вариационное уравнение теории ССД получено из условия стационарности лагранжиана:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{ij} \delta \Xi_{ij}] dV = \\ &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + \sigma_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 + m_{in} \delta (D_{ij,k}^2 \mathcal{E}_{jkn})] dV = \\ &= \delta A - \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta R_{i,j} + (-m_{in,k} \mathcal{E}_{jkn} + \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV - \iint m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2 dF = \\ &= \iiint [(\sigma_{ij,j}^1 + P_i^V) \delta R_i + (m_{in,k} \mathcal{E}_{jkn} - \sigma_{ij}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \iint [(P_i^F - \sigma_{ij}^1 n_j) \delta R_i - m_{in} n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2] dF = 0 \end{aligned}$$

В кинематических переменных (перемещениях и свободных дисторсиях) вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + (C_{ijkml}^{BL} D_{mn,lk}^2 - C_{ijmn}^{21} R_{m,n} - C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2] dV +$$

$$+ \iint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i + (-C_{ijkml}^{BL} n_k D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2 \} dF = 0$$

Здесь $C_{ijkml}^{BL} = C_{ipmq}^{BL} \mathcal{E}_{jkr} \mathcal{E}_{nlq}$.

Таким образом, формулировка теории ССД определяется двенадцатью дифференциальными уравнениями второго порядка специального вида. Специальный вид определен тем, что дивергенция уравнений равновесия моментов приводит к локальному закону сохранения $\sigma_{ij,j}^2 = 0$. Следовательно, общий дифференциальный порядок будет ниже, чем в теории Миндлина. Спектр краевых задач определен девятью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности. В этом не трудно убедиться, обратив внимание на то, что в возможной работе моментных силовых факторов на поверхности содержится только шесть из девяти слагаемых:

$$\iint m_m n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{ij}^2 dF =$$

$$= \iint m_m n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta D_{im}^2 (\delta_{mj}^* + n_m n_j) dF =$$

$$= \iint m_m n_k \mathcal{E}_{jkn} \delta (D_{im}^2 \delta_{mj}^*) dF + \iint m_m (n_j n_k \mathcal{E}_{jkn}) \delta (D_{im}^2 n_m) dF = 0$$

Действительно, второй интеграл тождественно равен нулю в силу свертки симметричного тензора $n_j n_k$ с антисимметричным псевдотензором \mathcal{E}_{jkn} . Таким образом, в формулировках краевых задач «простейшей» теории ССД фигурируют только шесть неклассических граничных условий (в дополнение к трем классическим).

1.7. Сравнительный анализ существующих градиентных теорий.

Существующие градиентные теории можно разделить на две группы.

В первую входят теории Тупина, Аэро-Кувшинского и Джеремилло.

Во вторую – теории Миндлина, Коссера и сред с сохраняющимися дислокациями.

Первая группа характеризуется тем, что все теории этой группы

построены на основе классической кинематической модели – каждой точке среды эти теории приписывают три степени свободы – компоненты вектора перемещений. Соответственно, и уравнений равновесия в этих теориях три.

Вторая группа, в противоположность первой, характеризуется тем, что теории этой группы построены на основе неклассической кинематической модели. Каждой точке среды эти теории приписывают дополнительные степени свободы: в теории Коссера – это три компоненты псевдовектора свободных поворотов, а в теории Миндлина и в теории ССД – три компоненты псевдовектора свободных поворотов и шесть компонент тензора свободных деформаций. Соответственно, и уравнений равновесия в этих теориях больше: в теории Коссера – шесть, в теориях Миндлина и ССД – двенадцать.

Теория Тупина является наиболее общей теорией первой группы и содержит теории Аэро-Кувшинского и Джеремилло как свои строгие частные случаи.

Теория Миндлина является наиболее общей теорией второй группы и содержит теорию Коссера и теорию ССД как свои строгие частные случаи.

Таким образом, имеется возможность проводить сравнительный анализ групп, сравнивая теории Тупина и Миндлина, как максимально общих теорий в своих группах.

Можно записать лагранжианы обеих теорий в унифицированном виде, записав потенциальные энергии в терминах стесненных $D_{ij}^1 = R_{i,j}$ и свободных

D_{ij}^2 дисторсий:

В теории Тупина:

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + C_{ijkml}^{11} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^1] / 2$$

В теории Миндлина:

$$U_V = [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2$$

Такой унифицированный вид позволяет придать потенциальной энергии дисторсий в обеих теориях общий универсальный вид:

$$C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q / 2 = [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2] / 2 \quad p, q = 1, 2$$

В то же время потенциальные энергии кривизн нельзя записать подобным же образом. Если все-таки сделать это:

$$U_V = [C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + C_{ijkml}^{pq} D_{ij,k}^p D_{mn,l}^q] / 2$$

Получится обобщение теорий Миндлина и Тупина одновременно (за счет появления слагаемых, билинейных по кривизнам разных сортов, связанных со стесненными и свободными дисторсиями):

$$\begin{aligned} U_V &= [C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + C_{ijkml}^{pq} D_{ij,k}^p D_{mn,l}^q] / 2 = \\ &= [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{11} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^1 + 2C_{ijkml}^{12} D_{ij,k}^1 D_{mn,l}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] / 2 \end{aligned}$$

Если лишить такую обобщенную среду части своих механических свойств, положив нулю тензоры $C_{ijmn}^{12}, C_{ijmn}^{22}, C_{ijkml}^{12}, C_{ijkml}^{22}$, получим теорию Тупина, как строгий частный случай, положив нулю тензоры $C_{ijkml}^{11}, C_{ijkml}^{12}$, получим теорию Миндлина, как другой строгий частный случай.

Таким образом, постулировано обобщение всех известных градиентных теорий, которое содержит их как свои строгие частные случаи.

ГЛАВА 2

ОБЩАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ ДЕФЕКТОВ

В Главе-2 изложена общая кинематическая теория дефектных сплошных сред, позволяющая сформулировать условия существования дефектов различного типа, их зарождения и исчезновения. Исследование кинематики дефектов является основным этапом в формулировке феноменологических моделей теории дефектных сред и составляет наиболее важный элемент в применении вариационных методов при построении соответствующих моделей. Действительно, знание кинематики дефектов позволяет установить необходимый список непрерывных аргументов для корректной формулировки лагранжиана. Особое значение данного исследования состоит, в частности, в том, чтобы установить связь между кинематическими моделями сплошной среды с полями дефектов и известными градиентными моделями сред.

2.1. Кинематика сплошных бездефектных сред

Рассмотрим кинематические связи между двенадцатью зависимыми степенями свободы γ_{ij} , θ , ω_k и R_i , которыми наделен произвольно выбранный бесконечно малый параллелепипед [8].

Запишем кинематические связи в форме расширенных соотношений Коши для компонентов тензора дисторсии:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (2.1)$$

Здесь, как обычно по повторяющимся индексам осуществляется свертка, R_i - вектор перемещений, x_j - радиус-вектор точки среды, γ_{ij} — компоненты тензора девиатора деформаций, θ - объемная деформация, ω_k -

псевдовектор поворотов или упругих вращений, \mathcal{E}_{ijk} - компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} - тензор Кронекера.

Представление (2.1) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие: девиаторную часть, шаровой тензор и ротор. Интегрируя соотношение (2.1) от фиксированной точки M_0 до произвольной точки M_x , получим

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} [\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k\mathcal{E}_{ijk}] dy_j. \quad (2.2)$$

Здесь dy_j - элемент выбранной траектории интегрирования, R_i^0 - значение вектора R_i в точке M_0 . Условия существования криволинейного интеграла в формуле (2.2) запишутся в виде:

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij} \quad (2.3)$$

Роль этих уравнений впервые оценил Папкович [9], обративший внимание на то, что в односвязном теле они являются необходимыми и достаточными условиями существования у тензора дисторсии $D_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k\mathcal{E}_{ijk}$ векторного потенциала R_i . Поэтому соотношения (2.3) названы уравнениями Папковича. Интегрирование соотношения (2.3) дает следующее равенство:

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} (\frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \frac{\partial\theta}{\partial y_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij}) dy_j. \quad (2.4)$$

Здесь ω_i^0 - значение псевдовектора ω_i в точке M_0 . Соответственно условия существования криволинейных интегралов (2.4), приобретают вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} (\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3}\theta\delta_{\beta\mu}) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \mathcal{E}_{m\mu j} = 0. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.5), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений неразрывности позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явном виде, выразив

их через компоненты тензора-девиатора деформаций:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta \mu j} \right) \quad (2.6)$$

Систему уравнений (2.6) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + 3 \int_{M_0}^{M_x} (x_i - y_i) \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta \mu j} \right) dy_j \quad (2.7)$$

Здесь θ^0 и θ_i^0 - значения θ и $\partial\theta/\partial x_i$ в точке M_0 , x_i^0 - координаты точки M_0 .

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (2.6) являются, новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора-девиатора деформаций:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ip} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta \mu p} \right) \mathcal{E}_{pqj} = 0 \quad (2.8)$$

Полученная система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных хотя бы одной функции. Преобразуем (2.2) таким образом, чтобы под знаком криволинейного интеграла осталось выражение, определяемое исключительно деформациями изменения формы. С этой целью воспользуемся процедурой интегрирования по частям и учтем равенства (2.3) и (2.6). В результате, придем к новому выражению для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора-девиатора деформации γ_{ij} и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Этот интеграл обозначен через r_i :

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \theta^0 (x_i - x_i^0) + \frac{1}{3} \theta_j^0 P_{ij}(x^0) + r_i \quad (2.9)$$

$$r_i = \int_{M_o}^{M_x} \{ \gamma_{ik} + (y_l - x_l) \frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{am} \mathcal{E}_{ail} + \frac{1}{2} P_{ij}(y) [- \frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial y_m \partial y_m} + \frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial y_k \partial y_m} + \frac{\partial^2 \gamma_{km}}{\partial y_j \partial y_m} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{lm}}{\partial y_\mu \partial y_m} \delta_{jk}] \} dy_k \quad (2.10)$$

Здесь $P_{ij}(a) = (x_i - a_i)(x_j - a_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij}(x_k - a_k)(x_k - a_k)$.

Таким образом, с точностью до полинома второго порядка, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы. Нетрудно убедиться, что компоненты тензора дисторсии с точностью до линейных полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + \frac{\partial r_k}{\partial x_k},$$

$$\omega_i = \omega_i^0 + \frac{1}{3} \theta_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \mathcal{E}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial r_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial r_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

Записанные кинематические равенства в дальнейшем будут являться базой для построения уточненных моделей сред.

Построена система кинематических связей как последовательная система условий существования вектора перемещений, вектора поворотов и вектора градиентов объемной деформации.

Получены новые выражения для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора девиатора деформации. Эти формулы являются обобщением формул Чезаро.

Получены новые соотношения совместности третьего порядка (2.8), записанные через компоненты тензора девиатора деформаций.

Ниже предлагается классификация кинематических состояний, которая может являться и классификацией кинематических моделей бездефектных сред.

2.2. Классификация кинематических состояний по гладкости.

Докажем теорему [14]:

«Вектор перемещений может быть представлен в форме разложения на потенциальную и вихревую составляющие».

Доказательство.

Рассмотрим систему условий интегрируемости (2.3), (2.6) и (2.8) как систему неоднородных дифференциальных уравнений относительно тензора-девиатора γ_{ij} с правыми частями, зависящими от ω_k и θ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{\beta i}}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu j} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_q} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ip} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu p} \right) \mathcal{E}_{pqj} = 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Решение системы (2.11) можно записать в виде:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \gamma_{ij}^\omega + \gamma_{ij}^\theta \quad (2.12)$$

где γ_{ij}^0 - общее решение однородной системы (2.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{\beta i}^0}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta_{ij} + \gamma_{m\mu}^0 \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu j} \right) = 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_q} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta_{ip} + \gamma_{m\mu}^0 \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu p} \right) \mathcal{E}_{pqj} = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

γ_{ij}^ω - частное решение неоднородной системы (2.11) при $\theta = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{\beta i}^{\omega}}{\partial x_{\alpha}} \mathcal{E}_{\alpha \beta i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha \beta}^{\omega} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu}^{\omega} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\beta \mu j} \right) = 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha \beta}^{\omega} \delta_{ip} + \gamma_{m\mu}^{\omega} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\beta \mu p} \right) \mathcal{E}_{\rho q j} = 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

γ_{ij}^{θ} - частное решение неоднородной системы (2.11) при $\omega_k = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_{\beta i}^{\theta}}{\partial x_{\alpha}} \mathcal{E}_{\alpha \beta i} = \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_{\alpha}} \mathcal{E}_{\alpha i j} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha \beta}^{\theta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu}^{\theta} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\beta \mu j} \right) = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial^3}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta} \partial x_{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha \beta}^{\theta} \delta_{ip} + \gamma_{m\mu}^{\theta} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\beta \mu p} \right) \mathcal{E}_{\rho q j} = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Подставляя найденное решение (2.12) в (2.10) и (2.9), и разделяя криволинейный интеграл на сумму трех интегралов, содержащих соответственно только γ_{ij}^0 , γ_{ij}^{θ} и γ_{ij}^{ω} , получим:

$$R_i = \frac{1}{3} \theta_j P_{ij}(x^0) + G_i + Y_i + J_i \quad (2.16)$$

где: G_i - гармоническая часть вектора перемещений,

$$G_i = R_i^0 + \int_{M_o}^{M_x} \gamma_{ij}^0 dy_j \quad (2.17)$$

Y_i - потенциальная часть вектора перемещений,

$$\begin{aligned} Y_i = & \frac{1}{3} \theta^0 (x_i - x_i^0) + \int_{M_o}^{M_x} [\gamma_{ik}^{\theta} + (y_l - x_l) \frac{\partial \gamma_{km}^{\theta}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\alpha i l} + \\ & + \frac{1}{2} P_{ij}(y) \left(-\frac{\partial^2 \gamma_{jk}^{\theta}}{\partial y_m \partial y_m} + \frac{\partial^2 \gamma_{jm}^{\theta}}{\partial y_k \partial y_m} + \frac{\partial^2 \gamma_{km}^{\theta}}{\partial y_j \partial y_m} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu m}^{\theta}}{\partial y_{\mu} \partial y_m} \delta_{jk} \right)] dy_k \end{aligned} \quad (2.18)$$

J_i - вихревая часть вектора перемещений,

$$J_i = \omega_{\alpha}^0 (x_{\beta} - x_{\beta}^0) \mathcal{E}_{\alpha \beta i} + \int_{M_o}^{M_x} [\gamma_{ij}^{\omega} + (y_l - x_l) \frac{\partial \gamma_{jm}^{\omega}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{\alpha m i} \mathcal{E}_{\alpha i l}] dy_j \quad (2.19)$$

Непосредственно из (2.17) вытекают следующие свойства G_i :

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_j} - \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0 \quad \Delta G_i = 0;$$

Непосредственно из (2.18) вытекают следующие свойства Y_i :

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = 0, \quad \Delta Y_i = \frac{2}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

Непосредственно из (2.19) вытекают следующие свойства J_i :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0, \quad \Delta J_i = 2 \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmi}$$

Изложенные результаты исследования и классификацию кинематических состояний можно свести в таблицу:

	R_i°	ω_i°	θ°	G_i	Y_i	J_i	θ_i°
R_i	+	+	+	+	+	+	+
ω_i	-	+	-	-	-	+	+
θ	-	-	+	-	+	-	+
γ_{ij}	-	-	-	+	+	+	-

Поле перемещений для исследуемой среды, вообще говоря, находится как решение начально-краевой задачи уравнений движения среды. Поэтому решением уравнений движения и определяется конкретный вид функций G_i , Y_i и J_i . Однако, некоторые предварительные соображения о характере функций G_i , Y_i и J_i , об их изменяемости можно сделать на основании анализа кинематики.

Заметим, что кинематическое состояние G_i (2.17) является одновременно и потенциальным и вихревым. Можно предположить, что кинематическое состояние G_i представляет собой «точку ветвления» кинематических состояний на Y_i (потенциальные кинематические состояния) и J_i (вихревые кинематические состояния) и является одновременно «нулевым», простейшим элементом в иерархии потенциальных и вихревых кинематических состояний. Обозначим это символически:

$$Y_i^0 = G_i \quad J_i^0 = G_i,$$

причем, по определению (2.17):

$$\Delta Y_i^0 = 0, \quad \Delta J_i^0 = 0, \quad (2.20)$$

где $\Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Предлагается следующее обобщение. Запишем (2.20) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i^0 - C_Y^0 Y_i^0 &= 0 \\ \Delta J_i^0 - C_J^0 J_i^0 &= 0 \end{aligned}$$

где в данном, конкретном случае $C_Y^0 = 0$ и $C_J^0 = 0$.

Естественно предположить, что первыми элементами потенциальных и вихревых кинематических состояний на этих «ветвях» будут состояния:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i^1 - C_Y^1 Y_i^1 &= 0 \\ \Delta J_i^1 - C_J^1 J_i^1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

являющиеся простейшими обобщениями (2.20).

Забегая вперед, отметим, что классическая теория упругости и «базисная» модель среды, построенная в работе (Лурье, Белов 2000), в общем случае приводит для физически линейной модели к следующим уравнениям относительно Y_i и J_i :

$$\begin{aligned} [\Delta(\dots) - C_Y^1(\dots)][\Delta(\dots) - C_Y^0(\dots)]Y_i &= 0 \\ [\Delta(\dots) - C_J^1(\dots)][\Delta(\dots) - C_J^0(\dots)]J_i &= 0 \end{aligned}$$

Для классической теории упругости $C_Y^1 = C_Y^0 = 0$ и $C_J^1 = C_J^0 = 0$.

Для «базисной» модели среды $C_Y^1 \neq 0$, а $C_Y^0 = 0$ и, аналогично, $C_J^1 \neq 0$, а $C_J^0 = 0$.

Общее решение этих соотношений может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} Y_i &= D_Y^0 Y_i^0 + D_Y^1 Y_i^1 \\ J_i &= D_J^0 J_i^0 + D_J^1 J_i^1, \end{aligned}$$

здесь D_Y^k и D_J^k - коэффициенты линейных форм, которые можно интерпретировать как проекции общих решений Y_i и J_i в функциональных пространствах Y_i^k и J_i^k соответственно.

Операторы приведенных уравнений (точнее - вид соответствующих характеристических уравнений) определяет изменяемость

соответствующих полей перемещений, характер multiscale-эффектов. Таким образом, предлагаемая классификация предполагает классификацию кинематических моделей по краевым эффектам и multiscale-эффектам. Краевые эффекты определяются оператором Лапласа, а multiscale-эффекты определяются параметрами C_Y^i, C_J^i при функции в операторе Гельмгольца.

Отдельно следует подчеркнуть, что именно с оператором Гельмгольца в разрешающих уравнениях связана возможность описания масштабных эффектов в различных моделях сред (моментные модели сред [1]), полевые теории дефектов [15]). Следовательно, и разложение исходного состояния (краевых эффектов и multiscale-эффектов) по базисной системе кинематических состояний - Y_i^k и J_i^k связано со спецификой операторов-сомножителей оператора равновесия.

Сделаем дальнейшие обобщения. Можно предложить иерархию моделей по степени изменяемости решения в следующем виде:

$$\begin{cases} \prod_{n=0}^{n=N} [\Delta(\dots) - C_Y^n(\dots)] \} Y_i = 0 \\ \prod_{m=0}^{m=M} [\Delta(\dots) - C_J^m(\dots)] \} J_i = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

где C_Y^n и C_J^m - физические константы, среди которых могут быть кратные и равные нулю.

Общие решения Y_i и J_i могут быть представлены в форме разложения по базисным кинематическим состояниям Y_i^n и J_i^m :

$$Y_i = \sum_{n=0}^{n=N} D_Y^n Y_i^n, \quad J_i = \sum_{m=0}^{m=M} D_J^m J_i^m$$

Естественно, что построенные предложенным методом системы базисных кинематических состояний будут не ортонормированными, однако имеется единая процедура ортогонализации системы базисных кинематических состояний [16].

Определение: моделью среды класса $Y(N)J(M)$ будем называть такую модель среды, где в соответствии с (2.22) разрешающие уравнения приводятся к

произведению $N + 1$ операторов Гельмгольца над потенциальной частью перемещений и к произведению $M + 1$ операторов Гельмгольца над вихревой частью перемещений. Соотношения (2.22) позволяют ввести естественную классификацию моделей сред с масштабными эффектами. В работе [17] показано, что достаточно широкий круг моделей с модулями упругости разной размерности подпадают под эту классификацию.

Предложена общая структура кинематических состояний для моделей сплошной среды, допускающих описание масштабных эффектов различного типа, которым отвечает различная экспоненциальная изменяемость, соответствующая различной природе взаимодействий.

В следующем разделе предлагается еще один вариант классификации, в основе которой лежит возможность описания кинематики сред с различной степенью "несовместностей", т.е. нарушением условий интегрируемости/совместности.

2.3. Общая кинематическая теория и классификация дефектных сред.

В силу важности этого раздела, здесь приводится структура изложения общей теории полей дефектов. Основная идея заключается в том, что исследуемая кинематическая переменная ранга N представляется в виде конечной суммы кратных градиентов тензоров ранга от $N-1$ до ранга 0 и неинтегрируемого слагаемого ранга N . Последовательные квадратуры исследуемой кинематической переменной будут иметь аналогичную структуру, за исключением интегралов от неинтегрируемых слагаемых. По определению, эти интегралы определяют разрывные функции, и трактуются как поля дефектов. Последовательные «квadrатуры» неинтегрируемого слагаемого ранга N определяют совокупность тензорных полей дефектов ранга от $N-1$ до ранга 0 и объединенных общим свойством «сорт». Соответственно, в кинематической переменной ранга M , меньшего N , будет $(N-M)$ сортов дефектов. Последовательно строятся по возрастанию сложности теории скалярных, векторных, тензорных дефектов.

Формулируется общая кинематическая теория полей дефектов сплошных сред. Дано определение полей дефектов различного уровня сложности и их интерпретация, связанная с известными теоретическими и экспериментальными данными о генерации таких дефектов как дислокации и дисклинации. Установлено иерархическое строение полей дефектов и общие закономерности генерации и уничтожения дефектов.

Предложена классификация кинематических моделей дефектных сред. Изучены кинематические свойства полей дефектов, которые предложено связать с понятиями ранга дефектов, типа дефектов, сортности дефектов, глубиной дефектности.

Показано, что все известные дефекты естественным образом включаются в предложенную классификацию. Так поля

дислокаций и дисклинаций являются соответственно полями дефектов первого и второго ранга. Установлен широкий класс новых типов дефектов. Ниже анализируются последовательности кинематических моделей дефектных сред различной степени сложности, начиная с простейшей модели, для которой может быть введен скалярный потенциал и скалярное поле дефектов.

2.3.1. Кинематическая модель сред с скалярным полем дефектов.

Модель бездефектной среды Коши.

Пусть в области V функцией $D^0(M)$ задано скалярное поле, а также векторное поле перемещений R_i (тензор первого ранга). Определим, при каких условиях вектор непрерывных перемещений может быть представлен как градиент дифференцируемого скаляра D^0 .

$$R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} \quad (2.23)$$

Здесь x_i - координаты радиуса-вектора.

Умножая обе части этого равенства на dx_i и интегрируя от точки M_0 до точки M_x , получим:

$$D^0 = D^0(M_0) + \int_{M_0}^{M_x} R_i dx_i \quad (2.24)$$

Условием однозначного определения скалярной функции D^0 по вектору перемещения R_i в произвольной точке исследуемой среды M_0 является независимость криволинейного интеграла в (2.24) от пути интегрирования, которое совпадает с условием отсутствия вихрей ω_k поля перемещений:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = (-2\omega_k) = 0 \quad (2.25)$$

Здесь \mathcal{E}_{ijk} - псевдотензор Леви-Чивиты.

Будем называть сплошную среду, в которой отсутствуют вихри (2.25) и, следовательно, поле перемещений имеет скалярный потенциал, бездефектной средой Коши. Для такой среды тензор первого ранга R_i может быть представлен как градиент дифференцируемого тензора нулевого ранга D^0 . Известно, что для формального математического описания модели среды в рамках вариационного подхода достаточно определить соответствующий список непрерывных аргументов. Для бездефектной среды Коши в качестве обобщенной координаты кинематического состояния среды может быть взят непрерывный скалярный потенциал D^0 . Таким образом, бездефектная среда Коши является моделью среды с одной степенью свободы.

Модель дефектной среды Коши.

С формальной точки зрения в бездефектной среде Коши вектор перемещений определяется как общее решение однородного уравнения (2.25). Теперь исследуем "дефектную" среду Коши с полем дефектов, которое характеризуется наличием вихрей:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = (-2\omega_k) \neq 0 \quad (2.26)$$

Здесь вектор перемещений как решение (2.26) уже представляется в виде двух слагаемых: неинтегрируемой части D_i^1 и интегрируемой - градиента непрерывного и дифференцируемого скаляра D^0 :

$$R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 \quad (2.27)$$

Слагаемое D_i^1 в (2.27), является частным решением уравнения (2.26) и поэтому определяет часть перемещений, связанную с дефектностью.

Слагаемое $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$ в (2.27) является общим решением однородного уравнения (2.26). Формально проинтегрируем правую часть уравнения (2.27) и получим следующее определение для потенциала перемещений:

$$D = D^0 + D^1 \quad (2.28)$$

Величина D определяет дефектное скалярное поле для среды Коши. Оно

представляется в виде суммы непрерывного и дифференцируемого скалярного поля D^0 и некоторой разрывной части D^1 , определяемой по частному решению D_i^1 уравнения (2.27) с помощью следующего криволинейного интеграла:

$$D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dx_i \quad (2.29)$$

D^1 является полем дефектов (разрывов, скачков) формального потенциала D . Действительно, значение криволинейного интеграла (2.29) в некоторой точке M_0 , зависит от траектории интегрирования, так как по определению

$$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \varepsilon_{ijk} \neq 0. \quad \text{Поэтому можно говорить о существовании «дефектного}$$

скалярного поля» D . Вихри $(-2\omega_k)$ являются источниками дефектов, так как определяют непрерывное поле D_i^1 из (2.26) и (2.27), по которому строится разрывное поле дефектов D^1 в соответствии с (2.29).

Сформулируем результаты кинематического анализа структуры дефектной среды Коши, в которой имеют место завихрения $(-2\omega_k)$, являющиеся источником дефектов D^1 .

1. Для этой среды предполагается существование произвольного векторного поля непрерывных перемещений D_i , которое разделяется на интегрируемую

$$\frac{\partial D^0}{\partial x_i} \quad \text{и неинтегрируемую} \quad D_i^1 \quad \text{составляющие. Интегрируемую часть} \quad \frac{\partial D^0}{\partial x_i}$$

будем в дальнейшем называть еще и стесненными перемещениями, в то время как неинтегрируемую часть D_i^1 будем в дальнейшем называть еще и свободными перемещениями, подчеркивая, тем самым, что величина D_i^1 , определяет часть непрерывного поля перемещений, для которого нельзя определить соответствующий непрерывный скалярный потенциал.

2. Для поля перемещений D_i можно ввести формальный дефектный (разрывный) потенциал:

$$D = D^0 + D^1$$

Этот “потенциал” представлен в виде суммы непрерывного и дифференцируемого потенциала D^0 и разрывного поля дефектов потенциальности D^1 .

Потенциал D^0 соответствует интегрируемой части перемещений $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$. Поле дефектов потенциальности D^1 , соответствует неинтегрируемой части перемещений D_i^1 .

3. Вихри $\omega_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk}$, как источники дефектов D^1 подчиняются следующему закону сохранения в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} = 0$$

В интегральной форме закон сохранения имеет вид:

$$\oint (\omega_k n_k) dF = 0.$$

4. Для дефектной среды Коши основными кинематическими переменными при формулировке лагранжиана модели являются непрерывные и необходимое число раз дифференцируемые поля D^0 и D_i^1 . Отметим здесь, что скалярное поле дефектов формально будет определяться разрывной скалярной функцией D^1 :

$$D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dy_i \quad (2.29)$$

Результаты кинематического анализа дефектной среды Коши можно свести в Таблицу_1.

Таблица 1

Ранг\Сорт	Сорт 0	Сорт 1
D	D^0	D^1
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1

Для дефектной среды Коши в качестве обобщенных переменных

кинематического состояния среды может быть взят непрерывный скалярный потенциал $D^0(M)$ и непрерывное неинтегрируемое поле перемещений D_i^1 . Таким образом, дефектная среда Коши является моделью среды с четырьмя степенями свободы. В случае классической теории упругости, когда интегрируемая $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$ и неинтегрируемая D_i^1 части вектора перемещений не наделяются разными физическими свойствами, в качестве обобщенных переменных могут быть выбраны компоненты непрерывной части вектора перемещений R_i , в соответствии с (2.27).

При дальнейшем изложении понятие дефектного поля переносится на тензор первого ранга - вектор перемещений. Разрывы в векторе перемещений определяются как дислокации. Определение дислокаций как поля скачков перемещений является традиционным, можно даже говорить - классическим. Дислокации достаточно подробно изучены и им посвящен большой объем публикаций. Однако, в целях сохранения целостности изложения, проведем далее все необходимые построения.

2.3.2. Кинематическая модель сред с векторным полем дефектов.

Рассмотрим более сложные среды с дефектным векторным полем перемещений. По аналогии с дефектным скалярным полем D , введем дефектное векторное поле перемещений D_i которое может служить обобщенным (разрывным) векторным потенциалом для тензора второго ранга - тензора дисторсии D_{ij} .

Модель бездефектной среды Папковича-Коссера.

Рассмотрим сначала несимметричный тензор дисторсии d_{ij}^1 , который определяется как градиент некоторого непрерывного векторного поля перемещений R_i .

$$d_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

Записанное несимметричное соотношение Коши можно трактовать как факт существования векторного потенциала для тензора дисторсии. Очевидно, что условие существования такого потенциала записывается в виде:

$$\frac{\partial d_{in}^1}{\partial x_m} \mathfrak{E}_{nmj} = 0 \quad (2.30)$$

Заметим, что здесь наблюдается полная аналогия со скалярным потенциалом для вектора перемещений R_i в бездефектной среде Коши. С другой стороны условие (2.30) - однородное уравнение Папковича, является условием существования криволинейного интеграла при определении вектора перемещений по тензору дисторсии. В этом случае имеется бездефектная среда с непрерывным полем перемещений. Среды, в которых имеется непрерывный векторный потенциал (вектор перемещений) для тензора дисторсии, назовем бездефектными средами Папковича.

В бездефектных средах Папковича вектор перемещений непрерывен, а тензор дисторсии d_{ij}^1 является общим решением однородного уравнения (2.30), что соответствует отсутствию дефектов типа дислокаций. В общем случае бездефектная среда Папковича является средой Коши, в которой имеется непрерывный вектор перемещений. Очевидно, что

$$d_{ij}^1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 \right) = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$$

Также как и среда Коши, среда Папковича может еще содержать скалярные дефекты, т.к. непрерывный вектор перемещений содержит и интегрируемую в смысле (2.24) часть D^0 , и непрерывную, но неинтегрируемую в смысле (2.24) часть D_i^1 .

Модель дефектной среды Папковича-Коссера.

Рассмотрим дефектную среду Папковича-Коссера. Если дисторсия D_{ij} не имеет непрерывного векторного потенциала, условия интегрируемости перемещений не выполняются:

$$\frac{\partial D_{in}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0 \quad (2.31)$$

Будем говорить, что в этом случае соотношения Папковича являются неоднородными.

Непрерывным тензором "несовместности перемещений" является тензор дислокаций Ξ_{ij} [10],[11]. Им определяется неоднородность соотношений Папковича. Если $\Xi_{ij} = 0$ - дисторсия интегрируема и вектор перемещений как потенциал дисторсии непрерывен. Если $\Xi_{ij} \neq 0$ - дисторсия не интегрируема, вектор перемещений как потенциал дисторсии разрывен.

Решение D_{ij} уравнений существования дислокаций (2.31) можно представить в виде суммы общего решения $d_{in}^1 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n}$ однородных и частного решения D_{ij}^2 неоднородных уравнений Папковича:

$$D_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + D_{ij}^2 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 \quad (2.32)$$

Среду с тензором дисторсии D_{ij} , при $D_{ij}^2 \neq 0$, удовлетворяющему равенству (2.32), назовем дефектной средой Папковича-Коссера. Подчеркнем, что в бездефектной среде Папковича тензор дисторсии является интегрируемым (он удовлетворяет условиям интегрируемости (2.30)), а непрерывный вектор перемещений может быть определен из несимметричных соотношений Коши путем интегрирования в квадратурах (формулы Чезаро).

Напротив, для дефектной среды Папковича-Коссера тензор дисторсии D_{ij} в общем случае может быть представлен как сумма интегрируемой части

$$\left(d_{in}^1 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n} \right) \quad \text{и} \quad \text{неинтегрируемой} \quad \text{части} \quad (D_{ij}^2 \neq 0):$$

$D_{ij} = (\text{интегрируемая часть}) + (\text{неинтегрируемая часть})$. Отметим, что имеет место аналогия между соотношениями (2.26) и (2.31), а также между уравнениями (2.27) и (2.32).

На этом аналогия заканчивается. Если в средах Коши

вектор перемещений D_i является непрерывным, то в средах Папковича в общем случае формальный вектор перемещений D_i содержит разрывную часть (дислокации) D_i^2 :

$$D_i = R_i + D_i^2$$

Вектор дислокаций D_i^2 , как составляющая полного дефектного вектора перемещений D_i определен как частное решение неоднородных уравнений существования дислокаций (2.31),(2.32):

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j \quad (2.33)$$

Таким образом, дефектный вектор обобщенных перемещений D_i имеет более разнообразную структуру, чем в средах Коши.

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 \quad (2.34)$$

Сравним (2.34) с (2.27). Наряду с интегрируемой $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$ и неинтегрируемой (но непрерывной) составляющей D_i^1 он имеет и разрывную D_i^2 составляющую (дислокации).

Построим теперь формальный обобщенный потенциал D дефектного вектора перемещений D_i . В качестве слагаемого в нем появляется дополнительный дефект, связанный с третьим слагаемым D_i^2 в представлении обобщенного вектора перемещений D_i :

$$D = D^0 + D^1 + D^2 \quad (2.35)$$

$$D^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^2 dx_i \quad (2.36)$$

Дадим определение ранга модели среды. Рангом среды назовем максимальный ранг непрерывной кинематической переменной (обобщенная координата кинематического состояния среды), содержащей неинтегрируемую составляющую.

Пример. Для сред Коши тензор дисторсии не имеет неинтегрируемой

части и полностью определен через векторный потенциал - вектор перемещений. Вектор перемещений в средах Коши имеет неинтегрируемую составляющую - D_i^1 . Поэтому мы можем называть среды Коши средами с рангом кинематических переменных не выше первого. Или просто - средами первого ранга.

Соответственно, среды Папковича-Коссера можно называть средами второго ранга, так как в этих средах тензор дисторсии уже содержит неинтегрируемую часть D_{ij}^2 .

Сформулируем результаты кинематического анализа для дефектных сред Папковича-Коссера и дадим некоторые формальные определения.

Для сред Папковича-Коссера установлено, что обобщенными координатами кинематического состояния среды, которые можно использовать как аргументы вариационного уравнения при построении соответствующей физической модели, являются следующие непрерывные тензорные объекты:

- непрерывная составляющая дефектного скалярного поля D - непрерывный потенциал D^0 ;

- непрерывная составляющая дефектного векторного поля D_i -

"классический" вектор перемещений $R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1$;

- непрерывный тензор дисторсии $D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2$.

Ранг среды Папковича-Коссера равен двум, т.к. тензор дисторсии D_{ij} содержит неинтегрируемую часть D_{ij}^2 . Свойства составляющих кинематических переменных позволяют ввести понятия сортности. Скалярные, векторные и тензорные объекты с одним и тем же верхним индексом отнесем к объектам одного сорта. Например, кинематические переменные с верхним индексом "2" соответствуют частным решениям (интегралам) от псевдотензора-источника Ξ_{ij} (дислокаций). Если источник дислокаций в среде Папковича-Коссера отсутствует, то среда

Папковича-Коссера вырождается в среду Коши. В свою очередь, среда Коши с псевдотензором-источником скалярных дефектов ω_k вырождается в идеальную, абсолютно бездефектную среду, если положить $\omega_k = 0$. Для пояснения этого понятия приведем следующую таблицу (Таблица 2.), кинематических объектов для сред Папковича-Коссера, построенную в соответствии с определениями (2.32)-(2.36).

Таблица 2

Ранг\Сорт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2
D	D^0	D^1	D^2
D_i	$D_{,i}^0$	D_i^1	D_i^2
D_{ij}	$D_{,ij}^0$	$D_{i,j}^1$	D_{ij}^2

Если источник дислокаций в среде Папковича-Коссера отсутствует, все составляющие в колонке "сорт 2" равны нулю. Тогда первые две строки в таблице полностью определяют кинематику среды Коши (см. табл.1). Для бездефектной среды Коши $\omega_k = 0$. В этом случае в колонке "Сорт 1" следует принять $D^1 = 0$, $D_i^1 = 0$ и $D_{i,j}^1 = 0$ в соответствии с введенными ранее определениями. Таким образом, составляющие кинематических переменных разных рангов, находящиеся в одной и той же колонке таблицы, имеют общее свойство - сорт: они равны нулю или отличны от нуля одновременно с равенством/неравенством нулю соответствующего псевдотензора-источника дефектов.

Для дефектной среды Папковича-Коссера в качестве обобщенных переменных кинематического состояния среды может быть взят непрерывный скалярный потенциал D^0 , непрерывное неинтегрируемое поле перемещений D_i^1 и непрерывная (но неинтегрируемая) часть дисторсии D_{ij}^2 .

Таким образом, дефектная среда Папковича-Коссера является

моделью среды с тринадцатью степенями свободы. Как и в случае классической теории упругости, когда интегрируемая $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$ и неинтегрируемая D_i^1 части вектора перемещений не наделяются разными физическими свойствами, в качестве обобщенных переменных могут быть выбраны компоненты непрерывной части вектора перемещений R_i , в соответствии с (2.27), и компоненты свободной дисторсии D_{ij}^2 . Модель такой среды будет определяться уже двенадцатью степенями свободы, и соответственно, уравнений равновесия тоже должно быть двенадцать

2.3.3. Новая классификация дислокаций на основе введения типов

Даже на этом этапе исследования дефектных сред классификация дефектов представляется достаточно разнообразной и не вписывается в "плоскую" таблицу. Действительно, определим вектор Бюргера в соответствии с (2.33). Выберем траекторию интегрирования по замкнутому контуру, совместив конечную точку траектории интегрирования M_x с начальной точкой M_0 . Тогда, по определению, вектор Бюргера является скачком перемещений при обходе выбранного контура:

$$b_i = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j = \oint D_{ij}^2 dx_j = \oint D_{ij}^2 s_j ds \quad (2.37)$$

здесь s_j - единичный вектор касательной к контуру интегрирования. Проекция вектора R_i^2 в любой точке траектории интегрирования на направление касательной к контуру s_j трактуется как дислокация отрыва, а две проекции R_i^2 в ортогональных направлениях - как дислокации скольжения.

Традиционное разложение дислокаций [10]:

$$\begin{aligned}
b_i &= \oint D_{ij}^2 s_j ds = \oint D_{kj}^2 \delta_{ik} s_j ds = \oint D_{kj}^2 (s_i s_k + v_i v_k + n_i n_k) s_j ds = \\
&= \oint D_{kj}^2 s_i s_k s_j ds + \oint D_{kj}^2 v_i v_k s_j ds + \oint D_{kj}^2 n_i n_k s_j ds = \\
&= \oint (D_{kj}^2 s_k s_j) s_i ds + \oint (D_{kj}^2 v_k s_j) v_i ds + \oint (D_{kj}^2 n_k s_j) n_i ds
\end{aligned}$$

включает два типа дислокаций скольжения: $\oint (D_{kj}^2 v_k s_j) v_i ds$, $\oint (D_{kj}^2 n_k s_j) n_i ds$ и один - дислокаций отрыва: $\oint (D_{kj}^2 s_k s_j) s_i ds$.

Дадим иное определение типов дислокаций. Разложим тензор дисторсии:

$$D_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.38)$$

Здесь симметричная часть тензора дисторсии $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ является тензором деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} D_{ji},$$

тензор-девиатор γ_{ij} (деформации изменения формы), шаровой тензор $\theta \delta_{ij}$ и тензор поворотов имеют соответственно вид:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} D_{ji} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij},$$

$$\theta = D_{ij} \delta_{ij} = D_{kk} \quad (\theta - \text{изменение объема}),$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} - \frac{1}{2} D_{ji}$$

Тензор поворотов $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ в (2.38) можно представить через псевдовектор поворотов ω_k :

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \omega_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = -\frac{1}{2} D_{ij} \mathcal{E}_{ijk}$$

Проведем симметрирование тензора дисторсии (2.38). Неинтегрируемая часть тензора дисторсии D_{ij}^2 симметрируется также. Подставляя разложение D_{ij}^2 в (2.37), определим три новых типа дислокаций:

$$\oint \gamma_{ij}^2 dx_j - \gamma\text{-дислокации},$$

$$\oint \omega_{ij}^2 dx_j - \omega\text{-дислокации},$$

$$\oint \theta^2 dx_i - \theta\text{-дислокации}.$$

В записанных выражениях верхний индекс "2" не показатель степени, а индекс сортности.

Показано [12], [13] что физическая модель сред с сохраняющимися дислокациями позволяет записать выражение медленно меняющейся части потенциальной энергии дислокаций в виде канонической квадратичной формы от γ_{ij}^2 , ω_{ij}^2 и θ^2 . В силу каноничности потенциальные энергии выделенных типов дислокаций не имеют перекрестных членов. Поэтому они могут существовать (в отличие от дислокаций скольжения и отрыва) независимо друг от друга.

Еще одним аргументом в пользу выбора новой классификации дислокаций является существование для каждого нового типа дислокаций своего псевдотензора-источника. Действительно, опираясь на решение (2.32), разложение (2.38) и используя определение псевдотензора-источника дислокаций (2.31), получим:

$$\begin{aligned}\Xi_{ij} &= \frac{\partial D_m}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \frac{\partial}{\partial x_m} (\gamma_{in}^2 + \frac{1}{3} \theta^2 \delta_{in} + \omega_{in}^2) \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \frac{\partial \gamma_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} + \frac{\partial \omega_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \Xi_{ij}^\gamma + \Xi_{ij}^\theta + \Xi_{ij}^\omega\end{aligned}$$

Таким образом, установлены псевдотензоры-источники для всех типов дислокаций новой классификации:

Ξ_{ij}^γ является источником γ -дислокаций,

Ξ_{ij}^θ является источником θ -дислокаций,

Ξ_{ij}^ω является источником ω -дислокаций.

Источники дислокаций определяются следующими равенствами:

$$\Xi_{ij}^\gamma = \frac{\partial \gamma_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}, \quad \Xi_{ij}^\theta = \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj}, \quad \Xi_{ij}^\omega = \frac{\partial \omega_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}.$$

Нетрудно убедиться в том, что каждый тип псевдотензоров-источников в отдельности удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial \Xi_{ij}^\gamma}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \gamma_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Xi_{ij}^\theta}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial x_j \partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Xi_{ij}^\omega}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega_m^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0$$

Имеет место дифференциальный закон сохранения для псевдотензора дислокаций

$$\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

и закон сохранения в интегральной форме

$$\iiint \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} dV = \oiint \Xi_{ij} n_j dF = 0.$$

Следовательно, в рамках моделей сред Папковича-Коссера нельзя описать генерацию и исчезновение дислокаций. Действительно, пусть замкнутая поверхность F образована двумя поверхностями, натянутыми на плоский контур, причем первая поверхность будет иметь неотрицательную кривизну и вектор нормали n_j , а вторая – неположительную кривизну и вектор нормали $-n_j$. Тогда из интегральной формулировки закона сохранения следует, что:

$$\iint_+ \Xi_{ij} n_j dF = \iint_- \Xi_{ij} n_j dF$$

Т.е. поток тензора Ξ_{ij} через любую поверхность, натянутую на выбранный плоский контур, один и тот же.

Рассмотрим поток тензора Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур:

$$\iint_+ \Xi_{ij} n_j dF = \iint_- \Xi_{ij} n_j dF = n_j \iint_0 \Xi_{ij} dF$$

С учетом записанного равенства традиционное определение дислокаций (2.37) через вектор Бюргера приводит к следующему:

$$b_i = \oint D_{ij}^2 s_j ds = \oint D_{ij}^2 (v_n n_m \mathcal{E}_{jnm}) ds = \iint_0 \frac{\partial D_{ij}^2 n_m \mathcal{E}_{jnm}}{\partial x_n} dF = \iint_0 \left(\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \mathcal{E}_{jnm} \right) n_m dF = n_m \iint_0 \Xi_{im} dF$$

Назовем это соотношение второй формой определения вектора Бюргеса. Таким образом, мерой сохраняющихся дислокаций, может служить

неинтегрируемая часть тензора дисторсии D_{ij}^2 – первая форма определения вектора Бюргерса:

$$b_i = \oint D_{ij}^2 dx_j .$$

Одновременно мерой сохраняющихся дислокаций может быть и псевдотензор-источник Ξ_{ij} - вторая форма определения вектора Бюргерса:

$$b_i = \iint_0 \Xi_{im} n_m dF$$

6. Рассмотрим антисимметричную часть дисторсии $D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2$. Для этого свернем ее с псевдотензором Леви-Чивиты и получим соответствующий псевдовектор полных поворотов:

$$T_k = D_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} \mathcal{E}_{ijk} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} = 0 + (-2\omega_k^1) + (-2\omega_k^2) = 0 + T_k^1 + T_k^2$$

Здесь предложено новое обозначение для псевдотензора-источника скалярных дефектов T_k . Оно представляется удобным в связи с введенным ранее понятием сортности. Действительно, в рамках сред Папковича-Коссера существует два сорта скалярных дефектов (D^1 и D^2) и, соответственно, два сорта их псевдотензоров-источников (T_k^1 и T_k^2) с разными свойствами:

$$T_k^1 = \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk}, \quad T_k^2 = D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk}.$$

Псевдовектор стесненных поворотов T_k^1 , как уже отмечалось выше, удовлетворяет закону сохранения. В этом не трудно убедиться из следующей цепочки равенств:

$$\frac{\partial T_k^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = 0$$

Поэтому скалярные дефекты D^1 сорта 1, очевидно, сохраняются.

В то же время псевдовектор свободных поворотов T_k^2 (спинов) не удовлетворяет закону сохранения, т.к. имеют место равенства:

$$\frac{\partial T_k^2}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk}}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{jki} = \Xi_{ii} = T_{ii}^2 \neq 0$$

Поэтому скалярные дефекты D^2 сорта 2 могут рождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях.

Следует отметить, что имеет место общая связь между псевдотензорами-источниками второго и первого рангов T_k и T_{ij} :

$$\frac{\partial T_k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}$$

Приведенный кинематический анализ дефектных сред и предложенная на основе этого анализа классификация составляет часть более общей классификации и является основой для формального обобщения теории дефектных сред, используя метод математической индукции. Действительно, добавим к Таблице_2 следующую строку и столбец и проанализируем новые тензорные объекты (Таблица_3).

Таблица 3

Ранг\Сорт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3
D	D^0	D^1	D^2	D^3
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1	D_i^2	D_i^3
D_{ij}	$\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$	D_{ij}^2	D_{ij}^3
D_{ijk}	$\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j}$	$\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k}$	D_{ijk}^3

Покажем в дальнейшем, что эти объекты соответствуют модели среды третьего ранга и связаны с известными дефектами – дисклинациями, которые определяются как поле скачков псевдовектора поворотов. Будет проанализирована сортность (последний столбец в Таблице_3), исследован дефектный тензор дисторсии второго ранга (обобщение дефектного поля),

разрывы в антисимметричной части которого и определяются, традиционно, как дисклинации.

2.3.4. Кинематическая модель сред с тензорным полем дефектов.

Ранее была установлена формальная аналогия уравнений (2.26) и (2.31) на примере рассмотрения и сравнения сред первого (среды Коши) и второго ранга (среды Папковича-Коссера). Попробуем продолжить эту аналогию.

Рассмотрим тензор дисторсии D_{ij} и тензор кривизн D_{ijn} , который является градиентом тензора дисторсии

$$D_{ijn} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_n}$$

Следуя общему алгоритму, рассмотрим условия интегрируемости тензора кривизн в записанном соотношении:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = 0 \quad (2.39)$$

Условия (2.39) являются условиями существования криволинейного интеграла при определении тензора дисторсии D_{in} через тензор кривизн D_{ijn} .

Назовем их обобщенными соотношениями Сен-Венана.

Иначе говоря, условия интегрируемости (2.39) являются критерием существования тензорного потенциала для тензора кривизн. Этим потенциалом является тензор дисторсии D_{ij} . Имеет место полная аналогия со скалярным потенциалом для вектора R_i (среды Коши) и векторным потенциалом для тензора дисторсии (среды Папковича).

Уравнение (2.39) является обобщением известных уравнений совместности Сен-Венана. Чтобы доказать это, достаточно выделить в тензорном уравнении (2.39) антисимметричную по индексам i, j часть $D_{ijn} = -\omega_{sn} \varepsilon_{ijs}$. В этом частном случае уравнение (2.39) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \omega_{sn}}{\partial x_m} \mathfrak{E}_{nmk} = 0$$

Это уравнение есть условие существования псевдовекторного потенциала ω_i для кривизн $\omega_{sn} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_n}$. С другой стороны именно уравнения Сен-Венана и являются условиями интегрируемости кривизн (условиями существования непрерывного вектора поворотов). Таким образом, уравнение (2.39) как частный случай содержит в себе уравнения Сен-Венана.

Среды, для которых имеется непрерывный тензорный потенциал у тензора кривизн, будем называть средами Сен-Венана. В «бездефектных» средах Сен-Венана тензор дисторсии D_{ij} , может быть однозначно определен по D_{ijn} , ибо условия интегрируемости (2.39) для D_{ijn} выполняются. Иначе говоря, в «бездефектных» средах Сен-Венана отсутствуют обобщенные дисклинации. Также как и в дефектных средах Папковича-Коссера здесь могут присутствовать сохраняющиеся дислокации D_i^2 (дефекты первого ранга) и два сорта скалярных дефектов D^1 и D^2 , D^1 - сохраняющиеся скалярные дефекты, D^2 - скалярные дефекты, способные рождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях D_i^2 .

Построим модель дефектной среды Сен-Венана. По аналогии с предыдущим предположим, что в общем случае условия интегрируемости (2.39) не выполняются, и тогда имеет место неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \mathfrak{E}_{nmk} = \Omega_{ijk} \neq 0 \quad (2.40)$$

Определим интегрируемую и неинтегрируемую части кинематической переменной третьего ранга (кривизны) как соответствующие общее решение однородного уравнения (2.39) и частное решение неоднородного уравнения (2.40). Равенство (2.40) является условием существования дефектов третьего сорта. Псевдотензор-источник Ω_{ijk} дефектов третьего сорта определяет соответствующую неинтегрируемую часть кривизн D_{ijk}^3 в четвертой строке

Таблицы_3:

$$\frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Omega_{ijk}$$

В то же время первые три слагаемых в последней строке Таблицы_3 соответствуют общему решению однородного уравнения (2.39). Имеем с учетом (2.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} - \Omega_{ijk} &= \frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} - \frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \frac{\partial}{\partial x_m} (D_{ijn} - D_{ijn}^3) \mathcal{E}_{nmk} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \right) \mathcal{E}_{nmk} = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} \left(\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, построено общее решение уравнений (2.40) существования дефектов третьего сорта:

$$D_{ijn} = \frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} + D_{ijk}^3 \quad (2.41)$$

Это решение полностью совпадает со структурой последней строки Таблицы_3. Отметим, что аналогия цепочки уравнений (2.27), (2.32), (2.39) так же имеет место. Действительно, до диагональных слагаемых в строках 2, 3 и 4 стоят интегрируемые части соответственно дефектного тензора первого, второго и третьего ранга. На "диагональных" местах, где ранг дефектной кинематической переменной равен её сорту, стоят соответственно не интегрируемые далее составляющие. Наконец, правее "диагональных" составляющих должны располагаться разрывные составляющие, которые являются разными сортами дефектов текущего ранга.

Действительно, проинтегрируем формально уравнение (2.41), получим дефектное тензорное поле второго ранга:

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 + D_{ij}^3 \quad (2.42)$$

Здесь ранг третьего слагаемого D_{ij}^2 совпадает с его сортом. Это слагаемое - непрерывное, но не интегрируемое. Слева от этого слагаемого в (2.42) находятся интегрируемые части дисторсии, а справа - дефект

$$D_{ij}^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijk}^3 dx_k \quad (2.43)$$

В равенстве (2.43) D_{ij}^3 - дефекты второго ранга третьего сорта. D_{ij}^3 являются обобщенными дисклинациями. Заметим, что известные классические дисклинации являются только антисимметричной частью этого разрывного тензора дисторсии D_{ij}^3 .

Повторно интегрируя (2.42) получим выражение для дефектного поля первого ранга:

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 + D_i^3 \quad (2.44)$$

Здесь ранг второго слагаемого D_i^1 совпадает с его сортом. Это слагаемое является непрерывным, но неинтегрируемым. Слагаемое, стоящее слева от D_i^1 в (2.44) является интегрируемой частью дефектного поля первого ранга, а справа располагаются дефекты первого ранга - дислокации разных сортов:

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j \quad - \text{дислокации второго сорта (три типа сохраняющихся}$$

дислокаций) и $D_i^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^3 dx_j \quad - \text{дислокации третьего сорта (три типа дислокаций, способных рождаться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях).$

Последующее интегрирование (2.44) даст формальное выражение для дефектного поля нулевого ранга:

$$D = D^0 + D^1 + D^2 + D^3 \quad (2.45)$$

Здесь ранг первого слагаемого D^0 совпадает с его сортом. Это единственное непрерывное слагаемое. Слагаемые, стоящие справа от него определяют

дефекты нулевого ранга разных сортов: $D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dx_i$, $D^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^2 dx_i$ и

$D^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^3 dx_i$ - дефекты нулевого ранга, соответственно первого, второго и

третьего сорта. Необходимость введения сортности как свойства дефектов и обусловлено тем, чтобы при определении свойств дефектов одного ранга избежать следующих громоздких определений:

$$D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dx_i - \text{сохраняющиеся скалярные дефекты};$$

$$D^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^2 dx_i - \text{скалярные дефекты, способные рождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях};$$

$$D^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^3 dx_i - \text{скалярные дефекты, способные рождаться и исчезать на дислокациях, которые, в свою очередь, могут рождаться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях}.$$

Проведенный кинематический анализ сред третьего ранга показал, что имеется полное соответствие между содержимым ячеек Таблицы_3 и слагаемыми последовательных квадратур (2.41), (2.42), (2.44), (2.45) уравнений существования дефектов третьего сорта (2.40).

Исследуем теперь свойства псевдотензоров-источников. Для этого последовательно образуем свертки каждой кинематической переменной, начиная с ранга, равного трем, с псевдотензором Леви-Чивиты.

Псевдотензор-источник дислокаций T_{ij} образуется сверткой псевдотензора Леви-Чивиты с тензором кривизн третьего ранга:

$$T_{ij} = D_{inn} \mathcal{E}_{nmj} = \left(\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_m \partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial D_m^2}{\partial x_m} + D_{inn}^3 \right) \mathcal{E}_{nmj} = 0 + 0 + \Xi_{ij} + D_{inn}^3 \mathcal{E}_{nmj} = T_{ij}^2 + T_{ij}^3$$

Здесь $T_{ij}^2 = \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}$ - псевдотензор-источник сохраняющихся дислокаций

(сорт 2). $T_{ij}^3 = D_{inn}^3 \mathcal{E}_{nmj}$ - псевдотензор-источник дислокаций, способных рождаться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях (сорт 3).

Действительно:

$$\frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 D_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0$$

$$\frac{\partial T_{ij}^3}{\partial x_j} = \frac{\partial D_{inn}^3}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nnj} = \frac{\partial D_{inn}^3}{\partial x_j} \mathcal{E}_{mjn} = \Omega_{inn} = T_{inn}^3 \neq 0$$

Псевдотензор-источник скалярных дефектов T_k образуется сверткой псевдотензора Леви-Чивиты с тензором дисторсии второго ранга:

$$T_k = D_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = \left(\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 + D_{ij}^3 \right) \mathcal{E}_{ijk} = 0 + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^3 \mathcal{E}_{ijk} = 0 + T_k^1 + T_k^2 + T_k^3$$

Записанное выше равенство позволяет дать следующие естественные определения трем сортам псевдотензоров-источников первого ранга:

$$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = T_k^1, \quad D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} = T_k^2, \quad D_{ij}^3 \mathcal{E}_{ijk} = T_k^3$$

Нетрудно убедиться, что из этих определений вытекают следующие свойства источников:

$$\frac{\partial T_k^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_j \partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} \equiv 0, \quad \frac{\partial T_k^2}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}^2 \neq 0, \quad \frac{\partial T_k^3}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^3}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}^3 \neq 0 \quad (2.46)$$

Напомним, что в конце раздела 2.3.3 установлена аналогичная общая связь

$$\text{между полными псевдотензорами-источниками } T_k \text{ и } T_{ii} : \quad \frac{\partial T_k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}.$$

Рассмотрим теперь основные типы дефектов второго ранга в дефектных средах Сен-Венана.

$$\begin{aligned} D_{ij}^3 &= \int_{M_0}^{M_x} D_{ijk}^3 dx_k = \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ijk}^3 + \frac{1}{3} \theta_k^3 \delta_{ij} - \omega_{qk}^3 \mathcal{E}_{ijq}) dx_k = \\ &= \int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ijk}^3 dx_k + \frac{1}{3} \delta_{ij} \int_{M_0}^{M_x} \theta_k^3 dx_k - \mathcal{E}_{ijq} \int_{M_0}^{M_x} \omega_{qk}^3 dx_k = \\ &= \gamma_{ij}^3 + \frac{1}{3} \theta^3 \delta_{ij} - \omega_q^3 \mathcal{E}_{ijq} \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в записанном выражении определяет поле разрывов псевдовектора поворотов. Именно таким образом традиционно и определяются дисклинации.

Слагаемые, полученные разложением разрывной части дисторсии D_{ij}^3 по типам, дают естественные определения типов дисклинаций, включая и «классические» дисклинации:

$$\omega_q^3 = \int_{M_0}^{M_x} \omega_{qk}^3 dx_k - \text{«классические» дисклинации,}$$

$$\gamma_{ij}^3 = \int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ijk}^3 dx_k - \text{двойникование,}$$

$$\theta^3 = \int_{M_0}^{M_x} \theta_k^3 dx_k - \text{кавитация.}$$

Однако, как следует из построений, «классические» дисклинации определяет только антисимметричная часть D_{ij}^3 . Симметричная часть D_{ij}^3 определяет дефекты иной тензорной природы: девиаторная часть γ_{ij}^3 определяет поле разрывов деформаций изменения формы и поэтому названа двойникованием [12], [13]. Шаровая часть θ^3 определяет поле разрывов деформации изменения объема и названа [12], [13] кавитацией.

Симметрируя правую часть уравнения (2.40) по первым двум индексам, получим определения псевдотензоров-источников для дисклинаций, кавитации и двойникования

$$\Omega_{ijk} = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{3} \Theta_k \delta_{ij} - \Omega_{qk} \mathcal{E}_{ijq} \quad (2.47)$$

В результате, можно записать условия существования полей разрывов отдельно для формоизменения, изменения объёма и поворотов. Условие существования скачков в тензорном поле свободного формоизменения γ_{ijn}^3 дает определение псевдотензора-источника двойникования. С учетом равенств (2.40),(2.47) получим:

$$\frac{\partial \gamma_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Gamma_{ijn}$$

Условие существования скачков свободного изменения объёма θ_n^3 даст определение псевдотензора-источника кавитации:

$$\frac{\partial \theta_n^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Theta_k$$

Наконец запишем и условие существования классических дисклинаций -

скачков в тензорном поле свободных поворотов ω_{pn}^3 , которое дает одновременно определение псевдотензора-источника классических дисклинаций:

$$\frac{\partial \omega_{pn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Omega_{pk}$$

Когда $\Omega_{pk} = 0$ последние уравнения переходят в классические уравнения Сен-Венана.

Поля кривизн будут интегрируемыми или неинтегрируемыми в зависимости от того, равны ли нулю или нет соответствующие псевдотензоры-источники дисклинаций Ω_{ij} , кавитации Θ_j и двойникования Γ_{ijk} . Если псевдотензоры-источники Ω_{ij} , Θ_j и Γ_{ijk} дифференцируемы, то они каждый в отдельности удовлетворяют соответствующим дифференциальным законам сохранения:

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x_k} = 0$$

В заключение, учитывая определение псевдотензоров-источников можно установить и общую связь между псевдотензорами-источниками второго и третьего рангов:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial D_{inn}}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nmj} = \Omega_{inn} = T_{inn} \quad (2.48)$$

Соотношения (2.48) отражают свойства источников дефектов и аналогичны уравнениям (2.46).

Таким образом, доказано, что предложенная классификация, нашедшая отражение в Таблице_3 действительно является полной и может быть использована для прогноза свойств дефектных сред, с рангом дефектов выше двух. Эта классификация фактически позволяет прогнозировать новые типы дефектов. В частности, для сред третьего ранга теоретически предсказано существование кавитации и двойникования. Также предсказана возможность рождения и уничтожения дислокаций при отсутствии классических дисклинаций.

Для дефектной среды Сен-Венана в качестве обобщенных переменных кинематического состояния среды может быть взят непрерывный скалярный потенциал D^0 , непрерывное неинтегрируемое поле перемещений D_i^1 , непрерывная (но неинтегрируемая) часть дисторсии D_{ij}^2 и свободные кривизны D_{ijk}^3 . Таким образом, дефектная среда Сен-Венана является моделью среды с сорока степенями свободы. Как и в случае классической теории упругости, когда интегрируемая $\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$ и неинтегрируемая D_i^1 части вектора перемещений не наделяются разными физическими свойствами, в качестве обобщенных переменных могут быть выбраны компоненты непрерывной части вектора перемещений R_i , в соответствии с (2.27). Модель такой среды будет определяться тридцатью девятью степенями свободы, и соответственно, уравнений равновесия тоже должно быть тридцать девять.

2.3.5. Кинематическая модель дефектных сред ранга N.

Развиваемая методика построения теории дефектных сред, позволяет осуществить более широкое обобщение и предложить алгоритм построения кинематической модели сред заданного ранга N. Для этого проведем аналогию с построением модели сред с сохраняющимися дислокациями. Действительно, при построении этой модели (среды ранга N=2) привлекаются кинематические переменные двух последовательных рангов: псевдотензор-источник дислокаций и тензор дисторсии имеют ранг два (N), а дефектный вектор перемещений и вектор дислокаций - ранг равный единице (N-1).

Будем называть сохраняющийся псевдотензор-источник ранга N псевдотензором-источником мультидислокаций $T_{\dots ij}^{N-2}$, кинематическую переменную ранга N, имеющую неинтегрируемую часть, - мультидисторсией

$D_{\dots ij}^{N-2}$. Соответственно, кинематическую переменную ранга (N-1), которая будет служить дефектным потенциалом для мультидисторсии, назовем тензором дефектных мультиперемещений $D_{\dots ij}^{N-1}$. Её непрерывную составляющую $D_{\dots ij}^{N-2}$ назовем тензором мультиперемещений $R_{\dots ij}^{N-2}$ а разрывную составляющую $D_{\dots ij}^{N-1}$ назовем мультидислокациями $D_{\dots ij}^N$.

Определим сохраняющийся псевдотензор-источник мультидислокаций $T_{\dots ij}$ ранга N следующим образом:

$$\frac{\partial T_{\dots ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.49)$$

Тогда поле мультидисторсии будет определено общим решением уравнений сохранения (2.49):

$$T_{\dots ij} = \frac{\partial D_{\dots in}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \quad (2.50)$$

Выражение (2.50) дает представление общего решения уравнения (2.49). С другой стороны его можно трактовать как неоднородные уравнения совместности, т.е. как обобщенные на ранг N неоднородные уравнения Папковича.

Представляя решение уравнения (2.50) как сумму общего решения $\frac{\partial R_{\dots i}}{\partial x_j}$ однородного уравнения (2.50) и частного решения $D_{\dots ij}^N$ неоднородного, получим:

$$D_{\dots ij} = \frac{\partial R_{\dots i}}{\partial x_j} + D_{\dots ij}^N \quad (2.51)$$

Антисимметричная часть уравнений (2.51) дает определение псевдотензора-источника ранга (N-1) и, соответственно, его разложение по сортам (N-1) и N:

$$T_{...i} = D_{...nm} \mathcal{E}_{nmi} = \frac{\partial R_{...n}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmi} + D_{...nm}^N \mathcal{E}_{nmi} = T_{...i}^{N-1} + T_{...i}^N \quad (2.52)$$

С другой стороны, равенства (2.52) и (2.50) позволяют установить общую связь между псевдотензором-источником ранга (N-1) и, соответственно, псевдотензором-источником ранга N:

$$\frac{\partial T_{...i}}{\partial x_j} = \frac{\partial D_{...nm}}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nmi} = T_{...ii}$$

Интегрирование уравнений (2.51) дает определение дефектного тензора мультиперемещений

$$D_{...i} = R_{...i} + D_{...i}^N$$

и тензора мультидислокаций

$$D_{...i}^N = \int_{M_0}^{M_x} D_{...ij}^N dx_j$$

Тензор непрерывных мультиперемещений разложим на интегрируемую $S_{...}$ и неинтегрируемую $D_{...i}^{N-1}$ части:

$$R_{...i} = \frac{\partial S_{...}}{\partial x_i} + D_{...i}^{N-1}$$

По определению, неинтегрируемая часть мультиперемещений удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial D_{...n}^{N-1}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmi} = T_{...i}^{N-1} \neq 0 \quad (2.53)$$

Как следует из (2.53), псевдотензор-источник $T_{...i}^{N-1}$ удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial T_{...i}^{N-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 D_{...n}^{N-1}}{\partial x_m \partial x_j} \mathcal{E}_{nmi} \equiv 0 \quad (2.54)$$

При этом из (2.52) следует, что псевдотензор-источник $T_{...i}^N$ не удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial T_{...i}^N}{\partial x_j} = T_{...ii}^N \neq 0 \quad (2.55)$$

Итак, с использованием равенств (2.49) и (2.50) получены соотношения (2.54)

и (2.55), которые отличаются рангом входящих в них тензорных объектов. Уравнения (2.54) и (2.55) являются исходными при определении дефектной сплошной среды ранга $N-1$, в то время как (2.49) и (2.50) являлись исходными при определении дефектной сплошной среды ранга N . Первоначально выбирался конечный ранг среды N . Поэтому после N шагов этого алгоритма, очевидно, приходим к полю мультиперемещений ранга ноль (скалярному полю) $D = D^0 + D^1 + \dots + D^{N-1} + D^N$. На этом процедура построения последовательности дефектных сред естественным образом заканчивается.

Таким образом, предложена общая кинематическая теория дефектов. Эта теория, опираясь на известные в теории дефектов сведения о дислокациях и дисклинациях, позволяет прогнозировать новые поля дефектов, указывает условия их генерации и исчезновения. Сложность структуры различных полей дефектов привела к необходимости введения новых понятий (ранг дефектов, сорт дефектов, тип дефектов), позволяющих сформулировать достаточно общую непротиворечивую классификацию дефектов. Тем не менее, представляется целесообразным определить еще одно свойство - глубины дефектности. Понятие глубины дефектности позволяет указать иерархию причин, определяющих зарождение и исчезновение дефектов.

Рассмотрим таблицу 4, построенную для сред N -ого ранга, содержащую составляющие последовательных квадратур уравнений существования сохраняющихся (“материнских”) дефектов в среде ранга N .

Таблица 4.

Ранг\С орт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3	Сорт N
D	D^0	D^1	D^2	D^3	D^N
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1	D_i^2	D_i^3	D_i^N
D_{ij}	$\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$	D_{ij}^2	D_{ij}^3	D_{ij}^N
D_{ijk}	$\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j}$	$\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k}$	D_{ijk}^3	D_{ijk}^N
.....
$D_{\underbrace{ijk\dots}_{N}}$	$\frac{\partial^N D^0}{\underbrace{\dots \partial x_k \partial x_j \partial x_i}_N}$	$\frac{\partial^{(N-1)} D_i^1}{\underbrace{\dots \partial x_k \partial x_j}_{N-1}}$	$\frac{\partial^{(N-2)} D_{ij}^2}{\underbrace{\dots \partial x_k}_{N-2}}$	$\frac{\partial^{(N-3)} D_{ij}^3}{\underbrace{\dots}_{N-3}}$	$D_{\underbrace{ijk\dots}_{N}}^N$

Обратим внимание на то, что все дефекты, расположенные выше диагонали на одинаковое количество ячеек обладают следующими общими свойствами: дефекты $D^1, D_i^2, D_{ij}^3, \dots, D_{\underbrace{ijk\dots}_{N-1}}^N$ - сохраняющиеся дефекты. Дефекты $D^2, D_i^3, D_{ij}^4, \dots, D_{\underbrace{ijk\dots}_{N-2}}^N$ могут рождаться и исчезать на сохраняющихся дефектах. Дефекты $D^3, D_i^4, D_{ij}^5, \dots, D_{\underbrace{ijk\dots}_{N-3}}^N$ могут рождаться и исчезать на дефектах, которые, в свою очередь, могут рождаться и исчезать на сохраняющихся дефектах. И так - далее. Эти группы дефектов можно описать с помощью числового параметра $h = s - r$, где s - сорт дефекта, r - ранг дефекта. Параметр h мы будем называть глубиной дефектности. Глубина дефектности показывает, в составе какой по счету квадратуры кинематической переменной появляется данный дефект. Так сохраняющиеся дислокации D_i^2 появляются в первой квадратуре дисторсии D_{ij} , сохраняющиеся дисклинации D_{ij}^3 появляются в

первой квадратуре кривизн D_{ijk} . Они имеют глубину дефектности равную 1. А вот дислокации D_i^3 , способные рождаться и исчезать на сохраняющихся дисклинациях D_{ij}^3 , появляются во второй квадратуре кривизн D_{ijk} . Так же во второй квадратуре дисторсии D_{ij} появляются скалярные дефекты D^2 , которые могут рождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях D_i^2 .

Можно дать следующую визуальную интерпретацию глубины дефектов: все дефекты с одинаковой глубиной дефектности лежат на одной и той же диагонали Таблицы_4. Диагонали одинаковой глубины дефектности лежат выше главной диагонали. Причем чем больше глубина дефектности, тем больше расстояние между этой диагональю и главной диагональю.

2.4. Разрыхление или обратимое образование нового объема тела.

Введем понятие разрыхления или обратимого образования нового объема тела. Для этого привлечем мысленный эксперимент, иллюстрирующий физический смысл уравнений совместности. Разрежем тело на совокупность параллелепипедов и деформируем их так, чтобы в каждом параллелепипеде с координатами центра инерции $\{x, y, z\}$ дисторсия $D_{ij} = R_{ij} + D_{ij}^2 = D_{ij}(x, y, z)$ была задана произвольным образом. Свободные дисторсии не подчиняются соотношениям совместности деформации и поэтому не позволяют обеспечить «плотную упаковку» тела, составленного из деформированных по закону $D_{ij}^2(x, y, z) \neq 0$ элементов, в отличие от стесненной дисторсии $R_{i,j} = R_{i,j}(x, y, z)$. Очевидно, что при отсутствии дислокаций $D_{ij}^2 = 0$ «упаковка» деформированных элементов максимально компактная, а при их наличии – менее компактная. Будем называть этот эффект разрыхлением, определяемым наличием свободной дисторсии $D_{ij}^2 \neq 0$. На основании приведенного выше мысленного эксперимента можно трактовать

разрыхление как образование нового объема при нагружении тела с дислокациями. Особенно наглядно разрыхление при наличии только θ -дислокаций. В этом случае полная дисторсия имеет вид:

$$D_{ij} = R_{i,j} + D_{ij}^2 = R_{i,j} + \theta^2 \delta_{ij} / 3$$

Полное изменение объема тела ΔV можно вычислить следующим образом:

$$\Delta V = \iiint D_{ij} \delta_{ij} dV = \iiint (R_{k,k} + \theta^2) dV = \iiint R_{k,k} dV + \iiint \theta^2 dV$$

Здесь первое слагаемое является изменением объема деформированного тела без дислокаций, а второе слагаемое - разрыхление (образование нового объема при нагружении тела с θ -дислокациями). При такой формулировке $R_{k,k}$ можно трактовать как плотность изменения объема идеальной (бездефектной) среды, а θ^2 - как плотность разрыхления (образования нового объема). Вполне оправданным будет назвать этот эффект и пористостью. При наличии всех трех типов дислокаций следует ожидать существование трех типов нового объема, соответственно: θ -, γ - и ω -объемов.

2.5. Разрыхление, или обратимое образование новой поверхности.

Совершенно аналогично может быть введено понятие разрыхления или обратимого образования новой поверхности тела. Тот же мысленный эксперимент, иллюстрирующий физический смысл уравнений совместности, в приложении к поверхности позволяет утверждать, что при отсутствии дислокаций $D_{ij}^2 = 0$ «упаковка» деформированных элементов поверхности максимально компактная, а при их наличии – менее компактная. Будем называть этот эффект разрыхлением поверхности, определяемым наличием свободной дисторсии $D_{ij}^2 \neq 0$ на поверхности. Аналогично, можно трактовать разрыхление как образование новой поверхности при нагружении тела с дислокациями. Рассмотрим в качестве примера разрыхление поверхности при

наличии только θ -дислокаций. В этом случае полная дисторсия имеет вид:

$$D_{ij} = R_{i,j} + D_{ij}^2 = R_{i,j} + \theta^2 \delta_{ij} / 3$$

Полное изменение поверхности тела ΔF можно вычислить следующим образом:

$$\Delta F = \oint\!\!\!\oint D_{ij} \delta_{ij}^* dF = \oint\!\!\!\oint (R_{i,j} \delta_{ij}^* + \theta^2 2/3) dV = \oint\!\!\!\oint R_{i,j} \delta_{ij}^* dF + \oint\!\!\!\oint 2\theta^2 / 3 dF$$

Здесь $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - n_i n_j$ - плоский тензор Кронекера. Первое слагаемое является изменением поверхности деформированного тела без дислокаций, а второе слагаемое – разрыхление поверхности (образование новой поверхности при нагружении тела с θ -дислокациями). При такой формулировке $R_{i,j} \delta_{ij}^*$ можно трактовать как поверхностную плотность изменения поверхности идеальной (бездефектной) среды, а $2\theta^2 / 3$ - как поверхностную плотность разрыхления поверхности (образования новой поверхности). При наличии только θ -дислокаций в среде можно трактовать образование новой поверхности как раскрытие пор на поверхности тела изнутри тела. При наличии всех трех типов дислокаций на поверхности, следует ожидать существование трех типов образования новой поверхности, соответственно: θ -, γ - и ω -поверхностей.

2.6. Структура поля разрывов перемещений.

Как было показано в разделах 2.3.2 и 2.3.3., вектор дислокаций или (что то же) вектор разрывов перемещений в общем случае является разрывным векторным полем.

Микроструктуры в дефектных средах. Будем рассматривать, как некий наблюдательный эксперимент, факт гладкости берегов как микро-, так и макротрещины. Попробуем истолковать этот экспериментальный факт с точки зрения механики дефектной среды. Пусть точки некоторой плоскости в дефектной среде получили под внешним воздействием полное

перемещение $D_i = R_i + R_i^2$. Непрерывная часть перемещений R_i определит тогда некоторую поверхность с нормалью n_i , в которую деформируется исходная плоскость, а разрывная часть R_i^2 определит относительное движение «сдвоенных» точек этой поверхности, принадлежащих разным её сторонам. Проекция $R_i^2 n_i$ определит раскрытие микротрещины нормального отрыва, а проекции $R_j^2(\delta_{ij} - n_i n_j)$ - относительное скольжение берегов микротрещины, при условии, что проекции $R_i^2 n_i$ и $R_j^2(\delta_{ij} - n_i n_j)$ являются непрерывными функциями гауссовых координат рассмотренной поверхности или исходной плоскости. В противном случае, ни о какой упорядоченной микроструктуре говорить нельзя, и мы возвращаемся к сплошной дефектной среде, не обладающей никакой микроструктурой.

Пока предположим, что в дефектной среде существуют поверхности, обладающие тем свойством, что для любой замкнутой траектории, точки которой принадлежат этой поверхности, вектор Бюргерса b_i равен нулю. Тогда вектор разрывов перемещений R_i^2 не зависит от выбора траектории интегрирования, лежащей на этой поверхности, и является непрерывной вектор-функцией гауссовых координат на такой поверхности. Назовем такую поверхность «поверхностью Бюргерса».

Фиксируем на поверхности Бюргерса некоторую точку M_0 , от которой будем проводить траектории интегрирования (полностью лежащие на этой поверхности) для вектора разрывов перемещений R_i^2 . Тогда в силу определения поверхности Бюргерса, R_i^2 будет непрерывной функцией конечной точки траектории интегрирования M_x . Определим кривую, на которой $R_i^2(\alpha, \beta) = 0$ (α, β - гауссовы координаты на поверхности Бюргерса). Таким естественным образом может быть определена граница упорядоченной микроструктуры. Если кривая $R_i^2(\alpha, \beta) = 0$ замкнута, её можно трактовать как контур микротрещины, так как в точках этой кривой (по определению) разрывы в перемещениях отсутствуют, и берега

микротрещины сходятся. Если кривая $R_i^2(\alpha, \beta) = 0$ не замкнута, то она обязательно пересечется с поверхностью тела и (в дополнение к линиям пересечения поверхности Бюргерса с поверхностью тела) определит контур некоторой микроструктуры, которую в этом случае также будем называть микротрещиной. Любую точку кривой $R_i^2(\alpha, \beta) = 0$ удобно выбрать в качестве начальной точки M_0 траектории интегрирования для R_i^2 .

Теорема. Через любую точку тела можно провести плоскость Бюргерса $g_j x_j = 1$ с нормалью g_j .

Доказательство.

Уравнение плоскости Бюргерса дает линейную связь между дифференциалами координат траектории интегрирования, лежащей на этой плоскости $g_j dx_j = 0$. Чтобы сохранить равноправие координат и их дифференциалов, введем связь $g_j dx_j = 0$ в определение вектора разрывов на векторе неопределенных множителей Лагранжа λ_i :

$$R_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^2 dx_j = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^2 dx_j - \int_{M_0}^{M_x} \lambda_i g_j dx_j = \int_{M_0}^{M_x} (d_{ij}^2 - \lambda_i g_j) dx_j$$

Из определения плоскости Бюргерса следует, что:

$$\frac{\partial(d_{im}^2 - \lambda_i g_m)}{\partial x_n} \mathcal{E}_{mij} = 0 \Rightarrow d_{im}^2 - \lambda_i g_m = \frac{\partial R_i^2}{\partial x_m} \Rightarrow d_{im}^2 = \frac{\partial R_i^2}{\partial x_m} + \lambda_i g_m \Rightarrow \lambda_i = d_{im}^2 g_m - \frac{\partial R_i^2}{\partial x_m} g_m$$

Вводя $\delta_{kj}^* = (\delta_{kj} - g_k g_j)$, получим структуру тензора свободной дисторсии на плоскости Бюргерса:

$$d_{ij}^2 = \frac{\partial R_i^2}{\partial x_k} \delta_{kj}^* + (d_{ik}^2 g_k) g_j$$

Таким образом, вектор разрывов перемещений является не только непрерывным, но и дважды дифференцируемым векторным полем на плоскости Бюргерса. Это дает возможность исследовать на плоскости Бюргерса поле разрывов перемещений на экстремум.

Замечание 1. Следует обратить внимание на то, что на плоскости Бюргеса девять компонент тензора свободной дисторсии (несимметричный тензор

второго ранга) выражаются через шесть независимых кинематических переменных: три компоненты непрерывного вектора разрывов перемещений R_i^2 и три компоненты вектора-столбца $(d_{ik}^2 g_k)$.

Замечание 2. Интуитивно понятно, что три оставшихся независимых кинематических переменных должны определять геометрию плоскости/поверхности Бюргера.

2.7. Заключение.

Кратко перечислим результаты проведенного исследования.

1. Установлены новые поля дефектов - скалярные поля дефектов.
2. Предложена новая классификация дислокаций - дефектов первого ранга.

Для каждого нового типа дислокаций

⊕ $\gamma_{ij}^2 dx_j$ - γ -дислокации,

⊕ $\omega_{ij}^2 dx_j$ - ω -дислокации,

⊕ $\theta^2 dx_j$ - θ -дислокации.

существует и определен свой псевдотензор-источник, подчиняющийся соответствующему закону сохранения.

$$\Xi_{ij}^\gamma = \frac{\partial \gamma_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}, \quad \Xi_{ij}^\theta = \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj}, \quad \Xi_{ij}^\omega = \frac{\partial \omega_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}.$$

$$\frac{\partial \Xi_{ij}^\gamma}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \gamma_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Xi_{ij}^\theta}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial x_j \partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Xi_{ij}^\omega}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0$$

3. Установлены два новых типа полей дефектов второго ранга: наряду с известными дефектами второго ранга - дисклинациями (поле разрывов поворотов) - согласно общей теории существуют еще кавитация и двойникование (поля разрывов деформации изменения объема и деформации изменения формы).

4. Дан прогноз возможности рождения и уничтожения дислокаций в

отсутствие классических дисклинаций. В соответствии с развитой здесь теорией, возможность рождения и уничтожения дислокаций на классических дисклинациях относится только к одному из трех типов дислокаций, ω -дислокациям. В то же время θ -дислокации могут рождаться/исчезать на сохраняющейся кавитации. Параллельно γ -дислокации могут рождаться/исчезать на сохраняющемся двойниковании.

5. Прогнозируется существование дефектов любого конечного ранга.

6. Установлена иерархическая структура источников дефектов: источником псевдотензора-источника ранга $N-1$ является след псевдотензора-источника ранга N .

7. Для любого ранга дефектов прогнозируется существование конечного числа сортов дефектов выбранного ранга. Количество сортов в каждом ранге дефектов связано с максимальным рангом сохраняющегося тензора-источника дефектов, существующего в рассматриваемой среде. Например, в соответствии с Таблицей_3, для среды Сен-Венана (ранг 3), скалярные дефекты (ранг 0) имеют три сорта, дислокации (ранг 1) имеют два сорта, а дисклинации (ранг 2) могут быть только одного сорта.

8. В рамках предложенной классификации для любого сорта дефектов возможно существование конечного числа рангов дефектов выбранного сорта. Количество рангов в каждом сорте дефектов связано с рангом сохраняющегося псевдотензора-источника дефектов выбранного сорта. Например, в соответствии с той же Таблицей_3, для среды Сен-Венана (ранг 3), дефекты сорта 1 содержат только дефект нулевого ранга, дефекты сорта 2 содержат как скаляр, так и вектор (сохраняющиеся дислокации), а дефекты сорта 3 содержат и скаляр, и вектор (генерируемые дислокации), и тензор второго ранга (сохраняющиеся дисклинации).

9. Все дефектные среды классифицированы по максимальному рангу псевдотензоров-источников сохраняющихся дефектов, или по максимальному рангу непрерывной, но не интегрируемой кинематической

переменной.

Изложенная в этой главе кинематическая теория полей дефектов позволяет обосновано выбрать список аргументов для вариационного описания моделей дефектных сред. Выбор той или иной кинематической структуры дефектной среды определяет возможность описания тех или иных физических свойств моделируемой среды.

Так модели, построенные на классической кинематике, в принципе не могут служить основой построения теории мелкодисперсных композитов. Действительно, мелкодисперсные включения можно трактовать как дислокации замещения в матрице. То же самое можно сказать и о плохо дегазированной матрице: пузырьки газа можно трактовать как вакансии. Такие дислокации не рождаются и не исчезают, поэтому теорию мелкодисперсных композитов можно строить только как модель дефектной среды с сохраняющимися дислокациями.

В качестве другого примера можно привести среды, в которых допустимы фазовые переходы. Малая область дочерней фазы может быть рассмотрена как родившаяся дислокация замещения в материнской фазе. Построение модели такой среды на базе сред с сохраняющимися дислокациями уже нельзя считать корректным. Минимально необходимой моделью здесь является модель дефектной среды с генерируемыми дислокациями и сохраняющимися дисклинациями.

ГЛАВА 3 «КИНЕМАТИЧЕСКИЙ» ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП.

3.1. «Кинематический» вариационный принцип как частный случай принципа возможных перемещений.

Принцип возможных перемещений [17], [18] является наиболее общим, апробированным и широко распространенным вариационным принципом. С его помощью одинаково легко строятся разнообразные физические модели как обратимых, так и необратимых процессов [19], [20]. Кинематический вариационный принцип [21] можно охарактеризовать (определить) как принцип возможных перемещений с системой связей, наложенных на перемещения (кинематические переменные). Характерной чертой «кинематического» вариационного принципа является то, что в нем возможная работа обобщенных внутренних сил p_i сводится к возможной работе сил связей $f_k(q_i)=0$, наложенных на обобщенные кинематические переменные q_i :

$$p_i \delta q_i = \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \delta q_i = \lambda_k \delta f_k(q_i) = 0$$

Эта трактовка дает возможность интерпретировать λ_k как неопределенные множители Лагранжа, а $f_k(q_i)=0$ как k уравнений связи между кинематическими переменными. Отсюда следует, что кинематическая модель среды есть совокупность кинематических связей $f_k=0$, определяющая и среду, и действующие в ней «внутренние силы». Представляется, что «кинематический» вариационный принцип можно считать вариационным развитием «постулата А», предложенного Ланцошем [22]. Построение той или иной физической модели среды сводится к построению набора обобщенных реактивных силовых факторов p_i по

выбранной системе связей $f_k = 0$. Таким образом, метод неопределенных множителей Лагранжа является и средством однозначного определения спектра силовых взаимодействий p_i в выбранной среде, т.е. формулировки силовой модели.

Установленные в Главе_2 кинематические связи будут использованы в этой главе для формулировок выражений возможной работы внутренних сил в различных моделях сред с полями сохраняющихся дислокаций. Использован дедуктивный способ изложения: сначала формулируется наиболее общая и сложная модель, а потом рассмотрены её более простые частные случаи. Последовательно рассмотрены следующие модели:

- общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций [23],
- «Простейшая» модель [16],
- Когезионно-адгезионная модель [24], [25],
- «Полная» модель.

3.2. Алгоритм построения физических моделей сред в соответствии с «кинематическим» вариационным принципом.

Сформулируем общую схему получения физических моделей сред с усложненной кинематикой. Далее везде предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы. В соответствии с «кинематическим» вариационным принципом физически линейная модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Алгоритм построения обратимой, физически линейной модели сплошной среды сводится к следующему:

- Выбирается кинематическая модель среды: постулируется набор кинематических связей, определяющих кинематические свойства среды.
- Возможная работа внутренних сил строится согласно методу

неопределенных множителей Лагранжа с использованием связей, определяющих кинематическую модель.

- Берутся по частям слагаемые, содержащие множители с производными от вариаций обобщенных кинематических переменных. Возможная работа внутренних сил преобразуется в линейную вариационную форму. Определяется список аргументов.

- Выписываются условия интегрируемости линейной вариационной формы (условия существования потенциальной энергии). Выводятся обобщенные формулы Грина, которые определяют силовую модель,

- В предположении физической линейности и интегрируемости линейной вариационной формы строится потенциальная энергия.

- По сформулированной потенциальной энергии с помощью обобщенных формул Грина строятся физические соотношения – уравнения закона Гука.

- По потенциальной энергии строится лагранжиан.

- Из условия стационарности лагранжиана выводятся уравнения Эйлера и естественные граничные условия.

3.3. Кинематические модели сред Папковича-Коссера.

Рассмотрим класс кинематических моделей сплошной среды, в котором присутствуют «классические» дефекты – дислокации. В отличие от сред Коши этот класс определяется появлением дополнительной группы кинематических связей – неоднородных соотношений Папковича, которым выше была дана интерпретация условий существования в среде сохраняющихся дислокаций. Среды Папковича-Коссера отличаются от сред Коши большим количеством степеней свободы. Если в средах Коши каждая точка среды обладала тремя независимыми степенями свободы (компоненты вектора перемещений), то в средах Папковича-Коссера каждая точка среды обладает двенадцатью степенями свободы: три компоненты вектора

перемещений, три компоненты псевдовектора поворотов, и шесть компонент тензора деформаций. Причем в рассматриваемом случае ни компоненты тензора деформаций, ни компоненты псевдовектора поворотов не выражаются через производные от перемещений (иначе она совпадала бы с моделями сред Коши). В противном случае - они были бы зависимыми степенями свободы. В Главе_2 было показано, что тензор дисторсии в данном классе моделей наряду с производными от перемещений содержит неинтегрируемые слагаемые, которые по определению не могут быть выражены через градиент произвольного непрерывного вектора (в том числе и вектора перемещений).

3.3.1. Общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций

Пусть кривизны D_{ijk} в среде определены следующим образом:

$$D_{ijk} = \frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \quad (3.1)$$

Здесь D^0, D_i^1, D_{ij}^2 - кинематические переменные нулевого, первого и второго рангов, которые в Главе_2 трактовались соответственно как потенциал интегрируемой части перемещений, неинтегрируемая часть перемещений и неинтегрируемая (свободная) дисторсия. Можно убедиться, что в соответствии с (3.1) псевдотензор плотности дисклинаций T_{ijk} тождественно равен нулю:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = T_{ijk} \equiv 0 \quad (3.2)$$

То есть (3.2) является необходимым и достаточным условием отсутствия полей дисклинаций в рассматриваемой среде. С другой стороны антисимметричная часть (3.1) определяет ненулевые поля сохраняющихся дислокаций. Действительно, сворачивая (3.1) с тензором Леви-Чивиты, получим ненулевой тензор плотности сохраняющихся дислокаций Де Витта:

$$D_{inm} \mathcal{E}_{nmj} = \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0$$

Таким образом, проверено, что в среде со связями (3.1) существуют поля сохраняющихся дислокаций и отсутствуют поля дисклинаций. Соответственно (3.2) является необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнений (3.1). Это означает, что обобщенные соотношения Коши для полного тензора дисторсии D_{ij} могут быть получены в виде квадратур уравнений (3.1)

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 = D_{ij}^1 + D_{ij}^2 \\ D_{ij}^1 &= \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \\ R_i &= \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Последующая квадратура $D_i = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij} dx_j$ дает определение вектора дефектных перемещений D_i и вектора дислокаций D_i^2 :

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 \quad (3.4)$$

В разложении (3.4) $D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j$ - дислокации второго сорта (три типа сохраняющихся дислокаций). Поле дефектных перемещений D_i (3.4) можно представить как сумму непрерывной части перемещений $R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1$ и поля разрывов перемещений D_i^2 , обусловленных сохраняющимися дислокациями.

$$D_i = R_i + D_i^2 \quad (3.5)$$

Непрерывное поле дисторсии (3.3) также может быть представлено как сумма двух полей непрерывных дисторсий $D_{ij}^1 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и D_{ij}^2 (соответственно - стесненной и свободной дисторсии):

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + D_{ij}^2 \quad (3.6)$$

Соотношение (3.1), которое является общим решением условия отсутствия дефектов третьего сорта (3.2), может быть представлено в таком же виде:

$$D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \quad D_{ijk} = D_{ijk}^1 + D_{ijk}^2 \quad (3.7)$$

Таким образом, в качестве непрерывных аргументов лагранжиана формулируемой теории могут быть выбраны: непрерывная часть вектора перемещений R_i в соответствии с (3.5), дисторсии двух сортов D_{ij}^1 , D_{ij}^2 в соответствии с (3.6) и кривизны двух сортов D_{ijk}^1 , D_{ijk}^2 в соответствии с (3.7). Здесь, также, следует учесть сформулированные выше связи между этими кинематическими переменными:

$$D_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j} \quad D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = R_{i,jk} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \quad (3.8)$$

Связи (3.8) являются кинематической моделью формулируемой среды.

Возможная работа внутренних сил в рассматриваемой модели принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} = & \iiint [\sigma_{ij}^1 \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + \sigma_{ijk}^1 \delta(D_{ijk}^1 - \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k}) + \sigma_{ijk}^2 \delta(D_{ijk}^2 - \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k})] dV + \\ & + \oint [a_{ik}^1 \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) \delta_{jk}^* + a_{ijq}^1 \delta(D_{ijk}^1 - \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k}) \delta_{qk}^* + a_{ijq}^2 \delta(D_{ijk}^2 - \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k}) \delta_{qk}^*] dF + \\ & + \sum \oint [b_i^1 \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) s_j + b_{ij}^1 \delta(D_{ijn}^1 - \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_n}) s_n + b_{ij}^2 \delta(D_{ijn}^2 - \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n}) s_n] ds = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь n_i - орт нормали к поверхности, s_i - орт касательной к ребру поверхности (если таковое существует), $\delta_{ij}^* = \delta_{ij} - n_i n_j$ - «плоский» тензор Кронекера на поверхности среды, $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ijn}^1, \sigma_{ijn}^2$ - неопределенные множители Лагранжа, являющиеся силовыми факторами, обеспечивающими выполнение соответствующих кинематических связей (3.8) внутри объема среды, $a_{ik}^1, a_{ijk}^1, a_{ijk}^2$ - на поверхности среды, и $b_i^1, b_{ij}^1, b_{ij}^2$ - на ребрах поверхности среды. Обратим внимание: так как производные на поверхности определены только

в касательной плоскости, а на ребрах – только в направлении орта касательной к ребру s_i , на поверхности используются только те связи, которые содержат «касательные» производные вида $\delta_{ij}^* \partial(\dots) / \partial x_j$, а на ребрах – производные вдоль ребра $s_i \partial(\dots) / \partial x_i$.

Таким образом, модель (3.9) является наиболее общей моделью сред с сохраняющимися дислокациями. В следующей Главе_4 будет показано, что эта модель приводит к теории, являющейся обобщением моделей Миндлина и Тупина. Из неё, как частные случаи, могут быть получены как все известные градиентные теории, так и ряд новых.

3.3.2. «Простейшая» модель сред с сохраняющимися дислокациями.

Для сред Папковича-Коссера зависимыми кинематическими переменными являются вектор перемещений среды R_i , непрерывная и интегрируемая часть тензора дисторсии D_{ij}^1 , непрерывная (но неинтегрируемая) часть тензора дисторсии D_{ij}^2 и тензор плотности дислокаций («материнских» дефектов для этой среды): Ξ_{ij} .

Между ними существуют связи, которые определяют их различные кинематические свойства.

Стесненная дисторсия D_{ij}^1 удовлетворяет однородным уравнениям Папковича:

$$\frac{\partial D_{in}^1}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = 0$$

Свободная дисторсия D_{ij}^2 удовлетворяет неоднородным уравнениям Папковича:

$$\frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}$$

Однородные уравнения Папковича интегрируются в общем виде с помощью векторного потенциала R_i :

$$D_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

Таким образом, между 30 зависимыми степенями свободы: R_i - 3 компоненты, D_{ij}^1 - 9 компонент, D_{ij}^2 - 9 компонент, Ξ_{ij} - 9 компонент установлены 18 кинематических связей: 9 несимметричных соотношений Коши и 9 неоднородных уравнений Папковича. В результате, в такой кинематической модели имеется двенадцать $((3+9+9+9)-(9+9)=12)$ независимых степеней свободы. Из несимметричных соотношений Коши все компоненты стесненной дисторсии D_{ij}^1 выражаются через производные от компонентов вектора перемещений R_i . Точно так же, все компоненты тензора дислокаций Ξ_{ij} выражаются через производные от компонентов тензора свободной дисторсии D_{ij}^2 . Естественно считать поэтому, что R_i и D_{ij}^2 - независимые степени свободы. Выражение возможной работы внутренних сил, обеспечивающих выполнение установленных связей, будет иметь вид:

$$\iiint [\sigma_{ij} \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ij} \delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial D_{im}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj})] dV = 0 \quad (3.10)$$

Можно отметить, что модель такой среды может быть получена как непосредственно (что и осуществлено в этом параграфе), так и как частный случай (3.9) при следующих упрощениях:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij} \\ \sigma_{ijk}^1 = 0 \\ \sigma_{ijk}^2 = m_{iq} \mathcal{E}_{jkq} \end{cases} \begin{cases} a_{ik}^1 = 0 \\ a_{ijq}^1 = 0 \\ a_{ijq}^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} b_i^1 = 0 \\ b_{ij}^1 = 0 \\ b_{ij}^2 = 0 \end{cases}$$

Такая модель игнорирует существование независимых внутренних силовых факторов на поверхности тела и на ребрах поверхности. В объеме тела такая модель предполагает, что полный тензор моментных напряжений первого сорта σ_{ijk}^1 отсутствует, а второго сорта σ_{ijk}^2 сводится только к своей антисимметричной по последним двум индексам части.

3.3.3. Когезионно-адгезионная модель среды.

Так же, как и в классе моделей сред Коши, в средах Папковича-Коссера можно установить связи не только в 3D, но и в 2D. Учет в 2D соотношений Коши приводит к появлению адгезионных свойств поверхности среды [24]. Поэтому естественно ожидать, что учет в 2D неоднородных уравнений Папковича приведет к появлению дополнительных поверхностных взаимодействий и свойств [25]. Здесь, конечно же, следует учесть только те неоднородные уравнения Папковича, которые не содержат производных по нормали к поверхности. Выражение возможной работы реактивных сил, обеспечивающих выполнение установленных связей как в 3D, так и в 2D будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \iiint [\sigma_{ij}\delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ij}\delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj})]dV + \\ & + \iint [a_{ik}\delta(d_{ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j})(\delta_{jk} - n_j n_k) + m_i\delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj})n_j]dF = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Помимо непосредственного вывода этой модели, осуществленного в этом параграфе, её также можно сформулировать как частный случай модели (3.9). Для этого следует упростить кинематическую модель, обнуляя «лишние» реактивные силовые факторы:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij} \\ \sigma_{ijk}^1 = 0 \\ \sigma_{ijk}^2 = m_{iq}\mathcal{E}_{jkq} \end{cases} \quad \begin{cases} a_{ik}^1 = a_{ik} \\ a_{ijq}^1 = 0 \\ a_{ijq}^2 \delta_{qk}^* = m_i \mathcal{E}_{jkp} n_p \end{cases} \quad \begin{cases} b_i^1 = 0 \\ b_{ij}^1 = 0 \\ b_{ij}^2 = 0 \end{cases}$$

Такая модель игнорирует существование независимых внутренних силовых факторов на ребрах поверхности. На поверхности тензор адгезионных моментных напряжений первого сорта a_{ijq}^1 отсутствуют, а второго сорта a_{ijq}^2 сводится к псевдовектору адгезионных моментов m_i . В объеме тела такая модель предполагает, что полный тензор моментных напряжений первого

сорта σ_{ijk}^1 отсутствует, а второго сорта σ_{ijk}^2 сводится только к своей антисимметричной по последним двум индексам части.

3.3.4. «Полная» модель среды с сохраняющимися дислокациями.

Попытка наделить ребра поверхности индивидуальными свойствами в средах с сохраняющимися дислокациями по аналогии с реберной физикой сред Коши приводит к тому, что следует выделить в системе уравнений Папковича только те уравнения, которые не содержат производных в двух ортогональных к ребру направлениях. Таких уравнений в системе уравнений Папковича нет. Следовательно, «полная» кинематическая модель сред с сохраняющимися дислокациями будет содержать в качестве связей соотношения Коши в 3D+2D+1D и соотношения Папковича в 3D+2D.

$$\begin{aligned}
 & \iiint [\sigma_{ij} \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ij} \delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj})] dV + \\
 & + \iint [a_{ik} \delta(d_{ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j})(\delta_{jk} - n_j n_k) + m_i \delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}) n_j] dF + \\
 & + \sum \oint b_i \delta(D_{ij}^1 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) s_j ds = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Помимо непосредственного вывода этой модели, осуществленного в этом параграфе, её так же, как и модели (3.10), (3.11), можно сформулировать как частный случай модели (3.9). Для этого следует упростить кинематическую модель, сокращая спектр реактивных силовых факторов:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij} \\ \sigma_{ijk}^1 = 0 \\ \sigma_{ijk}^2 = m_{iq} \mathcal{E}_{jkq} \end{cases} \quad \begin{cases} a_{ik}^1 = a_{ik} \\ a_{ijq}^1 = 0 \\ a_{ijq}^2 \delta_{qk}^* = m_i \mathcal{E}_{jkp} n_p \end{cases} \quad \begin{cases} b_i^1 = b_i \\ b_{ij}^1 = 0 \\ b_{ij}^2 = 0 \end{cases}$$

Такая модель игнорирует существование менисковых напряжений первого b_{ij}^1 и второго сорта b_{ij}^2 на ребрах поверхности. На поверхности тензор адгезионных моментных напряжений первого сорта a_{ijq}^1 отсутствует, а

второго сорта a_{ijq}^2 сводится к псевдовектору адгезионных моментов m_i . В объеме тела такая модель предполагает, что полный тензор моментных напряжений первого сорта σ_{ijk}^1 отсутствует, а второго сорта σ_{ijk}^2 сводится только к своей антисимметричной по последним двум индексам части.

3.4. Заключение.

Здесь следует обратить внимание на то, что учет адгезионных и менисковых свойств в когезионных моделях можно осуществлять в разной последовательности.

Первая последовательность заключается в том, что кинематическая модель определяет сразу дефектную среду и последовательно уточняется в 3D, в 3D+2D, в 3D+2D+1D.

Вторая последовательность заключается в том, чтобы выбрать в качестве фундамента модель идеальной среды («классической» или градиентной) в 3D+2D+1D. Далее дополнять её связями, определяющими существование дислокаций соответственно в 3D, в 3D+2D, в 3D+2D+1D.

ГЛАВА 4 ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

В главе сформулирован спектр моделей сред с полями сохраняющихся дислокаций. В качестве максимально полной и сложной модели сред с сохраняющимися дислокациями рассмотрена общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций [23]. Все остальные модели получены как её частные случаи. Частные случаи определяются соответствующим упрощением структуры тензоров модулей, что приводит к отсутствию в лагранжианах частных моделей того или иного слагаемого в потенциальной энергии. В свою очередь, такой подход позволяет создать «конструктор» моделей дефектных и идеальных (бездефектных) сред с определенным набором физических свойств.

1. Рассмотрены строгие частные модели сред с полями сохраняющихся дислокаций без адгезионных свойств:

- модель поврежденных дислокациями сред Тупина,
- «классическая» модель Миндлина,
- модель сред с невзаимодействующими между собой типами полей дислокаций,
- «простейшая» модель сред с сохраняющимися дислокациями,
- модель сред с ω -дислокациями (теория сред Коссера),
- модель сред с θ -дислокациями (теория пористых сред),
- модель сред с γ -дислокациями,
- алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями.

2. Как строгие частные модели сред с сохраняющимися дислокациями рассмотрен спектр градиентных моделей идеальных (бездефектных) сред:

- модель идеальных (бездефектных) сред Тупина,
- модель сред Аэро-Кувшинского,
- модель сред Джеремилло,

- «простейшая» модель когезионных взаимодействий.

3. Рассмотрен спектр моделей сред с различными адгезионными свойствами поверхностей с убывающей степенью сложности. Последовательно рассмотрены:

- модель «антисимметрично-градиентной» адгезии,

- модель «симметрично-градиентной» адгезии,

- «упрощенная» модель с градиентными адгезионными свойствами поверхности, включающую и идеальную, и «поврежденную» адгезии, и взаимодействие между ними,

- модель с «поврежденной» и идеальной адгезией, с учетом взаимодействия между ними,

- модель с идеальными адгезионными свойствами поверхности.

4. Дано объяснение нестабильности экспериментальных значений модулей среды в градиентных моделях.

4.1. Общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций.

В Главе_2 было дано определение кинематических переменных второго и третьего ранга с различными свойствами интегрируемости. Этим свойствам было дано название - «сорт». Дисторсии первого сорта D_{ij}^1 интегрируемы, и формулы Чезаро, записанные относительно них, дают выражение непрерывной части перемещений (перемещения первого сорта D_i^1). В свою очередь, дисторсии второго сорта D_{ij}^2 не интегрируемы, поэтому формально записанные относительно них формулы Чезаро дают выражение разрывного векторного поля перемещений второго сорта D_i^2 (дислокаций). Выделение свойства «сорт» имеет большое значение, так как вариационные постановки не допускают использования разрывных полей в качестве аргументов функционалов. В Главе_3 сформулирован и применен «кинематический»

вариационный принцип, который дает возможность последовательно и достаточно формально учитывать все необходимые кинематические связи, свойственные изучаемой среде, в том числе и связи, обусловленные требованием непрерывности. В соответствии с (3.9) возможная работа внутренних сил, согласно «кинематическому» вариационному принципу, преобразуется к линейной вариационной форме, и определяются структура и аргументы плотностей потенциальных энергий:

$$\begin{aligned}
\delta\bar{U} = & \iiint \left[\frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial x_j} \delta R_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ijk}^1}{\partial x_k} + \sigma_{ij}^1 \right) \delta D_{ij}^1 + \frac{\partial \sigma_{ijk}^2}{\partial x_k} \delta D_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^1 \delta D_{ijk}^1 + \sigma_{ijk}^2 \delta D_{ijk}^2 \right] dV + \\
& + \iint \left[\left(\frac{\partial a_{ik}^1}{\partial x_j} \delta_{jk}^* - \sigma_{ij}^1 n_j \right) \delta R_i + \left(\frac{\partial a_{ijq}^1}{\partial x_k} \delta_{qk}^* + a_{ik}^1 \delta_{jk}^* - \sigma_{ijk}^1 n_k \right) \delta D_{ij}^1 + \left(\frac{\partial a_{ijq}^2}{\partial x_k} \delta_{qk}^* - \sigma_{ijk}^2 n_k \right) \delta D_{ij}^2 + \right. \\
& + a_{ijq}^1 \delta (D_{ijk}^1 \delta_{qk}^*) + a_{ijq}^2 \delta (D_{ijk}^2 \delta_{qk}^*) \left. \right] dF + \\
& + \sum \oint \left[\left(\frac{\partial b_i^1}{\partial x_j} s_j - a_{ik}^1 v_k \right) \delta R_i + \left(\frac{\partial b_{ij}^1}{\partial x_n} s_n + b_i^1 s_j - a_{ijq}^1 v_q \right) \delta D_{ij}^1 + \left(\frac{\partial b_{ij}^2}{\partial x_n} s_n - a_{ijq}^2 v_q \right) \delta D_{ij}^2 + \right. \\
& + b_{ij}^1 \delta (D_{ijn}^1 s_n) + b_{ij}^2 \delta (D_{ijn}^2 s_n) \left. \right] ds + \\
& + \sum \left[-b_i^1 \delta R_i - b_{ij}^1 \delta D_{ij}^1 - b_{ij}^2 \delta D_{ij}^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Если полученная линейная вариационная форма интегрируема, то существует такой потенциал (потенциальная энергия), что его вариация равна возможной работе внутренних сил в форме (4.1.1). Следовательно, по (4.1.1) можно выяснить структуру потенциальной энергии U :

$$U = \iiint U_v dV + \iint U_F dF + \sum \oint U_s ds + \sum U_p \tag{4.1.2}$$

Здесь: U_v - объёмная плотность потенциальной энергии,

U_F - поверхностная плотность потенциальной энергии,

U_s - погонная плотность потенциальной энергии ребер (если они есть),

U_p - потенциальная энергия угловых точек (если они есть).

Как уже было неоднократно показано [7], [21], [24-32] вектор перемещений должен быть исключен из списков аргументов плотностей, чтобы в предельном случае неградиентной бездефектной среды потенциальная энергия совпадала с выражением потенциальной энергии классической теории упругости. В соответствии с (4.1.1) и этой оговоркой, аргументами

плотностей в общем случае являются:

$$U_V = U_V(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijk}^1, D_{ijk}^2) \quad (4.1.3)$$

$$U_F = U_F(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijq}^1 \delta_{qk}^*, D_{ijq}^2 \delta_{qk}^*) \quad (4.1.4)$$

$$U_S = U_S(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijk}^1 s_k, D_{ijk}^2 s_k) \quad (4.1.5)$$

$$U_P = U_P(D_{ij}^1, D_{ij}^2) \quad (4.1.6)$$

Для физически линейных сред плотности потенциальных энергий записываются: как квадратичная форма независимых кинематических переменных и их градиентов внутри тела с изотропными механическими свойствами, а на поверхности, ребрах и угловых точках – как квадратичные формы с соответствующей анизотропией.

Для каждой плотности потенциальной энергии можно записать свои формулы Грина, определяющие силовые факторы соответственно: в объеме тела, на поверхности, ребрах и угловых точках. Для объемных силовых факторов формулы Грина имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^1} & \sigma_{ij}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} \\ \sigma_{ijn}^1 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijn}^1} & \sigma_{ijn}^2 &= \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijn}^2} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Формулы Грина (4.1.7) естественным образом дают возможность определить «сорт» и ранг силовых факторов по «сорту» и рангу кинематической переменной. Здесь для обозначения двух сортов напряжений $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2$ и моментных напряжений $\sigma_{ijn}^1, \sigma_{ijn}^2$ использованы те же символы, что и для соответствующих множителей Лагранжа, так как множители Лагранжа более нигде не будут использованы. То же самое касается обозначений адгезионных напряжений a_{ij}^1, a_{ij}^2 и моментов a_{ijn}^1, a_{ijn}^2 :

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^1} & a_{ij}^2 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^2} \\ a_{ijn}^1 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijn}^1} & a_{ijn}^2 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijn}^2} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

По тем же причинам для «реберных» силовых факторов использованы обозначения $b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^{1*}, b_{ij}^{2*}$:

$$\begin{aligned} b_{ij}^1 &= \frac{\partial U_s}{\partial D_{ij}^1} & b_{ij}^2 &= \frac{\partial U_s}{\partial D_{ij}^2} \\ b_{ij}^{1*} &= \frac{\partial U_s}{\partial D_{ijn}^1 s_n} & b_{ij}^{2*} &= \frac{\partial U_s}{\partial D_{ijn}^2 s_n} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Спектр силовых факторов в угловых точках:

$$f_{ij}^1 = \frac{\partial U_p}{\partial D_{ij}^1} \quad f_{ij}^2 = \frac{\partial U_p}{\partial D_{ij}^2} \quad (4.1.10)$$

Таким образом, следуя алгоритму построения модели в рамках «кинематического» вариационного принципа, достаточно формально получена структура потенциальной энергии (4.1.2)-(4.1.6), формулы Грина и силовая модель формулируемой теории (4.1.7)-(4.1.10), соответствующие выбранной кинематической модели (3.4).

Далее, в целях упрощения, будут рассматриваться модели без индивидуальных физических свойств ребер и угловых точек.

Уравнения закона Гука в объеме. В предположении физической линейности уравнений закона Гука, объёмная плотность потенциальной энергии U_v должна быть положительно определенной изотропной квадратичной формой своих аргументов.

$$2U_v = C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijknml}^{ab} D_{ijk}^a D_{nml}^b \quad (4.1.11)$$

Здесь индексы сортности a, b пробегает значения 1, 2 (по количеству сортов дефектов: интегрируемая и неинтегрируемая дисторсии D_{ij}^1, D_{ij}^2 и их градиенты $D_{ijk}^1 = D_{ij,k}^1, D_{ijk}^2 = D_{ij,k}^2$).

Тензоры модулей должны удовлетворять условиям существования потенциальной энергии:

$$C_{ijmn}^{ab} = C_{mnij}^{ba} \quad (4.1.12)$$

$$C_{ijknml}^{ab} = C_{mnljik}^{ba} \quad (4.1.13)$$

Тензоры модулей четвертого ранга строятся в виде разложения по базисным

тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Условие (4.1.12) при $a \neq b$ сокращает количество тензоров с четырех до трех.

$$C_{ijmn}^{ab} = \lambda^{ab} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{ab} + \chi^{ab}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{ab} - \chi^{ab}) \delta_{in} \delta_{jm} \quad (4.1.14)$$

Тензоры модулей шестого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями троек тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Условие (4.1.13) $a \neq b$ приводит к тому, что тензоры C_{ijkml}^{12} и C_{ijkml}^{21} выражаются через один и тот же набор пятнадцати модулей. При этом структура тензоров остается разной. При $a = b$ условия (4.1.13) сокращают количество модулей в каждом из тензоров с пятнадцати до одиннадцати.

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{ab} = & \\ = & C_1^{ab} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^{ab} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\ & + C_3^{ab} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^{ab} (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\ & + C_5^{ab} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^{ab} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^{ab} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^{ab} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} + \\ & + C_9^{ab} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^{ab} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^{ab} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Подробный вывод структуры и исследование свойств тензоров C_{ijkml}^{ab} приведен в Приложении 3.

С учетом (4.1.11), (4.1.14) и (4.1.15), уравнения закона Гука для силовых факторов в объеме среды можно получить из обобщенных формул Грина (4.1.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^1} = C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 & \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} = C_{ijmn}^{21} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \\ \sigma_{ijk}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijk}^1} = C_{ijkml}^{11} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C_{ijkml}^{12} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l} & \quad \sigma_{ijk}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijk}^2} = C_{ijkml}^{21} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C_{ijkml}^{22} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Алгоритм построения поверхностной плотности потенциальной энергии U_F аналогичен алгоритму построения объёмной плотности потенциальной энергии U_V .

Уравнения закона Гука на поверхности. В предположении физической линейности уравнений закона Гука, поверхностная плотность

потенциальной энергии U_F должна быть положительно определенной трансверсально-изотропной квадратичной формой своих аргументов. Причем в соответствии с (4.1.4), в отличие от (4.1.3), плотность потенциальной энергии U_F может зависеть не только от самих аргументов D_{ij}^a , D_{ijk}^a , но и от их сверток с единичным вектором нормали к поверхности. В соответствии с (4.1.4) свертки $D_{ijk}^a n_k$ не входят в список аргументов плотности потенциальной энергии U_F . Действительно, представляя тензоры кривизн в виде разложения $D_{ijk}^a = (D_{ijq}^a n_q) n_k + d_{ijk}^a$, $d_{ijk}^a n_k = 0$, можно убедиться, что в соответствии с (4.1.4) $D_{ijk}^a \delta_{kp}^* = d_{ijk}^a \delta_{kp}^*$, так как $n_k \delta_{kp}^* \equiv 0$. Таким образом, в общем случае структура U_F имеет вид:

$$2U_F = A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijkml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \quad (4.1.17)$$

Тензоры модулей должны удовлетворять условиям существования потенциальной энергии:

$$A_{ijmn}^{ab} = A_{mnij}^{ba} \quad (4.1.18)$$

$$A_{ijkml}^{ab} = A_{mnljk}^{ba} \quad A_{ijkml}^{ab} n_l = A_{ijkml}^{ab} n_k = 0 \quad (4.1.19)$$

Второе из условий (4.1.19) вытекает из требования (4.1.4), так как в противном случае, в выражении поверхностной плотности потенциальной энергии (4.1.17) появились бы слагаемые, содержащие $D_{ijq}^a n_q$.

Тензоры модулей четвертого ранга A_{ijmnl}^{ab} строятся в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Они строятся в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые делятся на три группы. В первую входят базисные тензоры, построенные как произведения двух «плоских» тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Во вторую входят базисные тензоры, построенные как произведения «плоских» тензоров Кронекера и произведения двух векторов единичной нормали со всеми возможными перестановками

индексов. В третью группу базисных тензоров, состоящую из единственного тензора, образованного произведением четырех векторов единичной нормали. Условие (4.1.18) при $a \neq b$ приводит к тому, что тензоры A_{ijmn}^{12} и A_{ijmn}^{21} выражаются через один и тот же набор десяти модулей. Условие (4.1.18) при $a = b$ сокращает количество модулей в каждом тензоре с десяти до восьми.

$$\begin{aligned}
 A_{ijmn}^{ab} = & \lambda^{abF} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + (\mu^{abF} + \chi^{abF}) \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + (\mu^{abF} - \chi^{abF}) \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\
 & + \alpha^{qb} (n_i n_n \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{in}^*) + \beta^{ab} (n_i n_j \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{ij}^*) + \delta^{abF} n_i n_m \delta_{jn}^* + B^{ab} \delta_{im}^* n_j n_n + \\
 & + A^{ab} n_i n_j n_m n_n
 \end{aligned}
 \tag{4.1.20}$$

Подробный вывод структуры и исследование свойств тензоров A_{ijmn}^{ab} приведен в Приложении 5.

Тензоры модулей пятого ранга A_{ijmnl}^{ab} строятся в виде разложения по базисным тензорам пятого ранга, которые делятся на две группы. В первую входят базисные тензоры, построенные как произведения «плоских» тензоров Кронекера и троек векторов единичной нормали со всеми возможными перестановками индексов. Во вторую входят базисные тензоры, построенные как произведения двух «плоских» тензоров Кронекера и одного вектора единичной нормали со всеми возможными перестановками индексов. В общем случае произвольного трансверсально изотропного тензора пятого ранга существует еще третья группа базисных тензоров, состоящая из единственного тензора, образованного произведением пяти векторов единичной нормали. Однако, этот базисный тензор не войдет в структуру A_{ijmnl}^{ab} , так как вводит зависимость плотности потенциальной энергии от кривизн, связанных с нормальной производной от дисторсий, что противоречит (4.1.4). Действительно, пусть этот базисный тензор присутствует в структуре поверхностной плотности потенциальной энергии. Тогда его свертка с дисторсиями и кривизнами даст: $n_i n_j n_m n_n n_l D_{ij}^a D_{mnl}^b = n_i n_j n_m n_n D_{ij}^a (D_{mnl}^b n_l)$. Наличие выражения в круглых скобках в поверхностной плотности потенциальной энергии противоречит (4.1.4). Таким образом, все тензоры пятого ранга имеют структуру:

$$\begin{aligned}
A_{ijmnl}^{ab} = & \\
= & G_1^{ab} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{ab} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_3^{ab} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_4^{ab} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_5^{ab} n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* + G_6^{ab} n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_7^{ab} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{ab} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_9^{ab} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\
& + G_{10}^{ab} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* + G_{11}^{ab} n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^* + G_{12}^{ab} n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* + \\
& + G_{13}^{ab} \delta_{il}^* n_j n_m n_n + G_{14}^{ab} \delta_{jl}^* n_i n_m n_n + G_{15}^{ab} \delta_{ml}^* n_i n_j n_n + G_{16}^{ab} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Подробный вывод структуры и исследование свойств тензоров A_{ijmnl}^{ab} приведен в Приложении_6.

Тензоры модулей шестого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера и/или векторов единичной нормали со всеми возможными перестановками индексов. Эти базисные тензоры можно разделить на три группы. В первую входят базисные тензоры, построенные как произведения трех «плоских» тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Во вторую входят базисные тензоры, построенные как произведения двух «плоских» тензоров Кронекера и двух векторов единичной нормали со всеми возможными перестановками индексов. В третью входят базисные тензоры, построенные как произведения одного «плоского» тензора Кронекера и четырех векторов единичной нормали со всеми возможными перестановками индексов. В общем случае произвольного трансверсально изотропного тензора шестого ранга существует еще четвертая группа базисных тензоров, состоящая из единственного тензора, образованного произведением шести векторов единичной нормали. Однако этот базисный тензор не войдет в структуру A_{ijkml}^{ab} , так как вводит зависимость плотности потенциальной энергии от кривизн, связанных с нормальной производной от дисторсий, что противоречит (4.1.4). Здесь можно привести те же аргументы, что и при выводе структуры тензоров A_{ijmnl}^{ab} . Соответственно, и второе из условий (4.1.19) обосновывается аналогичным образом. Первое из условий (4.1.19)

при $a \neq b$ приводит к тому, что тензоры A_{ijkml}^{12} и A_{ijkml}^{21} выражаются через один и тот же набор десяти модулей. При $a = b$ оно сокращает количество модулей в каждом из тензоров с семидесяти шести до сорока восьми, второе из условий (4.1.19) – с сорока восьми до двадцати четырех.

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{ab} = & A_1^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_2^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{mn}^* \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + \\
& + A_3^{ab} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) + A_4^{ab} (\delta_{in}^* \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + \delta_{mj}^* \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_5^{ab} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_6^{ab} \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + A_7^{ab} \delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_8^{ab} \delta_{in}^* \delta_{lj}^* \delta_{kl}^* + \\
& + A_9^{ab} \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + A_{10}^{ab} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + A_{11}^{ab} \delta_{il}^* \delta_{km}^* \delta_{nj}^* + \\
& + A_{12}^{ab} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_{13}^{ab} (n_i n_j \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_n \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + A_{14}^{ab} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{15}^{ab} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + A_{16}^{ab} (n_i n_n \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ik}^* \delta_{nl}^*) + A_{17}^{ab} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{18}^{ab} n_i n_m \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_{19}^{ab} n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_{20}^{ab} n_i n_m \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + \\
& + A_{21}^{ab} n_j n_n \delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + A_{22}^{ab} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{23}^{ab} n_j n_n \delta_{il}^* \delta_{km}^* + \\
& + A_{24}^{ab} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Подробный вывод структуры и исследование свойств тензоров A_{ijkml}^{ab} приведен в Приложении 7.

С учетом (4.1.17), (4.1.20) и (4.1.22), уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды можно получить из обобщенных формул Грина (4.1.8):

$$\begin{aligned}
a_{ij}^1 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^1} = A_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijmnl}^{11} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{12} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l} \\
a_{ij}^2 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^2} = A_{ijmn}^{21} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijmnl}^{21} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{22} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l} \\
a_{ijk}^1 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^1} = A_{mnijk}^{11} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijkmnl}^{11} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{mnijk}^{21} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{12} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l} \\
a_{ijk}^2 &= \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijk}^2} = A_{mnijk}^{12} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijkmnl}^{21} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{mnijk}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{22} \frac{\partial D_{mn}^2}{\partial x_l}
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Соответственно, лагранжиан L формулируемой теории имеет вид:

$$\begin{aligned}
L = & A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b] dV - \\
& - \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b] dF
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Вариационное уравнение в силовых факторах с учетом свойства (4.1.4):

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iiint [(\sigma_{ij,j}^1 - \sigma_{ijk,kj}^1 + P_i^V) \delta D_i^1 + (-\sigma_{ij}^2 + \sigma_{ijk,k}^2) \delta D_{ij}^2] dV + \\
& + \oint \{ [P_i^F - (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ijk,k}^1) n_j + [\sigma_{ijk}^1 n_k + a_{ij}^1 - a_{ijk,q}^1 (\delta_{qk} - n_q n_k)]_{,p} (\delta_{pj} - n_p n_j)] \delta D_i^1 + \\
& + (-\sigma_{ijk}^1 n_k - a_{ij}^1 + a_{ijk,k}^1) n_j \delta (D_{i,p}^1 n_p) - [\sigma_{ijk}^2 n_k + a_{ij}^2 - a_{ijk,q}^2 (\delta_{qk} - n_q n_k)] \delta D_{ij}^2 \} dF - \\
& - \sum \oint \{ [\sigma_{ijk}^1 v_j n_k + a_{ij}^1 v_j - a_{ijk,q}^1 v_j (\delta_{qk} - n_q n_k) - a_{ijk,q}^1 s_q s_j v_k] \delta D_i^1 + \\
& + a_{ijk}^1 v_j v_k \delta (D_{i,q}^1 v_q) + a_{ijk}^1 (v_j n_k + n_j v_k) \delta (D_{i,q}^1 n_q) + a_{ijk}^2 v_k \delta D_{ij}^2 \} ds - \sum a_{ijk}^1 s_j v_k \delta D_i^1 = 0
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Вариационное уравнение в кинематических переменных:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \\
= & \delta \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} D_{m,nj}^1 - C_{ijkml}^{11} D_{m,nlkj}^1 + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 - C_{ijkml}^{12} D_{mn,lkj}^2 + P_i^V) \delta D_i^1 + \\
& + (-C_{ijmn}^{21} D_{m,n}^1 + C_{ijkml}^{21} D_{m,nlk}^1 - C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{mn,lk}^2) \delta D_{ij}^2 \} dV + \\
& + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} D_{m,n}^1 - C_{ijkml}^{11} D_{m,nlk}^1 + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 - C_{ijkml}^{12} D_{mn,lk}^2) n_j + \\
& + (A_{ijmn}^{11} D_{m,n}^1 + C_{ijkml}^{11} n_k D_{m,nl}^1 - A_{ijkml}^{11} D_{m,nlk}^1 + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{12} n_k D_{mn,l}^2 - A_{ijkml}^{12} D_{mn,lk}^2)_{,q} (\delta_{qj} - n_q n_j)] \delta D_i^1 - \\
& - [A_{ijmn}^{11} D_{m,n}^1 + C_{ijkml}^{11} n_k D_{m,nl}^1 - A_{ijkml}^{11} D_{m,nlk}^1 + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{12} n_k D_{mn,l}^2 - A_{ijkml}^{12} D_{mn,lk}^2] n_j \delta (D_{i,q}^1 n_q) + \\
& + [-(C_{ijkml}^{21} D_{m,nl}^1 + C_{ijkml}^{22} D_{mn,l}^2) n_k - A_{ijmn}^{21} D_{mn}^1 - A_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijkml}^{21} D_{m,nlk}^1 + A_{ijkml}^{22} D_{mn,lk}^2] \delta D_{ij}^2 \} dF + \dots = 0
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Максимально полной и сложной моделью сред с сохраняющимися дислокациями является общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций (4.1.24). Ниже будут рассмотрены её частные случаи. Частные случаи определяются соответствующим упрощением структуры тензоров модулей с помощью постулирования связей между модулями. Это приводит к сокращению количества независимых модулей и упрощению структуры потенциальной энергии в лагранжианах частных моделей. Такой подход позволяет создать «конструктор» моделей дефектных и идеальных (бездефектных) сред с определенным набором физических свойств.

4.2. «Конструктор» моделей сред.

Будем трактовать модель (4.1.24) как пространство моделей сред [33], размерность f которого определена количеством модулей, входящих в

состав тензоров $C_{ijmn}^{ab}, C_{ijkml}^{ab}, A_{ijmn}^{ab}, A_{ijmnl}^{ab}, A_{ijkml}^{ab}$. Координатным линиям в таком пространстве соответствуют среды с единственным ненулевым модулем. Прямые линии, не совпадающие с координатными линиями, определяют среду, для которой существует $(f-1)$ линейная связь между модулями. Соответственно, кривые линии в таком пространстве определяют среду, для которой существует $(f-1)$ нелинейная связь между модулями. В любом из перечисленных трех случаев можно говорить о том, что среды, соответствующие точкам произвольной кривой в пространстве моделей, обладают единственным механическим свойством. Примером может служить подмножество сред, в рамках модели классической теории упругости, с фиксированным коэффициентом Пуассона. Различие элементов этого подмножества определяет единственный механический параметр таких сред – модуль Юнга. Он полностью определяет все механические свойства выделенного подмножества сред. В свою очередь, модель классической теории упругости определяется плоскостью в введённом пространстве моделей сред с независимыми координатами/модулями – коэффициентами Ламе μ, λ . Переход от коэффициентов Ламе к техническим модулям, к примеру: к модулю Юнга и коэффициенту Пуассона E, ν , является нелинейным преобразованием координат во введённом пространстве моделей. При этом исходная плоскость отображается на некоторую поверхность. Тем не менее, модели сред, соответствующие точкам полученной поверхности, являются по-прежнему моделями сред с двумя независимыми механическими характеристиками. Исследуя характерные подмножества пространства моделей, можно изучить отдельные механические свойства или набор свойств и связать их с соответствующими модулями. И наоборот, зная, какие модули определяют те или иные механические свойства, можно конструировать модель среды, удерживая в (4.1.24) только те модули, которые определяют интересующий исследователя набор механических свойств. Примеры анализа отдельных механических

свойств в частных моделях будут приведены в следующих главах, после формулировки в этой главе соответствующих частных моделей.

4.3. Модель поврежденных дислокациями сред Тупина.

Общая модель среды с полями сохраняющихся дислокаций (4.1.24) приводит к связанной системе из трех уравнений равновесия сил, третьего порядка относительно дисторсий, и девяти уравнений равновесия моментов, второго порядка относительно дисторсий (4.1.26). Поэтому является актуальным вопрос об условиях, при которых связанная задача может быть представлена как распадающаяся на более простые подсистемы. Представляется логичным попытаться записать три уравнения равновесия сил относительно перемещений с правой частью, зависящей от некоторой линейной комбинации свободной и стесненной дисторсии, а девять уравнений равновесия моментов – относительно только этой (пока неизвестной) линейной комбинации свободной и стесненной дисторсий. Эффективным инструментом для этой цели является приведение объемной плотности потенциальной энергии к каноническому виду. Действительно, каноничность приводит к тому, что относительно аргументов канонической квадратичной формы соответствующие уравнения Эйлера всегда дают распадающуюся систему. Соответственно, если удастся одновременно с объемной плотностью потенциальной энергии привести к каноническому виду и поверхностную плотность потенциальной энергии (с теми же аргументами), разделятся и краевые задачи. Представим плотности потенциальных энергий в (4.1.24) в виде канонических квадратичных форм.

$$\begin{aligned}
L = & A - \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} + \\
& + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^* D_{mn}^* + C_{ijkml}^{22} (D_{ij,k}^* + a_{ijkdfg} R_{d,fg}) (D_{mn,l}^* + a_{mnlstu} R_{s,tu}) \} dV - \\
& - \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn} D_{mn}^1 D_{ij}^1 + \bar{A}_{ijkml}^{11} D_{ijk}^{1*} D_{mnl}^{1*} + \bar{A}_{ijmn}^{22} D_{ij}^{2*} D_{mn}^{2*} + A_{ijkml}^{22} D_{ijk}^{2*} D_{mnl}^{2*} \} dF
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

В качестве новой кинематической переменной здесь введен тензор эффективной дисторсии второго сорта D_{ij}^* . Тензор эффективных кривизн второго сорта D_{ijk}^* в объеме среды и тензоры D_{ij}^{2*} , D_{ijk}^{1*} и D_{ijk}^{2*} на поверхности среды определены через тензор эффективной дисторсии второго сорта D_{ij}^* следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
D_{ij}^* &= a_{ijcd} R_{c,d} + D_{ij}^2 \\
D_{ijk}^* &= a_{ijkdfg} R_{d,fg} + D_{ij,k}^* \\
D_{ij}^{2*} &= a_{ijcd}^F R_{c,d} + a_{ijcdu}^F R_{c,du} + D_{ij}^* \\
D_{ijk}^{1*} &= g_{pqijk}^F R_{p,q} + R_{i,jk} \\
D_{ijk}^{2*} &= b_{ijkhr}^F R_{h,r} + a_{ijkpqr}^F R_{p,qr} + c_{ijkpq}^F D_{pq}^* + D_{ij,k}^*
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Тензоры модулей, фигурирующие в определениях (4.3.2), являются рациональными функциями исходных тензоров модулей. Соотношения, приведенные далее, раскрывают связь между ними.

Введены тензоры податливостей $C_{abcd}^{-22}, C_{abcmnl}^{-22}, A_{abcd}^{-22}, A_{abcmnl}^{-22}$, как решения линейных алгебраических систем:

$$\begin{cases} C_{ijab}^{22} C_{abcd}^{-22} = \delta_{ic} \delta_{jd} \\ C_{ijkabc}^{22} C_{abcmnl}^{-22} = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ijab}^{22} A_{abcd}^{-22} = \delta_{ic} \delta_{jd} \\ A_{ijkabc}^{22} A_{abcmnl}^{-22} = \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} \end{cases}$$

Аналогичным образом будут определяться и другие обратные тензоры.

Так же как и в [27], даны определения тензоров поврежденных модулей в объеме:

$$\begin{cases} a_{ijcd} = C_{ijab}^{-22} C_{abcd}^{21} \\ a_{ijkdfg} = C_{ijkabc}^{-22} C_{abcdfg}^{21} - \frac{1}{2} C_{ijab}^{-22} (C_{abdf}^{21} \delta_{kg} + C_{abdg}^{21} \delta_{kf}) \\ C_{ijmn} = C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{21} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{21} \\ C_{ijkml} = C_{ijkml}^{11} - C_{ijkpqr}^{21} C_{pqabc}^{-22} C_{abcmnl}^{21} \end{cases} \tag{4.3.3}$$

На поверхности среды даны определения тензоров модулей,

поврежденных дислокациями. Поврежденность дислокациями будем обозначать чертой над соответствующим тензором модулей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_{ijmn}^{11} = (A_{ijmn}^{11} - A_{ijabc}^{12} A_{abcdfg}^{-22} A_{mndfg}^{12}) \\ \bar{A}_{ijmn}^{12} = (A_{ijmn}^{12} - A_{mnabc}^{12} A_{abcdfg}^{-22} A_{ijdfg}^{22}) \\ \bar{A}_{ijmn}^{22} = (A_{ijmn}^{22} - A_{ijabc}^{22} A_{abcdfg}^{-22} A_{mndfg}^{22}) \\ \bar{A}_{ijmnl}^{11} = (A_{ijmnl}^{11} - A_{ijabc}^{12} A_{abcdfg}^{-22} A_{dfgmnl}^{21}) \\ \bar{A}_{ijmnl}^{21} = (A_{ijmnl}^{21} - A_{ijdfg}^{22} A_{abcdfg}^{-22} A_{abcmnl}^{21}) \\ \bar{A}_{ijkml}^{11} = (A_{ijkml}^{11} - A_{ijkabc}^{21} A_{abcdfg}^{-22} A_{dfgmnl}^{21}) \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

На поверхности среды даны определения тензоров модулей, поврежденных разрыхлением. Поврежденность разрыхлением будем обозначать двойной чертой над соответствующим тензором модулей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{A}}_{ijmn}^{11} = \bar{A}_{ijmn}^{11} - \bar{A}_{ijab}^{12} \bar{A}_{abcd}^{-22} \bar{A}_{cdmn}^{12} \\ \bar{\bar{A}}_{ijmnl}^{11} = \bar{A}_{ijmnl}^{11} - \bar{A}_{abmnl}^{21} \bar{A}_{abcd}^{-22} \bar{A}_{cdij}^{12} \\ \bar{\bar{A}}_{ijkml}^{11} = \bar{A}_{ijkml}^{11} - \bar{A}_{abijk}^{21} \bar{A}_{abcd}^{-22} \bar{A}_{cdmnl}^{21} \\ \bar{A}_{ijmn}^{11} = \bar{\bar{A}}_{ijmn}^{11} - \bar{\bar{A}}_{ijabc}^{-11} \bar{\bar{A}}_{abcdfg}^{-11} \bar{\bar{A}}_{mndfg}^{11} \end{array} \right. \quad (4.3.5)$$

Наконец, тензоры модулей, входящие в выражения (4.3.2) для эффективных кинематических переменных, определены следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ijcd}^F = \bar{\bar{A}}_{ijab}^{-22} \bar{\bar{A}}_{abcd}^{12} - C_{ijab}^{-22} C_{abcd}^{21} \\ a_{ijcd}^F = \bar{\bar{A}}_{ijab}^{-22} \bar{\bar{A}}_{abcd}^{21} \\ a_{ijkpq}^F = A_{ijkabc}^{-22} A_{abcpr}^{21} - C_{ijab}^{-22} C_{abpq}^{21} \delta_{kr} \\ b_{ijkhr}^F = A_{ijkabc}^{-22} A_{hrabc}^{12} - A_{ijkabc}^{-22} A_{pqabc}^{22} C_{pqfg}^{-22} C_{fghr}^{21} \\ c_{ijkpq}^F = A_{ijkabc}^{-22} A_{pqabc}^{22} \\ g_{pqijk}^F = \bar{\bar{A}}_{ijkabc}^{-11} \bar{\bar{A}}_{pqabc}^{11} \end{array} \right. \quad (4.3.6)$$

Сделаем предположение о том, что модули тензора C_{abcd}^{21} таковы, что выполняется условие:

$$a_{ijkml} = (C_{ijkabc}^{-22} C_{abcmnl}^{21} - C_{ijab}^{-22} C_{abmn}^{21} \delta_{lk}) = 0 \quad (4.3.7)$$

Тогда разрешающая система уравнений распадается на две подсистемы: относительно перемещений и относительно эффективной дисторсии.

$$\begin{aligned}
C_{ijmn} R_{m,nj} - C_{ijkml} R_{m,nlkj} + P_i^V &= 0 \\
C_{ijmn}^* D_{mn}^* - C_{ijkml}^* D_{mn,lk}^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

В случае, когда при этом еще и тензоры A_{abcd}^{12} , A_{hrabc}^{12} , A_{ijmnl}^{21} , A_{pqabc}^{22} и A_{abcdfg}^{21} таковы, что выполняются условия:

$$\begin{aligned}
a_{ijcd}^F &= \bar{A}_{ijab}^{-22} \bar{A}_{abcd}^{12} - a_{ijcd} = 0 \\
a_{ijcdu}^F &= \bar{A}_{ijab}^{-22} \bar{A}_{abcd}^{21} = 0 \\
a_{ijkpr}^F &= A_{ijkabc}^{-22} A_{abcpr}^{21} - a_{ijpq} \delta_{kr} = 0 \\
b_{ijkhr}^F &= A_{ijkabc}^{-22} A_{hrabc}^{12} - A_{ijkabc}^{-22} A_{pqabc}^{22} a_{pqr} = 0 \\
c_{ijkpq}^F &= A_{ijkabc}^{-22} A_{pqabc}^{22} = 0
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

разделяются и краевые задачи. Условия (4.3.9) можно выполнить всегда и единственным образом. Действительно, первое из условий (4.3.9) является системой восьми линейных алгебраических уравнений относительно восьми компонент тензора A_{abcd}^{12} с определителем, отличным от нуля. Третье из условий (4.3.9) является системой двадцати четырех линейных алгебраических уравнений относительно двадцати четырех компонент тензора A_{abcd}^{21} с определителем, отличным от нуля. Второе, четвертое и пятое условие требуют, чтобы $A_{ijmnl}^{21} = 0$, $A_{hrabc}^{12} = 0$ и $A_{pqabc}^{22} = 0$. Как следствие выполнения условий (4.3.9), плотность поверхностной потенциальной энергии становится канонической квадратичной формой эффективной дилатации, а краевая задача на эффективную дилатацию становится однородной и приводит к тривиальному решению. Таким образом, получено математическое обоснование обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского:

$$D_{ij}^* = D_{ij}^2 + a_{ijmn} R_{m,n} = 0 \Rightarrow D_{ij}^2 = -a_{ijmn} R_{m,n} \tag{4.3.10}$$

Обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского эквивалентно утверждению: тензоры модулей C_{abcmnl}^{21} , A_{abcd}^{12} , A_{abcdfg}^{21} , A_{hrabc}^{12} , A_{ijmnl}^{21} , A_{pqabc}^{22} выражаются через исходные тензоры модулей C_{abcmnl}^{22} , A_{abcd}^{22} и A_{abcdfg}^{22} формулируемой теории с учетом (4.3.4)-(4.3.7) и (4.3.9) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
C_{pqrmnl}^{21} &= C_{pqrijl}^{22} a_{ijmn} \\
A_{pqcd}^{12} &= A_{pqij}^{22} a_{ijcd} \\
A_{mnlpqr}^{21} &= A_{mnljir}^{22} a_{ijpq} \\
A_{hrabc}^{12} &= 0 \\
A_{ijmnl}^{21} &= 0 \\
A_{pqabc}^{22} &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

При гипотезах (4.3.11), формулируемая теория сводится в соответствии с (4.3.8) к распадающейся системе: к «адгезионному» обобщению модели Тупина с тензорами поврежденных дислокациями модулей (4.3.2):

$$\begin{aligned}
L &= A - \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dV - \\
&- \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + A_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

и к однородной краевой задаче относительно эффективной дисторсии:

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijmn}^{22} D_{ij}^* D_{mn}^* + C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^* D_{mn,l}^* \} dV - \\
&- \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn}^{22} D_{ij}^* D_{mn}^* + A_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^* D_{mn,l}^* \} dF
\end{aligned}$$

При этом в соответствии с (4.3.10) три типа полей сохраняющихся дислокаций можно построить после решения краевой задачи относительно непрерывной части перемещений с учетом (4.3.12).

Не смотря на достаточно большую общность этой модели, она практически не сложнее модели Тупина. Её достоинством является то, что в соответствии с (4.3.10) – (4.3.11) относительно определения тензора свободной дисторсии задача в данной постановке является алгебраической. Соответственно, поля дислокаций определяются квадратурами (2.33) от уже известного поля свободной дисторсии.

4.4. Строгие частные случаи сред с полями сохраняющихся дислокаций.

В отличие от модели (4.3.12) в данном разделе рассмотрены частные модели

сред с сохраняющимися дислокациями, которые приводят к связанным системам уравнений равновесия относительно перемещений и тензора свободной дилатации. Рассмотрены модели без адгезионных свойств поверхностей:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b] dV$$

Потенциальная энергия в рассматриваемом случае определена только объемной плотностью.

4.4.1. «Классическая» модель сред Миндлина.

Пусть в лагранжиане общей теории (4.1.24) при отсутствии адгезионных свойств тензоры «объемных» модулей $C_{ijkml}^{11}, C_{ijkml}^{12}$ равны нулю. Тогда лагранжиан сформулированной теории совпадает с лагранжианом модели Миндлина [5]:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ijk}^2 D_{mnl}^2] dV \quad (4.4.1.1)$$

Как было доказано в [25], из модели Миндлина, в свою очередь, следуют строгие частные случаи:

- модель сред с невзаимодействующими между собой типами дислокаций,
- «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями [7],
- теория сред Коссера (теория сред с ω - дислокациями) [26],
- теория пористых сред (теория сред с θ - дислокациями) [26],
- теория сред с γ - дислокациями [26],
- алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями.

Ниже даны формулировки этих моделей.

4.4.2. Модель сред с не взаимодействующими типами дислокаций.

Выразим последнее слагаемое в (4.4.1.1) через градиенты γ_{ij}^2 , θ^2 и ω_k^2 , используя разложение тензора свободной дисторсии по типам. В результате получим:

$$C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2 = C_{ijkml}^{22} \gamma_{ij,k}^2 \gamma_{mn,l}^2 + \frac{1}{9} C_{ijkml}^{22} \delta_{ij} \delta_{mn} \theta_{,k}^2 \theta_{,l}^2 + C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} \omega_{p,k}^2 \omega_{q,l}^2 - \\ + \frac{2}{3} C_{ijkml}^{22} \delta_{ij} \gamma_{mn,l}^2 \theta_{,k}^2 - \frac{2}{3} C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \delta_{mn} \theta_{,l}^2 \omega_{p,k}^2 - 2C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{mnq} \omega_{q,l}^2 \gamma_{ij,k}^2$$

Непосредственно вычисляя свертки, с учетом структуры тензора Миндлина C_{ijkml}^{22} (4.1.15), можно убедиться, что первые три слагаемых являются каноническими положительно определенными квадратичными формами соответственно градиентов γ_{ij}^2 , θ^2 и ω_k^2 , а последние три слагаемых – их билинейными формами:

$$C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2 = C_{ijkml}^{22\gamma\gamma} \gamma_{ij,k}^2 \gamma_{mn,l}^2 + \frac{1}{9} C_{kl}^{22\theta\theta} \theta_{,k}^2 \theta_{,l}^2 + C_{pkql}^{22\omega\omega} \omega_{p,k}^2 \omega_{q,l}^2 - \\ + \frac{2}{3} C_{kml}^{22\gamma\theta} \gamma_{mn,l}^2 \theta_{,k}^2 - \frac{2}{3} C_{pkl}^{22\theta\omega} \theta_{,l}^2 \omega_{p,k}^2 - 2C_{ijkql}^{22\omega\gamma} \omega_{q,l}^2 \gamma_{ij,k}^2$$

Здесь введены обозначения:

$$C_{ijkml}^{22\gamma\gamma} = \\ = (2C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jp} + \frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kp} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{ml} \delta_{np} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pl} \right) + \\ + (2C_4^{22} + C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pl} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mk} \delta_{np} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nk} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pk} \right) + \\ + (C_8^{22} + C_{10}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jq} + \frac{1}{2} \delta_{iq} \delta_{jp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mq} \delta_{np} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nq} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pq} \right) \delta_{kl} \\ C_{kl}^{22\theta\theta} = C_{ijkml}^{22} \delta_{ij} \delta_{mn} = \\ = (6C_1^{22} + 6C_2^{22} + 2C_3^{22} + 2C_4^{22} + 9C_5^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} + 3C_8^{22} + C_9^{22} + 3C_{10}^{22} + C_{11}^{22}) \delta_{kl} \\ C_{pkql}^{22\omega\omega} = C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} = \\ = (2C_4^{22} - C_9^{22} - C_{11}^{22}) \delta_{pk} \delta_{ql} + \\ + (-2C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} - 2C_4^{22} + C_9^{22} + C_{11}^{22} + 2C_8^{22} - 2C_{10}^{22}) \delta_{pq} \delta_{kl} + \\ + (2C_3^{22} - C_6^{22} - C_7^{22}) \delta_{pl} \delta_{kq}$$

$$\begin{aligned}
C_{kmnl}^{22\gamma\theta} &= C_{ijkmnl}^{22} \delta_{ij} = \\
&= (3C_1^{22} + 3C_2^{22} + 2C_3^{22} + 2C_4^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} + C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right) \\
C_{pkl}^{22\theta\omega} &= C_{ijkmnl}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \delta_{mn} = \\
&= (-3C_1^{22} + 3C_2^{22} + C_6^{22} - C_7^{22} + C_9^{22} - C_{11}^{22}) \mathcal{E}_{pkl} \\
C_{ijkql}^{22\omega\gamma} &= C_{ijkmnl}^{22} \mathcal{E}_{mnq} = \\
&= (C_6^{22} - C_7^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathcal{E}_{iql} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathcal{E}_{jql} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{kql} \right) + (-C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jl} \mathcal{E}_{kiq} + \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{kjq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{klq} \right)
\end{aligned} \tag{4.4.2.1}$$

Модули тензоров $C_{ijnm}^{22\gamma\theta}$, $C_{ijk}^{22\theta\omega}$ и $C_{ijkpq}^{22\omega\gamma}$ выражены через четыре линейные комбинации исходных модулей C_i^{22} ($i=1\div 11$), а модули тензоров $C_{ijnm}^{22\gamma\gamma}$, $C_{ij}^{22\theta\theta}$ и $C_{ijnm}^{22\omega\omega}$ - через семь других линейных комбинаций. Чтобы дислокации разных типов не взаимодействовали друг с другом, следует положить:

$$C_{ijnm}^{22\gamma\theta} = 0 \quad C_{ijk}^{22\theta\omega} = 0 \quad C_{ijkpq}^{22\omega\gamma} = 0 \tag{4.4.2.2}$$

Таким образом, «гипотеза ортогональности типов дислокаций» (4.4.2.2) эквивалентна предположению о равенстве нулю четырех линейных комбинаций исходных модулей C_i^{22} ($i=1\div 11$). Лагранжиан теории приобретает вид:

$$\begin{aligned}
L &= A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijnm}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + \\
&+ 2C_{ijnm}^{12} R_{i,j} \gamma_{mn}^2 + C_{ijnm}^{22} \gamma_{ij}^2 \gamma_{mn}^2 + C_{ijkmnl}^{22\gamma\gamma} \gamma_{ij,k}^2 \gamma_{mn,l}^2 + \\
&+ (C_{ijnm}^{12} \delta_{mn}) R_{i,j} \theta^2 / 3 + (C_{ijnm}^{22} \delta_{mn} \delta_{ij}) \theta^2 \theta^2 / 9 + C_{kl}^{22\theta\theta} \theta_{,k}^2 \theta_{,l}^2 / 9 - \\
&- 2(C_{ijnm}^{12} \mathcal{E}_{mnk}) R_{i,j} \omega_k^2 + (C_{ijnm}^{22} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp}) \omega_p^2 \omega_q^2 + C_{pkql}^{22\omega\omega} \omega_{p,k}^2 \omega_{q,l}^2] dV
\end{aligned} \tag{4.4.2.3}$$

Такой вариант теории сред с сохраняющимися дислокациями удобен тем, что уравнения Эйлера относительно компонент свободной дисторсии распадаются на подсистемы по типам дислокаций. Количество «моментных модулей» сокращено с одиннадцати до семи ($3+1+3=7$).

4.4.3. «Простейшая» модель сред с сохраняющимися дислокациями.

Другой, «простейший» вариант теории сред с сохраняющимися дислокациями [7], можно получить из модели Миндлина (4.4.1.1), налагая еще более жесткие требования на модули тензора C_{ijkl}^{22} . Пусть тензор C_{ijkl}^{22} имеет следующую структуру:

$$C_{ijkl}^{22} = C_{iamb}^{BL} \mathcal{E}_{jka} \mathcal{E}_{nlb} \quad (4.4.3.1)$$

$$\begin{aligned} 4C_{ipmq}^{BL} &= C_{ijkl}^{22} \mathcal{E}_{jkp} \mathcal{E}_{nlq} = \\ &= (2C_4^{22} - C_{11}^{22}) \delta_{ip} \delta_{mq} + \\ &+ (-2C_2^{22} - 2C_4^{22} + C_5^{22} + C_6^{22} + 2C_8^{22} - 2C_9^{22} + C_{11}^{22}) \delta_{im} \delta_{pq} + \\ &+ (2C_2^{22} - C_5^{22} - C_6^{22}) \delta_{iq} \delta_{pm} \end{aligned}$$

Здесь тензор C_{iamb}^{BL} содержит только три модуля (три линейные комбинации исходных модулей C_i^{22} ($i=1 \div 11$)). Поэтому остальные комбинации можно положить равными нулю. Подставляя (4.4.3.1) в (4.4.1.1), получим:

$$L = A - \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] \quad (4.4.3.2)$$

Эта модель примечательна тем, что градиентная часть потенциальной энергии является квадратичной формой компонентов тензора Ξ_{ij} плотности дислокаций Де Вита. Не смотря на минимальное количество «моментных» модулей (три), она все же позволяет изучать взаимодействие типов дислокаций, так как содержит билинейные по типам дислокаций слагаемые.

4.4.4. Модель сред с ω -дислокациями (теория сред Коссера).

Модель (4.4.2.3), благодаря «гипотезе ортогональности типов дислокаций» (4.4.2.2), дает возможность сформулировать модели сред с единственным типом дислокаций или с парой типов. Пусть в среде существуют только поля ω -дислокаций. Чтобы удержать в (4.4.2.3) слагаемые, включающие в себя только свободные повороты, делается следующее предположение о физических свойствах среды (4.4.2.3):

$$\lambda^{12} = \lambda^{22} = 0 \quad \mu^{12} = \mu^{22} = 0 \quad C^{\theta\theta} = 0 \quad C_{ijmn}^{\gamma\gamma} = 0 \quad (4.4.4.1)$$

Гипотеза (4.4.4.1) приводит к формулировке лагранжиана сред с полем сохраняющихся ω -дислокаций:

$$L = A - \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + 8\chi^{12} (-\frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \epsilon_{ijk}) \omega_k^2 + 4\chi^{22} \omega_k^2 \omega_k^2 + C_{ijmn}^{22\omega\omega} \omega_{i,j}^2 \omega_{m,n}^2] \quad (4.4.4.2)$$

Эта модель характерна тем, что каждой точке среды приписывается шесть степеней свободы: три компоненты вектора перемещений и три компоненты псевдовектора свободных поворотов ω_k^2 , которые не являются вихрями поля перемещений. Таким образом, каждая точка такой среды ведет себя как абсолютно твердое тело. Такая кинематическая модель определяет среды Коссера [1], поэтому можно утверждать, что теория сред Коссера является теорией сред с полем сохраняющихся ω -дислокаций [26].

4.4.5. Модель сред с θ -дислокациями (теория пористых сред).

Пусть в среде существуют только поля θ -дислокаций [26], [34]. Для этого следует удержать в (4.4.2.3) только те слагаемые, которые содержат свободное изменение объема. Делая следующее предположение о физических свойствах среды (4.4.2.3):

$$\mu^{12} = \mu^{22} = 0 \quad \chi^{11} = \chi^{12} = \chi^{22} = 0 \quad C_{ijmm}^{\gamma\gamma} = 0 \quad C_{ijmm}^{\omega\omega} = 0 \quad (4.4.5.1)$$

можно получить лагранжиан теории сред с полем сохраняющихся θ -дислокаций:

$$L = A - \frac{1}{2} \left[C_{ijmm}^{11} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_m}{\partial x_m} + 2 \left(\frac{2\mu^{12}}{3} + \lambda^{12} \right) \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \theta^2 + \left(\frac{2\mu^{12}}{3} + \lambda^{12} \right) \theta^2 \theta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} C_{kl}^{22\theta\theta} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_k} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_l} \right] \quad (4.4.5.2)$$

Эта модель характерна тем, что каждой точке среды приписывается четыре степени свободы: три компоненты вектора перемещений и одна компонента (амплитуда шарового тензора) свободной дисторсии θ^2 , которая не является дивергенцией поля перемещений.

4.4.6. Модель сред с γ -дислокациями.

Аналогичное предположение о том, что потенциальная энергия в (4.4.2.3) содержит слагаемые, в которых есть только компоненты тензора свободной дисторсии, определяющие свободное формоизменение, эквивалентно гипотезе:

$$\lambda^{12} = \lambda^{22} = 0 \quad \chi^{11} = \chi^{12} = \chi^{22} = 0 \quad C^{\theta\theta} = 0 \quad C_{ijmm}^{\omega\omega} = 0 \quad (4.4.6.1)$$

Оно приводит к формулировке модели среды с сохраняющимися γ -дислокациями [26], [34]:

$$L = A - \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + 2\mu^{12} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \gamma_{ij}^{\Xi} + 2\mu^{22} \gamma_{ij}^{\Xi} \gamma_{ij}^{\Xi} + C_{ijmn}^{22\gamma\gamma} \frac{\partial \gamma_{ki}^{\Xi}}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_{kn}^{\Xi}}{\partial x_m}] \quad (4.4.6.2)$$

Эта модель характерна тем, что каждой точке среды приписывается восемь степеней свободы: три компоненты вектора перемещений и пять независимых компонент девиатора тензора свободной дисторсии γ_{ij}^2 , которые не являются девиатором поля градиентов перемещений.

4.4.7. Алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями.

Пусть в лагранжиане общей теории (4.1.24), при отсутствии адгезионных свойств, тензоры «объемных» модулей $C_{ijkml}^{11}, C_{ijkml}^{12}, C_{ijkml}^{22}$ равны нулю. Тогда лагранжиан сформулированной теории дает постановку алгебраической относительно свободной дисторсии теории сред с сохраняющимися дислокациями:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2] dV \quad (4.4.7.1)$$

Эта модель характерна тем, что она сводится к модели простейшей несимметричной теории упругости, а при дополнительном предположении $\chi^{11} = \chi^{12} = 0$ - к классической теории упругости с поврежденными модулями. При этом алгебраическая связь между тензорами свободной и стесненной дисторсии, являющаяся уравнением Эйлера лагранжиана (4.4.7.1), совпадает с формулировкой обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского.

4.5. Строгие частные случаи идеальных (бездефектных) градиентных сред.

Из общей модели (4.1.24) можно получить спектр моделей, не зависящих от тензора свободной дисторсии, т.е. моделей сред без сохраняющихся дислокаций (моделей идеальных или бездефектных в смысле отсутствия

дислокаций сред). Для этого следует рассмотреть подпространство моделей, в которых тензоры модулей, содержащие верхний индекс сортности, равный двум, равны нулю. При этом, по-прежнему, рассмотрены только модели без адгезионных свойств поверхностей. Таким образом, проводится исследование подпространства моделей с лагранжианом

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml}^{11} R_{i,jk} R_{m,nl}] dV$$

В отличие от модели (4.3.12), рассматриваемый спектр моделей содержит идеальные $C_{ijmn}^{11}, C_{ijkml}^{11}$, а не поврежденные дислокациями и разрыхлением тензоры модулей C_{ijmn}, C_{ijkml} .

4.5.1. Модель идеальных (бездефектных) сред Тупина.

Пусть все тензоры модулей в общей модели (4.1.24), содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан теории принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Тупина с адгезионными свойствами поверхности, а при $A_{ijmn}^{11} = 0$ и $A_{ijkml}^{11} = 0$ - с классической моделью Тупина [6]:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml}^{11} R_{i,jk} R_{m,nl}] dV \quad (4.5.1.1)$$

Модель сред Тупина (4.5.1.1) радикально меняет точку зрения на место модели Тупина в иерархии градиентных моделей. Если раньше модель Тупина трактовалась как приближенная (прикладная) модель, вытекающая из модели Миндлина, благодаря использованию обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского, то теперь она занимает, наравне с моделью Миндлина, положение строгого частного случая более общей теории (4.1.24). Из неё, в свою очередь, вытекают как строгие частные случаи: модель Джеремилло [2], модель Аэро-Кувшинского [3], и «простейшая» модель когезионных взаимодействий [35]. Выразим последнее слагаемое в (4.5.1.1)

через градиенты $\gamma_{ij}^1 = (R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/3)$, $\theta^1 = R_{k,k}$ и $\omega_k^1 = -R_{i,j}\mathcal{E}_{ijk}/2$, используя разложение тензора стесненной дисторсии по типам (2.1). В результате получим:

$$C_{ijkml}^{11} R_{i,jk} R_{m,nl} = C_{ijkml}^{11} \gamma_{ij,k}^1 \gamma_{mn,l}^1 + \frac{1}{9} C_{ijkml}^{11} \delta_{ij} \delta_{mn} \theta_{,k}^1 \theta_{,l}^1 + C_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1 - \\ + \frac{2}{3} C_{ijkml}^{11} \delta_{ij} \gamma_{mn,l}^1 \theta_{,k}^1 - \frac{2}{3} C_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{ijp} \delta_{mn} \theta_{,l}^1 \omega_{p,k}^1 - 2C_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{mnq} \omega_{q,l}^1 \gamma_{ij,k}^1$$

Непосредственно вычисляя свертки, с учетом структуры тензора Тупина C_{ijkml}^{11} (4.1.15), можно убедиться, что первые три слагаемых являются каноническими положительно определенными квадратичными формами, соответственно градиентов γ_{ij}^1 , θ^1 и ω_k^1 , а последние три слагаемых – их билинейными формами:

$$C_{ijkml}^{11} D_{i,jk}^1 D_{m,nl}^1 = C_{ijkml}^{11\gamma\gamma} \gamma_{ij,k}^1 \gamma_{mn,l}^1 + \frac{1}{9} C_{kl}^{11\theta\theta} \theta_{,k}^1 \theta_{,l}^1 + C_{pkql}^{11\omega\omega} \omega_{p,k}^1 \omega_{q,l}^1 - \\ + \frac{2}{3} C_{kml}^{11\gamma\theta} \gamma_{mn,l}^1 \theta_{,k}^1 - \frac{2}{3} C_{pkl}^{11\theta\omega} \theta_{,l}^1 \omega_{p,k}^1 - 2C_{ijkql}^{11\omega\gamma} \omega_{q,l}^1 \gamma_{ij,k}^1$$

Здесь введены обозначения:

$$C_{ijkml}^{11\gamma\gamma} = (2C_3^{11} + C_6^{11} + C_7^{11}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jp} + \frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kp} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{ml} \delta_{np} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pl} \right) + \\ + (2C_4^{11} + C_9^{11} + C_{11}^{11}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pl} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mk} \delta_{np} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nk} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pk} \right) + \\ + (C_8^{11} + C_{10}^{11}) \left(\frac{1}{2} \delta_{ip} \delta_{jq} + \frac{1}{2} \delta_{iq} \delta_{jp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq} \right) \left(\frac{1}{2} \delta_{mq} \delta_{np} + \frac{1}{2} \delta_{mp} \delta_{nq} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{pq} \right) \delta_{kl}$$

$$C_{kl}^{11\theta\theta} = (6C_1^{11} + 6C_2^{11} + 2C_3^{11} + 2C_4^{11} + 9C_5^{11} + C_6^{11} + C_7^{11} + 3C_8^{11} + C_9^{11} + 3C_{10}^{11} + C_{11}^{11}) \delta_{kl}$$

$$C_{pkql}^{11\omega\omega} = (2C_4^{11} - C_9^{11} - C_{11}^{11}) \delta_{pk} \delta_{ql} + \\ + (-2C_3^{11} + C_6^{11} + C_7^{11} - 2C_4^{11} + C_9^{11} + C_{11}^{11} + 2C_8^{11} - 2C_{10}^{11}) \delta_{pq} \delta_{kl} + \\ + (2C_3^{11} - C_6^{11} - C_7^{11}) \delta_{pl} \delta_{kq}$$

$$C_{kml}^{11\gamma\theta} = (3C_1^{11} + 3C_2^{11} + 2C_3^{11} + 2C_4^{11} + C_6^{11} + C_7^{11} + C_9^{11} + C_{11}^{11}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right)$$

$$C_{pkl}^{11\theta\omega} = (-3C_1^{11} + 3C_2^{11} + C_6^{11} - C_7^{11} + C_9^{11} - C_{11}^{11}) \mathcal{E}_{pkl}$$

$$C_{ijkql}^{11\omega\gamma} =$$

$$= (C_6^{11} - C_7^{11}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathcal{E}_{iql} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathcal{E}_{jql} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{kql} \right) + (-C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jl} \mathcal{E}_{kiq} + \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{kjq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{klq} \right)$$

(4.5.1.2)

Модели (4.3.12) и (4.5.1.1) в объемной части отличаются только значениями модулей, входящих в тензоры модулей, соответственно в C_{ijmn}, C_{ijkml} и $C_{ijmn}^{11}, C_{ijkml}^{11}$. Поэтому можно провести аналогию между ними, вынося их различие в название моделей: «модель поврежденных дислокациями сред Тупина» и «модель идеальных (бездефектных) сред Тупина».

4.5.2. Модель сред Аэро-Кувшинского.

Пусть в модели (4.5.1.1) тензор Тупина таков, что модули при слагаемых потенциальной энергии, содержащих компоненты градиента тензора деформаций (компонентов симметричной части тензора стесненной дисторсии) равны нулю:

$$C_{ijkml}^{11\gamma\gamma} = 0 \quad C_{kl}^{11\theta\theta} = 0 \quad C_{kmnl}^{11\gamma\theta} = 0 \quad C_{pkl}^{11\theta\omega} = 0 \quad C_{ijkql}^{11\omega\gamma} = 0 \quad (4.5.2.1)$$

Причем следует заметить следующее: не смотря на то, что $(2C_4^{11} - C_9^{11} - C_{11}^{11}) \neq 0$, множителем при этой комбинации модулей служит дивергенция ротора перемещений, тождественно равная нулю. Поэтому тензор $C_{pkql}^{11\omega\omega} \neq 0$ (4.5.1.2) содержит только два существенных модуля. Предположим, что имеет место гипотеза парности касательных напряжений $\chi^{11} = 0$. Тензор модулей C_{ijmn}^{11} , как выснено выше, содержит только два модуля. Тогда гипотезы (4.5.2.1), с учетом сделанных выше оговорок, приводят модель (4.5.1.1) к модели сред Аэро-Кувшинского:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijmn}^{11\omega\omega} \omega_{i,j}^1 \omega_{m,n}^1] dV = \\ &= A - \frac{1}{2} [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijmn}^{11\omega\omega} (-R_{p,qi} \mathcal{E}_{pqi} / 2) (-R_{a,bn} \mathcal{E}_{abn} / 2)] dV \end{aligned} \quad (4.5.2.2)$$

Характерной особенностью модели сред Аэро-Кувшинского является то, что потенциальная энергия, связанная с градиентом стесненной дисторсии, может быть представлена в виде, содержащим исключительно компоненты

градиента антисимметричной части тензора стесненной дисторсии – тензора стесненных поворотов или псевдовектора стесненных поворотов.

4.5.3. Модель сред Джеремилло.

Рассмотрим противоположный по отношению к модели сред Аэро-Кувшинского случай. Пусть в модели (4.5.1.1) тензор модулей шестого ранга таков, что модули при слагаемых потенциальной энергии, содержащих градиенты поворотов (компонентов антисимметричной части тензора стесненной дисторсии) равны нулю:

$$C_{pkl}^{11\theta\omega} = 0 \quad C_{ijkql}^{11\omega\gamma} = 0 \quad C_{pkql}^{11\omega\omega} = 0 \quad (4.5.3.1)$$

Так же, как и для модели сред Аэро-Кувшинского, примем гипотезу парности касательных напряжений $\chi^{11} = 0$, что приведет к тому, что тензор модулей C_{ijmn}^{11} содержит только два модуля. Тогда гипотезы (4.5.3.1), с учетом сделанной выше оговорки, приводят модель (4.5.1.1) к модели сред Джеремилло:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijknml}^{11\gamma\gamma} \gamma_{ij,k}^1 \gamma_{mn,l}^1 + \frac{2}{3} C_{kmnl}^{11\gamma\theta} \gamma_{mn,l}^1 \theta_{,k}^1 + \frac{1}{9} C_{kl}^{11\theta\theta} \theta_{,k}^1 \theta_{,l}^1] dV = \\ &= A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijknml}^{11} (R_{i,jk} + R_{j,ik})(R_{m,nl} + R_{n,ml}) / 4] dV \end{aligned} \quad (4.5.3.2)$$

Характерной особенностью модели сред Джеремилло является то, что потенциальная энергия, связанная с градиентом стесненной дисторсии, может быть представлена в виде, содержащим исключительно компоненты градиента симметричной части тензора стесненной дисторсии – тензора стесненной деформации.

4.5.4. «Простейшая» модель когезионных взаимодействий.

Пусть в модели (4.5.1.1) тензор модулей шестого ранга таков, что:

$$C_{ijklmn}^{11} = C_{pkij}^{11} C_{plmn}^{11} / C \quad (4.5.4.1)$$

Так же, как и для моделей сред Аэро-Кувшинского и Джеремилло, примем гипотезу парности касательных напряжений $\chi^{11} = 0$. Тогда гипотеза (4.5.4.1), с учетом гипотезы парности, приводит модель (4.5.1.1) к «простейшей» модели когезионных взаимодействий [35]:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmi}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + (C_{pkij}^{11} R_{i,jk})(C_{plmn}^{11} R_{m,nl}) / C] dV \quad (4.5.4.2)$$

Характерной особенностью сформулированной модели является то, что она сохраняет все основные черты модели идеальной среды Тупина, моделей сред Аэро-Кувшинского и Джеремилло, но, при этом, требует экспериментального определения всего одного нового, «неклассического» модуля C .

Основной характерной чертой всех рассмотренных в этом разделе моделей, является то, что искомое поле перемещений можно представить в виде суммы «классических» и когезионных перемещений. Соответственно, краевые задачи всех этих моделей можно представить в виде контактной задачи двух сред («классической» и «когезионной»), вложенных друг в друга и контактирующих по общей поверхности, ограничивающей тело.

4.6. Модели сред с адгезионными свойствами поверхностей.

В этом разделе будут сформулированы модели сред с адгезионными свойствами поверхностей. В отличие от ситуации с градиентными моделями механики сред, где имеется достаточно большой спектр общепризнанных моделей, в механике сред с адгезионными свойствами поверхностей не существует ни одной общепризнанной модели. Из

опубликованных моделей имеется только три [36,37], [28,39,40], [24,27,38]. Поэтому при формулировке адгезионных моделей приходится опираться на аналогии с общепризнанными градиентными моделями.

4.6.1. Модель «антисимметрично градиентной» адгезии.

Рассмотрим подпространство моделей в (4.1.24), в котором тензоры модулей обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} C_{ijkml}^{1b} = 0 \\ C_{ijkml}^{22} = C_{ipmq}^{BL} \mathcal{E}_{jkp} \mathcal{E}_{nlq} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ijkml}^{1b} = 0 \\ A_{ijkml}^{22} = A_{ipmq}^* \mathcal{E}_{jkp} \mathcal{E}_{nlq} \end{cases} \quad \begin{cases} A_{ijmnl}^{a1} = 0 \\ A_{ijmnl}^{a2} = A_{ijmq}^a \mathcal{E}_{nlq} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_{ijmq}^a &= A_{ijmnl}^{a2} \mathcal{E}_{nlq} / 2 = \\ &= [(A_2^{a2} - A_3^{a2}) n_i n_q \mathcal{E}_{jmn} n_n + (G_5^{a2} - G_6^{a2}) n_j n_q \mathcal{E}_{imn} n_n + (-G_8^{a2} + G_9^{a2}) n_m n_q \mathcal{E}_{ijn} n_n + \\ &+ G_{10}^{a2} \delta_{jm}^* \mathcal{E}_{iqn} n_n + G_{11}^{a2} \delta_{ji}^* \mathcal{E}_{mqn} n_n + G_{12}^{a2} \delta_{mi}^* \mathcal{E}_{jqn} n_n + \\ &+ G_{13}^{a2} n_j n_m \mathcal{E}_{iqn} n_n + G_{14}^{a2} n_i n_m \mathcal{E}_{jqn} n_n + G_{15}^{a2} n_i n_j \mathcal{E}_{mqn} n_n] / 2 \\ A_{ipmq}^* &= A_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{jkp} \mathcal{E}_{nlq} / 4 = \\ &= [-A_{23}^{22} \delta_{ip}^* \delta_{mq}^* + (A_{21}^{22} + A_{22}^{22} + A_{23}^{22}) \delta_{im}^* \delta_{pq}^* - A_{21}^{22} \delta_{iq}^* \delta_{pm}^* + \\ &+ [-2A_2^{22} - 2A_4^{22} + A_5^{22} + A_6^{22} + 2A_8^{22} - 2A_9^{22} + A_{10}^{22} + A_{11}^{22}] \delta_{im}^* n_p n_q + A_{24}^{22} \delta_{pq}^* n_i n_m + \\ &+ (A_{13}^{22} - A_{14}^{22}) (\delta_{pm}^* n_i n_q + \delta_{iq}^* n_p n_m) + (A_{15}^{22} - A_{17}^{22}) (\delta_{mq}^* n_i n_p + \delta_{ip}^* n_m n_q) + \\ &+ 2(A_{19}^{22} - A_{20}^{22}) n_i n_p n_m n_q] / 4 \end{aligned} \quad (4.6.1.1)$$

Лагранжиан такой модели приобретает вид:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dV - \\ &- \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmn}^a D_{ij}^a \Xi_{mn} + A_{ijmn}^* \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dF \end{aligned} \quad (4.6.1.2)$$

Модель (4.6.1.2) характерна тем, что градиентные части плотностей потенциальных энергий могут быть представлены в виде квадратичных форм от тензора Ξ_{ij} плотности дислокаций Де Вита. Остальные кривизны второго сорта не входят в выражения плотностей. Эта модель может рассматриваться как «адгезионное» обобщение «простейшей» модели сред с

сохраняющимися дислокациями, рассмотренной в разделе 3.4.3. С другой стороны: так как тензор Де Вита является антисимметричной частью тензора кривизн второго сорта (по последним двум индексам), можно провести аналогию между этой моделью и моделью Аэро-Кувшинского, рассмотренной в разделе 3.5.2, градиентная часть которой является квадратичной формой антисимметричной части тензора кривизн первого сорта (правда, по первым двум индексам). Пользуясь этой аналогией, естественно сформулировать и адгезионный аналог модели Джеремилло, рассмотренной в разделе 3.5.3.

4.6.2. Модель «симметрично градиентной» адгезии.

Для того чтобы получить из (4.1.24) адгезионный аналог модели Джеремилло, следует выделить из тензоров модулей пятого и шестого ранга симметричные части по индексам, сворачиваемым с последними двумя индексами кривизн второго сорта. Модель «симметрично градиентной» адгезии будет являться подпространством моделей в (4.1.24), в котором тензоры модулей обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} C_{ijkml}^{1b} = 0 \\ C_{ijkmnr}^J = (C_{ijkmnr}^{22} + C_{ikjmnr}^{22} + C_{ijkmrn}^{22} + C_{ikjmrn}^{22})/4 \end{cases} \quad (4.6.2.1)$$

$$\begin{cases} A_{ijkml}^{1b} = 0 \\ A_{ijkmnr}^J = (A_{ijkmnr}^{22} + A_{ikjmnr}^{22} + A_{ijkmrn}^{22} + A_{ikjmrn}^{22})/4 \end{cases} \quad \begin{cases} G_{ijmnl}^{a1} = 0 \\ G_{ijmnr}^{aJ} = (G_{ijmnr}^{a2} + C_{ijmnr}^{a2})/2 \end{cases}$$

Лагранжиан такой модели приобретает вид:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnr}^J (D_{ijk}^2 + D_{ikj}^2)(D_{mnr}^2 + D_{mrn}^2)] dV - \\ - \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2G_{ijmnr}^{aJ} D_{ij}^a (D_{mnr}^2 + D_{mrn}^2) + A_{ijkmnr}^J (D_{ijk}^2 + D_{ikj}^2)(D_{mnr}^2 + D_{mrn}^2)] dF \end{aligned} \quad (4.6.2.2)$$

Как и предполагалось, эта модель характерна тем, что градиентные части плотностей потенциальных энергий могут быть представлены в виде квадратичных форм от части тензора кривизн второго сорта, симметричной

по последним двум индексам. Остальные кривизны второго сорта не входят в выражения плотностей.

4.6.3. Модель упрощенной «градиентной» адгезии.

В соответствии со второй формой определения вектора Бюргерса, можно определить соответствующую 2D-плотность вектора Бюргерса $\rho_i = \Xi_{ij}n_j$. Тогда модель (4.6.1.2) можно упростить, делая дальнейшие предположения относительно структуры тензоров адгезионных модулей:

$$\begin{cases} A_{ijmn}^* = A_{im}^{BL} n_j n_n \\ A_{ijmq}^a = A_{ijm}^a n_q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{im}^{BL} = A_{ijmn}^* n_j n_n \\ A_{ijm}^a = A_{ijmq}^a n_q \end{cases}$$

$$A_{im}^{BL} = \{[-2A_2^{22} - 2A_4^{22} + A_5^{22} + A_6^{22} + 2A_8^{22} - 2A_9^{22} + A_{10}^{22} + A_{11}^{22}]\delta_{im}^* + 2(A_{19}^{22} - A_{20}^{22})n_i n_m\} / 4 \quad (4.6.3.1)$$

$$A_{ijm}^a = [(G_2^{a2} - G_3^{a2})n_i \mathcal{E}_{jmn} n_n + (G_5^{a2} - G_6^{a2})n_j \mathcal{E}_{imn} n_n + (-G_8^{a2} + G_9^{a2})n_m \mathcal{E}_{ijn} n_n] / 2$$

В результате, лагранжиан модели принимает вид, при котором в поверхностную плотность потенциальной энергии кривизны войдут только через 2D-плотность вектора Бюргерса:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dV - \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijm}^a D_{ij}^a \rho_m + A_{ij}^{BL} \rho_i \rho_j] dF \quad (4.6.3.2)$$

Частный случай такой модели при $A_{ijm}^a = (-G_8^{a2} + G_9^{a2})n_m \mathcal{E}_{ijn} n_n / 2$ рассматривался в работе []. Эта модель дает возможность выделить явно зависимость адгезии поверхности от её дислокационной поврежденности.

4.6.4. Модель «поврежденной» адгезии.

Дальнейшее упрощение модели (4.6.3.2) можно получить, полагая в (4.6.3.2):

$$\begin{cases} A_{ijm}^a = 0 \\ A_{ij}^{BL} = 0 \end{cases} \quad (4.6.4.1)$$

В соответствии с гипотезами (4.6.4.1), лагранжиан (4.6.3.2) приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijmn}^{BL} \Xi_{ij} \Xi_{mn}] dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b dF \quad (4.6.4.2)$$

Гипотезы (4.6.4.1) эквивалентны предположению о том, что поля дислокаций на поверхности тела не влияют на адгезионные свойства поверхности. Такая модель изучалась в работах [25,27]. Плотность потенциальной энергии адгезии в (4.6.4.2) трактовалась как сумма плотностей энергий «старой» поверхности $A_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 / 2$, «новой» поверхности $A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 / 2$, и энергии взаимодействия $A_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 / 2$ «старой» и «новой» поверхностей.

4.6.5. Модель идеальной адгезии.

Модель идеальной адгезии изучалась в работах [24, 35], она может быть получена из (4.6.4.2) при следующих гипотезах относительно тензоров модулей:

$$\begin{cases} C_{ijmn}^{2b} = 0 \\ C_{ijmn}^{BL} = 0 \\ A_{ijmn}^{2b} = 0 \\ A_{ijmn}^{11} n_j = 0 \\ A_{ijmn}^{11} n_n = 0 \end{cases} \quad (4.6.5.1)$$

В соответствии с гипотезами (4.6.5.1), лагранжиан (4.6.4.2) приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 dF \quad (4.6.5.2)$$

Гипотезы (4.6.5.1) эквивалентны предположению о том, что поля дислокаций отсутствуют как на поверхности тела, так и в объеме. Плотность потенциальной энергии адгезии в (4.6.5.2) трактовалась как сумма плотностей энергий четырех типов «идеальных» адгезионных взаимодействий.

4.7. Объяснение нестабильности экспериментальных значений «моментных» модулей.

Преобразуем лагранжиан общей теории (4.1.24) к лагранжиану неоднородной среды Тупина, содержащей модели (4.3.12), (4.5.1.1) как частные случаи. Для этого введем в качестве основных неизвестных вместо компонентов тензора свободной дисторсии D_{ij}^2 компоненты тензора относительной поврежденности t_{ij} соотношениями [41]:

$$\begin{aligned} D_{ij}^2 &= t_{ip} R_{p,j} \\ D_{ijk}^2 &= t_{ip} R_{p,jk} + t_{ip,k} R_{p,j} \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Подставляя (4.7.1) в (4.1.24), получим:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} + 2C_{ijan}^{12} t_{am} + C_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k} t_{bm,l}) R_{i,j} R_{m,n} + \\ &+ 2[C_{ijknl}^{12} t_{am,l} + (C_{bjkanl}^{22} + C_{anlbjk}^{22}) t_{bi} t_{am,l} / 2] R_{m,n} R_{i,jk} + \\ &+ (C_{ijkml}^{11} + 2C_{ijknl}^{12} t_{am} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm}) R_{i,jk} R_{m,nl} \} dV - \\ &- \frac{1}{2} \iint \{ (A_{ijmn}^{11} + 2A_{ijan}^{12} t_{am} + A_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k} t_{bm,l}) R_{i,j} R_{m,n} + \\ &+ 2[A_{ijknl}^{12} t_{am,l} + (A_{bjkanl}^{22} + A_{anlbjk}^{22}) t_{bi} t_{am,l} / 2] R_{m,n} R_{i,jk} + \\ &+ (A_{ijkml}^{11} + 2A_{ijknl}^{12} t_{am} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm}) R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF \end{aligned}$$

Вводя переменные по координатам тензорные поля упругих свойств $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijkmn}, \tilde{C}_{ijkmnl}$ и $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijkmn}, \tilde{A}_{ijkmnl}$:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{ijmn} = C_{ijmn}^{11} + 2C_{ijan}^{12} t_{am} + C_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k} t_{bm,l} \\ \tilde{C}_{ijkmn} = C_{ijknl}^{12} t_{am,l} + (C_{bjkanl}^{22} + C_{anlbjk}^{22}) t_{bi} t_{am,l} / 2 \\ \tilde{C}_{ijkmnl} = C_{ijkml}^{11} + 2C_{ijknl}^{12} t_{am} + C_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm} \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_{ijmn} = A_{ijmn}^{11} + 2A_{ijan}^{12} t_{am} + A_{ajbn}^{22} t_{ai} t_{bm} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai,k} t_{bm,l} \\ \tilde{A}_{ijkmn} = A_{ijknl}^{12} t_{am,l} + (A_{bjkanl}^{22} + A_{anlbjk}^{22}) t_{bi} t_{am,l} / 2 \\ \tilde{A}_{ijkmnl} = A_{ijkml}^{11} + 2A_{ijknl}^{12} t_{am} + A_{ajkbnl}^{22} t_{ai} t_{bm} \end{cases} \quad (4.7.2)$$

можно привести лагранжиан общей теории (4.1.24) к лагранжиану неоднородной среды Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ \tilde{C}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{C}_{ijkml} R_{m,n} R_{i,jk} + \tilde{C}_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dV - \quad (4.7.3)$$

$$- \frac{1}{2} \iint \{ \tilde{A}_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + 2\tilde{A}_{ijkml} R_{m,n} R_{i,jk} + \tilde{A}_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF$$

Даже если игнорировать билинейные слагаемые в (4.7.3), множители при которых пропорциональны градиенту относительной поврежденности $t_{am,l}$, модели (4.3.12), (4.5.1.1) и (4.7.3) приводят к объяснению нестабильности экспериментальных значений «моментных» модулей [42]. Объяснение кроется во внутренней структуре тензоров C_{ijkml}^{11} , C_{ijkml} и \tilde{C}_{ijkml} .

В модели (4.5.1.1) тензор модулей C_{ijkml}^{11} трактуется как тензор «моментных супермодулей», не поврежденных полями сохраняющихся дислокаций.

В модели (4.3.12) тензор C_{ijkml} трактуется как тензор «моментных» модулей, поврежденных полями сохраняющихся дислокаций. Проводя аналогию между средой (4.3.12) и мелкодисперсным композитом, можно трактовать C_{ijkml} как тензор модулей такого композита. Матрицей этого композита служит исходная бездефектная среда, а включениями – три типа сохраняющихся дислокаций с тензором a_{ijmn} , связанным с относительными объемными долями трех типов полей сохраняющихся дислокаций.

Наконец, в модели (4.7.3), тензор модулей \tilde{C}_{ijkml} трактуется уже как тензорное поле, переменное по координатам, требующее некоторого осреднения для вычисления и идентификации эффективного тензора «моментных» модулей.

4.8. Заключение.

В этой главе построена наиболее общая теория сред с сохраняющимися дислокациями (4.1.24). Рассмотрен спектр частных моделей, вытекающих из общей, путем постулирования тех или иных гипотез о структурах тензоров модулей. Предложен «конструктор моделей» - многомерное

пространство моделей, каждое измерение которого определяется некоторым механическим свойством (модулем) дефектной среды. Выделяя из введенного пространства моделей подпространство соответствующего измерения, можно изучать дефектные среды с выбранным набором механических свойств. Так как все модули дефектных сред (пространство моделей) можно разделить на группы с одинаковой физической размерностью, пространство моделей можно структурировать аналогичным образом.

Пусть l - некоторый универсальный физический параметр размерности длины. Тогда тензоры A_{ijmn}^{ab} будут отличаться по физической размерности от тензоров C_{ijmn}^{ab} на размерность длины. Их можно представить в виде $A_{ijmn}^{ab} = \bar{A}_{ijmn}^{ab} l$, где \bar{A}_{ijmn}^{ab} и C_{ijmn}^{ab} - тензоры одинаковой физической размерности. Соответственно, тензоры $C_{ijknml}^{ab}, A_{ijknml}^{ab}$ можно представить в виде: $C_{ijknml}^{ab} = \bar{C}_{ijknml}^{ab} l^2$ и $A_{ijknml}^{ab} = \bar{A}_{ijknml}^{ab} l^2$, где $\bar{A}_{ijknml}^{ab}, \bar{C}_{ijknml}^{ab}$ и C_{ijknml}^{ab} - тензоры одинаковой физической размерности. Наконец, тензор $A_{ijknml}^{ab} = \bar{A}_{ijknml}^{ab} l^3$ можно представить в аналогичном виде. В результате, лагранжиан общей модели может быть представлен в виде конечного разложения по параметру l , который можно трактовать как характерную длину масштабных эффектов:

Структура теории с точки зрения учета масштабных эффектов

$$\begin{aligned}
 L = & A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b dV - && \text{Классические приближения} \\
 & - \frac{1}{2} l \iint \bar{A}_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b dF - && \text{Адгезионные приближения} \\
 & - \frac{1}{2} l^2 \left[\iiint \bar{C}_{ijknml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b dV + \iint 2\bar{A}_{ijknml}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b dF \right] - \\
 & - \frac{1}{2} l^3 \iint \bar{A}_{ijknml}^{ab} D_{ijk}^a D_{mn}^b dF && \text{Градиентные приближения}
 \end{aligned}$$

Адгезионно-градиентные приближения

Это представление может являться обоснованием структурирования пространства моделей по подпространствам, с модулями одинаковой степени по характерной длине масштабных эффектов l . Так «алгебраическая» теория дефектных сред, рассмотренная в разделе 4.4.7., содержит все возможные варианты «классических приближений», которые не описывают масштабные эффекты. В подпространстве «адгезионных приближений» лежит модель идеальной адгезии (4.6.5.2). Очевидно: наиболее существенные масштабные эффекты, связанные с минимальной степенью (первой) параметра l , следует искать в поверхностных эффектах, связанных с идеальной адгезией, то есть в подпространстве «адгезионных приближений». Следующим по вкладу масштабных эффектов является подпространство «градиентных приближений». Заметим, что это подпространство также можно разделить на подпространство «когезионных приближений», связанных с $C_{ijkml}^{ab} = \bar{C}_{ijkml}^{ab} l^2$ и «адгезионных приближений второго порядка», связанных с $A_{ijkml}^{ab} = \bar{A}_{ijkml}^{ab} l^2$. Следует обратить внимание на то, что тензоры $A_{ijkml}^{ab} = \bar{A}_{ijkml}^{ab} l^2$ могут появиться в модели дефектной среды только одновременно с тензорами $A_{ijkml}^{ab} = \bar{A}_{ijkml}^{ab} l^3$. Этот факт определяется требованием положительной определенности потенциальной энергии адгезии. Соответственно, и подпространство «адгезионных приближений второго порядка» имеет смысл исследовать только совместно с подпространством «адгезионно-градиентных приближений».

Так же важным итогом этой главы является осознание самостоятельной роли градиентных моделей идеальных (бездефектных) сред. Модели идеальных сред Тупина (4.5.1.1), Аэро-Кувшинского (4.5.2.2), Джеремилло (4.5.3.2) и «простейшей» теории когезионных взаимодействий (4.5.4.2) скорее всего, могут служить достаточно простым и эффективным инструментом изучения неклассических свойств кристаллических структур, т.е. структур, с минимальным представительным объемом, характерный размер которого определен шагом кристаллической решетки.

Структура теории с точки зрения учета полей дефектов

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{i,j}^1 D_{mn}^1 + C_{ijknml}^{11} D_{i,jk}^1 D_{m,nl}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn}^2 + 2C_{ijknml}^{12} D_{i,jk}^1 D_{mn,l}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijknml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] dV - \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{11} D_{i,j}^1 D_{mn}^1 + 2A_{ijmnl}^{11} D_{i,j}^1 D_{m,nl}^1 + A_{ijknml}^{11} D_{i,jk}^1 D_{m,nl}^1 + 2A_{ijmn}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn}^2 + 2A_{ijmnl}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn,l}^2 + 2A_{ijmnl}^{21} D_{ij}^2 D_{m,nl}^1 + 2A_{ijknml}^{12} D_{i,jk}^1 D_{mn,l}^2 + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + 2A_{ijmnl}^{22} D_{ij}^2 D_{mn,l}^2 + A_{ijknml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] dF$$

Бездефектная среда

Поля сохраняющихся дислокаций

Взаимодействие бездефектной среды с полями дислокаций

Следующим важным итогом этой главы является структуризация известных градиентных моделей, их место и роль в иерархии всех возможных моделей в рамках моделей сред с полями сохраняющихся дислокаций, выявление их достоинств и недостатков. Совершенно очевидно, что основным недостатком «классических» градиентных моделей является неучет соответствующего спектра адгезионных взаимодействий.

Структура теории с точки зрения известных моделей

Классическая теория упругости

Теория Тупина

Теория Миндлина

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{i,j}^1 D_{mn}^1 + C_{ijknml}^{11} D_{i,jk}^1 D_{m,nl}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn}^2 + 2C_{ijknml}^{12} D_{i,jk}^1 D_{mn,l}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijknml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] dV - \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{11} D_{i,j}^1 D_{mn}^1 + 2A_{ijmnl}^{11} D_{i,j}^1 D_{m,nl}^1 + A_{ijknml}^{11} D_{i,jk}^1 D_{m,nl}^1 + 2A_{ijmn}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn}^2 + 2A_{ijmnl}^{12} D_{i,j}^1 D_{mn,l}^2 + 2A_{ijmnl}^{21} D_{ij}^2 D_{m,nl}^1 + 2A_{ijknml}^{12} D_{i,jk}^1 D_{mn,l}^2 + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + 2A_{ijmnl}^{22} D_{ij}^2 D_{mn,l}^2 + A_{ijknml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2] dF$$

Следующая глава посвящена детальному изучению представляющихся наиболее перспективными частных моделей общей теории.

ГЛАВА 5 ТЕОРИЯ КОГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.

В главе исследуется ряд теорий когезионных взаимодействий последовательно возрастающей сложности, сформулированных выше. Все они являются различными частными случаями общей теории сред с сохраняющимися дислокациями:

- алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями,
- «простейшая» теория когезионного поля,
- уточненная модель идеальных (бездефектных) сред Тупина,
- теория сред Коссера (теория сред с полем ω – дислокаций),
- теория пористых сред (теория сред с полем θ – дислокаций),
- теория сред с полем γ – дислокаций,
- уточненная модель сред Миндлина,

Эти модели выбраны с целью формулировки тестовых примеров, позволяющих дать трактовки всем модулям, фигурирующим в тензорах C_{ijmn}^{ab} и C_{ijklm}^{ab} .

Одновременно с выяснением физического смысла модулей строятся и исследуются фундаментальные решения для каждой модели. Даются определения когезионных взаимодействий, когезионных перемещений, характерных длин когезионных взаимодействий в различных частных случаях теории. В результате, установлен исчерпывающий спектр возможных когезионных взаимодействий в средах с сохраняющимися дислокациями, определены физические параметры среды, отражающие свойства когезионных взаимодействий, и связь этих параметров с неклассическими модулями.

5.1. Алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями.

Не смотря на то, что алгебраическая модель сред с сохраняющимися дислокациями (4.4.7.1), по существу, не является когезионной моделью, представляется уместным именно в этой главе провести её анализ и дать трактовку модулей, входящих в состав тензоров $C_{ijmn}^{11}, C_{ijmn}^{12}, C_{ijmn}^{22}$, так как эти тензоры будут входить в любую когезионную модель, которая будет рассмотрена далее.

Из стационарности лагранжиана (4.4.7.1) следует вариационное уравнение алгебраической модели сред с сохраняющимися дислокациями:

$$\begin{aligned} \delta L = \iiint \{ [(C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2) + P_i^F] \delta R_i - (C_{ijmn}^{12} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2) \delta D_{ij}^2 \} dV + \\ + \oint [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i = 0 \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Полученные при δD_{ij}^2 уравнения равновесия являются алгебраическими, что и дало название модели:

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{12} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 = 0 \Rightarrow \\ D_{pq}^2 = -C_{pqij}^{-22} C_{ijmn}^{12} R_{m,n} = -a_{pqmn} R_{m,n} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Здесь тензор податливостей C_{pqij}^{-22} определен как решение системы $C_{pqij}^{-22} C_{ijmn}^{22} = \delta_{pm} \delta_{qn}$. Как видно из решения (5.1.2), оно совпадает с формулировкой обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского. Таким образом, обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского является строгим следствием теории сред с сохраняющимися дислокациями в рамках алгебраической модели. Уравнения равновесия в перемещениях с учетом (5.1.2) приобретают вид:

$$(C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}) R_{m,nj} + P_i^F = 0 \quad (5.1.3)$$

Вид (5.1.3) – вид уравнений равновесия классической теории упругости с поврежденными модулями $C_{ijmn} = C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}$. При $C_{ijmn}^{12} = 0$ система (5.1.2)-(5.1.3) дает:

$$\begin{cases} D_{ij}^2 = 0 \\ C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + P_i^F = 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

При $C_{ijmn}^{12} = 0$ уравнения Эйлера (5.1.1) приводятся к уравнениям (5.1.4) идеальной (не поврежденной сохраняющимися дислокациями, так как $D_{ij}^2 = 0$) среды. Отсюда следует, что тензор модулей C_{ijmn}^{11} - тензор модулей неповрежденной дислокациями среды (тензор супермодулей).

При $C_{ijmn}^{12} \neq 0$ дислокации существуют $D_{pq}^2 = -C_{pqij}^{-22} C_{ijmn}^{12} R_{m,n} \neq 0$, и тензор модулей C_{ijmn} является тензором поврежденных дислокациями модулей. Его величина отличается от величины тензора супермодулей C_{ijmn}^{11} на величину, $C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}$, следовательно, поврежденные модули C_{ijmn} всегда меньше супермодулей:

$$C_{ijmn}^{11} - C_{ijmn} = C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12} > 0$$

Для трактовки физического смысла тензоров C_{ijmn}^{22} и C_{ijmn}^{12} привлечем понятие разрыхления среды в объеме, введенное в разделе 2.4. Введенное понятие разрыхления дает возможность трактовать составляющие объемной плотности потенциальной энергии, преобразованной к канонической форме. Для того чтобы осуществить это преобразование, введем определение эффективной свободной дисторсии (эффективного разрыхления):

$$D_{ij}^* = D_{ij}^2 - C_{ijpq}^{-22} C_{pqmn}^{12} R_{m,n}$$

В результате получим:

$$2U_V = (C_{ijnm}^{11} - C_{ijpq}^{12} C_{pqrs}^{-22} C_{rsnm}^{12}) R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijnm}^{22} D_{nm}^* D_{ij}^*$$

Первое слагаемое похоже на потенциальную энергию идеальной среды (без дислокаций) $2U_V = C_{ijnm}^{11} R_{i,j} R_{m,n}$, но с другим - «поврежденным» тензором модулей:

$$C_{ijnm} = (C_{ijnm}^{11} - C_{ijpq}^{12} C_{pqrs}^{-22} C_{rsnm}^{12}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + (\mu + \chi) \delta_{in} \delta_{jm} + (\mu - \chi) \delta_{im} \delta_{jn} \quad (5.1.5)$$

Поправка $C_{ijpq}^{12} C_{pqrs}^{-22} C_{rsnm}^{12}$ определяет степень «поврежденности» супермодулей разрыхлением, а тензор C_{ijnm}^{12} трактуется как тензор модулей «поврежденности разрыхлением».

Второе слагаемое в объемной плотности потенциальной энергии является квадратичной канонической формой трех типов эффективных дислокаций. В

соответствии с введенным понятием разрыхления, эту часть потенциальной энергии можно назвать потенциальной энергией разрыхления, или энергией обратимого образования нового объема. Соответственно, тензор C_{ijmn}^{22} можно назвать тензором модулей разрыхления. В разделе 2.4 дана «узкая» трактовка разрыхления на примере разрыхления среды только θ -дислокациями. При наличии физической теории можно дать и универсальную трактовку всех типов разрыхления.

Дадим определения скалярным мерам типов обратимого образования нового объема – с индексом D, и типов деформации непрерывной среды – с индексом R:

$$\begin{aligned}\Theta^D &= \sqrt{\theta^e \theta^e} & \Omega^D &= \sqrt{\omega_i^e \omega_i^e} & \Gamma^D &= \sqrt{\gamma_{ij}^e \gamma_{ij}^e} \\ \Theta^R &= \sqrt{\theta^R \theta^R} & \Omega^R &= \sqrt{\omega_i^R \omega_i^R} & \Gamma^R &= \sqrt{\gamma_{ij}^R \gamma_{ij}^R}\end{aligned}$$

Выражение для U_V , записанное в скалярных мерах, приобретет вид:

$$\begin{aligned}2U_V(\Theta^R, \Gamma^R, \Omega^R, \Theta^D, \Gamma^D, \Omega^D) = \\ = (2\mu/3 + \lambda)\Theta^R\Theta^R + 2\mu\Gamma^R\Gamma^R + 2\chi\Omega^R\Omega^R + \\ + (2\mu^{22}/3 + \lambda^{22})\Theta^D\Theta^D + 2\mu^{22}\Gamma^D\Gamma^D + 2\chi^{22}\Omega^D\Omega^D\end{aligned}$$

Такая форма записи потенциальной энергии позволяет дать единую энергетическую трактовку модулей как удвоенной потенциальной энергии, накопленной дефектной средой при соответствующей единичной скалярной мере и равенстве нулю остальных скалярных мер.

Так, к примеру, слагаемое $(2\mu/3 + \lambda)\Theta^R\Theta^R$ есть удвоенная потенциальная энергия деформации изменения объема непрерывной среды с эффективным (поврежденным) модулем $(2\mu/3 + \lambda)$. Модуль $(2\mu/3 + \lambda)$ - удвоенная потенциальная энергия деформации изменения «старого» объема, накопленная средой при $\Theta^R = 1$ - единичной скалярной мере изменения объема непрерывной среды:

$$(2\mu/3 + \lambda) = 2U_V(1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Аналогично, слагаемое $(2\mu^{22}/3 + \lambda^{22})\Theta^D\Theta^D$ есть удвоенная потенциальная энергия разрыхления среды эффективными θ -дислокациями, а

модуль $(2\mu^{22}/3 + \lambda^{22})$ - удвоенная потенциальная энергия обратимого образования нового объема, накопленная средой при $\Theta^D = 1$ - единичной скалярной мере нового объема, связанного с существованием эффективных θ -дислокаций:

$$(2\mu^{22}/3 + \lambda^{22}) = 2U_v(0,0,0,1,0,0).$$

Аналогичные трактовки можно дать и остальным модулям.

Суммируя итоги анализа физического содержания части объемной плотности потенциальной энергии, связанной с дисторсиями, можно констатировать, что дана универсальная энергетическая трактовка всех девяти модулей упругости, входящих в состав тензоров модулей C_{ijmn}^{11} , C_{ijmn}^{12} и C_{ijmn}^{22} .

Модули тензора супермодулей C_{ijmn}^{11} трактуются как удвоенные потенциальные энергии трех типов деформации «старого» объема - объема идеальной среды.

Модули тензора «разрыхления» C_{ijmn}^{22} трактуются как удвоенные потенциальные энергии обратимого образования трех типов «нового» объема в среде.

Модули тензора «поврежденности разрыхлением» C_{ijmn}^{12} трактуются как удвоенные потенциальные энергии трех типов взаимодействия «нового» и «старого» объема в среде.

Представляется, что такая трактовка будет полезна в механике разрушения.

Попробуем дать трактовку тех же модулей с точки зрения теории мелкодисперсных композитов, предположив, что дефектная среда является таковым. Тогда идеальная среда должна трактоваться как матрица такого композита с тензором модулей C_{ijmn}^{11} , а три типа сохраняющихся дислокаций – его наполнителем. Соответственно, тензор поврежденных модулей (5.1.5) следует трактовать как тензор эффективных модулей такого композита. Для упрощения рассмотрим случай пористых сред, в которых имеют место только θ -дислокации. Соответственно, наполнителем служит поле θ -дислокаций.

Для соответствующей нагрузки решение в виде:

$$R_i = \frac{1}{3}\theta^1 x_i$$

$$\theta^1 = \text{Const}_1$$

$$\theta^2 = \text{Const}_2$$

является точным при $P_i^V = 0$ и $P_i^F = \Delta P n_i$, где ΔP - приращение постоянной величины внешней нагрузки, нормальной к поверхности тела, вызывающее соответствующее изменение объема ΔV . Удовлетворяя граничным условиям, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{\Delta V}{V} \frac{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) - (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})]} = (1 - f_\theta) \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(1 - f_\theta)V}{V} \\ \theta^2 &= -\frac{\Delta V}{V} \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) - (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})]} = f_\theta \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta f_\theta V}{V} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Здесь учтено, что $\Delta V / V = \theta^1 + \theta^2$. Также введено обозначение:

$$f_\theta = -\frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) - (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})]} \quad (5.1.7)$$

Решения (5.1.6) дают возможность следующих трактовок: f_θ и $(1 - f_\theta)$ - относительные объемные доли среды θ -дислокаций и идеальной (не поврежденной θ -дислокациями) среды, совместно заключенных в объеме V . $f_\theta V$ и $(1 - f_\theta)V$ - их абсолютные объемные доли. С учетом определения (5.1.7) относительной объемной доли θ -дислокаций в дефектной среде, аналог осреднения по Фойхту с учетом определения тензора поврежденных модулей (5.1.5) имеет вид:

$$(2\mu + 3\lambda) = (2\mu^{11} + 3\lambda^{11}) - (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) \frac{f_\theta^2}{(1 - f_\theta)^2} \quad (5.1.8)$$

Аналогичным образом можно ввести и относительные объемные доли в средах с γ -дислокациями и ω -дислокациями и аналоги осреднения по Фойхту:

$$f_\gamma = -\frac{\mu^{12}}{(\mu^{22} - \mu^{12})} \quad f_\omega = -\frac{\chi^{12}}{(\chi^{22} - \chi^{12})} \quad (5.1.9)$$

$$\mu = \mu^{11} - \mu^{22} \frac{f_\gamma^2}{(1-f_\gamma)^2} \quad \chi = \chi^{11} - \chi^{22} \frac{f_\omega^2}{(1-f_\omega)^2} \quad (5.1.10)$$

Любопытно отметить, что в рамках алгебраической теории сред с сохраняющимися дислокациями, дислокации всегда ослабляют матрицу в соответствии с (5.1.8), (5.1.10). Даже, если это дислокации замещения.

Суммируя итоги анализа физического содержания тензоров модулей C_{ijmn}^{11} , C_{ijmn}^{12} и C_{ijmn}^{22} . с точки зрения теории мелкодисперсных композитов, можно констатировать, что дана трактовка всех девяти модулей упругости, входящих в состав тензоров модулей C_{ijmn}^{11} , C_{ijmn}^{12} и C_{ijmn}^{22} .

Модули тензора C_{ijmn}^{11} трактуются как модули матрицы - идеальной среды.

Модули тензора C_{ijmn}^{22} трактуются как модули трех типов включений - трех типов дислокаций в среде.

Модули тензора C_{ijmn}^{12} трактуются как параметры, связанные с относительными объемными долями включений в соответствии с (5.1.7), (5.1.9). Другими словами: модули тензора C_{ijmn}^{12} связаны с концентрацией соответствующих типов полей сохраняющихся дислокаций. Следует отметить тот факт, что трактовка дефектной среды как мелкодисперсного композита приводит к определению знака модулей тензора C_{ijmn}^{12} . Они оказываются отрицательными.

5.2. «Простейшая» теория когезионного поля.

В этом разделе строится прикладная модель среды с полями сохраняющихся дислокаций, обладающей как когезионными, так и адгезионными свойствами. Исходной моделью является теория сред с полями сохраняющихся дислокаций [25] с «упрощенными» адгезионными свойствами. Лагранжиан исходной модели имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + 2C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33} \Xi_{nm} \Xi_{ij}] dV -$$

$$- \frac{1}{2} \iint [A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + 2A_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + A_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi}] dF \quad (5.2.1)$$

Здесь:

$$C_{ijnm}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{nm} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm}$$

- тензоры модулей дефектной среды,

$$A_{ijnm}^{pq} = \lambda^{pqF} (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^{pqF} n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) +$$

$$+ (\mu^{pqF} + \chi^{pqF}) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^{pqF} - \chi^{pqF}) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)$$

- тензоры адгезионных модулей,

$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и d_{ij}^{Ξ} - тензоры стесненной и свободной дисторсий,

$\Xi_{ij} = \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}$ - псевдотензор плотности дислокаций Де Вита.

Для сокращения количества неизвестных, используется обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского (5.1.2), о пропорциональности спинов и вихрей перемещений. Обобщение гипотезы имеет вид:

$$d_{ij}^{\Xi} = a_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} =$$

$$= (3a + 2b) \frac{1}{3} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2b \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - 2c \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} \right) \mathcal{E}_{ijk}$$

$$a_{ijnm} = a \delta_{ij} \delta_{nm} + (b + c) \delta_{in} \delta_{jm} + (b - c) \delta_{im} \delta_{jn} \quad (5.2.2)$$

Здесь a, b, c - параметры прикладной модели, являющиеся рациональными функциями компонентов тензоров $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}$ в соответствии с (5.1.2). Гипотеза Аэро-Кувшинского [3] вытекает из (5.2.2) как частный случай при $a = b = 0$. Подставляя (5.2.2) в (5.1.10), получим «адгезионное» обобщение градиентной модели Тупина [25], которая определяется следующим лагранжианом:

$$L = A -$$

$$- \frac{1}{2} \iiint [E_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + E_{ijkml} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}] dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} dF \quad (5.2.3)$$

Здесь:

$$E_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + (\mu + \chi) \delta_{in} \delta_{jm} + (\mu - \chi) \delta_{im} \delta_{jn}$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^{11} + 2[(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})a + \lambda^{12}2b] + \\ + [(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})a + \lambda^{22}2b](3a + 2b) + \mu^{22}4ab \\ \mu = \mu^{11} + \mu^{12}4b + \mu^{22}4bb \\ \chi = \chi^{11} + \chi^{12}4c + \chi^{22}4cc \end{cases}$$

$$E_{ijkml} =$$

$$= E_1(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ml} + \delta_{jk}\delta_{il}\delta_{nm} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ml} + \delta_{jk}\delta_{im}\delta_{nl}) +$$

$$+ E_2(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{nm} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{nm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl}) +$$

$$+ E_3\delta_{jk}\delta_{in}\delta_{ml} +$$

$$+ E_4(\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}) +$$

$$+ E_5(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn})$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c) - \chi^{33}a(b-c)$$

$$E_2 = \chi^{33}aa + \chi^{33}a(b-c) - \frac{1}{4}(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c)$$

$$E_3 = -(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c)$$

$$E_4 = \mu^{33}(b-c)(b-c)$$

$$E_5 = -\frac{1}{2}\mu^{33}(b-c)(b-c)$$

Обозначим $(\delta_{ij} - n_i n_j) = \delta_{ij}^*$, тогда тензор адгезионных модулей принимает вид:

$$A_{ijnm} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{nm}^* + (\mu^F + \chi^F) \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + (\mu^F - \chi^F) \delta_{im}^* \delta_{jn}^* +$$

$$+ \delta^F n_i n_n \delta_{jm}^* + \alpha(n_i n_m \delta_{jn}^* + n_n n_j \delta_{im}^*) + \beta(n_i n_j \delta_{nm}^* + n_n n_m \delta_{ij}^*) + B \delta_{in}^* n_j n_m +$$

$$+ A n_i n_j n_n n_m$$

$$\lambda^F = \lambda^{11F} + 4b\lambda^{12F} + 4bb\lambda^{22F} + 4a(\mu^{12F} + \lambda^{12F}) +$$

$$+ 8ab(\mu^{22F} + \lambda^{22F}) + 4aa(\mu^{22F} + \lambda^{22F})$$

$$\delta^F = \delta^{11F} + 2(b+c)\delta^{12F} + (b+c)(b+c)\delta^{22F}$$

$$\mu^F = \mu^{11F} + 4b\mu^{12F} + 4bb\mu^{22F}$$

$$\chi^F = \chi^{11F} + 4c\chi^{12F} + 4cc\chi^{22F}$$

$$\alpha = (b-c)\delta^{12F} + (b+c)(b-c)\delta^{22F} / 2$$

$$\beta = 2a(\mu^{12F} + \lambda^{12F}) + 4a(a+b)(\mu^{22F} + \lambda^{22F})$$

$$A = 4aa(\mu^{22F} + \lambda^{22F})$$

$$B = (b-c)2b\delta^{22F}$$

При $a = b = 0$, $c \neq 0$, из (5.2.3) вытекает «адгезионное» обобщение теории сред Аэро-Кувшинского [3], которая является [4] прикладной теорией сред Коссера (теорией сред с полем сохраняющихся ω -дислокаций).

Соответственно, при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ из (5.2.3) вытекает «адгезионное» обобщение теории сред Джеремилло [2], которая является [4] прикладной теорией сред с сохраняющимися полями θ - и γ - дислокаций.

Таким образом, параметры $(3a + 2b), b, c$ можно трактовать как «выключатели» для трех типов полей дислокаций, соответственно: θ -, γ - и ω -дислокаций.

Обратим внимание на то, что в прикладной теории теряется часть «тонких» механических свойств сред с полями сохраняющихся дислокаций.

Действительно, исходная модель (5.1.10) содержит двенадцать модулей в объеме, и двенадцать модулей на поверхности тела (адгезионных модулей).

Модель (5.2.3) содержит уже только шестнадцать модулей: восемь в объеме и восемь на поверхности. К сожалению, и она не пригодна для инженерных приложений, так как предполагает большой объем экспериментальных работ по определению неклассических модулей. Поэтому приходится идти по пути дальнейшего упрощения модели, оставляя лишь самые существенные неклассические характеристики. Представляется, что такими характеристиками должны быть характерные длины когезионных и адгезионных взаимодействий.

Введем гипотезу о пропорциональности когезионных модулей в форме:

$$E_{ijkml} = \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl}$$

Эта гипотеза приводит к следующей зависимости когезионных модулей от единственного нового модуля $C^V = \mu/l_V^2$:

$$E_1 = (\mu + \chi)(\mu + \lambda - \chi)/(2C^V)$$

$$E_2 = (\mu + \lambda - \chi)(\mu + \lambda - \chi)/(4C^V)$$

$$E_3 = (\mu + \chi)(\mu + \chi)/C^V$$

$$E_4 = 0$$

$$E_5 = 0$$

Введем гипотезу о пропорциональности адгезионных модулей в форме:

$$A_{ijnm} = \frac{1}{C^F} (E_{rpj} n_p)(E_{rqnm} n_q)$$

Эта гипотеза приводит к следующей зависимости адгезионных модулей

от единственного нового модуля $C^F = \mu/l_F$:

$$\begin{aligned}\lambda^F &= \lambda\lambda / C^F & \alpha &= (\mu - \chi)(\mu + \chi) / C^F \\ \delta^F &= (\mu - \chi)(\mu - \chi) / C^F & \beta &= (2\mu + \lambda)\lambda / C^F \\ \mu^F &= 0 & A &= (2\mu + \lambda)(2\mu + \lambda) / C^F \\ \chi^F &= 0 & B &= (\mu + \chi)(\mu + \chi) / C^F\end{aligned}$$

Таким образом, поставленная цель достигнута: все многообразие когезионных и адгезионных свойств тел в формулируемой модели сводится к двум характерным длинам l_V и l_F . В целом модель определяет механические свойства сред с сохраняющимися полями дислокаций через пять параметров среды $\mu, \lambda, \chi, l_V, l_F$ для несимметричной теории, и через четыре параметра среды: μ, λ, l_V, l_F для симметричной теории ($\chi = 0$).

Лагранжиан формулируемой теории приобретает вид:

$$\begin{aligned}L &= A - \frac{1}{2} \iiint [E_{ijnm} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}] dV - \\ &- \frac{1}{2} \iint \frac{1}{C^F} (E_{rpj} n_p)(E_{rqm} n_q) \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} dF\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned}\delta L &= \iiint [E_{ijrk} \frac{\partial^2 (...)}{\partial x_j \partial x_k} (R_r - \frac{1}{C^V} E_{nmrl} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}) + P_i^V] \delta R_i dV + \\ &+ \iint [P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} (R_r - \frac{1}{C^V} E_{nmrl} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m})] \delta R_i dF - \\ &- \iint [\frac{1}{C^F} (E_{rqm} n_q) \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C^V} E_{rqm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_q \partial x_m}] \delta (E_{rpj} n_p \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) dF = 0\end{aligned}\quad (5.2.5)$$

Определения классического U_i и когезионного u_i перемещений через полное перемещение R_i :

$$\begin{cases} U_i = R_i - \frac{1}{C^V} E_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \\ u_i = -\frac{1}{C^V} E_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \end{cases} \Rightarrow R_i = U_i - u_i\quad (5.2.6)$$

Обратим внимание на то, что в любой точке поверхности, где $(E_{rpj} n_p R_{i,j}) = 0$, потенциальная энергия адгезии в соответствии с (5.2.4) равна нулю, и в этой

точке поверхности адгезионные свойства не проявляются, не смотря на то, что адгезионные модули, связанные с l_F , не равны нулю. Поэтому второй поверхностный интеграл в (5.2.5) может обращаться в ноль для адгезионно активной поверхности только за счет «статического» слагаемого. Отсюда с учетом (5.2.6) имеем $E_{ijnm}n_jR_{n,m} = C^F u_i$. Это соотношение можно обобщить и на адгезионно пассивную поверхность полагая, что для каждой точки такой поверхности $u_i = 0$. Действительно, $(E_{ijnm}n_jR_{n,m}) = C^F u_i = 0$. Таким образом, с учетом определений (5.2.6) для всей поверхности имеет место «универсальное соотношение»:

$$E_{ijnm}n_jU_{n,m} = E_{ijnm}n_ju_{n,m} + C^F u_i \quad (5.2.7)$$

В соответствии с (5.2.7), потенциальная энергия адгезии может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2} \iint \frac{1}{C^F} (E_{rpj}n_p)(E_{rqnm}n_q) \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} dF = \frac{1}{2} \iint C^F u_i u_i dF$$

Такая форма представления потенциальной энергии адгезии позволяет сделать более наглядной трактовку неклассических естественных граничных условий. Если потенциальная энергия адгезии равна нулю, когезионные перемещения $u_i = 0$, имеет место их «защемление». Следовательно, и $\delta u_i = 0$ для адгезионно пассивной поверхности. Наоборот: для адгезионно активной поверхности чтобы выполнялось вариационное уравнение (5.2.5), следует положить нулю «статический» множитель при произвольной вариации δu_i .

Вариационное уравнение (5.2.5) с учетом определений U_i и u_i (5.2.6), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint (E_{ijrk} \frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k} + P_i^V) \delta U_i dV - \iiint (E_{nmrl} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} - C^V u_r + P_i^V) \delta u_i dV + \\ & + \iint (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k}) \delta U_i dF - \iint (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i) \delta u_i dF - \\ & - \frac{1}{2C^F} \delta \iint (E_{rqnm} n_q \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C^F u_r) (E_{rpj} n_p \frac{\partial R_i}{\partial x_j} - C^F u_r) dF = 0 \end{aligned}$$

С учетом полученного выше «универсального соотношения» (5.2.7),

последнее слагаемое обращается в ноль. Таким образом, вариационное уравнение, записанное в терминах U_i и u_i , для первой основной задачи $\delta R_i \neq 0$ распадается на две независимые краевые задачи.

$$\begin{aligned} & \iiint (E_{ijrk} \frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k} + P_i^V) \delta U_i dV + \iint (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k}) \delta U_i dF - \\ & - \iiint (E_{nmrl} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} - C^V u_r + P_i^V) \delta u_i dV - \iint (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i) \delta u_i dF = 0 \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Обратим внимание на то, что для изолированного тела с адгезионно пассивной поверхностью, при отсутствии внешних объемных сил, первая основная задача приводит к тривиальному решению относительно когезионных перемещений, и полные перемещения будут равны классическим.

Если на части или на всей поверхности заданы полные перемещения $\delta R_i = 0$, краевые задачи становятся связанными. Чтобы сохранить симметрию между U_i и u_i , введем условие $\delta R_i = \delta(U_i - u_i) = 0$ на множителе Лагранжа Q_i :

$$\begin{aligned} & \iiint (E_{ijrk} \frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k} + P_i^V) \delta U_i dV + \\ & + \iint_P (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k}) \delta U_i dF + \iint_R (Q_i - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k}) \delta U_i dF - \\ & - \iiint (E_{nmrl} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} - C^V u_r + P_i^V) \delta u_i dV - \\ & - \iint_P (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i) \delta u_i dF - \iint_R (Q_i - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i) \delta u_i dF = 0 \end{aligned}$$

Исключая множитель Лагранжа Q_i , получим все то же «универсальное соотношение» (5.2.7) на поверхности.

Контактная задача. Индексами «1» и «2» определяются переменные и физические параметры контактирующих тел. В соответствии с (5.2.5) на поверхности контакта должны отсутствовать скачки вектора полных перемещений $R_i^1 - R_i^2 = 0$ и вектора полных напряжений

$$E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial R_n^1}{\partial x_m} - E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial R_n^2}{\partial x_m} = 0. \text{ В этих связях заключается специфика формулировки}$$

контактной задачи для вариационного уравнения (5.2.8). С учетом соотношения (5.2.7) условие контакта по полным напряжениям можно переписать в виде $C_1^F u_i^1 - C_2^F u_i^2 = 0$ и выделить вариацию этой величины на поверхности контакта. Полная система условий контакта для вариационного уравнения (5.2.8), с учетом того, что $n_j^1 = n_j$ и $n_j^2 = -n_j$, принимает вид:

$$\begin{cases} R_i^1 = R_i^2 \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial U_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial U_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \begin{cases} E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial R_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial R_n^2}{\partial x_m} (= \sigma_{ij} n_j) \\ \frac{1}{C_1^F} \sigma_{ij} n_j - u_r^1 = \frac{1}{C_2^F} \sigma_{ij} n_j - u_r^2 \end{cases}$$

Эту систему можно записать в симметричном относительно U_i и u_i виде:

$$\begin{cases} U_i^1 - U_i^2 = \left(\frac{1}{C_1^F} - \frac{1}{C_2^F}\right) \sigma_{ij} n_j \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial U_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial U_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \begin{cases} u_i^1 - u_i^2 = \left(\frac{1}{C_1^F} - \frac{1}{C_2^F}\right) \sigma_{ij} n_j \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial u_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial u_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \quad (5.2.9)$$

Таким образом, классические, полные и, значит, когезионные напряжения непрерывны при переходе через поверхность контакта. Непрерывны при переходе через поверхность контакта и полные перемещения. Однако, отдельно классические и когезионные перемещения терпят равный разрыв, пропорциональный вектору полных напряжений на поверхности контакта.

В заключение, можно сформулировать лагранжиан «простейшей» теории когезионного поля в терминах U_i и u_i . Проводя обратные преобразования от вариационного уравнения к вариации лагранжиана, получим:

$$\delta L = 0$$

Здесь:

$$L = L_U - L_u$$

$$\begin{aligned} L_U &= \left(\iiint P_i^V U_i dV + \iint P_i^F U_i dF \right) - \frac{1}{2} \iiint E_{ijnm} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \\ L_u &= \left(\iiint P_i^V u_i dV + \iint P_i^F u_i dF \right) - \\ &- \frac{1}{2} \iiint \left(E_{ijnm} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + C^V u_i u_i \right) dV - \frac{1}{2} \iint C^F u_i u_i dF \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Вариационная формулировка (5.2.8), (5.2.10) отличается от традиционных

постановок градиентных моделей.

1. Она позволяет рассматривать дефектную среду как совокупность двух вложенных друг в друга сред: «классической» и «когезионной».
2. Она позволяет обойтись без понятий моментных напряжений и кривизн.
3. Использовать богатый исследовательский инструментарий классической теории упругости везде, где решатель способен включать во внешние нагрузки винклеровские основания в объеме среды и на поверхности.
4. Позволяет описать масштабные эффекты, привлекая минимальное количество неклассических параметров, в данном случае – два. Один, «когезионный», C^V - в объеме среды, и второй, «адгезионный», C^F - на поверхности среды.

5.3. Уточненная модель идеальных (бездефектных) сред Тупина.

Лагранжиан уточненной теории идеальных (бездефектных) сред Тупина, в отличие от «классической» теории Тупина, содержит всего два дополнительных модуля, входящих в выражение тензора Тупина C_{ijkl}^{11} . В отличие от алгебраической теории, «моментные» модули не могут входить в выражение потенциальной энергии однородных деформированных состояний. Поэтому для выяснения физического смысла «моментных» модулей приходится исследовать уже неоднородные деформированные состояния. Лагранжиан уточненной теории Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml}^{11} R_{i,jk} R_{m,nl}] dV \quad (5.4.1)$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^{11} R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
& + \oint [P_i^F - C_{ijmn}^{11} n_j R_{m,n} + C_{ijkml}^{11} (\delta_{rj,r}^* n_k + \delta_{rj}^* n_{k,r}) R_{m,nl} + \\
& + C_{ijpml}^{11} (\delta_{kp} n_j + \delta_{kj}^* n_p) R_{m,nlk}] \delta R_i dF - \\
& - \oint C_{ijkml}^{11} n_j n_k R_{m,nl} \delta (R_{i,r} n_r) dF - \\
& - \sum \oint C_{ijkml}^{11} v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0
\end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Если рассматривать тела, являющиеся параллелепипедами, для которых каждый участок кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело, является плоскостью, тензор δ_{ij}^* и единичный вектор нормали n_j являются постоянными, их производные по координатам равны нулю. В этом случае вариационное уравнение (5.4.2) упрощается и приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iiint (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - C_{ijkml}^{11} R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\
& + \oint (P_i^F - C_{ijmn}^{11} n_j R_{m,n} + C_{ijkml}^{11} n_j R_{m,nlk}) \delta R_i dF - \\
& - \oint C_{ijkml}^{11} n_j n_k R_{m,nl} \delta (R_{i,r} n_r) dF - \\
& - \sum \oint C_{ijkml}^{11} v_j n_k R_{m,nl} \delta R_i ds = 0
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия:

$$(\mu^{11} + \lambda^{11} - \chi^{11}) R_{j,ij} + (\mu^{11} + \chi^{11}) \Delta R_i - c_1^{11} \Delta R_{j,ij} - c_2^{11} \Delta \Delta R_i + P_i^V = 0 \tag{5.4.3}$$

Их можно привести к виду векторного уравнения на потенциал перемещений. Для этого введем вектор-потенциал следующего вида:

$$R_i = \Delta \varphi_i - \frac{(\mu^{11} + \lambda^{11} - \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \varphi_{k,ik} - \frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta \Delta \varphi_i + \frac{c_1^{11}}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta \varphi_{k,ik} \tag{5.4.4}$$

Подставляя его в уравнения равновесия, получим искомую векторную форму записи уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta \varphi_i - \left[\frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} + \frac{c_2^{11}}{(\mu^{11} + \chi^{11})} \right] \Delta \Delta \Delta \varphi_i + \\
+ \frac{(c_1^{11} + c_2^{11}) c_2^{11}}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})(\mu^{11} + \chi^{11})} \Delta \Delta \Delta \Delta \varphi_i + \frac{P_i^V}{(\mu^{11} + \chi^{11})} = 0
\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде следующего разложения:

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + \varphi_i^1 + \varphi_i^2 + \varphi_i^V \tag{5.4.6}$$

Здесь φ_i^V - частное решение неоднородного уравнения (5.4.5),

$\varphi_i^0, \varphi_i^1, \varphi_i^2$ - его фундаментальные решения:

$$\Delta\Delta\varphi_i^0 = 0$$

$$\varphi_i^1 - \frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta\varphi_i^1 = 0 \quad (5.4.7)$$

$$\varphi_i^2 - \frac{c_2^{11}}{(\mu^{11} + \chi^{11})} \Delta\varphi_i^2 = 0$$

Подставляя (5.4.6), с учетом (5.4.7), в (5.4.4), получим:

$$R_i = U_i - u_i + R_i^V \quad (5.4.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} U_i &= (\Delta\varphi_i^0 - \varphi_{k,ik}^0) + \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \varphi_{k,ik}^0 + \frac{c_1^{11}}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta\varphi_{k,ik}^0 \\ u_i &= -\left[\frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} - \frac{c_2^{11}}{(c_1^{11} + c_2^{11})} \right] \varphi_{k,ik}^1 + \frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{c_2^{11}} \left[\frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} - \frac{c_2^{11}}{(c_1^{11} + c_2^{11})} \right] (\Delta\varphi_i^2 - \varphi_{k,ik}^2) \\ R_i^V &= (\Delta\varphi_i^V - \varphi_{k,ik}^V) + \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \varphi_{k,ik}^V - \frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta(\Delta\varphi_i^V - \varphi_{k,ik}^V) - \frac{c_2^{11}}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} \Delta\varphi_{k,ik}^V \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Перемещение U_i является классическим полем перемещений, удовлетворяет однородным уравнениям равновесия классической теории упругости и является бигармоническим векторным полем.

Перемещение u_i является полем когезионных перемещений, удовлетворяет однородному уравнению:

$$u_i - \left[\frac{(c_1^{11} + c_2^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} + \frac{c_2^{11}}{(\mu^{11} + \chi^{11})} \right] \Delta u_i + \frac{(c_1^{11} + c_2^{11})c_2^{11}}{(2\mu^{11} + \lambda^{11})(\mu^{11} + \chi^{11})} \Delta\Delta u_i = 0 \quad (5.4.10)$$

и является обобщенным бигармоническим векторным полем. Более того, его определение (5.4.9) дает возможность выяснить его структуру. Действительно, u_i представлено двумя слагаемыми, первое из них, зависящее от $\varphi_{k,ik}^1$ является потенциальным полем, а второе слагаемое, зависящее от $(\Delta\varphi_i^2 - \varphi_{k,ik}^2)$ является вихревым полем. В соответствии с (5.4.7), потенциальная и вихревая составляющие когезионных перемещений имеют различные свойства, определяемые «моментными» модулями.

$$\begin{aligned}
c_1^{11} &= (2\mu^{11} + \lambda^{11})l_{grad}^2 - (\mu^{11} + \chi^{11})l_{rot}^2 \\
c_2^{11} &= (\mu^{11} + \chi^{11})l_{rot}^2
\end{aligned}
\tag{5.4.11}$$

Здесь «моментные» модули c_1^{11}, c_2^{11} выражены через квадраты характерных длин когезионных взаимодействий вихревой l_{rot} и потенциальной части l_{grad} , которые можно трактовать как другую независимую пару механических параметров среды Тупина. Действительно, поставляя (5.4.11) в (5.4.7), получим:

$$\begin{aligned}
\varphi_i^1 - l_{grad}^2 \Delta \varphi_i^1 &= 0 \\
\varphi_i^2 - l_{rot}^2 \Delta \varphi_i^2 &= 0
\end{aligned}$$

Таким образом, дана трактовка модулей, входящих в состав тензора Тупина C_{ijkl}^{11} . Выяснено, что когезионное поле имеет структуру, определяемую вихревой и потенциальной составляющей, для которых существуют свои индивидуальные механические свойства, определяемые через характерные длины когезионных взаимодействий (5.4.11).

5.4. Теория сред Коссера (теория ω -дислокаций).

Как известно, «классическая» теория сред Миндлина содержит одиннадцать «моментных» модулей. Их физический смысл практически не изучался. Уточненная теория сред Миндлина (4.39) содержит только семь дополнительных модулей, которые входят в выражение тензора Миндлина C_{ijkl}^{22} . Для выяснения их физического смысла исследуем сначала частные теории, в которых предполагается существование в среде единственного типа дислокаций. В этом разделе будет изучена среда с полем ω -дислокаций. Особое внимание уделим тем решениям, которые соответствуют когезионным взаимодействиям, характерным для неё.

При гипотезе существования только полей ω -дислокаций, тензор свободной дилатации (второго сорта) является антисимметричным и может быть

выражен через псевдовектор спинов (поворотов, не являющихся вихрями перемещений):

$$D_{ij}^2 = -\omega_k^2 \mathcal{E}_{ijk} \quad (5.5.1)$$

Лагранжиан уточненной теории Миндлина в этом случае приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} - 2(C_{ijmn}^{12} \mathcal{E}_{mnk}) R_{i,j} \omega_k^2 + (C_{ijmn}^{22} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp}) \omega_p^2 \omega_q^2 + (C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq}) \omega_{p,k}^2 \omega_{q,l}^2] dV \quad (5.5.2)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (-2c_2^{22} + c_3^{22} + c_4^{22}) &= 4\chi^{22}(h_2^2 - h_1^2) \\ (c_6^{22} - c_7^{22}) &= 4\chi^{22}h_1^2 \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

С учетом введенных обозначений, свертки тензоров модулей в лагранжиане теории сред Коссера имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{12} \mathcal{E}_{mnk} &= 2\chi^{12} \mathcal{E}_{ijk} \\ C_{ijmn}^{22} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp} &= 2\chi^{22} \mathcal{E}_{ijq} \mathcal{E}_{ijp} = 4\chi^{22} \delta_{pq} \\ C_{ijkml}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \mathcal{E}_{mnq} &= \\ &= (-2c_2^{22} + c_3^{22} + c_4^{22})(\mathcal{E}_{jpk} \mathcal{E}_{jql} + \mathcal{E}_{jpl} \mathcal{E}_{jqk}) + (2c_6^{22} - 2c_7^{22}) \delta_{pq} \delta_{kl} = \\ &= (-2c_2^{22} + c_3^{22} + c_4^{22})(2\delta_{pq} \delta_{kl} - \delta_{pk} \delta_{ql} - \delta_{pl} \delta_{qk}) + (2c_6^{22} - 2c_7^{22}) \delta_{pq} \delta_{kl} = \\ &= 4\chi^{22}(h_2^2 - h_1^2)(2\delta_{pq} \delta_{kl} - \delta_{pk} \delta_{ql} - \delta_{pl} \delta_{qk}) + 8\chi^{22}h_1^2 \delta_{pq} \delta_{kl} \end{aligned}$$

Лагранжиан уточненной теории Миндлина с учетом (5.5.3) приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} - 4\chi^{12} (R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk}) \omega_k^2 + 4\chi^{22} \omega_k^2 \omega_k^2 + 8\chi^{22} h_2^2 \omega_{i,j}^2 \omega_{i,j}^2 - 4\chi^{22} (h_2^2 - h_1^2) \omega_{p,p}^2 \omega_{q,q}^2] dV$$

Вариационное уравнение уточненной модели Миндлина для сред с полем ω -дислокаций:

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} - 2\chi^{12} \omega_{k,j}^2 \mathcal{E}_{ijk} + P_i^V) \delta R_i + \\ &+ [2\chi^{12} R_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} - 4\chi^{22} \omega_k^2 + 4\chi^{22} h_2^2 (\Delta \omega_k^2 - \omega_{q,qk}^2) + 8\chi^{22} h_1^2 \omega_{q,qk}^2] \delta \omega_k^2 \} dV + \\ &+ \iint [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} - 2\chi^{12} \omega_k^2 \mathcal{E}_{ijk}) n_j] \delta R_i dF - \\ &- \iint [4\chi^{22} h_2^2 \omega_{k,j}^2 n_j - \chi^{22} (h_2^2 - h_1^2) (\omega_{q,q}^2 n_k + \omega_{q,k}^2 n_q)] \delta \omega_k^2 dF = 0 \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} (\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - R_{j,ij}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{j,ij} - 2\chi^{12}\omega_{k,j}^2\mathcal{E}_{ijk} + P_i^V = 0 \\ 2\chi^{12}R_{i,j}\mathcal{E}_{ijk} - 2\chi^{22}\omega_k^2 + 2\chi^{22}h_2^2(\Delta\omega_k^2 - \omega_{q,qk}^2) + 2\chi^{22}h_1^2\omega_{q,qk}^2 = 0 \end{cases} \quad (5.5.5)$$

Исследуем уравнения равновесия моментов. Они могут быть представлены в виде распадающейся системы относительно потенциальной и вихревой составляющих псевдовектора спинов:

$$\begin{cases} \omega_{k,k}^2 - h_1^2\Delta\omega_{k,k}^2 = 0 \\ \chi^{12}R_{i,j}\mathcal{E}_{ijk} - 2\chi^{22}(\omega_k^2 - h_1^2\omega_{q,qk}^2) + 2\chi^{22}h_2^2\Delta(\omega_k^2 - h_1^2\omega_{q,qk}^2) = 0 \end{cases} \quad (5.5.6)$$

Введем потенциал перемещений таким образом, чтобы тождественно удовлетворялась система уравнений равновесия моментов относительно вихревой части псевдовектора спинов:

$$\begin{aligned} (\omega_k^2 - h_1^2\omega_{q,qk}^2) &= (\chi^{12} / \chi^{22})\psi_{i,j}\mathcal{E}_{ijk} \\ R_i &= \psi_i - h_2^2\Delta\psi_i \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Уравнение равновесия сил относительно введенного потенциала ψ_i приобретет вид:

$$\begin{aligned} (\mu^{11} + \chi^{11} - \chi^{12}\chi^{12} / \chi^{22})(\Delta\psi_i - \psi_{j,ij}) - (\mu^{11} + \chi^{11})h_2^2\Delta(\Delta\psi_i - \psi_{j,ij}) + \\ + (2\mu^{11} + \lambda^{11})\psi_{j,ij} - (2\mu^{11} + \lambda^{11})h_2^2\Delta\psi_{j,ij} + P_i^V = 0 \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Приведем эту связанную систему уравнений относительно компонент векторного потенциала ψ_i к распадающейся системе, вводя вспомогательный потенциал φ_i :

$$\psi_i = (\Delta\varphi_i - \varphi_{j,ij}) - h_2^2\Delta(\Delta\varphi_i - \varphi_{j,ij}) + \frac{G}{E}\varphi_{j,ij} - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{E}h_2^2\Delta\varphi_{j,ij} \quad (5.5.9)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} G &= (\mu^{11} + \chi^{11} - \chi^{12}\chi^{12} / \chi^{22}) \\ E &= (2\mu^{11} + \lambda^{11}) \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

В соответствии с этим определением, уравнения равновесия сил приобретают вид:

$$G\Delta\Delta\varphi_i - (\mu^{11} + \chi^{11} + G)h_2^2\Delta\Delta\Delta\varphi_i + (\mu^{11} + \chi^{11})h_2^2h_2^2\Delta\Delta\Delta\Delta\varphi_i + P_i^V = 0 \quad (5.5.11)$$

Представим оператор уравнения равновесия как произведение операторов:

$$G\Delta\Delta[(\dots) - h_2^2\Delta(\dots)][(\dots) - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{G}h_2^2\Delta(\dots)]\varphi_i + P_i^V = 0 \quad (5.5.12)$$

Решение φ_i уравнений равновесия (5.5.12) можно представить в виде разложения по фундаментальным решениям:

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + \varphi_i^1 + \varphi_i^2 + \varphi_i^V \quad (5.5.13)$$

Здесь φ_i^V - частное решение неоднородного уравнения, а $\varphi_i^0, \varphi_i^1, \varphi_i^2$ - фундаментальные решения, являющиеся собственными функциями операторов-сомножителей общего оператора равновесия:

$$\begin{cases} \Delta\Delta\varphi_i^0 = 0 \\ \varphi_i^1 - h_2^2\Delta\varphi_i^1 = 0 \\ \varphi_i^2 - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{G}h_2^2\Delta\varphi_i^2 = 0 \\ G\Delta\Delta[(\dots) - h_2^2\Delta(\dots)][(\dots) - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{G}h_2^2\Delta(\dots)]\varphi_i^V + P_i^V = 0 \end{cases} \quad (5.5.14)$$

Возвращаясь к исходному потенциалу ψ_i , представим его в виде аналогичного разложения:

$$\psi_i = \psi_i^0 + \psi_i^1 + \psi_i^2 + \psi_i^V \quad (5.5.15)$$

Здесь:

$$\begin{cases} \psi_i^0 = (\Delta\varphi_i^0 - \varphi_{j,ji}^0) - h_2^2\Delta(\Delta\varphi_i^0 - \varphi_{j,ji}^0) + \frac{G}{E}\varphi_{j,ji}^0 - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{E}h_2^2\Delta\varphi_{j,ji}^0 \\ \psi_i^1 = -\frac{(\mu^{11} + \chi^{11} - G)}{E}\varphi_{j,ji}^1 \\ \psi_i^2 = \frac{(\mu^{11} + \chi^{11} - G)}{(\mu^{11} + \chi^{11})}(\Delta\varphi_i^2 - \varphi_{j,ji}^2) \\ \psi_i^V = (\Delta\varphi_i^V - \varphi_{j,ji}^V) - h_2^2\Delta(\Delta\varphi_i^V - \varphi_{j,ji}^V) + \frac{G}{E}\varphi_{j,ji}^V - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{E}h_2^2\Delta\varphi_{j,ji}^V \end{cases} \quad (5.5.16)$$

Соотношения (5.5.16) получены с учетом (5.5.14) и (5.5.9). С их помощью легко установить, что ψ_i^1 является потенциальным полем, а ψ_i^2 - вихревым. Полученные свойства фундаментальных решений позволяют определить и свойства основных кинематических переменных.

$$\begin{aligned}
\omega_k^2 &= \\
&= h_1^2 \omega_{q,qk}^2 + (\chi^{12} / 2\chi^{22}) \psi_{i,j} \mathcal{E}_{ijk} = \\
&= h_1^2 \omega_{q,qk}^2 + (\chi^{12} / 2\chi^{22}) [\psi_{i,j}^0 + \psi_{i,j}^2 + \psi_{i,j}^V] \mathcal{E}_{ijk} \\
R_i &= \\
&= \psi_i - h_2^2 \Delta \psi_i = \\
&= [\psi_i^0 + \psi_i^2 + \psi_i^V] - h_2^2 \Delta [\psi_i^0 + \psi_i^2 + \psi_i^V]
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что фундаментальное решение ψ_i^1 не входит в выражение для псевдовектора спинов ω_k^2 в силу своей потенциальности, а в выражение для перемещений – в силу того, что оператор перемещений $[(\dots) - h_2^2 \Delta(\dots)]$ совпадает с оператором уничтожения ψ_i^1 . В результате, можно записать перемещения в виде разложения:

$$R_i = R_i^0 + R_i^2 + R_i^V \quad (5.5.17)$$

Здесь:

$$\begin{cases} \Delta \Delta R_i^0 = 0 \\ R_i^2 - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{G} h_2^2 \Delta R_i^2 = 0 \end{cases}$$

Аналогично записывается псевдовектор спинов:

$$\omega_k^2 = \Omega_k^0 + \Omega_k^1 + \Omega_k^2 + \Omega_k^V \quad (5.5.18)$$

Здесь:

$$\begin{cases} \Omega_k^0 = (\chi^{12} / 2\chi^{22}) \psi_{i,j}^0 \mathcal{E}_{ijk} \\ \Omega_k^1 = h_1^2 \omega_{q,qk}^2 \\ \Omega_k^2 = (\chi^{12} / 2\chi^{22}) \psi_{i,j}^2 \mathcal{E}_{ijk} \\ \Omega_k^V = (\chi^{12} / 2\chi^{22}) \psi_{i,j}^V \mathcal{E}_{ijk} \end{cases} \quad (5.5.19)$$

Фундаментальные решения $\Omega_k^0, \Omega_k^1, \Omega_k^2$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\begin{cases} \Delta \Delta \Omega_k^0 = 0 \\ \Omega_k^1 - h_1^2 \Delta \Omega_k^1 = 0 \\ \Omega_k^2 - \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{G} h_2^2 \Delta \Omega_k^2 = 0 \end{cases} \quad (5.5.20)$$

Фундаментальные решения R_i^0 и Ω_k^0 выражаются через бигармонический

потенциал ψ_i^0 . Условно их можно назвать классическим решением, так как классическая теория упругости приводит к бигармоничности вектора перемещений. Векторное поле R_i^0 имеет и вихревую, и потенциальную составляющие.

Фундаментальное решение Ω_k^1 является потенциальным, выражается через гельмгольцев потенциал, который определяется характерной длиной когезионных взаимодействий h_1^2 . Любопытно отметить, что, не смотря на достаточно большое внимание исследователей к теории сред Коссера, в литературе отсутствуют публикации, посвященные анализу этого кинематического состояния. Обычно, псевдовектор спинов постулируется вихревым, из чего следует, что полагается $h_1^2 = 0$.

Фундаментальные решения R_i^2 и Ω_k^2 выражаются через вихревой гельмгольцев потенциал ψ_i^2 . Он определяется второй характерной длиной когезионных взаимодействий h_2^2 и так же является неклассическим. Векторное поле R_i^2 имеет только вихревую составляющую.

Таким образом, установлено, что в теории сред Коссера существуют два типа когезионных взаимодействий с характерными длинами h_1 и h_2 .

Первый тип когезионных взаимодействий традиционно может быть представлен в виде дополнительной составляющей вектора перемещений - когезионных перемещений $u_i = -R_i^2$, которая является когезионной поправкой к классическому полю перемещений $U_i = R_i^0$.

Второй тип когезионных взаимодействий (Ω_k^1) не вписывается в рамки традиционной интерпретации когезионного поля в виде когезионной поправки в поле перемещений, так как является фундаментальным решением, входящим в выражение другой основной независимой кинематической переменной, нежели перемещения – в псевдовектор спинов.

Сформулированы связи (5.5.3) между «моментными» модулями и характерными длинами когезионных взаимодействий h_1 и h_2 .

5.5. Теория пористых сред (теория θ -дислокаций).

В данном разделе будет исследован частный случай уточненной теории сред Миндлина (4.39), когда из трех типов полей дислокаций в среде доминируют θ -дислокации. В этом случае тензор свободной дисторсии является шаровым:

$$D_{ij}^2 = \theta^2 \delta_{ij} / 3 \quad (5.6.1)$$

Лагранжиан уточненной теории Миндлина для пористых сред:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} R_{m,n} R_{i,j} + 2(C_{ijmn}^{12} \delta_{mn} / 3) \theta^2 R_{i,j} + (C_{ijmn}^{22} \delta_{mn} \delta_{ij} / 9) \theta^2 \theta^2 + (C_{ijkml}^{22} \delta_{mn} \delta_{ij} / 9) \theta_i^2 \theta_k^2] dV \quad (5.6.2)$$

Тензор Миндлина:

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{22} = & \\ = & c_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{nk} + \delta_{mn} \delta_{ki} \delta_{jl}) + \\ & + c_2^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{nk} + \delta_{mk} \delta_{ni} \delta_{jl}) + \\ & + c_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\ & + c_4^{22} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + \\ & + (c_5^{22} \delta_{ij} \delta_{mn} + c_6^{22} \delta_{im} \delta_{jn} + c_7^{22} \delta_{in} \delta_{mj}) \delta_{kl} \end{aligned}$$

Тензоры четвертого ранга:

$$C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm}$$

Свертки тензоров модулей, входящие в формулировку лагранжиана (5.6.2):

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{12} \delta_{mn} / 3 &= (2\mu^{12} / 3 + \lambda^{12}) \delta_{ij} = K^{12} \delta_{ij} \\ C_{ijmn}^{22} \delta_{mn} \delta_{ij} / 9 &= (2\mu^{22} / 3 + \lambda^{22}) = K^{22} \\ C_{ijkml}^{22} \delta_{mn} \delta_{ij} / 9 &= (12c_1^{22} + 4c_2^{22} + 2c_3^{22} + 2c_4^{22} + 9c_5^{22} + 3c_6^{22} + 3c_7^{22}) \delta_{kl} / 9 \end{aligned}$$

Выразим линейную комбинацию модулей тензора Миндлина через параметр h_3 , который, как будет показано ниже, связан с характерной длиной когезионных взаимодействий, свойственных пористой среде.

$$(12c_1^{22} + 4c_2^{22} + 2c_3^{22} + 2c_4^{22} + 9c_5^{22} + 3c_6^{22} + 3c_7^{22}) = K^{22} h_3^2 \quad (5.6.3)$$

Вариационное уравнение модели Миндлина для пористых сред:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \\
= & \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + K^{12} \delta_{ij} \theta_j^2 + P_i^V) \delta R_i + (-K^{12} \delta_{ij} R_{i,j} - K^{22} \theta^2 + K^{22} h_3^2 \theta_{,kk}^2) \delta \theta^2 \} dV + (5.6.4) \\
& + \iint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + K^{12} \delta_{ij} \theta^2) n_j] \delta R_i - K^{22} h_3^2 \theta_{,k}^2 n_k \delta \theta^2 \} dF = 0
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases}
(\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - R_{k,ki}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{k,ki} + K^{12} \theta_i^2 + P_i^V = 0 \\
K^{12} R_{k,k} + K^{22} \theta^2 - K^{22} h_3^2 \Delta \theta^2 = 0
\end{cases} \quad (5.6.5)$$

Систему уравнений равновесия можно свести к алгебраическому уравнению относительно пористости и уравнениям равновесия сил, записанных в перемещениях:

$$\begin{cases}
\theta^2 = -\frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{K^{12}} h_3^2 \Delta R_{k,k} - (K^{12} / K^{22}) R_{k,k} - \frac{1}{K^{12}} h_3^2 P_{i,i}^V \\
(\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - R_{k,ki}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11} - K^{12} K^{12} / K^{22}) R_{k,ki} - \\
- (2\mu^{11} + \lambda^{11}) h_3^2 \Delta R_{k,ki} + (P_i^V - h_3^2 P_{k,ki}^V) = 0
\end{cases} \quad (5.6.6)$$

Представим оператор равновесия в виде произведения операторов. Для этого введем вектор-потенциал перемещений ψ_i в виде:

$$R_i = (\Delta \psi_i - \psi_{r,ri}) + \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(2\mu^{11} + \lambda^{11} - K^{12} K^{12} / K^{22})} \psi_{r,ri}$$

Уравнения равновесия относительно вектор-потенциала ψ_i приобретут вид:

$$(\mu^{11} + \chi^{11}) \Delta \Delta [(\dots) \delta_{ri} - \frac{(4\mu^{11} / 3 + K^{11})}{(4\mu^{11} / 3 + K)} h_3^2 (\dots)_{,ri}] \psi_r + (P_i^V - h_3^2 P_{k,ki}^V) = 0 \quad (5.6.7)$$

Здесь $K = K^{11} - K^{12} K^{12} / K^{22}$ - поврежденный θ -дислокациями модуль объемного сжатия.

Решение этих уравнений можно представить в виде разложения по фундаментальным решениям:

$$\psi_i = \psi_i^0 + \psi_i^1 + \psi_i^V \quad (5.6.8)$$

Здесь ψ_i^V - частное решение неоднородной системы, а ψ_i^0, ψ_i^1 - фундаментальные решения:

$$\begin{cases} \Delta\Delta\psi_i^0 = 0 \\ \psi_r^1 - \frac{(4\mu^{11}/3 + K^{11})}{(4\mu^{11}/3 + K)} h_3^2 \psi_{i,ir}^1 = 0 \\ (\mu^{11} + \chi^{11}) \Delta\Delta[(\dots)\delta_{ri} - \frac{(4\mu^{11}/3 + K^{11})}{(4\mu^{11}/3 + K)} h_3^2 (\dots)_{,ri}] \psi_i^V + (P_i^V - h_3^2 P_{k,ki}^V) = 0 \end{cases} \quad (5.6.9)$$

Отсюда видно, что ψ_i^0 - определяет классическое решение, а ψ_i^1 - когезионную поправку, обусловленную пористостью. Также следует отметить, что решение ψ_i^1 является потенциальным векторным полем и имеет свою специфическую характерную длину когезионных взаимодействий, связанную с h_3 .

Соответственно, основные кинематические переменные также выражаются через полученные фундаментальные решения.

Решение для вектора перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} R_i = R_i^0 + R_i^1 + R_i^V \\ \begin{cases} R_i^0 = (\Delta\psi_i^0 - \psi_{r,ri}^0) + \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(4\mu^{11}/3 + K)} \psi_{r,ri}^0 \\ R_i^1 = \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(4\mu^{11}/3 + K^{11}) h_3^2} \psi_i^1 \end{cases} \end{cases} \quad (5.6.10)$$

Решение для пористости имеет вид:

$$\begin{cases} \theta^2 = (\theta^2)^0 + (\theta^2)^1 + (\theta^2)^V \\ \begin{cases} (\theta^2)^0 = -\frac{(\mu^{11} + \chi^{11}) K^{12}}{(4\mu^{11}/3 + K) K^{22}} \Delta\psi_{r,r}^0 \\ (\theta^2)^1 = -\frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{K^{12} h_3^2} \psi_{k,k}^1 \\ (\theta^2)^V = -\frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{K^{12}} h_3^2 \Delta R_{k,k}^V - \frac{K^{12}}{K^{22}} R_{k,k}^V - \frac{1}{K^{12}} h_3^2 P_{i,i}^V \end{cases} \end{cases} \quad (5.6.11)$$

Таким образом, получено общее решение теории пористых сред в виде обобщенного решения Папковича-Нейбера (5.6.10) и (5.6.11). Дана трактовка еще одной линейной комбинации моментных модулей (5.6.3), как параметра, отражающего характерную для пористых сред длину когезионного взаимодействия.

5.6. Теория сред с γ -дислокациями.

Для сред с γ -дислокациями тензор свободной дисторсии имеет вид:

$$D_{ij}^2 = \gamma_{ij}^2 \quad \gamma_{kk}^2 = 0 \quad \gamma_{ij}^2 = \gamma_{ji}^2 \quad (5.7.1)$$

Лагранжиан теории сред с полем γ -дислокаций получается как частный случай из лагранжиана уточненной теории Миндлина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [(C_{ijmn}^{11} R_{m,n} R_{i,j} + 2C_{ijmn}^{12} \gamma_{mn}^2 R_{i,j} + C_{ijmn}^{22} \gamma_{mn}^2 \gamma_{ij}^2 + C_{ijknml}^{22} \gamma_{mn,l}^2 \gamma_{ij,k}^2] dV \quad (5.7.2)$$

Тензор Миндлина:

$$\begin{aligned} C_{ijknml}^{22} = & \\ & + c_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{lm} \delta_{nk} + \delta_{mn} \delta_{ki} \delta_{jl}) + \\ & + c_2^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{nk} + \delta_{mk} \delta_{ni} \delta_{jl}) + \\ & + c_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\ & + c_4^{22} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + \\ & + (c_5^{22} \delta_{ij} \delta_{mn} + c_6^{22} \delta_{im} \delta_{jn} + c_7^{22} \delta_{in} \delta_{mj}) \delta_{kl} \end{aligned}$$

Тензоры четвертого ранга:

$$C_{ijmn}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm}$$

С учетом свойств девиатора свободной дисторсии (5.7.1) и свойств тензоров модулей, потенциальная энергия в (5.7.2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint & [(C_{ijmn}^{11} R_{m,n} R_{i,j} + 4\mu^{12} R_{i,j} \gamma_{ij}^2 + 2\mu^{22} \gamma_{ij}^2 \gamma_{ij}^2 + \\ & + (2c_2^{22} + c_3^{22} + c_4^{22}) (\gamma_{in,n}^2 \gamma_{im,m}^2 + \gamma_{im,n}^2 \gamma_{in,m}^2) + (c_6^{22} + c_7^{22}) \gamma_{ij,k}^2 \gamma_{ij,k}^2] dV \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (2c_2^{22} + c_3^{22} + c_4^{22}) &= 2\mu^{22} h_4^2 \\ (c_6^{22} + c_7^{22}) &= 2\mu^{22} h_5^2 \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

Вариационное уравнение модели Миндлина для сред с γ -дислокациями:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + 2\mu^{12} \gamma_{ij,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + \\
& + [-2\mu^{12} (R_{i,j} / 2 + R_{j,i} / 2 - R_{k,k} \delta_{ij} / 3) - 2\mu^{22} \gamma_{ij}^2 + 2\mu^{22} h_5^2 \Delta \gamma_{ij}^2 + \\
& + 4\mu^{22} h_4^2 (\gamma_{in,jn}^2 / 2 + \gamma_{jn,in}^2 / 2 - \gamma_{mn,mn}^2 \delta_{ij} / 3)] \delta \gamma_{ij}^2 \} dV - \\
& - \iint \{ 2\mu^{22} [h_4^2 (\gamma_{in,n}^2 \delta_{jk} / 2 + \gamma_{jn,n}^2 \delta_{ik} / 2 - \gamma_{kn,n}^2 \delta_{ij} / 3) + \\
& + h_4^2 (\gamma_{ik,j}^2 / 2 + \gamma_{jk,i}^2 / 2 - \gamma_{rk,r}^2 \delta_{ij} / 3) + h_5^2 \gamma_{ij,k}^2] n_k \delta \gamma_{ij}^2 + \\
& + [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + 2\mu^{12} \gamma_{ij}^2) n_j] \delta R_i \} dF = 0
\end{aligned} \tag{5.7.4}$$

Уравнения равновесия сил:

$$(\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - R_{j,ij}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11})R_{j,ij} + 2\mu^{12} \gamma_{ij,j}^2 + P_i^V = 0 \tag{5.7.5}$$

Уравнения равновесия моментов:

$$\begin{aligned}
& h_5^2 \Delta \gamma_{ij}^2 - \gamma_{ij}^2 + \\
& + 2h_4^2 (\gamma_{in,jn}^2 / 2 + \gamma_{jn,in}^2 / 2 - \gamma_{mn,mn}^2 \delta_{ij} / 3) = \\
& = (\mu^{12} / \mu^{22})(R_{i,j} / 2 + R_{j,i} / 2 - R_{k,k} \delta_{ij} / 3)
\end{aligned} \tag{5.7.6}$$

Уравнения равновесия моментов могут быть тождественно удовлетворены благодаря введению вектор-потенциала ψ_i :

$$\begin{cases} \gamma_{ij}^2 = (\mu^{12} / \mu^{22})(\psi_{i,j} / 2 + \psi_{j,i} / 2 - \psi_{k,k} \delta_{ij} / 3) \\ R_i = (h_4^2 + h_5^2)(\Delta \psi_i - \psi_{j,ij}) + (4h_4^2 / 3 + h_5^2) \psi_{j,ij} - \psi_i \end{cases} \tag{5.7.7}$$

Уравнения равновесия сил, записанные относительно вектор-потенциала приобретают вид:

$$(\mu + \chi^{11})[H_1^2 \Delta(\dots) - (\dots)](\Delta \psi_i - \psi_{j,ij}) + (4\mu / 3 + K^{11})[H_2^2 \Delta(\dots) - (\dots)] \psi_{k,ki} + P_i^V = 0 \tag{5.7.8}$$

Здесь $\mu = \mu^{11} - \mu^{12} \mu^{12} / \mu^{22}$ - поврежденный γ -дислокациями модуль сдвига, а $K^{11} = 2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11}$ - неповрежденный γ -дислокациями модуль объемного сжатия (супермодуль),

$$\begin{aligned}
H_1^2 &= \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{(\mu + \chi^{11})} (h_4^2 + h_5^2) \\
H_2^2 &= \frac{(4\mu^{11} / 3 + K^{11})}{(4\mu / 3 + K^{11})} (4h_4^2 / 3 + h_5^2)
\end{aligned} \tag{5.7.9}$$

Как будет доказано в дальнейшем, эти параметры имеют физический смысл квадратов характерных длин когезионных взаимодействий в теории сред с полями сохраняющихся γ -дислокаций.

Приведем систему уравнений равновесия сил (5.7.8) к

распадающейся системе, вводя вспомогательный векторный потенциал φ_i :

$$\varphi_i = [H_2^2 \Delta(\dots) - (\dots)](\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) + \frac{(\mu + \chi^{11})}{(4\mu/3 + K^{11})} [H_1^2 \Delta(\dots) - (\dots)]\varphi_{k,ki} \quad (5.7.10)$$

Относительно введенного вспомогательного вектор-потенциала φ_i система разрешающих уравнений приводится к векторному уравнению, а скалярный оператор равновесия может быть представлен в виде произведения операторов:

$$(\mu + \chi^{11})\Delta\Delta[(\dots) - H_1^2 \Delta(\dots)][(\dots) - H_2^2 \Delta(\dots)]\varphi_i + P_i^V = 0 \quad (5.7.11)$$

Общее решение тогда можно представить в виде разложения:

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + \varphi_i^1 + \varphi_i^2 + \varphi_i^V \quad (5.7.12)$$

Здесь φ_i^V - частное решение неоднородного уравнения (5.7.11), а $\varphi_i^0, \varphi_i^1, \varphi_i^2$ фундаментальные решения, удовлетворяющие следующим однородным уравнениям:

$$\begin{cases} \Delta\Delta\varphi_i^0 = 0 \\ \varphi_i^1 - H_1^2 \Delta\varphi_i^1 = 0 \\ \varphi_i^2 - H_2^2 \Delta\varphi_i^2 = 0 \end{cases} \quad (5.7.13)$$

$$(\mu + \chi^{11})\Delta\Delta[(\dots) - H_1^2 \Delta(\dots)][(\dots) - H_2^2 \Delta(\dots)]\varphi_i^V + P_i^V = 0$$

Аналогичным образом можно представить и решение относительно исходного потенциала ψ_i (5.7.9):

$$\begin{aligned} \psi_i &= \\ &= [H_2^2 \Delta(\dots) - (\dots)](\Delta\varphi_i^0 - \varphi_{k,ki}^0) + \frac{(\mu + \chi^{11})}{(4\mu/3 + K^{11})} [H_1^2 \Delta(\dots) - (\dots)]\varphi_{k,ki}^0 + \\ &+ \frac{(\mu + \chi^{11})}{(4\mu/3 + K^{11})} \left(\frac{H_2^2}{H_1^2} - 1\right)(\Delta\varphi_i^1 - \varphi_{k,ki}^1) + \\ &+ \left(\frac{H_1^2}{H_2^2} - 1\right)\varphi_{k,ki}^2 + \\ &+ [H_2^2 \Delta(\dots) - (\dots)](\Delta\varphi_i^V - \varphi_{k,ki}^V) + \frac{(\mu + \chi^{11})}{(4\mu/3 + K^{11})} [H_1^2 \Delta(\dots) - (\dots)]\varphi_{k,ki}^V = \\ &= \psi_i^0 + \psi_i^1 + \psi_i^2 + \psi_i^V \end{aligned} \quad (5.7.14)$$

Из (5.7.14) следует, что фундаментальное решение ψ_i^0 является бигармоническим векторным полем и соответствует классическому

решению, содержащему как потенциальную, так и вихревую составляющие. Фундаментальное решение ψ_i^1 является вихревым векторным полем, а фундаментальное решение ψ_i^2 - потенциальным. Соответственно, из (5.7.13) следует, что H_1 - характерная длина вихревого когезионного поля ψ_i^1 , а H_2 - характерная длина потенциального когезионного поля ψ_i^2 .

Основные кинематические переменные теории сред с полем сохраняющихся γ -дислокаций в соответствии с (5.7.7), (5.7.14) и (5.7.13) имеют аналогичные структуры и свойства фундаментальных решений:

$$\begin{cases} \gamma_{ij}^2 = (\gamma_{ij}^2)^0 + (\gamma_{ij}^2)^1 + (\gamma_{ij}^2)^2 + (\gamma_{ij}^2)^V \\ R_i = R_i^0 + R_i^1 + R_i^2 + R_i^V \end{cases} \quad (5.7.15)$$

Обратим внимание на то, что каждому фундаментальному решению $\psi_i^0, \psi_i^1, \psi_i^2$ соответствует своя составляющая и в γ_{ij}^2 , и в R_i . Решения $(\gamma_{ij}^2)^0, (\gamma_{ij}^2)^1, (\gamma_{ij}^2)^2$ можно трактовать как частные решения неоднородной системы уравнений (5.7.5) и (5.7.6) относительно γ_{ij}^2 , с правыми частями, зависящими от R_i . В то же время не трудно убедиться в том, что существует решение однородной системы уравнений (5.7.5) и (5.7.6) относительно γ_{ij}^2 . Действительно, однородные относительно γ_{ij}^2 уравнения равновесия сил (5.7.5) накладывают три связи на пять независимых компонент тензора-девиатора свободной дилатации γ_{ij}^2 . Соответственно, распавшиеся однородные уравнения равновесия моментов допускают определение ещё двух фундаментальных решений.

$$\begin{cases} h_s^2 \Delta \gamma_{ij}^2 - \gamma_{ij}^2 = 0 \\ \gamma_{ij,j}^2 = 0 \end{cases} \quad (5.7.16)$$

Таким образом, дана трактовка еще двум линейным комбинациям «моментных» модулей. Они выражаются через характерные длины когезионных взаимодействий H_1, H_2 . В соответствии с (5.7.15) сумму $u_i = -R_i^1 - R_i^2$ можно трактовать как поле когезионных перемещений общего

вида, включающее и потенциальную, и вихревую части, и связанное с сохраняющимися γ -дислокациями. В то же время существуют еще два фундаментальных решения в γ_{ij}^2 . Они хоть и удовлетворяют уравнениям Гельмгольца, но, в соответствии с (5.7.16), их нельзя связать с когезионными перемещениями. Они так же имеют характерную длину взаимодействия h_5 , которая, однако, не является независимой и выражается через H_1, H_2 в соответствии с (5.7.9).

5.7. Уточненная модель сред Миндлина.

Лагранжиан теории Миндлина:

$$\begin{aligned}
L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ & C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + \\
& + 2M_1 \gamma_{kl,l}^2 \theta_{,k}^2 + M_2 (\gamma_{ki,i}^2 \gamma_{kj,j}^2 + \gamma_{ki,j}^2 \gamma_{kj,i}^2) + 2M_3 (\omega_{ki,i}^2 \gamma_{kj,j}^2 + \omega_{ki,j}^2 \gamma_{kj,i}^2) + M_4 (\omega_{ki,i}^2 \omega_{kj,j}^2 + \omega_{ki,j}^2 \omega_{kj,i}^2) + \\
& + M_5 \theta_{,k}^2 \theta_{,k}^2 + M_6 \gamma_{ij,k}^2 \gamma_{ij,k}^2 + M_7 \omega_{ij,k}^2 \omega_{ij,k}^2 \} dV
\end{aligned} \tag{5.10.1}$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned}
\delta L = \iiint \{ & (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + K^{12} \theta_{,i}^2 + 2\mu^{12} \gamma_{ij,j}^2 + 2\chi^{12} \omega_{ij,j}^2 + P_i^V) \delta R_i + \\
& + (M_1 \gamma_{ij,ij}^2 + M_5 \theta_{,ii}^2 - K^{22} \theta^2 - K^{12} R_{i,i}) \delta \theta^2 + \\
& + [M_1 \theta_{,ij}^2 + 2M_3 \omega_{ik,kj}^2 + 2M_2 \gamma_{ik,kj}^2 + M_6 \gamma_{ij,kk}^2 - 2\mu^{22} \gamma_{ij}^2 - 2\mu^{12} (R_{i,j} / 2 + R_{j,i} / 2 - R_{k,k} \delta_{ij} / 3)] \delta \gamma_{ij}^2 + \\
& + [2M_3 \gamma_{ik,kj}^2 + 2M_4 \omega_{ik,kj}^2 + M_7 \omega_{ij,kk}^2 - 2\chi^{22} \omega_{ij}^2 - 2\chi^{12} (R_{i,j} / 2 - R_{j,i} / 2)] \delta \omega_{ij}^2 \} dV + \\
& + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + K^{12} \theta^2 \delta_{ij} + 2\mu^{12} \gamma_{ij}^2 + 2\chi^{12} \omega_{ij}^2) n_j] \delta R_i - (M_1 \gamma_{ij,j}^2 + M_5 \theta_{,i}^2) n_i \delta \theta^2 - \\
& - [(M_1 \theta_{,i}^2 + M_2 \gamma_{ik,k}^2 + M_3 \omega_{ik,k}^2) n_j + (M_3 \omega_{ik,j}^2 + M_2 \gamma_{ik,j}^2 + M_6 \gamma_{ij,k}^2) n_k] \delta \gamma_{ij}^2 - \\
& - [(M_3 \gamma_{ik,k}^2 + M_4 \omega_{ik,k}^2) n_j + (M_3 \gamma_{ik,j}^2 + M_4 \omega_{ik,j}^2 + M_7 \omega_{ij,k}^2) n_k] \delta \omega_{ij}^2 \} dF = 0
\end{aligned} \tag{5.10.2}$$

Уравнения равновесия:

$$(\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - R_{j,ji}) + (4\mu^{11}/3 + K^{11})R_{j,ji} + K^{12}\theta_i^2 + 2\mu^{12}\gamma_{ij,j}^2 + 2\chi^{12}\omega_{ij,j}^2 + P_i^V = 0$$

$$M_5\Delta\theta^2 - K^{22}\theta^2 = (K^{12}R_i - M_1\gamma_{ij,j}^2),_i$$

$$\begin{aligned} M_6\Delta\gamma_{ij}^2 - 2\mu^{22}\gamma_{ij}^2 = & \\ = (2\mu^{12}R_i - M_1\theta_i^2 - 2M_3\omega_{iq,q}^2 - 2M_2\gamma_{iq,q}^2),_j / 2 + & \\ + (2\mu^{12}R_j - M_1\theta_j^2 - 2M_3\omega_{jq,q}^2 - 2M_2\gamma_{jq,q}^2),_i / 2 - & \\ - (2\mu^{12}R_k - M_1\theta_k^2 - 2M_3\omega_{kq,q}^2 - 2M_2\gamma_{kq,q}^2),_k \delta_{ij} / 3 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_7\Delta\omega_{ij}^2 - 2\chi^{22}\omega_{ij}^2 = & \\ = (\chi^{12}R_i - M_3\gamma_{ik,k}^2 - M_4\omega_{ik,k}^2),_j - & \\ - (\chi^{12}R_j - M_3\gamma_{jk,k}^2 - M_4\omega_{jk,k}^2),_i & \end{aligned}$$

(5.10.3)

Введем вектор-потенциал следующим образом:

$$\begin{aligned} R_i = \varphi_i - & \\ - \left[\frac{\mu^{22}}{2\mu^{22}\chi^{22}}(M_4 + M_7) + \frac{1}{2\mu^{22}}(M_2 + M_6) \right] (\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) - \left(\frac{2}{3\mu^{22}}M_2 + \frac{1}{K^{22}}M_5 + \frac{1}{2\mu^{22}}M_6 \right) \varphi_{k,ki} - & \\ - \left[M_3M_3 - (M_2 + M_6)(M_4 + M_7) \right] \frac{1}{2\chi^{22}2\mu^{22}} \Delta(\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) - & \\ - \left(\frac{1}{3\mu^{22}K^{22}}M_1M_1 - \frac{2}{3\mu^{22}K^{22}}M_2M_5 - \frac{1}{2\mu^{22}K^{22}}M_5M_6 \right) \Delta\varphi_{k,ki} & \end{aligned}$$

$$\theta^2 = \theta^* - \frac{K^{12}}{K^{22}}\varphi_{k,k} + \left(-\frac{2\mu^{12}}{3\mu^{22}K^{22}}M_1 + \frac{2K^{12}}{3\mu^{22}K^{22}}M_2 + \frac{K^{12}}{2\mu^{22}K^{22}}M_6 \right) \Delta\varphi_{k,k}$$

$$\omega_{ij}^2 = \omega_{ij}^* - \frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}}(\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) + \left[\frac{\chi^{12}}{4\chi^{22}\mu^{22}}(M_2 + M_6) - \frac{\mu^{12}}{4\chi^{22}\mu^{22}}M_3 \right] \Delta(\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i})$$

$$\gamma_{ij}^2 = \gamma_{ij}^* - \tag{5.10.4}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}(\varphi_{i,j}/2 + \varphi_{j,i}/2 - \varphi_{k,k}\delta_{ij}/3) + & \\ + \left[\frac{\mu^{12}}{2\mu^{22}\chi^{22}}(M_4 + M_7) - \frac{\chi^{12}}{2\mu^{22}\chi^{22}}M_3 \right] \Delta(\varphi_{i,j}/2 + \varphi_{j,i}/2 - \varphi_{k,k}\delta_{ij}/3) - & \\ - \left(\frac{\mu^{12}}{2\mu^{22}\chi^{22}}(M_4 + M_7) - \frac{\chi^{12}}{2\mu^{22}\chi^{22}}M_3 - \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}K^{22}}M_5 + \frac{K^{12}}{2\mu^{22}K^{22}}M_1 \right) (\varphi_{k,kij} - \Delta\varphi_{k,k}\delta_{ij}/3) & \end{aligned}$$

Здесь θ^* , ω_{ij}^* и γ_{ij}^* - общее решение однородной системы уравнений равновесия (5.10.3):

$$\begin{aligned}
& K^{12}\theta_{,i}^* + 2\mu^{12}\gamma_{ij,j}^* + 2\chi^{12}\omega_{ij,j}^* = 0 \\
& M_5\Delta\theta^* - K^{22}\theta^* = M_1\gamma_{ij,ij}^* \\
& M_6\Delta\gamma_{ij}^* - 2\mu^{22}\gamma_{ij}^* = \\
& = (-M_1\theta_{,i}^* - 2M_3\omega_{iq,q}^* - 2M_2\gamma_{iq,q},_{,j}^*)/2 + \\
& + (-M_1\theta_{,j}^* - 2M_3\omega_{jq,q}^* - 2M_2\gamma_{jq,q},_{,i}^*)/2 - \\
& - (-M_1\theta_{,k}^* - 2M_3\omega_{kq,q}^* - 2M_2\gamma_{kq,q},_{,k}^*)\delta_{ij}/3 \\
& M_7\Delta\omega_{ij}^* - 2\chi^{22}\omega_{ij}^* = \\
& = (-M_3\gamma_{ik,k}^* - M_4\omega_{ik,k},_{,j}^*) - \\
& - (-M_3\gamma_{jk,k}^* - M_4\omega_{jk,k},_{,i}^*)
\end{aligned}$$

Вектор-потенциал φ_i определен так, что он «убирает» из этой системы операторы от перемещений и внешние объемные нагрузки. При этом операторы от перемещений в уравнениях равновесия моментов «пропадают» при произвольном векторе-потенциале, а требование однородности уравнений равновесия сил дает определение вектор-потенциала:

$$\begin{aligned}
& (\mu + \chi)(\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) + \left(\frac{4}{3}\mu + K\right)\varphi_{k,ki} - \\
& - \left[\frac{(\mu + \chi^{11})}{2\chi^{22}}(M_4 + M_7) + \frac{(\mu^{11} + \chi)}{2\mu^{22}}(M_2 + M_6) + \frac{\chi^{12}\mu^{12}}{\chi^{22}\mu^{22}}M_3\right]\Delta(\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) - \\
& - \left[\frac{(\frac{4}{3}\mu + K^{11})}{K^{22}}M_5 + \frac{(\frac{4}{3}\mu^{11} + K)}{2\mu^{22}}\left(\frac{4}{3}M_2 + M_6\right) + \frac{4\mu^{12}K^{12}}{3\mu^{22}K^{22}}M_1\right]\Delta\varphi_{k,ki} - \\
& - [M_3M_3 - (M_2 + M_6)(M_4 + M_7)]\frac{(\mu^{11} + \chi^{11})}{4\chi^{22}\mu^{22}}\Delta\Delta(\Delta\varphi_i - \varphi_{k,ki}) - \\
& - [M_1M_1 - 2M_2M_5 - \frac{3}{2}M_5M_6]\frac{(4\mu^{11}/3 + K^{11})}{3\mu^{22}K^{22}}\Delta\Delta\varphi_{k,ki} + P_i^V = 0
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения поврежденных модулей, определения которых были даны в рамках алгебраической теории дефектных сред в параграфе 4.1:

$$K = \left(K^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\right) \quad \mu = \left(\mu^{11} - \frac{\mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}}\right) \quad \chi = \left(\chi^{11} - \frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}}\right)$$

Исследуем систему относительно компонент вектора-потенциала. Дадим определение классического оператора равновесия и операторов когезионных

полей:

$$L_{ij}(\dots)\varphi_j = \{(\mu + \chi)[\delta_{ij}\Delta(\dots) - (\dots)_{,ij}] + (\frac{4}{3}\mu + K)(\dots)_{,ij}\}\varphi_j$$

$$H_{ik}^1(\dots) = \delta_{ik}(\dots) - a_1 \frac{[\delta_{ik}\Delta(\dots) - (\dots)_{,ik}]}{(\mu + \chi)} - b_1 \frac{(\dots)_{,ik}}{(\frac{4}{3}\mu + K)}$$

$$H_{ik}^2(\dots) = \delta_{ik}(\dots) - a_2 \frac{[\delta_{ik}\Delta(\dots) - (\dots)_{,ik}]}{(\mu + \chi)} - b_2 \frac{(\dots)_{,ik}}{(\frac{4}{3}\mu + K)}$$

Здесь $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ - корни квадратных уравнений:

$$a^2 - A_1 a + A_2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} = \begin{cases} (A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2})/2 \\ A_2 / ((A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2})/2) \end{cases}$$

$$b^2 - B_1 b + B_2 = 0 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2}}{2} = \begin{cases} (B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2})/2 \\ B_2 / ((B_1 + \sqrt{B_1^2 - 4B_2})/2) \end{cases}$$

Коэффициенты квадратных уравнений определяются свойствами среды:

$$A_1 = \left[\frac{(\mu + \chi^{11})}{2\chi^{22}}(M_4 + M_7) + \frac{(\mu^{11} + \chi)}{2\mu^{22}}(M_2 + M_6) + \frac{2\chi^{12} 2\mu^{12}}{2\chi^{22} 2\mu^{22}} M_3 \right]$$

$$A_2 = [(M_2 + M_6)(M_4 + M_7) - M_3 M_3] \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})(\mu + \chi)}{2\chi^{22} 2\mu^{22}}$$

$$B_1 = \left[\frac{(\frac{4}{3}\mu + K^{11})}{K^{22}} M_5 + \frac{(\frac{4}{3}\mu^{11} + K)}{2\mu^{22}} (\frac{4}{3}M_2 + M_6) + \frac{4\mu^{12} K^{12}}{3\mu^{22} K^{22}} M_1 \right]$$

$$B_2 = \left[\frac{3}{2} M_5 (\frac{4}{3}M_2 + M_6) - M_1 M_1 \right] \frac{(\frac{4}{3}\mu^{11} + K^{11})(\frac{4}{3}\mu + K)}{3\mu^{22} K^{22}}$$

Разрешающее уравнение на вектор-потенциал с учетом введенных обозначений принимает вид:

$$H_{ij}^1 H_{jk}^2 L_{kr} \varphi_r + P_i^V = 0$$

Таким образом, каждому оператору соответствует вектор фундаментальных решений, определены девять фундаментальных решений из двенадцати. В силу коммутативности операторов, вектор

$$U_i = H_{ij}^1 H_{jr}^2 \varphi_r$$

удовлетворяет уравнениям классической теории упругости и поэтому трактуется как вектор классических перемещений:

$$L_{ij}U_j + P_i^V = 0$$

Два оставшихся вектора $u_i^1 = -\frac{1}{C}H_{ik}^2L_{kr}\varphi_r$ и $u_i^2 = -\frac{1}{C}H_{ik}^1L_{kr}\varphi_r$, C - нормирующий множитель, удовлетворяют соответствующим системам уравнений гельмгольца типа:

$$CH_{ij}^1u_j^1 = P_i^V \quad CH_{ij}^2u_j^2 = P_i^V$$

Эти векторы трактуются как векторы когезионных перемещений. Примечательно, что в теории Миндлина когезионные перемещения представлены двумя векторами, в то время как в теории Тупина – одним. Более того, следует обратить внимание на то, что характерные длины когезионных взаимодействий в теориях Миндлина и Тупина определяются принципиально разными модулями и отражают различные механические свойства: градиентные свойства дефектных (Миндлин) и бездефектных (Тупин) сред.

Исследуем решение для чисто дислокационных состояний. Исходная система имеет следующий вид:

$$K^{12}\theta_{,i}^* + 2\mu^{12}\gamma_{ij,j}^* + 2\chi^{12}\omega_{ij,j}^* = 0$$

$$M_5\Delta\theta^* - K^{22}\theta^* = -M_1\gamma_{ij,ij}^*$$

$$\begin{aligned} M_6\Delta\gamma_{ij}^* - 2\mu^{22}\gamma_{ij}^* = \\ = (-M_1\theta_{,i}^* - 2M_3\omega_{iq,q}^* - 2M_2\gamma_{iq,q}^*),_j / 2 + \\ + (-M_1\theta_{,j}^* - 2M_3\omega_{jq,q}^* - 2M_2\gamma_{jq,q}^*),_i / 2 - \\ - (-M_1\theta_{,k}^* - 2M_3\omega_{kq,q}^* - 2M_2\gamma_{kq,q}^*),_k \delta_{ij} / 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_7\Delta\omega_{ij}^* - 2\chi^{22}\omega_{ij}^* = \\ = (-M_3\gamma_{ik,k}^* - M_4\omega_{ik,k}^*),_j - \\ - (-M_3\gamma_{jk,k}^* - M_4\omega_{jk,k}^*),_i \end{aligned}$$

Возьмем дивергенцию от уравнений равновесия сил и двойную дивергенцию

от девиаторной части уравнений равновесия моментов:

$$\begin{cases} K^{12} \Delta \theta^* + 2\mu^{12} \gamma_{ij,ij}^* = 0 \\ M_5 \Delta \theta^* - K^{22} \theta^* = -M_1 \gamma_{ij,ij}^* \\ M_6 \Delta \gamma_{ij,ij}^* - 2\mu^{22} \gamma_{ij,ij}^* = (-M_1 \Delta \theta^* - 2M_2 \Delta \gamma_{ij,ij}^*) 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{ij,ij}^* = -\frac{K^{12}}{2\mu^{12}} \frac{K^{22}}{(M_5 - M_1 \frac{K^{12}}{2\mu^{12}})} \theta^* \\ \Delta \theta^* = \frac{K^{22}}{(M_5 - M_1 \frac{K^{12}}{2\mu^{12}})} \theta^* \\ \Delta \theta^* = \frac{2\mu^{22}}{(-\frac{2}{3}M_1 + \frac{4}{3}M_2 + M_6)} \theta^* \end{cases}$$

Таким образом, в общем случае $\theta^* = 0$. Исключение составляет случай, когда между модулями существует связь:

$$K^{22} \left(-\frac{2}{3}M_1 + \frac{4}{3}M_2 + M_6\right) = 2\mu^{22} \left(M_5 - M_1 \frac{K^{12}}{2\mu^{12}}\right)$$

Однородная система чисто дислокационных состояний упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \mu^{12} \gamma_{ij,j}^* + \chi^{12} \omega_{ij,j}^* &= 0 \\ M_6 \Delta \gamma_{ij}^* - 2\mu^{22} \gamma_{ij}^* &= (-M_3 + M_2 \frac{\chi^{12}}{\mu^{12}}) (\omega_{ik,kj}^* + \omega_{jk,ki}^*) \\ M_7 \Delta \omega_{ij}^* - 2\chi^{22} \omega_{ij}^* &= (M_3 \frac{\chi^{12}}{\mu^{12}} - M_4) (\omega_{ik,kj}^* - \omega_{jk,ki}^*) \end{aligned}$$

Возьмем дивергенцию этих уравнений:

$$\begin{aligned} \mu^{12} \gamma_{ij,j}^* + \chi^{12} \omega_{ij,j}^* &= 0 \\ (M_6 - M_3 \frac{\mu^{12}}{\chi^{12}} + M_2) \Delta \omega_{ij,j}^* - 2\mu^{22} \omega_{ij,j}^* &= 0 \\ (M_7 - M_3 \frac{\chi^{12}}{\mu^{12}} + M_4) \Delta \omega_{ij,j}^* - 2\chi^{22} \omega_{ij,j}^* &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, в общем случае $\gamma_{ik,k}^* = \omega_{ik,k}^* = 0$. Исключение составляет случай, когда между модулями существует связь:

$$2\chi^{22} \left(M_6 - M_3 \frac{\mu^{12}}{\chi^{12}} + M_2\right) = 2\mu^{22} \left(M_7 - M_3 \frac{\chi^{12}}{\mu^{12}} + M_4\right)$$

Однородная система чисто дислокационных состояний еще более упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases} l_6^2 \Delta \gamma_{ij}^* - \gamma_{ij}^* = 0 \\ \gamma_{ij,j}^* = 0 \\ M_6 = 2\mu^{22} l_6^2 \end{cases} \quad \begin{cases} l_7^2 \Delta \omega_{ij}^* - \omega_{ij}^* = 0 \\ \omega_{ij,j}^* = 0 \\ M_7 = 2\chi^{22} l_7^2 \end{cases}$$

Первая система дает два фундаментальных решения: на пять компонент свободного формоизменения γ_{ij}^* наложены три связи векторным уравнением $\gamma_{ij,j}^* = 0$. Три компоненты антисимметричного тензора ω_{ij}^* можно представить в виде дивергенции антисимметричного тензора третьего ранга $\omega_{ij}^* = \Omega_{,k} \mathcal{E}_{ijk}$. Связи $\omega_{ij,j}^* = 0$ при этом удовлетворены тождественно. Таким образом, еще одно, последнее фундаментальное решение строится через псевдоскаляр Ω , удовлетворяющий уравнению Гельмгольца $l_7^2 \Delta \Omega - \Omega = 0$. Таким образом, построены все двенадцать фундаментальных решения в теории Миндлина: три компоненты вектора классических перемещений, шесть компонент двух векторов когезионных перемещений, две компоненты тензора свободного формоизменения и потенциал тензора свободных поворотов.

ГЛАВА 6 ТЕОРИЯ АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.

6.1. Модель идеальной адгезии.

В данном случае под идеальной средой подразумевается среда без дислокаций, в противовес далее рассмотренным средам с полями сохраняющихся дислокаций.

Если последовательно учесть как связи соотношения Коши и в объеме, и на поверхности тела, получим следующий лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF$$

Здесь явно просматривается «подобие» между плотностью поверхностной энергии U_F и плотностью объемной энергии U_V в 2D постановке.

$$2U_V = C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

$$2U_F = A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

Однако тензоры модулей отличаются (физические свойства поверхности и объема разные).

Тензор объемных модулей является изотропным.

$$C_{ijnm}^{11} = [\lambda^{11} \delta_{ij} \delta_{nm} + (\mu^{11} + \chi^{11}) \delta_{in} \delta_{jm} + (\mu^{11} - \chi^{11}) \delta_{im} \delta_{jn}]$$

В то же время тензор адгезионных модулей является трансверсально изотропным и физические свойства по направлению нормали отличаются от физических свойств в любом направлении, лежащем в касательной плоскости к поверхности.

$$A_{ijnm}^{11} = [\lambda^{11F} (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^{11F} n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^{11F} + \chi^{11F}) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^{11F} - \chi^{11F}) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)]$$

Варьируя лагранжиан и приравнявая вариацию нулю, получим следующее

вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [C_{ijnm}^{11} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \oint [P_i^F - C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j + A_{ijnm}^{11} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}] \delta R_i dF - \\ & - \sum \oint A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} v_j \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Здесь суммирование производится по всем контурам, ограничивающим гладкие поверхности, составляющие кусочно-гладкую поверхность F . Напомним, что кусочно-гладкая поверхность F ограничивает, в свою очередь, рассматриваемый объем среды V . Если поверхность F гладкая, то в вариационном уравнении контурные интегралы пропадают. Если поверхность F кусочно-гладкая, то требование равенства нулю суммы контурных интегралов эквивалентно требованию непрерывности вектора перемещений R_i и вектора адгезионных напряжений $a_i = a_{ij} v_j = A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} v_j$ при переходе через ребра поверхности F .

Теория идеальной адгезии имеет те же уравнения равновесия, что и классическая теория упругости, но краевая задача содержит другие статические граничные условия.

6.1.1. Модель давления Лапласа и поверхностного натяжения.

В статических граничных условиях теории классических сред с адгезионными свойствами ограничивающей среду поверхности появляется дополнительное слагаемое со вторыми производными от перемещений. Если

$A_{ijnm}^{11} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}$ будут пренебрежимо малы по сравнению с первыми

производными $C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j$ (т.е. на поверхности тела напряжения медленно

меняются как функции координат поверхности), то решением такой

приближенной задачи будет классическое решение. В противоположном случае, когда напряжения на поверхности тела меняются достаточно быстро,

и $A_{ijnm}^{11} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \gg C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j$, классическое решение не применимо, и

эксперименты, в которых будет реализовано такое условие, будут фиксировать неклассические эффекты.

Таким неклассическим, с точки зрения изложенного, эффектом является капиллярное давление Лапласа. Чтобы доказать это утверждение рассмотрим статическое граничное условие для нормальных напряжений.

$$C_{ijnm}^{11} n_i n_j \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - A_{ijnm}^{11} n_i \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} = P_i^F n_i$$

С учетом определений тензоров модулей и вводя обозначения

$$P_i^F n_i = p_0 \quad R_n n_n = R \quad \frac{\partial R}{\partial x_m} n_m = \dot{R} \quad (\delta_{nm} - n_n n_m) \frac{\partial R_n}{\partial x_m} = \Delta F / F$$

получим:

$$(2\mu^{11} + \lambda^{11}) \dot{R} + \lambda^{11} \Delta F / F - \delta^{11F} \nabla^2 R = p_0$$

Учтем уравнение закона Гука для давления:

$$p = (2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11}) (\dot{R} + \Delta F / F) \Rightarrow \dot{R} = p / (2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11}) - \Delta F / F$$

Исключим из статического граничного условия нормальную производную:

$$\frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{(2\mu^{11} / 3 + \lambda^{11})} p = p_0 + 2\mu \Delta F / F + \delta^{11F} \nabla^2 R$$

Для жидкостей это соотношение можно упростить, полагая $\lambda^{11} \gg \mu^{11}$, тогда приходим к обобщенному уравнению Лапласа для капиллярного давления:

$$p = p_0 + 2\mu^{11} \Delta F / F + \delta^{11F} \nabla^2 R$$

Давление на поверхности среды уравновешено внешним давлением p_0 , поверхностным натяжением $2\mu^{11} \Delta F / F$ и капиллярным давлением $\delta^{11F} \nabla^2 R$.

Обратим внимание на то, что капиллярное давление пропорционально (как и у Лапласа) сумме главных кривизн деформированной поверхности.

$$\nabla^2 R = \frac{\partial^2 R}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial s_2^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$p = p_0 + 2\mu^{11} \frac{\Delta F}{F} + \delta^{11F} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Здесь R_1 и R_2 - радиусы главных кривизн, s_1, s_2 - гауссовы координаты недеформированной поверхности.

Таким образом, теория идеальных адгезионных взаимодействий описывает явление капиллярного давления как свое строгое следствие. Одновременно адгезионный модуль δ^{11F} идентифицируется как постоянная Лапласа для капиллярного давления. Также, слагаемому $2\mu^{11}\Delta F/F$ дается определение поверхностного натяжения в классической механике сплошных сред.

6.1.2. Модель аналогов давления Лапласа в касательных напряжениях.

Наряду с капиллярным давлением Лапласа, теория идеальных адгезионных взаимодействий предсказывает неклассические эффекты и в касательных статических граничных условиях. Проведем преобразования в статических граничных условиях с касательными напряжениями, аналогичные сделанным в предыдущем параграфе в статическом граничном условии с нормальным напряжением:

$$\tau_k = \sigma_{ij} n_j \delta_{ik}^* =$$

$$= [P_i^F + (\mu^{11F} + \chi^{11F}) \nabla^2 R_i + \frac{(\chi^{11F} + \mu^{11F} - \chi^{11F})}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} (2\mu^{11} \frac{\Delta F}{F})] \delta_{ik}^* \quad (6.1)$$

В касательных граничных условиях появляются два неклассических поверхностных эффекта, связанных с появлением двух слагаемых со старшими (вторыми) производными. Первый эффект аналогичен капиллярному давлению Лапласа – это появление «плоского» оператора Лапласа, действующего на некоторый вектор. В «нормальном» граничном условии этим вектором был вектор $\delta^{11F} R n_k$, а в «касательных» -

$(\mu^{11F} + \chi^{11F})R_i\delta_{ik}^*$. Вторым неклассический эффект связан с «плоским» градиентом поверхностного натяжения $2\mu^{11}(\Delta F/F)$. Соответствующая константа $(\lambda^{11F} + \mu^{11F} - \chi^{11F})/(2\mu^{11})$ определяет характерную длину этого нового адгезионного взаимодействия.

Можно разделить эти эффекты представив «плоское» векторное уравнение (6.1) в виде его «плоской» дивергенции:

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x_k} = \frac{\partial P_i^F}{\partial x_k} \delta_{ik}^* + \frac{(2\mu^{11F} + \lambda^{11F})}{2\mu^{11}} \nabla^2 \left(2\mu^{11} \frac{\Delta F}{F} \right) \quad (6.2)$$

и его «плоского» ротора:

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} n_k = \frac{\partial P_n^F}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} n_k + (\mu^{11F} + \chi^{11F}) \nabla^2 \left(\frac{\partial R_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} n_k \right) \quad (6.3)$$

Таким образом, неклассические адгезионные эффекты разделены и выписаны их уравнения. Комбинации адгезионных модулей $(2\mu^{11F} + \lambda^{11F})$ и $(\mu^{11F} + \chi^{11F})$, являющиеся адгезионными аналогами модуля Юнга и модуля сдвига, определяют характерные длины разделенных адгезионных взаимодействий.

6.1.3. Поверхностные волны адгезионной природы.

Учтем в работе внешних сил инерционные члены, а остальные внешние нагрузки положим равными нулю. Уравнения Эйлера тогда приобретут вид:

$$(\mu + \chi)(\Delta R_i - R_{j,ji}) + (2\mu + \lambda)R_{j,ji} - \rho \ddot{R}_i = 0 \quad (6.4)$$

Здесь $\Delta(\dots) = (\dots)_{,kk}$ - трехмерный оператор Лапласа.

1. Волны расширения. Существование волн расширения в объеме среды определяется уравнением, полученным из уравнений равновесия действием на них оператора дивергенции:

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} = 0$$

$$\theta = R_{k,k}$$

Соответственно, скорость распространения волн расширения, так же как и в

классике, определяется соотношением:

$$c_1 = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}}$$

2. Волны искажения. Существование волн искажения в объеме среды определяется уравнениями, полученными из уравнений равновесия действием на них оператора ротора:

$$(\mu + \chi)\Delta\omega_i - \rho\ddot{\omega} = 0$$

$$\omega_i = -R_{m,n} \mathcal{E}_{mni} / 2$$

Скорость распространения волн искажения иная, чем в классике, определяется соотношением:

$$c_2 = \sqrt{\frac{(\mu + \chi)}{\rho}} \quad (6.5)$$

Если положить $\chi = 0$, что эквивалентно введению гипотезы парности касательных напряжений, скорости распространения волн искажения в классике и в рассматриваемой теории совпадают. Соотношение (6.5) может служить основанием для постановки экспериментального определения «третьего коэффициента Ламе». В случае, если эксперимент даст значение $\chi = 0$, он станет экспериментальным подтверждением гипотезы парности.

6.1.3.1. Нормальные поверхностные волны W – типа.

Пусть в (6.4) вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно оси OZ : $R_i = W(x, z)Z_i$. Тогда остается единственное уравнение движения, которое определяет первый тип поперечной поверхностной волны, связанной с давлением Лапласа:

$$(\mu + \chi)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (6.6)$$

с соответствующим граничным условием на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial W}{\partial z} - \delta^F \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (6.7)$$

При $\delta^F = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (6.6)-(6.7), описывающего поперечную поверхностную волну. При $\delta^F \neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$W = W_a e^{-2\pi i \frac{z}{l_w}} \sin \frac{2\pi}{l_w} (x - c_w t)$$

Здесь l_w – максимальная длина волны, $a_w = 2\pi \frac{\delta^F}{(2\mu + \lambda)l_w}$ – безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_w = \sqrt{c_2^2 - c_1^2 a_w^2}$ – скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну W-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать W-волну, измеряя длину волны l_w и скорость движения ее фронта c_w , можно вычислить постоянную Лапласа для поверхности данной среды:

$$\delta^F = (2\mu + \lambda) l_w \frac{\sqrt{c_2^2 - c_w^2}}{2\pi c_1} \quad (6.8)$$

Здесь следует отметить, что в соответствии с (6.8) максимальная длина W-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_w = \frac{2\pi c_1}{\sqrt{c_2^2 - c_w^2}} \frac{\delta^F}{(2\mu + \lambda)} \quad (6.9)$$

Действительно, правая часть соотношения (6.9) определена только механическими характеристиками среды – плотностью ρ , адгезионным модулем δ^F и коэффициентами Ламе μ, λ, χ . То же самое можно утверждать и относительно частоты/периода колебаний W-волны:

$$\omega_w = \frac{2\pi}{l_w} c_w \quad (6.10)$$

Соотношение (6.10) дает теоретическое объяснение явлению капиллярной ряби на поверхности жидкости как резонансному образованию стоячей W-волны на частоте ω_w .

6.1.3.2. Тангенциальные поверхностные волны U, V – типа.

Пусть в (6.4) вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно поверхности полупространства: $R_i = U(x, z)X_i$. Тогда остается единственное уравнение движения, которое определяет второй тип поперечной поверхностной волны:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\mu + \chi) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (6.11)$$

с соответствующим граничным условием на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu + \chi) \frac{\partial U}{\partial z} - (\mu^F + \chi^F) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (6.12)$$

При $(\mu^F + \chi^F) = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (6.11)-(6.12), описывающего поперечную поверхностную волну. При $(\mu^F + \chi^F) \neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$U = U_a e^{-2\pi i \frac{z}{l_u}} \text{Sin} \frac{2\pi}{l_u} (x - c_u t) \quad (6.13)$$

Здесь l_u - максимальная длина волны, $a_u = 2\pi \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi)l_u}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_u = \sqrt{(c_1^2 - c_2^2 a_u^2)}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну U-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать U-волну, измеряя длину волны l_u и скорость движения ее фронта c_u , можно вычислить адгезионный модуль $(\mu^F + \chi^F)$ для поверхности данной среды:

$$(\mu^F + \chi^F) = (\mu + \chi) l_u \frac{\sqrt{c_1^2 - c_u^2}}{2\pi c_2}$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты U-волны аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны. Длина

волны U-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_u = \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi)} \frac{2\pi c_2}{\sqrt{c_1^2 - c_u^2}}$$

Частота/период колебаний U-волны:

$$\omega_u = \frac{2\pi}{l_u} c_u$$

Очевидно, что для U-волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

Совершенно аналогично можно построить решение и для поверхностной поперечной V-волны, если вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно поверхности полупространства $R = V(y, z)Y_i$. Физически U и V волны ничем не отличаются, в чем можно убедиться, совершив преобразование поворота системы координат вокруг оси OZ на 90° .

6.1.3.3. Поверхностные волны θ -типа.

Пусть в (6.4) вектор перемещений будет иметь только две компоненты, лежащие в плоскости, параллельной поверхности полупространства: $R_i = \varphi_{,j}(\delta_{ij} - Z_i Z_j)$. Тогда уравнения движения могут быть записаны только относительно изменения объема:

$$\theta(x, y, t) = R_{,i,i} = \varphi_{,ij}(\delta_{ij} - Z_i Z_j) = \nabla^2 \varphi$$

$$(2\mu + \lambda)\nabla^2 \theta - \rho \ddot{\theta} = 0 \tag{6.14}$$

с соответствующим "разделенным" первым граничным условием (6.2) на поверхности среды:

$$(\mu + \chi) \frac{\partial \theta}{\partial z} - (2\mu^F + \lambda^F) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{6.15}$$

При $(2\mu^F + \lambda^F) = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (6.14)-(6.15) для поверхностной волны расширения. При $(2\mu^F + \lambda^F) \neq 0$

нетривиальное решение существует:

$$\theta = \theta_a e^{-2\pi a \frac{z}{l_\theta}} \sin \frac{2\pi}{l_\theta} (x - c_\theta t)$$

Здесь l_θ – длина волны, $a_\theta = 2\pi \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{(\mu + \chi)l_\theta}$ – безразмерный параметр затухания

волны по глубине, $c_\theta = c_1 \sqrt{1 - a_\theta^2}$ – скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну θ -волной.

Если в эксперименте удастся реализовать θ -волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(2\mu^F + \lambda^F)$ для поверхности данной среды:

$$(2\mu^F + \lambda^F) = (\mu + \chi)l_\theta \frac{\sqrt{c_1^2 - c_\theta^2}}{2\pi c_1} \quad (6.16)$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты θ -волны, вытекающие из соотношения (6.16), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (6.8).

Длина волны θ -волны является единственной для выбранной среды:

$$l_\theta = \frac{2\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 - c_\theta^2}} \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{(\mu + \chi)}$$

Частота/период колебаний θ -волны:

$$\omega_\theta = \frac{2\pi}{l_\theta} c_\theta$$

Очевидно, что для θ -волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

6.1.3.4. Поверхностные волны ω -типа.

Пусть в (6.4) вектор перемещений будет иметь только две компоненты, лежащие в плоскости, параллельной поверхности полупространства:

$R_i = \psi_{,m} Z_n \mathcal{E}_{mni}$. Тогда уравнения движения могут быть записаны только

относительно проекции псевдовектора поворотов на ось OZ

$$\omega(x, z, t) = -R_{i,j} \partial_{ijk} Z_k / 2 = -\psi_{,mj} Z_n \partial_{mni} \partial_{ijk} Z_k / 2 = -\psi_{,mj} (\delta_{mj} - Z_m Z_j) / 2$$

$$(\mu + \chi) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (6.17)$$

с соответствующим «разделенным» первым граничным условием (6.3) на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu + \chi) \frac{\partial \omega}{\partial z} - (\mu^F + \chi^F) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (6.18)$$

При $(\mu^F + \chi^F) = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (6.17)-(6.18) для поверхностной волны расширения. При $(\mu^F + \chi^F) \neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$\omega = \omega_a e^{-2\pi a \frac{z}{l_\omega}} \text{Sin} \frac{2\pi}{l_\omega} (x - c_\omega t)$$

Здесь l_ω – длина волны, $a_\omega = 2\pi \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi)l_\omega}$ – безразмерный параметр затухания

волны по глубине, $c_\omega = c_2 \sqrt{1 - a_\omega^2}$ – скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну ω -волной.

Если в эксперименте удастся реализовать ω -волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(\mu^F + \chi^F)$ для поверхности данной среды:

$$(\mu^F + \chi^F) = (\mu + \chi) l_\omega \frac{\sqrt{c_2^2 - c_\omega^2}}{2\pi c_2} \quad (6.19)$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты ω -волны, вытекающие из соотношения (6.19), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (6.8). Длина волны ω -волны является единственной для выбранной среды:

$$l_\omega = \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi)} \frac{2\pi c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_\omega^2}}$$

Частота/период колебаний ω -волны:

$$\omega_\omega = \frac{2\pi}{l_\omega} c_\omega$$

Очевидно, что для ω -волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W -волны.

Итак, получены решения, описывающие четыре типа поверхностных волн, свойства которых обусловлены соответствующими четырьмя типами адгезионных взаимодействий на поверхности среды.

6.2. Модель «поврежденной» адгезии.

Модель «поврежденной» адгезии строится как частный случай модели дефектной среды в предположении, что градиентными слагаемыми в объемной и поверхностной плотностях потенциальной энергии можно пренебречь. Лагранжиан модели:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2C_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 \} dV - \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{m,n} + 2A_{ijmn}^{12} R_{i,j} D_{mn}^2 + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 \} dF \quad (6.20)$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) \delta R_{i,j} + (C_{ijmn}^{12} R_{i,j} + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dV - \\ - \iint \{ (A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) \delta R_{i,j} + (A_{ijmn}^{12} R_{i,j} + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dF = \\ = \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i - (C_{ijmn}^{12} R_{i,j} + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dV + \\ + \iint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j] \delta R_i - (A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) \delta R_{i,j} - \\ - (A_{ijmn}^{12} R_{i,j} + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dF = \\ = \iiint \{ (C_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + C_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2 + P_i^V) \delta R_i - (C_{ijmn}^{12} R_{i,j} + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dV + \\ + \iint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) n_j + (A_{ijmn}^{11} R_{m,nj} + A_{ijmn}^{12} D_{mn,j}^2)] \delta R_i - \\ - (A_{ijmn}^{12} R_{i,j} + A_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) \delta D_{mn}^2 \} dF - \sum \oint (A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2) v_j \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

В силу введенной гипотезы о пренебрежимости градиентных частей потенциальной энергии, уравнения равновесия для свободных дисторсий получились алгебраическими. Поэтому формулировка спектра краевых задач должна учитывать факт существования девяти алгебраических соотношений

между вариациями кинематических переменных. Из уравнений Эйлера для свободных дисторсий имеем:

$$(C_{ijmn}^{12} R_{i,j} + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2) = 0$$

Отсюда:

$$D_{ab}^2 = -C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12} R_{m,n} = -a_{abmn} R_{m,n}$$

$$C_{abij}^{-22} C_{ijmn}^{22} = \delta_{am} \delta_{bn}$$

Вариационное уравнение приобретает вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [(C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}) R_{m,nj} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}) n_j R_{m,n} + (A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn}) R_{m,nj}] \delta R_i + \\ & + (A_{mnij}^{12} - A_{abij}^{22} a_{abmn}) R_{m,n} \delta(a_{ijpq} R_{p,q}) \} dF - \sum \oint (A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn}) v_j R_{m,n} \delta R_i ds = \\ = & \iiint [(C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}) R_{m,nj} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \oint \{ [P_i^F - (C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}) n_j R_{m,n} + \\ & + (A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn} - (A_{mncd}^{12} - A_{abcd}^{22} a_{abmn}) a_{cdiq} \delta_{jq}^*) R_{m,nj}] \delta R_i + \\ & + (A_{mnij}^{12} - A_{abij}^{22} a_{abmn}) a_{ijpq} n_q R_{m,n} \delta(R_{p,k} n_k) \} dF - \\ & - \sum \oint (A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn} - A_{mnab}^{12} a_{abij} + A_{abcd}^{22} a_{abmn} a_{cdij}) v_j R_{m,n} \delta R_i ds = 0 \end{aligned}$$

Здесь так же, как и в алгебраической теории дефектных сред, объемные модули становятся поврежденными:

$$C_{ijmn} = (C_{ijmn}^{11} - C_{ijab}^{12} C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12})$$

Аналогично, адгезионные силы в классических статических граничных условиях также выражаются через поврежденные адгезионные модули:

$$\begin{aligned} A_{ijmn} &= A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn} - (A_{mncd}^{12} - A_{abcd}^{22} a_{abmn}) a_{cdiq} \delta_{jq}^* = \\ &= (A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn} - A_{mnab}^{12} a_{abij} + A_{abcd}^{22} a_{abmn} a_{cdij}) + [(A_{mncd}^{12} - A_{abcd}^{22} a_{abmn}) a_{cdiq} n_q] n_j \end{aligned}$$

Заметим, что формально адгезионные силы на ребрах поверхности выражаются через, в общем случае, иной тензор поврежденных адгезионных модулей:

$$\bar{A}_{ijmn} = A_{ijmn}^{11} - A_{ijab}^{12} a_{abmn} - A_{mnab}^{12} a_{abij} + A_{abcd}^{22} a_{abmn} a_{cdij}$$

Кроме того, в общем случае краевая задача содержит три дополнительных граничных условия (содержащих вариации нормальных производных от вектора перемещений $\delta(R_{p,k} n_k)$) в каждой неособенной точке поверхности.

Чтобы избежать переопределенности краевых задач, следует потребовать:

$$(A_{mnij}^{12} - A_{abij}^{22} a_{abmn}) a_{ijpq} n_q R_{m,n} \delta(R_{p,k} n_k) = 0 \Rightarrow (A_{mnij}^{12} - A_{abij}^{22} a_{abmn}) a_{ijpq} n_q = 0$$

Но левая часть этого равенства является множителем разности между поврежденными модулями адгезии на поверхности и ребрах. Поэтому условие согласованности краевых задач $(A_{mnij}^{12} - A_{abij}^{22} a_{abmn}) a_{ijpq} n_q = 0$ приводит к требованию равенства этих тензоров.

Окончательно, лагранжиан исследуемой модели приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV - \frac{1}{2} \oiint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF$$

Соответственно, вариационное уравнение исследуемой модели приобретает следующий окончательный вид:

$$\delta L = \iiint (C_{ijmn} R_{m,nj} + P_i^V) \delta R_i dV + \oiint (P_i^F - C_{ijmn} n_j R_{m,n} + A_{ijmn} R_{m,nj}) \delta R_i dF - \sum \oint A_{ijmn} v_j R_{m,n} \delta R_i ds = 0$$

Сформулирована модель «поврежденной» адгезии. Она представлена в виде распадающейся системы уравнений на перемещения и свободные дисторсии.

Краевая задача на перемещения является классической теорией упругости с тензором поврежденных модулей C_{ijmn} в объёме тела и тензором поврежденных модулей A_{ijmn} на поверхности и ребрах. Тензор C_{ijmn} содержит два классических модуля, тензор A_{ijmn} содержит три адгезионных модуля. Эти три адгезионных модуля могут быть определены из эксперимента непосредственно.

Свободные дисторсии (поля сохраняющихся дислокаций) определяются по стесненным дисторсиям из решения алгебраической системы. Для их определения должны быть экспериментально определены три дополнительных безразмерных модуля, входящих в состав тензора $a_{abmn} = C_{abcd}^{-22} C_{cdmn}^{12}$.

Сформулированная модель приводит к математическому обоснованию сокращения количества адгезионных модулей.

6.3. «Простейшая» когезионно-адгезионная модель.

Простейшая когезионно-адгезионная модель строится как частный случай модели дефектной среды Тупина (4.3.12). Лагранжиан модели:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijknml} R_{i,jk} R_{m,nl}\} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF \quad (6.21)$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L = & \\ = & \delta A - \iiint \{C_{ijmn} R_{m,n} \delta R_{i,j} + C_{ijknml} R_{m,nl} \delta R_{i,jk}\} dV - \iint A_{ijmn} R_{m,n} \delta R_{i,j} dF = \\ = & \delta A - \iiint \{(C_{ijmn} R_{m,n} - C_{ijknml} R_{m,nlk}) \delta R_{i,j}\} dV - \iint \{(A_{ijmn} R_{m,n} + C_{ijknml} n_k R_{m,nl}) \delta R_{i,j}\} dF = \\ = & \iiint (C_{ijmn} R_{m,nj} - C_{ijknml} R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ + & \iint \{[P_i^F - C_{ijmn} n_j R_{m,n} + C_{ijknml} n_j R_{m,nlk}] \delta R_i - \\ - & (A_{ijmn} R_{m,n} + C_{ijknml} n_k R_{m,nl}) \delta R_{i,p} (\delta_{pj}^* + n_p n_j)\} dF = \\ = & \iiint (C_{ijmn} R_{m,nj} - C_{ijknml} R_{m,nlkj} + P_i^V) \delta R_i dV + \\ + & \iint \{[P_i^F - C_{ijmn} n_j R_{m,n} + C_{ijknml} n_j R_{m,nlk} + (A_{ijmn} \delta_{pj}^* R_{m,n} + C_{ijknml} \delta_{pj}^* n_k R_{m,nl})_{,p}] \delta R_i - \\ - & (A_{ijmn} n_j R_{m,n} + C_{ijknml} n_j n_k R_{m,nl}) \delta (R_{i,p} n_p)\} dF + \\ - & \sum \oint (A_{ijmn} v_j R_{m,n} + C_{ijknml} v_j n_k R_{m,nl}) \delta R_i ds = 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Уравнения равновесия:

$$C_{ijmn} R_{m,nj} - C_{ijknml} R_{m,nlkj} + P_i^V = 0$$

Краевая задача в случае, если поверхность тела состоит из плоскостей, имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \iint \{[P_i^F - C_{ijmn} n_j R_{m,n} + A_{ijmn} \delta_{pj}^* R_{m,np} + (2C_{ipqmn} n_q - C_{ijknml} n_j n_k n_p) R_{m,nlp}] \delta R_i - \\ - (A_{ijmn} n_j R_{m,n} + C_{ijknml} n_j n_k R_{m,nl}) \delta (R_{i,p} n_p)\} dF = 0 \end{aligned}$$

Кроме того, появляется целый класс новых условий – условий непрерывности перемещений и менисковых сил при переходе через ребра кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей тело. Определим менисковые силы, через «статические» множители при вариации перемещений в контурных интегралах:

$$f_i = (A_{ijmn} v_j R_{m,n} + C_{ijknml} v_j n_k R_{m,nl})$$

Тогда на каждом ребре, образованном пересечением двух плоскостей, входящих в кусочно-гладкую поверхность, ограничивающую тело, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} R_i^1 = R_i^2 \\ f_i^1 = f_i^2 \end{cases}$$

При этих условиях:

$$\sum \oint (A_{ijmn} v_j R_{m,n} + C_{ijkml} v_j n_k R_{m,nl}) \delta R_i ds = \sum \oint f_i \delta R_i ds = 0$$

ГЛАВА 7 ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ДЕФЕКТНЫХ СРЕД.

7.1. К теории мелкодисперсных композитов, армированных микрочастицами (эффект Мивы).

Задача определения свойств эффективных механических свойств мелкодисперсного композита исследована в рамках «простейшей» теории когезионного поля (5.2.4). Сформулируем её биплоскую 1D-постановку. Рассмотрим периодическую структуру, с постоянным поперечным сечением F , состоящую из N фрагментов матрицы и армирующего материала с модулями Юнга $E_{M,D}$, «моментными» модулями $C_{M,D}$ и длинами $\rho_{M,D}$. Биплоская постановка, по аналогии с плоской, постулирует, что векторы нагрузки P_i и перемещений R_i коллинеарны орту X_i .

$$R_i = rX_i \quad (7.1)$$

Соответственно, 1D-постановка постулирует, что единственная компонента r искомого вектора перемещений является функцией только одной (осевой) координаты $r = r(x)$. В рамках этой постановки, лагранжиан (5.2.4) после внутреннего интегрирования по площади поперечного сечения F , выделенного из композита составного стержня, приобретает вид:

$$L = (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[r' r' + \frac{E}{C} r'' r'' \right] dx \quad (7.2)$$

Установим аналитическую связь между эффективной жесткостью этого композитного материала и механическими параметрами его фаз.

7.1.1. Аналитическая оценка модулей упругости мелкодисперсного композита.

Вариационное уравнение, соответствующее требованию стационарности лагранжиана (7.2) «простейшей» теории когезионного поля, имеет вид:

$$\int_0^l EF(r'' - \frac{E}{C} r''''') \delta r dx - EF \frac{E}{C} \ddot{r} \delta \dot{r} \Big|_{x=0}^{x=l} + [P - EF(r' - \frac{E}{C} \dot{r}) \delta r] \Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \quad (7.3)$$

Общее решение для каждой фазы характерного фрагмента композита:

$$\begin{cases} r_D(x) = C_{1D}x + C_{2D}sh(a_Dx) \\ r_M(x) = C_{0M} + C_{1M}(x - (\rho_D/2 + \rho_M/2)) + C_{2M}sh(a_M(x - (\rho_D/2 + \rho_M/2))) \end{cases}$$

$$\text{Здесь } a_M = \sqrt{\frac{C_M}{E_M}} \quad a_D = \sqrt{\frac{C_D}{E_D}}.$$

Формулировка краевой задачи.

На границе контакта фаз, в соответствии с (7.3), перемещения равны, нормальные производные перемещений равны, классические напряжения (статические множители при вариации перемещения δr) равны, и моментные напряжения (статические множители при вариации нормальной производной $\delta \dot{r}$) равны.

$$\begin{aligned} r_D(\rho_D/2) &= r_M(\rho_D/2) \\ r'_D(\rho_D/2) &= r'_M(\rho_D/2) \\ E_D F[r'_D(\rho_D/2) - \frac{1}{a_D^2} r'''_D(\rho_D/2)] &= E_M F[r'_M(\rho_D/2) - \frac{1}{a_M^2} r'''_M(\rho_D/2)] \\ E_D F \frac{1}{a_D^2} r''_D(\rho_D/2) &= E_M F \frac{1}{a_M^2} r''_M(\rho_D/2) \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям сформулированной контактной краевой задачи, можно получить точное решение для двухфазного фрагмента.

$$\begin{cases} r_D(x) = \frac{P}{E_D F} \left\{ x + x_f \frac{sh(a_D x)}{sh(a_D \rho_D / 2)} \right\} \\ r_M(x) = \frac{P}{2F} \left(\frac{\rho_M}{E_M} + \frac{\rho_D}{E_D} \right) - \frac{P}{F} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D} \right) x_f + \\ + \frac{P}{E_M F} (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)) - \frac{P}{E_M F} x_f \frac{sh(a_M (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)))}{sh(a_M \rho_M / 2)} \end{cases}$$

Здесь введено обозначение:

$$x_f = \frac{\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D} \right)}{\left[\frac{a_D}{E_D th(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M th(a_M \rho_M / 2)} \right]}$$

Зная решение для составного фрагмента, можно получить выражение для его потенциальной энергии. Пользуясь свойством аддитивности, можно вычислить энергию деформации композитного материала, рассматривая периодическую структуру, в которой периодическим элементом является двухфазный фрагмент. Приравнявая потенциальную энергию композита к потенциальной энергии деформации эквивалентной однородной среды, можно найти эффективный модуль Юнга эквивалентного материала:

$$E_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{E^M} \frac{l_M}{(l_M + l_D)} + \frac{1}{E^D} \frac{l_D}{(l_M + l_D)} - \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D} \right) \frac{2Nx_f}{(l_M + l_D)} \right]} \quad (7.4)$$

$$x_f = \frac{\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D} \right)}{\left[\frac{a_D}{E_D th(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M th(a_M \rho_M / 2)} \right]} \quad (7.5)$$

Параметр N определяет количество включений армирующего материала, E_0 - эффективный модуль Юнга композита, f - относительная объемная доля включений, $l_D = \rho_D N$ - абсолютная объемная доля включений; ρ_D - характерный диаметр отдельного включения, $l_M = \rho_M N$ - абсолютная объемная доля матрицы, x_f - особый параметр, связанный с объемной долей межфазного слоя, являющийся функцией параметров a_M и a_D , которые определяют длину когезионных взаимодействий в матрице и включении соответственно.

Пусть размеры фрагментов матрицы и включений значительно превышают длину соответствующих когезионных зон. Этот случай соответствует малой концентрации $a_M \rho_M / 2 > 3$ больших $a_D \rho_D / 2 > 3$ включений. В этом случае параметр межфазного слоя определяется вместо формулы (7.5) с помощью следующего простого выражения:

$$x_f = \frac{(E^D - E^M)}{(E^D a_M + E^M a_D)} \quad (7.6)$$

Эффективный модуль композита может быть определен с помощью следующей формулы, вытекающей из (7.4):

$$E_0 = \frac{E^M}{\left[1 - \frac{(E^D - E^M)}{E^D} f \left(1 + \frac{2x_f}{\rho_D} \right) \right]} \quad (7.7)$$

Эффективный модуль материала определяется с помощью только одного комбинированного независимого параметра x_f . Этот параметр в приближении (7.6) не зависит от объемной доли включений и размера армирующих частиц и является функцией только характерных длин когезионных взаимодействий в матрице и включении. В этом случае, формулы (7.6) и (7.7) дают микромеханическое описание композитов с малой объемной долей включений.

Пусть $a_M \rho_M / 2 > 3$ и $a_D \rho_D / 2 < 3$. Этот случай соответствует малой $a_M \rho_M / 2 > 3$ концентрации малых $a_D \rho_D / 2 < 3$ включений. Его уже следует относить к наномеханическому описанию композитов, с малой объемной долей включений.

$$x_f = \frac{(E^D - E^M)}{\left[E^D a_M + E^M \frac{a_D}{E_D \text{th}(a_D \rho_D / 2)} \right]}$$

В этом приближении параметр межфазного слоя x_f зависит только от размера армирующих частиц ρ_D .

Пусть $a_M \rho_M / 2 < 3$ и $a_D \rho_D / 2 > 3$. Этот случай соответствует большой $a_M \rho_M / 2 < 3$ концентрации больших $a_D \rho_D / 2 > 3$ включений. Его так же

можно отнести к микромеханическому описанию композитов, но с большой объемной долей включений.

$$x_f = \frac{(E^D - E^M)}{[E^D \frac{a_M}{th(a_M \rho_M / 2)} + E^M a_D]}$$

В этом приближении параметр межфазного слоя x_f зависит от относительной объемной доли и размера включений $\rho_M = \rho_D(1-f)/f$.

Пусть $a_M \rho_M / 2 < 3$ и $a_D \rho_D / 2 < 3$. Этот случай соответствует большой $a_M \rho_M / 2 < 3$ концентрации малых $a_D \rho_D / 2 < 3$ включений. Его уже не удастся упростить и выражения (7.4) и (7.5) соответствуют наномеханическому описанию материала при большой концентрации малых включений.

7.1.2. Задача идентификации.

Рассмотрим задачу определения параметров математической модели на основе формулы (7.5). С математической точки зрения, задача определения параметров такой модели, как соответствие теоретических и экспериментальных данных, является обратной. Она формулируется как оптимизационная задача: нахождение набора параметров для минимизирования значения штрафной функции. Параметры модели α могут быть определены из требования минимума штрафной функции Φ : $\min_{\alpha \in [0, \infty]} \Phi(\alpha)$. В общем случае наномеханического описания набор параметров модели α определяется величинами: a_M и a_D . При этом считаются известными классические характеристики материалов фаз композитного материала l_M, E_M, l_D, E_D и число армирующих частиц N . В частности, для микромеханического описания не трудно показать, что набор параметров a сводится к одному параметру x_f (7.6), (7.7). Длина x_f для межфазного слоя должна быть неизвестным постоянным параметром

математической модели.

Считаем, что имеется набор экспериментальных точек K с координатами $(E^e, f^e, R^e)_1, (E^e, f^e, R^e)_2, \dots, (E^e, f^e, R^e)_K$, где $l_D^0 = 2R$ - характерный диаметр армирующей фазы. Задача нахождения параметров математической модели может быть сформулирована так: найти такой набор параметров α математической модели, чтобы расстояние между наборами экспериментальных $(E^e, f^e, R^e)_K, K = 1, 2, \dots$ и теоретических точек $(E^t, f^e, R^e)_1, (E^t, f^e, R^e)_2, \dots$ было минимальным. Расстояние между наборами экспериментальных и теоретических точек определяется экстремумом функции $\Phi = \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} [E_i^t - E_i^e]^2$. Для решения задачи идентификации (задача ассимиляции данных) использовались экспериментальные данные из работы [43]. Графические данные из работы [43] были обработаны и представлены в числовой форме. Параметры математической модели были определены для двух типов композитных материалов: первый - композитный материал на основе эпоксидной смолы с армированием стеклянной дробью: $E_M = 3,41 GPa$, $E_D = 87,5 GPa$; второй - композитный материал на основе ненасыщенного полиэстера с армированием стеклянной дробью: $E_M = 4,29 GPa$, $E_D = 87,5 GPa$. График экспериментальных данных для двух типов композитных материалов представлен рис.1 (а и б). Для композита на основе эпоксидной смолы графики соответствуют следующим диаметрам включений: $R^e = 138,50 \mu m$, $R^e = 89,40 \mu m$, $R^e = 62,30 \mu m$, $R^e = 31,90 \mu m$, $R^e = 28,50 \mu m$. Для композита на основе ненасыщенного полиэстера смолы графики соответствуют следующим диаметрам включений: $R^e = 138,50 \mu m$, $R^e = 89,40 \mu m$, $R^e = 76,40 \mu m$, $R^e = 62,30 \mu m$, $R^e = 31,90 \mu m$, $R^e = 28,50 \mu m$. Численно был найден минимум функции Φ с использованием метода сопряженных градиентов [44]. Для двух типов композитных материалов были определены параметры a_M и a_D (при наномеханическом подходе), и x_f (при микромеханическом подходе). Были

получены следующие значения параметров модели для наномеханического описания: $a_D = 3,51 \times 10^{-2} \mu m^{-1}$, $a_M = 1,0 \times 10^{-3} \mu m^{-1}$ для композитного материала на основе эпоксидной смолы и (7.2) $a_D = 2,19 \times 10^{-1} \mu m^{-1}$, $a_M = 2,77 \times 10^{-3} \mu m^{-1}$ для композитного материала на основе ненасыщенного полиэстера. Также для микромеханического описания были найдены точные значения параметра x_f : $x_f = 27,63 \mu m$ для композитного материала на основе эпоксидной смолы и $x_f = 37,06 \mu m$ для композитного материала на основе ненасыщенного полиэстера. Определив значения параметров модели для двух типов композитного материала, можно получить теоретические зависимости для модулей упругости. Теоретические значения эффективных модулей Юнга композитов как функции объемных долей включений для разных значений диаметров включений построены на рис.2 и 3. Линии, соответствующие точному наномеханическому описанию отображены штриховыми. Для сравнения на рис. 2 и 3 приведены зависимости, отображающие микромеханическое описание (сплошные линии). Эти зависимости справедливы только для малых значений объемных долей включений. В дополнение, на рис. 2 и 3 приведены экспериментальные данные, отмеченные звездочками.

Рассмотрение результатов

В соответствие с полученными результатами, представленными на рис. 2 и 3, можно сделать следующие выводы. Теоретические результаты, полученные в рамках общей модели и вычисленные по формулам (7.5) и (7.6) схожи с экспериментальными данными на всем рассмотренном промежутке значений объемных долей и размеров включений. Это утверждение справедливо для обоих типов рассмотренных композитных материалов. В частном случае общей модели микромеханическое описание можно получить, пользуясь зависимостями (7.6) и (7.7). Полученная в этом случае зависимость дает точные результаты для малых значений объемных долей включений. Зависимости (7.4) и (7.5) получены на основе точного аналитического

решения в рамках приближенной модели «простейшей» теории когезионных взаимодействий.

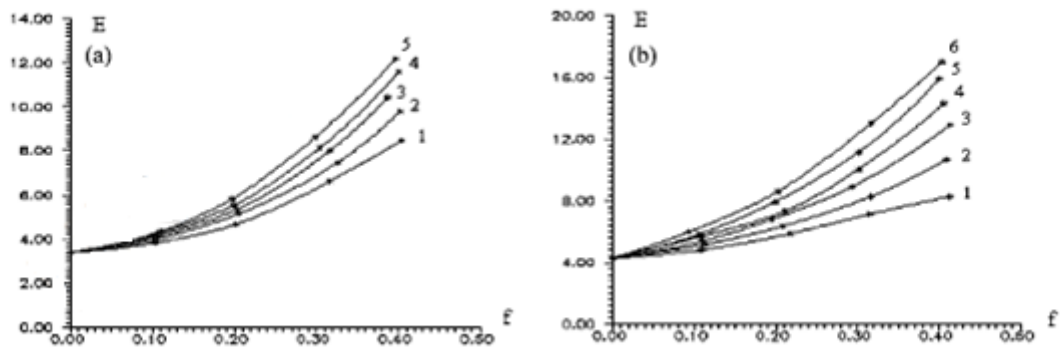


Рис.1. Экспериментальные данные. Модуль Юнга (ГПа) как функция объемной доли включений f : (а) эпоксидная смола ($1. R^e = 138,50 \mu m$; $2. R^e = 89,40 \mu m$; $3. R^e = 62,30 \mu m$; $4. R^e = 31,90 \mu m$; $5. R^e = 28,50 \mu m$.); (б) ненасыщенный полиэстер ($1. R^e = 138,50 \mu m$; $2. R^e = 89,40 \mu m$; $3. R^e = 76,40 \mu m$; $4. R^e = 62,30 \mu m$; $5. R^e = 31,90 \mu m$; $6. R^e = 28,50 \mu m$.)

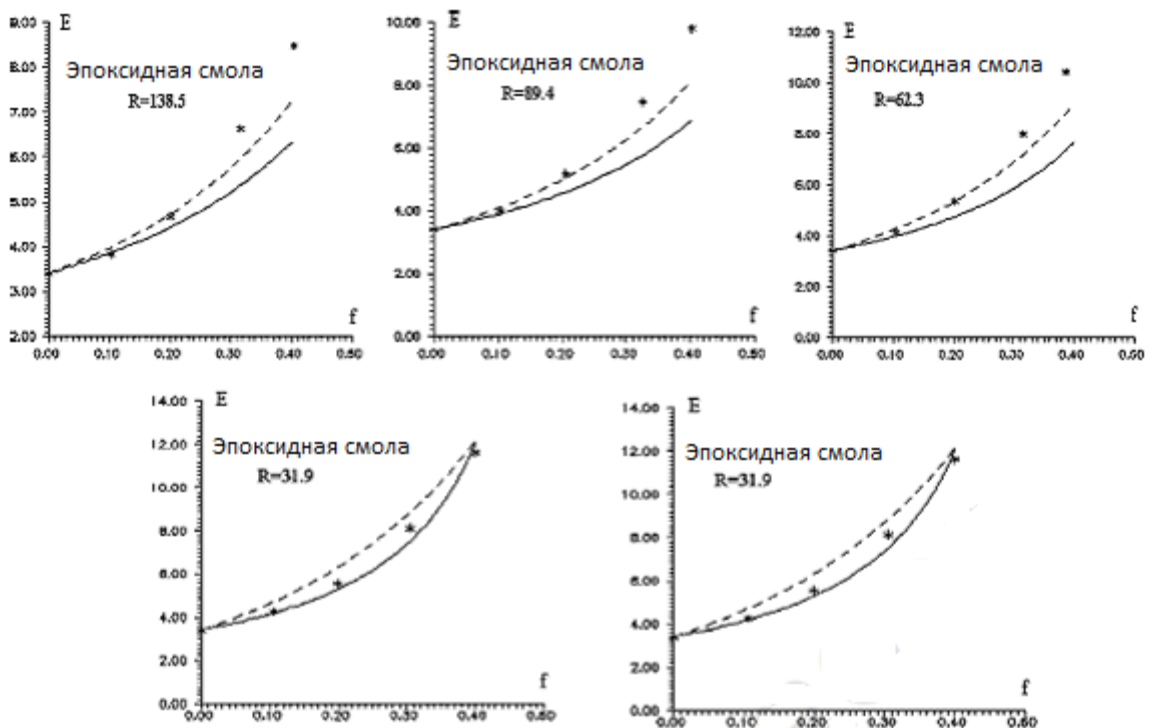


Рис.2. Модуль Юнга (ГПа) эпоксидной смолы армированной частицами стекла как функция объемной доли f .

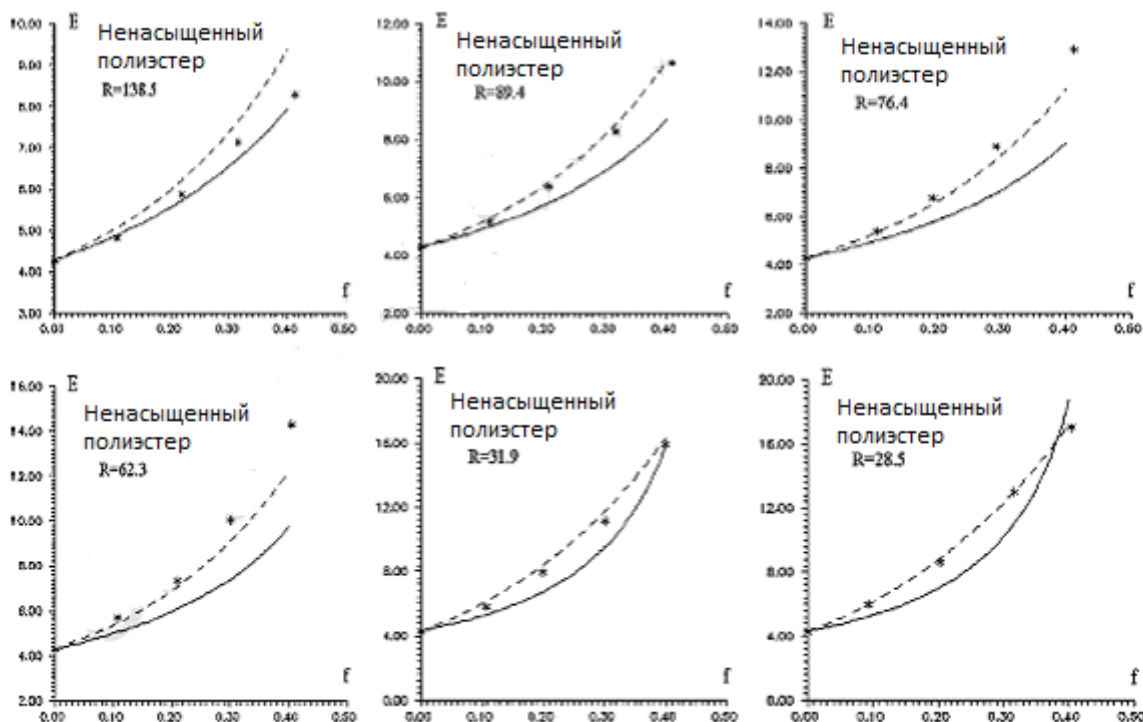


Рис.3. Модуль Юнга (ГПа) ненасыщенного полиэстера армированной частицами стекла как функция объемной доли f .

Преимущество такого простого решения в том, что оно представлено в аналитическом виде и допускает дальнейший параметрический анализ. Очевидно, что такой подход дает возможность сделать не точную, а приблизительную оценку эффективных характеристик в рамках точной трехмерной модели. Тем не менее, из графиков на рис. 2 и 3 видно, что эта оценка достаточно точна. С одной стороны зависимости (7.4) и (7.5) получены в рамках биплоской 1D-постановки, но с другой стороны они представляют аналитическое решение и, следовательно, эти зависимости верны на всем промежутке значений объемных долей включений. Учитывая полученные результаты, следует отметить, что решение задачи идентификации позволяет получить значения параметров модели a_M и a_D . Установлено, что $a_M < a_D$ для обоих типов связующих. Учитывая, что параметры a_M^{-1} и a_D^{-1} имеют размерность длины и определяют характерные длины когезионных взаимодействий в матрице и включении, можно увидеть, что полученные значения этих параметров согласовываются с физическим

смыслом межфазного слоя. Межфазный слой возникает в каждой фазе на границе контакта, причем глубина межфазного слоя в матрице (фазе с меньшей жесткостью) больше, по сравнению с глубиной межфазного слоя включения (фазе с большей жесткостью).

7.1.3. Математическое обоснование гипотез осреднения.

Рассмотрим качественные свойства неклассической модели мелкодисперсных композитов (7.4). Для малого количества достаточно больших включений задача определения эффективных параметров композита решена в работах [45], [46]. Однако, чтобы учесть как конечную величину концентрации, так и масштабные эффекты, приходится пользоваться одним из полуэмпирических методов, разработанных для этой цели [47-50].

Публикации, посвященные изучению эффективных характеристик композитов, можно условно разделить на четыре группы: метод эффективных включений, метод эффективной матрицы, метод эффективного континуума и метод третьей фазы. Каждый из этих методов строится на соответствующей гипотезе. Продемонстрируем, что представленная в этой работе модель мелкодисперсного композита включает в себя все эти методы осреднения в качестве строгих следствий.

Рассмотрим классическое выражение эффективного модуля E_0 для двухфазного композита, представленное формулой осреднения по Рейссу.

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{l_M}{E^M} + \frac{l_D}{E^D}$$

Как не трудно убедиться, это классическое выражение определяет эффективный модуль композита как функцию трех параметров $E_0 = E_0(E^M, E^D, f)$, где $f = l_D / (l_M + l_D) = \rho_D / (\rho_M + \rho_D)$ - относительная объемная доля включений. При этом классическая формула осреднения по Рейссу не дает зависимости эффективного модуля от размера армирующих

частиц, т.е. исключает возможность описания масштабных эффектов, что не соответствует экспериментальным данным. Именно это обстоятельство толкало исследователей на неклассические модификации этого соотношения с помощью соответствующих гипотез для объяснения результатов таких экспериментов. Алгоритм модификации в первых трех методах заключается в том, что один из трех параметров в формуле Рейсса заменялся на соответствующий эффективный.

7.1.3.1. Математическое обоснование гипотезы эффективного включения.

Формулировка гипотезы эффективного включения: «В мелкодисперсном композите включение меняет свои механические свойства, и вместо E^D имеет модуль E_*^D ».

В соответствии с этой гипотезой, эффективный модуль композита может быть определен по формуле:

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{l_M}{E^M} + \frac{l_D}{E_*^D} \quad (7.8)$$

Естественно, что это соотношение противоречит решению классической теории упругости – формуле Рейсса, и является эмпирической формулой. В то же время неклассическое решение «простейшей» теории когезионных взаимодействий (7.4) может быть представлено в форме (7.8) точно. Эффективный модуль включений E_*^D в соответствии с (7.4) можно определить по формуле:

$$\frac{1}{E_*^D} = \frac{1}{E^D} - \left(\frac{1}{E^M} - \frac{1}{E^D} \right) \frac{2x_f}{\rho_D}$$

Отсюда видно, что в отсутствие когезионных взаимодействий $x_f \rightarrow 0$, имеет место классический предел – формула Рейсса. При наличии когезионных взаимодействий $x_f \neq 0$ имеет место масштабный эффект усиления

композита. Причем этот эффект явно зависит от размера армирующих частиц ρ_D . Он в данном случае трактуется как увеличение модуля включения за счет межфазного слоя. Таким образом, неклассическое решение (7.4) может быть представлено в форме (7.8) и является математическим обоснованием гипотезы эффективного включения.

7.1.3.2. Математическое обоснование гипотезы эффективной матрицы.

Формулировка гипотезы эффективной матрицы: «В мелкодисперсном композите матрица меняет свои механические свойства, и вместо E^M имеет модуль E_*^M ».

В соответствии с этой гипотезой, эффективный модуль композита может быть определен по формуле:

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{l_M}{E_*^M} + \frac{l_D}{E^D} \quad (7.9)$$

И это соотношение противоречит решению классической теории упругости – формуле Рейсса, и является эмпирической формулой. В то же время неклассическое решение «простейшей» теории когезионных взаимодействий (7.4) так же, как и в предыдущем случае, может быть представлено в форме (7.9) точно. Для этого эффективный модуль матрицы E_*^M в соответствии с (7.4) следует определить по формуле:

$$\frac{1}{E_*^M} = \frac{1}{E^M} - \left(\frac{1}{E^M} - \frac{1}{E^D} \right) \frac{2x_f}{\rho_M}$$

Отсюда видно, что в отсутствие когезионных взаимодействий $x_f \rightarrow 0$, имеет место классический предел – формула Рейсса. При наличии когезионных взаимодействий $x_f \neq 0$ имеет место масштабный эффект усиления композита.

Причем этот эффект явно зависит от размера армирующих частиц $\rho_M = \rho_D(1-f)/f$. Он в данном случае трактуется как увеличение модуля

матрицы за счет межфазного слоя. Таким образом, неклассическое решение (7.4) может быть представлено в форме (7.9) и является математическим обоснованием гипотезы эффективной матрицы.

7.1.3.3. Математическое обоснование гипотезы эквивалентного континуума.

Формулировка гипотезы эквивалентного континуума: «Мелкодисперсный композит, состоящий из матрицы и включения с относительной объемной долей f имеет механические свойства такие, как будто вместо f имеет другую относительную объемную долю f_* ».

В соответствии с этой гипотезой, эффективный модуль композита может быть определен по формуле:

$$\frac{1}{E_0} = \frac{(1 - f_*)}{E^M} + \frac{f_*}{E^D} \quad (7.10)$$

Это соотношение также противоречит решению классической теории упругости – формуле Рейсса, и является эмпирической формулой. В то же время неклассическое решение «простейшей» теории когезионных взаимодействий (7.4) может и здесь быть представлено в форме (7.10) точно. Для этого эффективную объемную долю f_* в соответствии с (7.4), следует представить в виде:

$$f_* = f(1 + 2x_f / \rho_D)$$

Отсюда видно, что в отсутствие когезионных взаимодействий $x_f \rightarrow 0$, имеет место классический предел – формула Рейсса. При наличии когезионных взаимодействий $x_f \neq 0$ имеет место масштабный эффект усиления композита. Причем этот эффект явно зависит от размера армирующих частиц ρ_D . Он в данном случае трактуется как увеличение относительной объемной доли включения за счет межфазного слоя. Таким образом, неклассическое

решение (7.4) может быть представлено в форме (7.10) и является математическим обоснованием гипотезы эквивалентного континуума.

7.1.3.4. Математическое обоснование гипотезы трех фаз.

Формулировка гипотезы трех фаз: «В мелкодисперсном двухфазном композите на границе контакта матрицы и включения образуется за счет объемной доли исходных фаз третий (межфазный) слой со своими специфическими параметрами: абсолютной объемной долей l_f и модулем E_f ».

В соответствии с этой гипотезой, эффективный модуль композита может быть определен по формуле:

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{l_M^*}{E^M} + \frac{l_D^*}{E^D} + \frac{l_f}{E_f} \quad (7.11)$$

Здесь $l_M^*, E^M, l_D^*, E^D, l_f, E_f$ - абсолютная объемная доля и модуль каждой из трех фаз. Как и первые три формулировки гипотез осреднения, это соотношение также противоречит решению классической теории упругости – формуле Рейсса, и является эмпирической формулой. При этом гипотеза (7.11) вводит уже не один (как предыдущие гипотезы), а четыре эмпирических параметра (с учетом связи $l_M^* + l_D^* + l_f = l_M + l_D$ - три). Тем не менее, неклассическое решение «простейшей» теории когезионных взаимодействий (7.4) может быть представлено и в форме (7.11). Для этого преобразуем соотношение (7.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{l_M + l_D}{E_0} &= \frac{1}{E^M} \left[l_M - \frac{1}{E^M} \frac{2N}{\left[\frac{a_D}{E^D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E^M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)} \right]} \right] + \\
&+ \frac{1}{E^D} \left[l_D - \frac{1}{E^D} \frac{2N}{\left[\frac{a_D}{E^D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E^M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)} \right]} \right] + \\
&+ 2 \frac{1}{E^M} \frac{1}{E^D} \frac{2N}{\left[\frac{a_D}{E^D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E^M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)} \right]}
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases}
x_{fM} = \frac{1}{E^M} \frac{1}{\left[\frac{a_D}{E^D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E^M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)} \right]} = x_f \frac{E^D}{(E^D - E^M)} \\
x_{fD} = \frac{1}{E^D} \frac{1}{\left[\frac{a_D}{E^D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E^M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)} \right]} = x_f \frac{E^M}{(E^D - E^M)}
\end{cases}$$

Эти параметры имеют физический смысл абсолютной объемной доли части межфазного слоя, расположенного в матрице и в изолированном включении соответственно. Решение (7.4) приобретет вид:

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{(l_M - 2Nx_{fM})}{E^M} + \frac{(l_D - 2Nx_{fD})}{E^D} + \frac{1}{\frac{E^M E^D (x_{fM} + x_{fD})}{(x_{fM} E^M + x_{fD} E^D)}} 2N(x_{fM} + x_{fD})$$

Введем определение модуля Юнга межфазного слоя E_f :

$$E_f = \frac{E^M E^D (x_{fM} + x_{fD})}{(x_{fM} E^M + x_{fD} E^D)} = \frac{E^M E^D \left(\frac{1}{E^M} + \frac{1}{E^D} \right)}{\left(\frac{1}{E^M} E^M + \frac{1}{E^D} E^D \right)} = \frac{(E^D + E^M)}{2}$$

Тогда неклассическое решение (7.4) можно представить строго в форме (7.11). Свойства фаз определяются модулями E^M , E^D и $E_f = (E^D + E^M)/2$ и, соответственно, их абсолютными объемными долями: $l_M^* = l_M - 2Nx_f E^D / (E^D - E^M)$, $l_D^* = l_D - 2Nx_f E^M / (E^D - E^M)$ и $l_f = 2Nx_f (E^D + E^M) / (E^D - E^M)$. Обратим внимание на то, что суммарный абсолютный объем не изменился и по-прежнему равен сумме объемных долей исходных двух фаз:

$$l_M^* + l_D^* + l_f = (l_M - 2Nx_{fM}) + (l_D - 2Nx_{fD}) + 2N(x_{fM} + x_{fD}) = l_M + l_D$$

Кроме того, три эмпирических параметра формулировки гипотезы трех фаз l_M^* , l_D^* и l_f выражаются через единственный неклассический параметр x_f , а четвертый E_f - через классические параметры композита E^D, E^M .

Таким образом, и формулировка гипотезы трех фаз является строгим следствием аналитического решения (7.4) приближенной постановки «простейшей» теории когезионных взаимодействий.

7.1.4. Модель мелкодисперсного композита как классической неоднородной структуры..

Преобразуем лагранжиан (7.2) исходной постановки к виду, соответствующему лагранжиану классической неоднородной среды:

$$\begin{aligned} L &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\left(r' - \frac{E}{C} r''' \right) r' + \frac{E}{C} r''' r' + \frac{E}{C} r'' r'' \right] dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2} \int_0^l EF \left[\left(r' - \frac{E}{C} r''' \right) r' + \frac{E}{C} (r'' r')' \right] dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2} \int_0^l E \left(r' - \frac{E}{C} r''' \right) r' dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2} \int_0^l E \left(1 - \frac{E}{C} r''' / r' \right) r' r' dx = \\ &= (P_i X_i) r \Big|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2} \int_0^l \tilde{E} r' r' dx \end{aligned}$$

Здесь введен переменный по координатам непрерывный модуль Юнга:

$$\tilde{E}(x) = \begin{cases} E_D \frac{1}{[1 + x_f \frac{a_D \operatorname{ch}(a_D x)}{\operatorname{sh}(a_D \rho_D / 2)}]} & \text{внутри включения} \\ E_D E_M \frac{[\frac{a_D}{E_D \operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{E_M \operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}]}{[\frac{a_D}{\operatorname{th}(a_D \rho_D / 2)} + \frac{a_M}{\operatorname{th}(a_M \rho_M / 2)}]} & \text{на границе контакта} \\ E_M \frac{1}{[1 - x_f \frac{a_M \operatorname{ch}(a_M (x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)))}{\operatorname{sh}(a_M \rho_M / 2)}]} & \text{внутри матрицы} \end{cases}$$

Здесь учтено соотношение между x_f и классическими и неклассическими параметрами фаз.

Заключение.

Используя аналитическое решение (7.4) приближенной постановки «простейшей» теории когезионных взаимодействий, получена модель мелкодисперсных композитов, учитывающая масштабный эффект. Выведена зависимость эффективной жесткости для композитных материалов от классических и неклассических параметров фаз. Она показывает, что теоретические результаты сходятся с экспериментальными данными и могут быть использованы для прогнозирования поведения композита для большого диапазона концентраций и диаметров включений. Модель позволяет прогнозировать свойства мелкодисперсных композитов как для случаев малой, так и большой концентрации, для произвольного соотношения между жесткостями фаз, для большого интервала размеров включений (неклассическое поведение). Все результаты получены в рамках единого подхода, без привлечения дополнительных гипотез. Используя эту теорию, можно определить как геометрические, так и механические параметры межфазного слоя в мелкодисперсных композитах. Причем, параметры межфазного слоя полностью определяются классическими и неклассическими параметрами фаз.

Проведено сравнение результатов теоретического расчета (7.4)-(7.5) с результатами эксперимента, который описывает свойства композитного материала с фиксированными механическими свойствами фаз, но варьируемыми объемными долями включений и варьируемыми размерами включений. В работе [43] подобные данные представлены для двух типов композитов усиленных стеклянными частицами с двумя типами матриц - эпоксидной смолой и ненасыщенным полиэфиром. Найдя параметры a_M и a_D в результате обработки экспериментальных данных (обратная задача), можно вывести теоретическую зависимость для эффективных характеристик композита от параметров фаз. Модель адекватно описывает поведение рассматриваемого композитного материала, а полученные теоретические зависимости хорошо соотносятся с данными экспериментов для всего спектра изменений объемных долей и размеров включений. Таким образом, теоретические зависимости могут быть использованы для прогнозирования свойств композитных материалов с известными характеристиками матрицы и включений, если объемная доля и размер включений изменены [51].

Кроме того, выражения (7.4) и (7.5) позволяют рассматривать частные случаи при разных соотношениях размеров включений, их объемной долей и соответствующими длинами когезионных зон.

Неклассическая модель мелкодисперсных композитов позволяет развить теорию межфазного слоя как естественное, математически обоснованное, развитие гипотезы третьей фазы. Установлено, что межфазный слой имеет физический смысл области в окрестности границы контакта фаз, в которой когезионные взаимодействия имеют существенное значение. Принципиально новый, качественный результат, заключается в том, что межфазный слой не имеет фиксированных геометрических размеров и экспоненциально затухает по мере удаления от границы контакта фаз. Одновременно с этим установлены геометрические параметры, характеризующие межфазный слой. Они выражаются через неклассические модули фаз C_M и C_D . Это, в первую

очередь, характерные длины когезионных взаимодействий в фазах a_M^{-1} и a_D^{-1} . Другой парой геометрических параметров могут служить абсолютные объемные доли межфазного слоя в фазах x_{fM} и x_{fD} . Они определяют суммарную объемную долю межфазного слоя $l_f = 2N(x_{fM} + x_{fD})$. Еще одним новым геометрическим параметром может служить параметр $2Nx_f$ - «обменная объемная доля». Его физический смысл вытекает из соотношения (7.4), переписанного в форме:

$$\frac{(l_M + l_D)}{E_0} = \frac{(l_M - 2Nx_f)}{E^M} + \frac{(l_D + 2Nx_f)}{E^D}$$

Из этого соотношения следует, что объемная доля матрицы уменьшается, а объемная доля включений увеличивается на одну и ту же величину $2Nx_f$ - матрица и включения «обмениваются» этой объемной долей. Следует обратить внимание на то, что «обменная объемная доля» $2Nx_f$ и объемная доля межфазного слоя $l_f = 2N(x_{fM} + x_{fD})$ не эквиваленты друг другу, а связаны соотношением:

$$l_f = 2Nx_f \frac{(E^D + E^M)}{(E^D - E^M)}$$

7.2. К теории нанокompозитов, армированных SWNT (эффекты Одегарда).

7.2.1. Эффект Одегарда на коротких волокнах.

Рассмотрим ячейку периодичности мелкодисперсного композита, армированного нановолокнами в рамках «простейшей» теории когезионного поля [52]. Будем использовать 2D постановку биплоской задачи для лагранжиана L , в которой поле перемещений R_i имеет только одну компоненту R . Причем R - функция двух координат x, y . Лагранжиан (5.2.4) в отсутствие адгезии для биплоской 2D-постановки имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left\{ E \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + G \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{1}{C^V} \left(E \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x} + G \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (7.12)$$

Искомое решение строится методом Власова, распределение перемещений выбирается в виде $R(x, y) = xr(y)$. Тогда лагранжиан (7.12) может быть преобразован к виду:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left\{ E r r' + G x^2 r' r' + \frac{G^2}{C^V} x^2 r'' r'' \right\} dx dy$$

После внутреннего интегрирования по координате x лагранжиан принимает вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \int_0^{h_D+h_M} \left\{ E l r r' + \frac{G l^3}{12} r' r' + \frac{G^2 l^3}{C^V 12} r'' r'' \right\} dy \quad (7.13)$$

Вариационное уравнение получено в соответствии с принципом Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta L = l \int_0^{h_D+h_M} \left\{ p - E r + G \frac{l^2}{12} r'' - \frac{G^2 l^2}{C^V 12} r'''' \right\} \delta r dy - \\ - l \left\{ \left(G \frac{l^2}{12} \frac{G}{C^V} r'' \right) \delta r' + \left(G \frac{l^2}{12} r' - \frac{G^2 l^2}{C^V 12} r'''' \right) \delta r \right\} \Big|_{y=h_D} = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Вариационное уравнение определяет соответствующие уравнения равновесия и весь спектр граничных условий. Уравнения равновесия

являются неоднородными дифференциальными уравнениями четвертого порядка для каждой из фаз:

$$\frac{G^2}{C^V} \frac{l^2}{12} r'''' - G \frac{l^2}{12} r'' + Er = p \quad (7.15)$$

Внеинтегральные члены вариационного уравнения определяют граничные условия на осях симметрии волокна и матрицы, а так же условия контакта для волокна и для матрицы. Таким образом, формулировка граничных условий будет следующей:

$$\begin{aligned} r'_D(0) &= 0 \\ r'_D(0) - \frac{G_D}{C_D} r''_D(0) &= 0 \\ \begin{cases} r_D(h_D) = r_M(h_D) \\ G_D r'_D(h_D) = G_M r'_M(h_D) \\ r'_D(h_D) - \frac{G_D}{C_D} r''_D(h_D) = r'_M(h_D) - \frac{G_M}{C_M} r''_M(h_D) \\ \frac{G_D^2}{C_D} r''_D(h_D) = \frac{G_M^2}{C_M} r''_M(h_D) \end{cases} & \quad (7.16) \\ r'_M(h_D + h_M) &= 0 \\ r'_M(h_D + h_M) - \frac{G_M}{C_M} r''_M(h_D + h_M) &= 0 \end{aligned}$$

Характеристические уравнения для рассматриваемой задачи будут выглядеть следующим образом:

$$\left[\frac{G}{C^V} k^4 - k^2 + \frac{12E}{l^2 G} \right]_{D,M} = 0 \quad (7.17)$$

Корни характеристических уравнений имеют вид:

$$k_{1,2,3,4D,M} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 48 \frac{E}{C^V l^2}}}{2 \frac{G}{C^V}}} \quad (7.18)$$

Обратим внимание на то, что первая пара корней характеристического уравнения приближенно совпадает с корнями характеристического уравнения классической постановки, а вторая пара – определяется характерной длиной когезионных взаимодействий l_V для каждой из фаз.

$$k_{1,2,3,4D,M} \approx \begin{cases} \pm \frac{1}{l} \sqrt{\frac{12E}{G}} = \pm b \\ \pm \sqrt{\frac{C^V}{G}} \end{cases}$$

Заметим, что корни становятся кратными, если $C^V = 48E/l^2$, а при $C^V < 48E/l^2$ - комплексно-сопряженными. Приведем решение для случая, когда $k_{1,2,3,4D,M} = \pm\alpha_{D,M} \pm i\beta_{D,M}$ комплексно-сопряжённые корни характеристического уравнения:

Для волокна $0 \leq y \leq h_D$:

$$r_D(y) = \frac{P_D}{E_D} + C_{D1} ch(\alpha_D y) \cdot \cos(\beta_D y) + C_{D2} sh(\alpha_D y) \cdot \sin(\beta_D y)$$

Для матрицы $h_M \leq y \leq h_M + h_D$:

$$r_M(y) = \frac{P_M}{E_M} + C_{M1} ch(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \cos(\beta_M (y - h_M - h_D)) + \\ + C_{M2} sh(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \sin(\beta_M (y - h_M - h_D))$$

Система уравнений (7.16) позволяет определить постоянные интегрирования $C_{D1}, C_{D2}, C_{M1}, C_{M2}$ и построить решение в целом. Численно решая систему (7.16) относительно $C_{M1}, C_{M2}, C_{D1}, C_{D2}$ были найдены искомые перемещения и напряжения композита.

Значения параметров модели выбраны аналогично [53]. Зависимость эффективного модуля от когезионного модуля волокна такова, что когезионный модуль жёсткой фазы практически не оказывает влияние на решение. Зависимость эффективного модуля от когезионного модуля матрицы при этом существенна. На рисунке (рис. 7.1) показана тенденция графика эффективного модуля как функции длины нанотрубки при изменении когезионного модуля матрицы. Когезионный модуль матрицы изменялся от 0,00009 ГПа/нм² до 0,06561 ГПа/нм², при этом с увеличением значения модуля, решение становилось все ближе и ближе к классическому. Как видно на рис. 7.1, существуют такие значения когезионного модуля, при которых решение будет близко к значениям, полученным в работе [54].

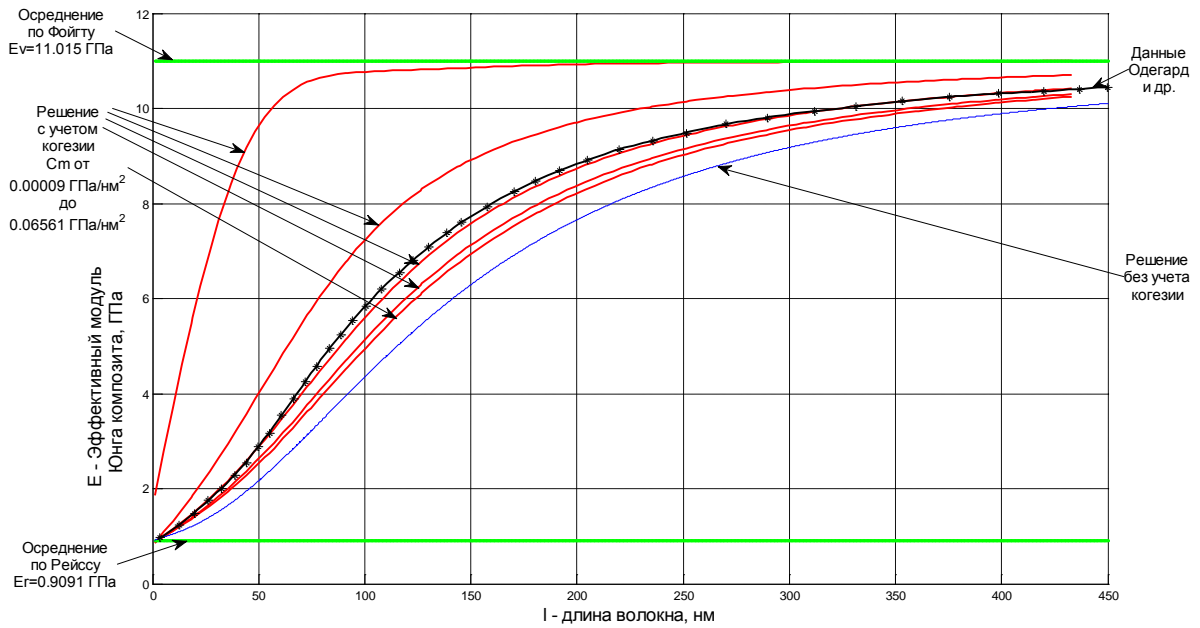


Рис. 7.1. Зависимость эффективного модуля Юнга от длины волокна с учетом когезионных взаимодействий при изменении C_M от $0,00009 \text{ ГПа/нм}^2$ до $0,06561 \text{ ГПа/нм}^2$

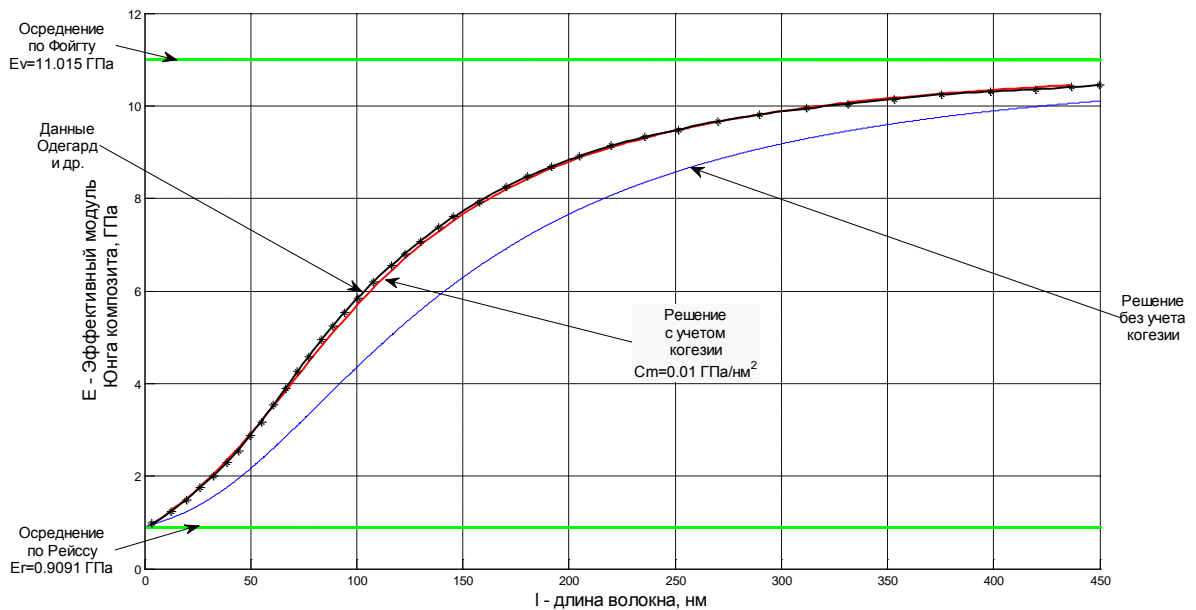


Рис. 7.2 Зависимость эффективного модуля Юнга от длины волокна с учетом когезионных взаимодействий при $C_M = 0,01 \text{ ГПа/нм}^2$.

На рис. 7.2 показано решение, наиболее близкое к значениям, полученным группой Г.М. Одегарда в работе [53]. Этому решению соответствует

когезионный модуль матрицы $C_M = 0,01$ ГПа/нм². При этом характерная длина когезионных взаимодействий в матрице в соответствии с (7.18) $l_M \approx \sqrt{G_M / C_M} = \sqrt{0,3462 / 0,01} = 5,88$ нм.

Если считать результаты группы Одегарда соответствующими эксперименту, то можно сделать вывод о том, что классическая модель композита [], не позволяет объяснить эффект усиления, описанный в работе [53]. Напротив, результат, полученный с использованием когезионной модели межфазного слоя, близок к экспериментальным данным. Анализируя полученные данные, можно говорить о том, что при одной и той же расчетной схеме (биплоская 2D-постановка) классическая модель ($C_M \rightarrow \infty$) не позволяет описать, а когезионная модель межфазного слоя успешно описывает эффект усиления на коротких волокнах, обнаруженный группой Одегарда.

Оценка величины характерной длины когезионных взаимодействий в матрице позволяет сделать вывод о том, что вклад когезионных взаимодействий существенно меняет эффективную объемную долю включений, а учет когезионных взаимодействий необходим в теории нанокомпозитов [54].

7.2.2. Эффект Одегарда на длинных волокнах.

Использованная в этом параграфе обобщенная модель волокнистого нанокомпозита позволяет описать как эффект усиления в диапазоне коротких волокон, что обусловлено учетом масштабных эффектов, так и эффект усиления в диапазоне длинных волокон, расширяющий границы Фойгта-Рейсса, который обусловлен силами поверхностного натяжения [55]. Таким образом, дается объяснение природы аномального увеличения эффективного модуля в композитах, армированных нановолокнами с разной степенью функционализации.

Дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного

материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга в рамках рассмотренных моделей с результатами других авторов.

В рамках теории упругости с идеальной адгезией поверхности среды учет сил поверхностного натяжения позволяет получить более высокий эффективный модуль и расширить границы Фойгта-Рейсса. При этом, в диапазоне коротких волокон эффект аномального усиления не может быть объяснен. А в рамках градиентной теории можно объяснить эффект аномального усиления в зоне коротких волокон, но лишь в рамках вилки Фойгта-Рейсса.

Для построения математической модели волокнистого нанокомпозита рассматривается ячейка в плоской постановке. Вектор перемещений R_i ($i=1,2$) имеет единственную проекцию R на ось волокна, нагружение волокна в направлении армирования передается исключительно за счет продольных сдвигов в матрице.

Решение строится методом В.З. Власова. Индексом M обозначены параметры, относящиеся к матрице, а индексом D - параметры, относящиеся к волокну (дефекту). Введены следующие обозначения: l - длина включения, $E_{M,D}, G_{M,G}, h_{M,D}$ - модуль Юнга, модуль сдвига и толщина фаз.

В рамках плоской постановки в декартовой системе координат, погонная в отношении координаты z плотность лагранжиана имеет вид:

$$\begin{aligned}
 L_z = & A_z - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_0^{h_D+h_M} \left\{ E \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + G \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{C} \left(E \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{h_D-h_g/2}^{h_D+h_g/2} G_g \left[\frac{(R_M(x, h_D + h_g/2) - R_D(x, h_D - h_g/2))}{h_g} \right]^2 dx dy - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{h_D-h_g/2}^{h_D+h_g/2} \frac{1}{4} E_g \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} R_M(x, h_D + h_g/2) + \frac{\partial}{\partial x} R_D(x, h_D - h_g/2) \right) \right]^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Выражение (7.19) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
L_z = A_z - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_0^{h_D+h_M} \left\{ E \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + G \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{C} \left(E \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy - \\
- \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{h_D-h_g/2}^{h_D+h_g/2} G_g \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 dx dy - \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{h_D-h_g/2}^{h_D+h_g/2} \frac{1}{4} E_g \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 dx dy
\end{aligned} \quad (7.20)$$

Искомое решение так же, как и в предыдущих главах, строится методом Власова, и распределение перемещений выбирается в виде $R(x, y) = xr(y)$, толщина фиктивного слоя $h_g \rightarrow 0$. После внутреннего интегрирования по координате x , лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2} l \int_0^{h_D+h_M} \left\{ 2pr - Er^2 - \frac{Gl^2}{12} (r')^2 - \frac{G^2 l^2}{C 12} (r'')^2 \right\} dy - \\
- \frac{1}{2} \frac{g_g l^3}{12} [r_M(h_D) - r_D(h_D)]^2 - \frac{1}{2} e_g l [(r_M(h_D) + r_D(h_D))]^2
\end{aligned} \quad (7.21)$$

Здесь p - кусочно-постоянная внешняя нагрузка, показанная на рис.2.7.

Вариационное уравнение получено в соответствии с принципом Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\delta L = l \int_0^{h_D} \left[P_D - E_D r_D + \frac{G_D l^2}{12} r_D'' - \frac{G_D^2 l^2}{C_D 12} r_D^{IV} \right] \delta r_D dy + \\
+ l \int_{h_D}^{h_D+h_M} \left[P_M - E_M r_M + \frac{G_M l^2}{12} r_M'' - \frac{G_M^2 l^2}{C_M 12} r_M^{IV} \right] \delta r_M dy - \\
- l \left\{ \left(\frac{l^2 G_D}{12 C_D} r_D'' \right) \delta G_D r_D' + \left(G_D \frac{l^2}{12} r_D' - \frac{G_D^2 l^2}{C_D 12} r_D''' \right) \delta r_D \right\} \Big|_{y=0}^{y=h_D} - \\
- l \left\{ \left(\frac{l^2 G_M}{12 C_M} r_M'' \right) \delta G_M r_M' + \left(G_M \frac{l^2}{12} r_M' - \frac{G_M^2 l^2}{C_M 12} r_M''' \right) \delta r_M \right\} \Big|_{y=h_D}^{y=h_D+h_M} + \\
+ \frac{g_g l^3}{12} [r_M(h_D) - r_D(h_D)] \delta r_D(h_D) - \frac{g_g l^3}{12} [r_M(h_D) - r_D(h_D)] \delta r_M(h_D) - \\
- e_g l [(r_M(h_D) + r_D(h_D))] \delta r_D(h_D) - e_g l [(r_M(h_D) + r_D(h_D))] \delta r_M(h_D)
\end{aligned} \quad (7.22)$$

Вариационное уравнение (7.22) определяет соответствующие уравнения равновесия и весь спектр граничных условий. Уравнения равновесия являются неоднородными дифференциальными уравнениями четвертого порядка для каждой из фаз:

$$\begin{aligned} \frac{G_D^2}{C_D} \frac{l^2}{12} r_D'''' - G_D \frac{l^2}{12} r_D'' + E_D r_D &= p \\ \frac{G_M^2}{C_M} \frac{l^2}{12} r_M'''' - G_M \frac{l^2}{12} r_M'' + E_M r_M &= p \end{aligned} \quad (7.23)$$

Внеинтегральные члены вариационного уравнения определяют граничные условия на осях симметрии волокна и матрицы, а так же условия контакта для волокна и для матрицы. Таким образом, формулировка граничных условий будет следующей:

$$\begin{aligned} G_D r_D'(0) &= 0 \\ G_D r_D'(0) - \frac{G_D^2}{C_D} r_D'''(0) &= 0 \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{G_D}{C_D} r_D''(h_D) &= \frac{G_M}{C_M} r_M''(h_D) \\ G_D r_D'(h_D) &= G_M r_M'(h_D) \\ [-(G_D r_D'(h_D) - \frac{G_D^2}{C_D} r_D'''(h_D)) + (G_M r_M'(h_D) - \frac{G_M^2}{C_M} r_M'''(h_D))] - \frac{24e_g}{l^2} [(r_M(h_D) + r_D(h_D))] &= 0 \\ [(G_D r_D'(h_D) - \frac{G_D^2}{C_D} r_D'''(h_D)) + (G_M r_M'(h_D) - \frac{G_M^2}{C_M} r_M'''(h_D))] + 2g_g [r_M(h_D) - r_D(h_D)] &= 0 \end{aligned} \right. \quad (7.24) \\ G_M r_M'(h_D + h_M) &= 0 \\ G_M r_M'(h_D + h_M) - \frac{G_M^2}{C_M} r_M'''(h_D + h_M) &= 0 \end{aligned}$$

Общее решение уравнений (7.23):

Для волокна $0 \leq y \leq h_D$:

$$r_D(y) = \frac{P_D}{E_D} + C_{D1} ch(\alpha_D y) \cdot \cos(\beta_D y) + C_{D2} sh(\alpha_D y) \cdot \sin(\beta_D y) \quad (7.25)$$

Для матрицы $h_M \leq y \leq h_M + h_D$:

$$\begin{aligned} r_M(y) &= \frac{P_M}{E_M} + C_{M1} ch(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \cos(\beta_M (y - h_M - h_D)) + \\ &+ C_{M2} sh(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \sin(\beta_M (y - h_M - h_D)) \end{aligned}$$

Система (7.24) позволяет определить постоянные интегрирования в решении дифференциальных уравнений $C_{D1}, C_{D2}, C_{M1}, C_{M2}$ и построить решение в целом. Численно решая систему (7.24) относительно $C_{M1}, C_{M2}, C_{D1}, C_{D2}$, были найдены искомые перемещения и напряжения композита.

Алгоритм определения эффективного модуля композита сводится к сравнению потенциальных энергий композита и эквивалентной гомогенной

среды. В соответствии с теоремой Клапейрона, потенциальная энергия составного фрагмента:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} l \int_0^{h_D+h_M} Pr(y) dy = \\
 &= \frac{1}{2} l P_D \int_0^{h_D} \left(\frac{P_D}{E_D} + C_{D1} ch(\alpha_D y) \cdot \cos(\beta_D y) + C_{D2} sh(\alpha_D y) \cdot \sin(\beta_D y) \right) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} l P_M \int_{h_D}^{h_D+h_M} \left(\frac{P_M}{E_M} + C_{M1} ch(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \cos(\beta_M (y - h_M - h_D)) \right) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} l P_M \int_{h_D}^{h_D+h_M} (C_{M2} sh(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \sin(\beta_M (y - h_M - h_D))) dy
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Чтобы найти модуль Юнга эффективного континуума, сравним потенциальную энергию (7.26) с потенциальной энергией U_0 для эквивалентного гомогенного фрагмента с модулем E :

$$U_0 = 0,5l \cdot p_x^2 (h_D + h_M) / E \tag{7.27}$$

Здесь p_x - нагрузка, приложенная к гомогенному образцу, аналогичная нагрузке, приложенной к составному фрагменту.

Из равенства потенциальных энергий гомогенной среды (7.27) и композиционного материала (7.26) получим выражение для модуля Юнга эффективного континуума E :

$$\begin{aligned}
 E &= p_x (h_D + h_M) / \left[\int_0^{h_D} \left(\frac{P_D}{E_D} + C_{D1} ch(\alpha_D y) \cdot \cos(\beta_D y) + C_{D2} sh(\alpha_D y) \cdot \sin(\beta_D y) \right) dy + \right. \\
 &+ \int_{h_D}^{h_D+h_M} \left(\frac{P_M}{E_M} + C_{M1} ch(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \cos(\beta_M (y - h_M - h_D)) \right) dy + \\
 &\left. + \int_{h_D}^{h_D+h_M} (C_{M2} sh(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \sin(\beta_M (y - h_M - h_D))) dy \right]
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Выражение (7.28) можно представить в виде:

$$\frac{h_M + h_D}{E} = \frac{h_M - h_f}{E_M} + \frac{h_D + h_f}{E_D} \tag{7.29}$$

Где h_f :

$$\begin{aligned}
h_f = & \frac{1}{P\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D}\right)} \int_0^{h_D} (C_{D1} ch(\alpha_D y) \cdot \cos(\beta_D y) + C_{D2} sh(\alpha_D y) \cdot \sin(\beta_D y)) dy \\
& + \frac{1}{P\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D}\right)} \int_{h_D}^{h_D+h_M} (C_{M1} ch(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \cos(\beta_M (y - h_M - h_D))) dy + \\
& + \frac{1}{P\left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_D}\right)} \int_{h_D}^{h_D+h_M} (C_{M2} sh(\alpha_M (y - h_M - h_D)) \cdot \sin(\beta_M (y - h_M - h_D))) dy
\end{aligned} \quad (7.30)$$

Далее, вычисление h_f осуществлялось численно, а эффективный модуль получен по формуле (7.29).

Значения параметров модели выбраны аналогично параметрам указанным в [54]. Зависимость эффективного модуля композита от когезионного модуля волокна C_D такова, что когезионный модуль жесткой фазы практически не оказывает влияние на решение. Этот вывод соответствует выводу, полученному в работе [54]: «жесткое включение выталкивает межфазный слой в матрицу». Зависимость эффективного модуля от когезионного модуля матрицы C_M при этом существенна.

На рис. 7.3 показана тенденция графика при изменении когезионного модуля матрицы. Когезионный модуль матрицы изменялся от $0,0001 \text{ ГПа/нм}^2$ до $0,0343 \text{ ГПа/нм}^2$, при этом с увеличением значения модуля, решение становилось все ближе и ближе к адгезионной модели. Адгезионные параметры были зафиксированы на значениях $g_g = \text{inf}$, $e_g = 19$

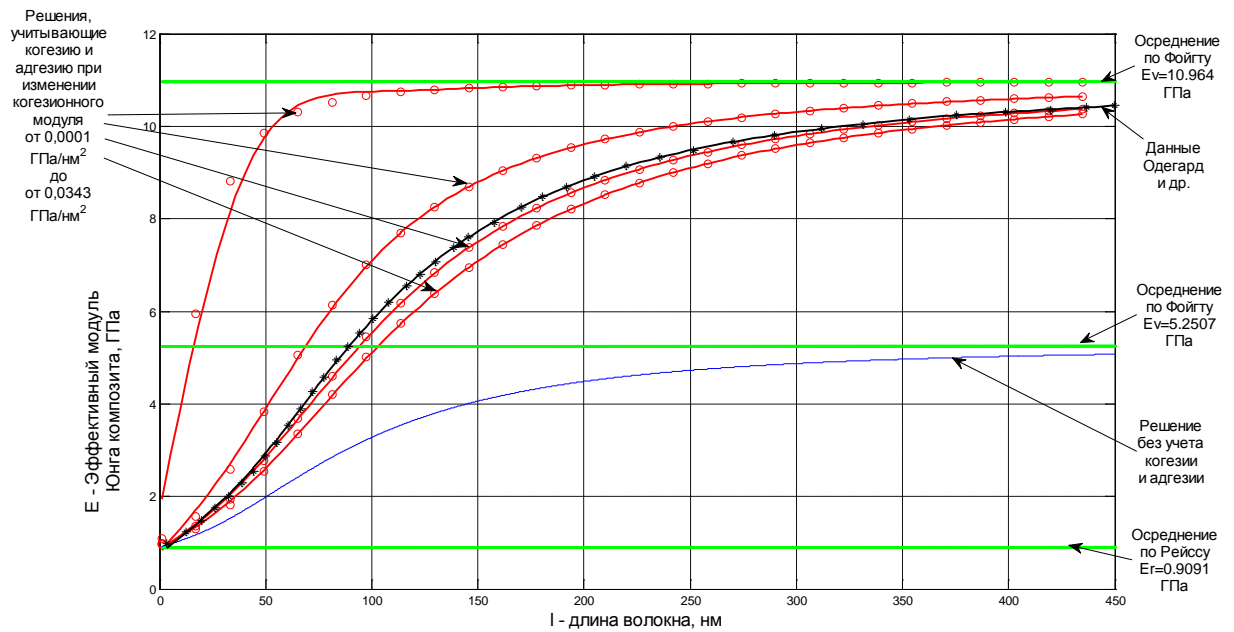


Рис. 7.3. Зависимость эффективного модуля Юнга от длины волокна при фиксированных адгезионных параметрах с учетом когезионных взаимодействий при изменении C_M от 0,0001 ГПа/нм² до 0,0343 ГПа/нм²

На рис.7.3 видно, что существуют такие значения когезионного модуля, при которых решение будет близким к данным из [57].

На рис. 7.4 приведены решения красными точками для двух композиционных материалов с разными адгезионными параметрами $e_g = 19$ ГПа·нм, $e_g = 14,7$ ГПа·нм (функционализированные и не функционализированные нанотрубки). Остальные параметры композитов - одинаковые: $C_M = 0.0088$ ГПа/нм², $g_g = \text{inf}$, $E_D = 435,97$ ГПа. Также на графике черными точками представлены решения для этих композитов, полученные в работе [57]:

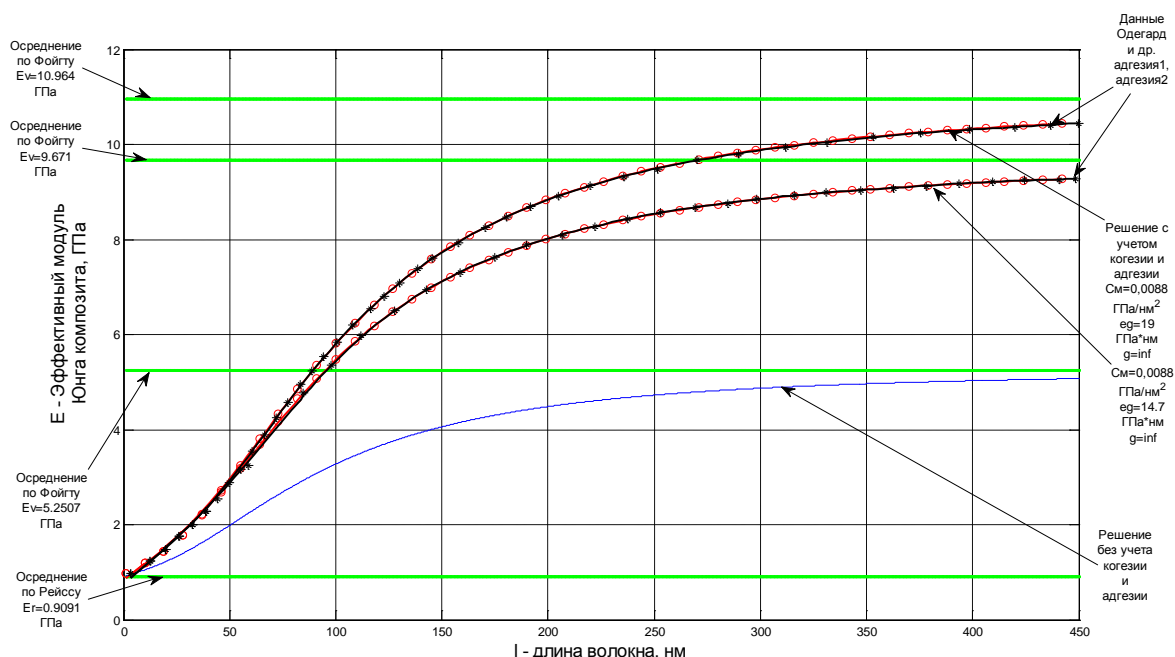


Рис. 7.4. Зависимость эффективного модуля Юнга от длины волокна с учетом когезионных взаимодействий при $C_M = 0,0088$ ГПа/нм² и различных значениях e_g

Анализируя полученные решения, можно сделать вывод, что модель показывает хорошее согласование с данными численного эксперимента для волокон любых длин и может быть рекомендована для практических расчетов свойств таких композитов. Получено приближенное аналитическое решение, построенное методом В.З. Власова. При анализе результатов сделан вывод о том, что модель позволяет описать эффект усиления композита, описанный в работе [57].

В модели нанокompозита адгезионные силы поверхностного натяжения на границе контакта волокна и матрицы влияют на повышение границы Фойгта, а когезионные взаимодействия (преимущественно в матрице) влияют на усиление композита в области коротких волокон в рамках вилки Фойгта-Рейсса. Адгезионные параметры g_g и e_g могут играть роль параметров качества технологии изготовления композитов. .

7.3. К теории тонких пленок.

7.3.1. Растяжение тонких пленок.

Рассмотрим модель классической среды с идеальной адгезией, рассмотренной в разделе 6.1. В приложении к тонким пленкам, область среды представляет собой пластину, толщиной h , с идеальной адгезией лицевых поверхностей. Идеальной адгезией торцевых поверхностей будем пренебрегать в виду малости площади торцевой поверхности по сравнению с площадью лицевых поверхностей.

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF \quad (7.31)$$

Предполагается справедливость классических гипотез для пластин:

1. Прогибы отсутствуют $R_i Z_i = 0$.
2. Перемещения в плоскости пластины постоянны по толщине $R_{j,k} Z_k (\delta_{ij} - Z_i Z_j) = 0$.

Здесь Z_i - орт оси OZ , расположенной по нормали к срединной плоскости пластины. Так как орт Z_i совпадает с ортом нормали к лицевой поверхности (плоскости) пленки, будем в дальнейшем употреблять для тензора $(\delta_{ij} - Z_i Z_j)$ введенное ранее обозначение δ_{ij}^* .

В соответствии с принятыми гипотезами, объемная плотность потенциальной энергии в (7.31) становится постоянной по координате $z = x_k Z_k$, и можно провести внутреннее интегрирование по толщине.

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dF = \\ &= A - \frac{1}{2} \iint C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} h dx dy - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dx dy \Big|_{z=-h/2}^{z=+h/2} - \frac{1}{2} \iint A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} h ds = \\ &= A - \frac{1}{2} \iint E_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} dx dy \end{aligned}$$

Здесь введен тензор эффективных жесткостей E_{ijmn} пленки с идеальной адгезией лицевых поверхностей:

$$E_{ijmn} = (C_{ijmn}h + A_{ijmn})$$

Таким образом, тензор эффективных жесткостей E_{ijmn} для пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей является линейной функцией толщины.

$$E_{ijmn} = (\lambda h + \lambda^F) \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + (\mu h + \mu^F) (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{jm}^*)$$

Этот эффект является масштабным.

$$\lambda^* h = \lambda h + \lambda^F \quad \mu^* h = \mu h + \mu^F \quad (7.32)$$

Следствия.

1. При стремлении к нулю толщины пленки ее жесткость стремится не к нулю, а к соответствующему адгезионному модулю. Из этого следует, что жесткость нанотрубок и нанопластин в основном определяется адгезионными свойствами, а не упругими.

2. Не трудно показать, что (7.32) можно трактовать с точки зрения классической теории упругости как эффективные жесткости трехслойной пластины $E_{\text{eff}}h$ и $G_{\text{eff}}h$. С учетом того, что $E = 2\mu + \lambda$ и $G = \mu$ получим:

$$E_{\text{eff}}h = Eh + E^F = E(h - 2h_a) + (E^F + E2h_a) = E(h - 2h_a) + 2E_a h_a$$

$$G_{\text{eff}}h = Gh + G^F = G(h - 2h_a) + (G^F + G2h_a) = G(h - 2h_a) + 2G_a h_a$$

Средняя пластина имеет те же модули, что и классическая среда без адгезии, и имеет толщину $(h - 2h_a)$.

Две обкладки имеют толщину по h_a и модули $E_a = E + E^F / (2h_a)$ и $G_a = G + G^F / (2h_a)$. Такая трактовка для сред с адгезионными свойствами поверхности эквивалентна гипотезе существования «адгезионного слоя» с параметрами h_a , E_a , G_a в классической теории упругости.

3. Развиваемая здесь теория тонких пленок допускает две эквивалентные интерпретации адгезионных аналогов коэффициентов Ламе, вошедших в выражение жесткости пленок с адгезионными свойствами лицевых

поверхностей (7.32).

Первая трактовка использует определение характерных длин адгезионных взаимодействий:

$$h_E = E^F / E \quad h_G = G^F / G \quad (7.33)$$

Вторая трактовка использует определение толщины h_a «адгезионного слоя»:

$$E^F = (E_a - E)2h_a \quad G^F = (G_a - G)2h_a \quad (7.34)$$

Эквивалентность трактовок следует из определений (7.33)-(7.34) - толщина адгезионного слоя и характерные длины адгезионных взаимодействий связаны соотношениями:

$$h_E = 2h_a \frac{(E_a - E)}{E} \quad h_G = 2h_a \frac{(G_a - G)}{G}$$

4. Рассуждения, приводящие к понятию «адгезионного слоя» вполне аналогичны рассуждениям, приводящим к понятию «межфазного слоя» в теории мелкодисперсных композитов, исследованному в разделе 7.1. В нем структура межфазного слоя была представлена четырьмя прослойками с толщинами, определяемыми соответственно классическими краевыми эффектами и когезионными multiscale-эффектами в матрице и во включении. С учетом полученных результатов, можно утверждать, что структура межфазного слоя получает дальнейшую детализацию, благодаря появлению двух дополнительных прослоек с толщинами, определяемыми адгезионными свойствами матрицы и включения.

7.3.2. Изгиб тонких пленок.

Так как уравнения равновесия те же, что и в классической теории, гипотезы Кирхгоффа применимы и к теории сред с идеальными адгезионными свойствами поверхностей. Для перемещений в соответствии с гипотезами неизменной нормали:

$$U(x, y, z) = -\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} z \quad V(x, y, z) = -\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} z \quad W(x, y, z) = W(x, y)$$

Для напряжений в соответствии с гипотезой ненадавливаемости

$$\sigma_{xx} = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] z \quad \sigma_{xy} = -(1-\nu) \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial x} \frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{yx} = -(1-\nu) \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \quad \sigma_{yy} = -(1-\nu) \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} z \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^0 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial y} \frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}^0 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial x} \frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz}^0 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial \nabla^2 W}{\partial y} \frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{zz} = -\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial y} \right) z - \frac{E}{(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 W \frac{z^3}{6}$$

Удовлетворим граничным условиям относительно касательных напряжений на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{xz} = P_x^F - (2\mu^F + \lambda^F) \nabla^2 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{yz} = P_y^F - (2\mu^F + \lambda^F) \nabla^2 \frac{\partial W}{\partial y} \frac{h}{2}$$

Соответствующие компоненты напряжений приобретают вид:

$$\sigma_{xz} = P_x^F - \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h}{2} \right] \nabla^2 \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\sigma_{yz} = P_y^F - \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{h}{2} \right] \nabla^2 \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -\left(\frac{\partial P_x^F}{\partial x} + \frac{\partial P_y^F}{\partial y} \right) z + \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{zh^2}{8} - \frac{z^3}{6} \right) + (2\mu^F + \lambda^F) \frac{zh}{2} \right] \nabla^2 \nabla^2 W$$

Удовлетворим граничному условию на лицевых поверхностях относительно нормальных напряжений:

$$\sigma_{zz} = P_z^F + \delta^F \nabla^2 W$$

В результате получен аналог уравнения Софи Жермен для пластин с адгезионными свойствами лицевых поверхностей:

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 W - \delta^F \nabla^2 W = q$$

Здесь $D^* = \frac{E^* h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{2} h^2$ эффективная цилиндрическая

жесткость пластины, причем первое слагаемое соответствует вкладу упругости, а второе слагаемое – вкладу идеальной адгезии;

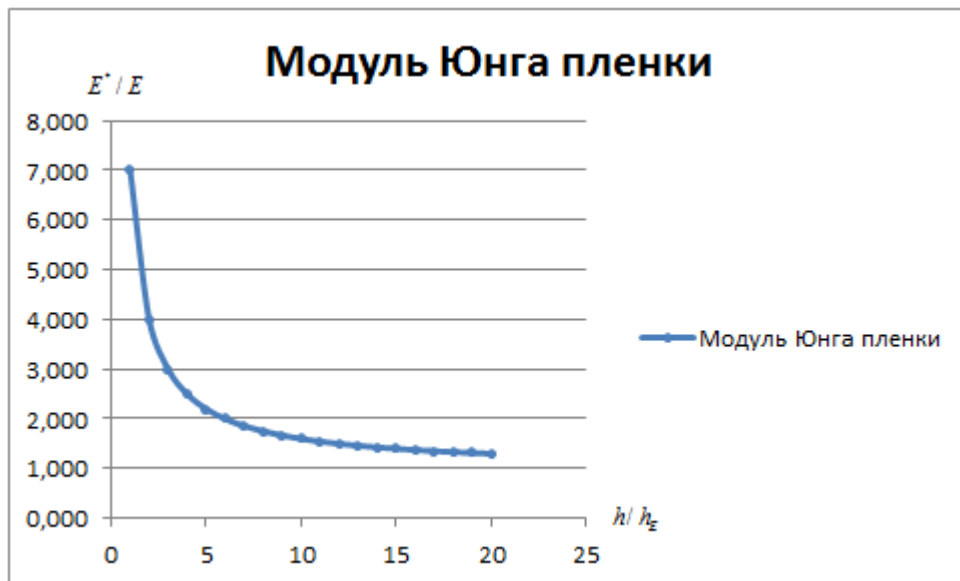
$q = 2P_z^F + \left(\frac{\partial P_x^F}{\partial x} + \frac{\partial P_y^F}{\partial y} \right) h$ внешняя приведенная поперечная нагрузка.

Запишем полученное уравнение в безразмерном относительно дифференциальных операторов виде, вводя нормированные прогибы $\bar{W} = W/h$ и нормированные операторы $\bar{\nabla}^2 = h^2 \nabla^2$:

$$\frac{E^*}{12(1-\nu^2)} \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{W} - (\delta^F/h) \bar{\nabla}^2 \bar{W} = q$$

$$E^* = E \left[1 + 6(1-\nu^2) \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{Eh} \right] = E \left[1 + 6(1-\nu^2) \frac{h_E}{h} \right] = E \left(1 + \frac{k}{h} \right)$$

Здесь в соответствии с (7.33) введена характерная длина адгезионного взаимодействия $h_E = (2\mu^F + \lambda^F)/E$ и параметр $k = 6(1-\nu^2)h_E$.



Так же, как и для растяжения пластин, для чистого изгиба при снижении толщины пластины становится существенным вклад адгезионной составляющей в эффективную цилиндрическую жесткость. При толщине

$h \ll 6(1-\nu^2) \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{E}$ цилиндрическая жесткость полностью определяется

адгезией лицевых поверхностей.

7.3.3. Механические свойства 2D-структур.

Рассмотрим модель идеальной среды Тупина с идеальной и градиентной адгезией поверхностей.

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + C_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl}\} dV - \\ - \frac{1}{2} \iint \{A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + A_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl}\} dF$$

Эта модель дает некоторые новые качественные результаты, которые невозможно получить в рамках более простых моделей. Здесь изучается один из таких результатов – возможность объяснить механические свойства и построить прикладные теории изгиба и деформирования в плоскости 2D-структуры [58].

Действительно, лагранжианы как классической механики сплошной среды, так и общепризнанных градиентных моделей Миндлина и Тупина, содержат потенциальную энергию, определяемую только через объемную плотность потенциальной энергии. Для двухмерной среды лагранжианы этих моделей формально не применимы. Это утверждение следует из того, что потенциальная энергия среды нулевого объема в этих моделях равна нулю. Все теории пластин в этих моделях строятся как модели трехмерных тел с малым, по сравнению с остальными, габаритом в третьем направлении. Тем не менее, и в теории пластин этих моделей остается тот же принципиальный порок: пластина нулевого объема (за счет нулевой толщины) будет иметь нулевую потенциальную энергию.

Рассмотрение 2D-структуры как объемной структуры, имеющей толщину, соизмеримую с диаметром атома, нельзя считать корректным [59]. Действительно, рассмотрим такую объемную структуру как пластину графита, состоящую из параллельных листов графена. Вполне очевидно, что «объемные» свойства такой структуры определяются *межатомными* взаимодействиями «длинных графитовых» связей между атомами углерода

соседних листов графена. Интерполяция свойств многослойной и даже двухслойной графитовой пластины на свойства изолированного листа графена представляется недопустимой. Те же рассуждения можно осуществить и для других 2D-структур, имеющих другой химический состав.

Таким образом механические свойства 2D-структуры целесообразно попытаться описать в рамках теории, лагранжиан которой наряду с объемной, содержит и поверхностную потенциальную энергию. В предыдущем разделе рассматривался вариант теории тонких пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей. Однако в предельном случае, рассмотренном здесь, при нулевом объеме (толщине) пленки уравнение изгиба вырождалось в уравнение второго порядка. Это определялось тем, что учитывались только идеальные, не градиентные адгезионные свойства лицевых поверхностей. Наличие более общей теории позволяет вернуться к этой проблеме и сформулировать невырожденный случай. В случае 2D-структуры объемная плотность потенциальной энергии равна нулю, и лагранжиан приобретает специфически простой (но не тривиальный) вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + A_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} dF$$

При этом учтем, что поверхностная плотность потенциальной энергии двумерной структуры не должна зависеть от нормальных производных от перемещений. В связи с этим следует потребовать, чтобы тензоры адгезионных модулей обладали следующими свойствами:

$$A_{ijmn} n_j = A_{ijmn} n_n = 0$$

$$A_{ijkml} n_j = A_{ijkml} n_k = A_{ijkml} n_n = A_{ijkml} n_l = 0$$

Для простоты будем полагать, что в плоскости 2D-структуры механические свойства изотропные. Отсюда вытекает следующий упрощенный вид тензоров адгезионных модулей:

$$A_{ijmn} = \lambda^F \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + (\mu^F + \chi^F) \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + (\mu^F - \chi^F) \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \delta^F n_i n_m \delta_{jn}^*$$

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{11} = & \\
= & A_1^{11} (\delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{kl}^* \delta_{jl}^* + \\
& + \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \\
& + \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^* + \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^*) + \\
& + A_2^{11} \delta_{im}^* (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) + \\
& + A_3^{11} n_i n_m (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*)
\end{aligned}$$

Развернутая структура потенциальной энергии принимает вид:

$$\begin{aligned}
U_F = & \frac{1}{2} \{ A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + A_{ijkml} R_{i,jk} R_{m,nl} \} = \\
= & \frac{1}{2} \{ \lambda^F r_{i,j} r_{m,n} + (\mu^F + \chi^F) \delta_{jn}^* r_{m,j} r_{m,n} + (\mu^F - \chi^F) r_{n,j} r_{j,n} + \\
& + 4A_1^{11} \delta_{mn}^* (r_{i,ij} r_{j,mn} + r_{i,im} r_{j,jn} + r_{i,jm} r_{j,in}) + \\
& + A_2^{11} r_{i,jk} r_{i,nl} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) + \\
& + \delta^F \delta_{jn}^* R_{j,n} + A_3^{11} R_{j,k} R_{nl} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) \}
\end{aligned}$$

Задача изгиба 2D-структуры в данной постановке отделяется от задачи деформирования в своей плоскости. Рассмотрим эти задачи отдельно.

7.3.3.1. Механические свойства 2D-структуры при деформировании в плоскости.

В соответствии с формулировкой выражения потенциальной энергии 2D-структуры в разделе 7.3.3., при деформировании в плоскости прогибы отсутствуют, и лагранжиан приобретает вид:

$$\begin{aligned}
L = & A - \frac{1}{2} \iint \{ \lambda^F r_{i,i} r_{m,m} + (\mu^F + \chi^F) \delta_{jn}^* r_{m,j} r_{m,n} + (\mu^F - \chi^F) r_{n,j} r_{j,n} + \\
& + 4A_1^{11} \delta_{mn}^* (r_{i,ij} r_{j,mn} + r_{i,im} r_{j,jn} + r_{i,jm} r_{j,in}) + \\
& + A_2^{11} r_{i,jk} r_{i,nl} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) \} dF
\end{aligned}$$

Силовые факторы можно определить, используя формулы Грина:

$$\sigma_{ij}^{11} = \frac{\partial U_F}{\partial r_{i,j}} = \lambda^F \delta_{ij}^* r_{m,m} + \mu^F (\delta_{jm}^* r_{i,n} + \delta_{in}^* r_{j,n})$$

$$m_{ijk}^{11} = \frac{\partial U_F}{\partial r_{i,jk}} = 4A_1^{11} (\delta_{ij}^* \delta_{mn}^* r_{k,mm} + \delta_{ij}^* \delta_{kn}^* r_{p,pn} + \delta_{kn}^* r_{j,in}) + A_2^{11} r_{i,nl} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{ji}^* \delta_{kn}^*)$$

В координатной форме:

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^{11} = (2\mu^F + \lambda^F) r_{x,x} + \lambda^F r_{y,y} \\ \sigma_{xy}^{11} = \mu^F (r_{x,y} + r_{y,x}) \\ \sigma_{yx}^{11} = \mu^F (r_{x,y} + r_{y,x}) \\ \sigma_{yy}^{11} = \lambda^F r_{x,x} + (2\mu^F + \lambda^F) r_{y,y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{xxx}^{11} = 4A_1^{11} (3r_{x,xx} + r_{y,xy} + r_{x,yy}) + A_2^{11} (3r_{x,xx} + r_{x,yy}) \\ m_{xxy}^{11} = 4A_1^{11} (r_{y,xx} + 2r_{x,xy} + 2r_{y,yy}) + A_2^{11} (r_{x,xx} + 2r_{x,xy} + r_{x,yy}) \\ m_{xyx}^{11} = 4A_1^{11} r_{y,xx} + A_2^{11} (2r_{x,xy}) \\ m_{xyy}^{11} = 4A_1^{11} r_{y,xy} + A_2^{11} (r_{x,xx} + 3r_{x,yy}) \\ m_{yxx}^{11} = 4A_1^{11} r_{x,xy} + A_2^{11} (3r_{y,xx} + r_{y,yy}) \\ m_{yyx}^{11} = 4A_1^{11} r_{x,yy} + A_2^{11} (2r_{y,xy}) \\ m_{yyy}^{11} = 4A_1^{11} (2r_{x,xx} + r_{x,yy} + 2r_{y,yy}) + A_2^{11} (2r_{y,xy}) \\ m_{yyy}^{11} = 4A_1^{11} (r_{y,xx} + r_{x,xy} + 3r_{y,yy}) + A_2^{11} (r_{y,xx} + 3r_{y,yy}) \end{cases}$$

Вариационное уравнение в силовых факторах:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iint \{ \sigma_{ij}^{11} \delta r_{i,j} + m_{ijk}^{11} \delta r_{i,jk} \} dF = \\ &= \delta A - \iint \{ (\sigma_{ij}^{11} - m_{ijk}^{11}) \delta r_{i,j} \} dF - \oint m_{ijk}^{11} v_k \delta r_{i,j} ds = \\ &= \iint (\sigma_{ij,j}^{11} - m_{ijk,jk}^{11} + P_i^F) \delta r_i dF + \oint \{ -m_{ijk}^{11} v_k \delta r_{i,p} (s_p s_j + v_p v_j) + (P_i^s - \sigma_{ij}^{11} v_j + m_{ijk}^{11} v_j) \delta r_i \} ds = \\ &= \iint (\sigma_{ij,j}^{11} - m_{ijk,jk}^{11} + P_i^F) \delta r_i dF + \\ &+ \oint \{ -(m_{ijk}^{11} v_j v_k) \delta (r_{i,p} v_p) + (P_i^s - \sigma_{ij}^{11} v_j + m_{ijk}^{11} v_j + [(m_{ijk}^{11} s_j v_k) s_p]_{,p}) \delta r_i \} ds - \\ &- \sum (m_{ijk}^{11} s_j v_k) \delta r_i = 0 \end{aligned}$$

Вариационное уравнение в перемещениях:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \delta A + \iint \{ \mu^F \nabla^2 r_i + (\mu^F + \lambda^F) r_{k,ki} - 12A_1^{11} \nabla^2 r_{k,ki} - 3A_2^{11} \nabla^2 \nabla^2 r_i \} \delta r_i dF - \\
& - \oint \{ [4A_1^{11} (r_{k,ki} + r_{k,km} v_i v_m + r_{j,im} v_j v_m) + A_2^{11} r_{i,km} (s_m s_k + 3v_m v_k)] \delta(r_{i,p} v_p) \} ds - \\
& - \oint \{ [\lambda^F r_{m,m} v_i + \mu^F r_{i,j} v_j + \mu^F r_{j,i} v_j] - \\
& - [4A_1^{11} (r_{k,kij} v_j + \nabla^2 r_{k,k} v_i + \nabla^2 r_{j,i} v_j) + 3A_2^{11} \nabla^2 r_{i,j} v_j] - \\
& - [4A_1^{11} (r_{k,kmp} s_i v_m s_p + r_{j,imp} s_j v_m s_p) + 2A_2^{11} r_{i,kmp} s_k v_m s_p] \} \delta r_i ds - \\
& - \sum [4A_1^{11} (r_{k,km} s_i v_m + r_{j,im} s_j v_m) + 2A_2^{11} r_{i,km} s_k v_m] \delta r_i = 0
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения: производная вдоль контура - $r_{i,k} s_k = r_i'$; нормальная к контуру производная - $r_{i,k} v_k = \dot{r}_i$. Тогда вариационное уравнение в перемещениях для прямоугольного контура листа принимает вид:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iint \{ \mu^F \nabla^2 r_i + (\mu^F + \lambda^F) r_{k,ki} - 12A_1^{11} \nabla^2 r_{k,ki} - 3A_2^{11} \nabla^2 \nabla^2 r_i + P_i^F \} \delta r_i dF - \\
& - \oint \{ [4A_1^{11} (r_{k,ki} + \dot{r}_{k,k} v_i + \dot{r}_{j,i} v_j) + A_2^{11} (r_i'' + 3\dot{r}_i)] \delta r_i \} ds - \\
& - \oint \{ [\lambda^F r_{m,m} v_i + \mu^F \dot{r}_i + \mu^F r_{j,i} v_j] - \\
& - [4A_1^{11} (\dot{r}_{k,ki} + \nabla^2 r_{k,k} v_i + \nabla^2 r_{j,i} v_j) + 3A_2^{11} \nabla^2 \dot{r}_i] - \\
& - [4A_1^{11} (\dot{r}'_{k,k} s_i + \dot{r}'_{j,i} s_j) + 2A_2^{11} \dot{r}_i'' - P_i^S \} \delta r_i ds - \\
& - \sum [4A_1^{11} (r_{k,km} s_i v_m + r_{j,im} s_j v_m) + 2A_2^{11} r_{i,km} s_k v_m] \delta r_i = 0
\end{aligned}$$

Таким образом, модель деформирования 2D-структуры в своей плоскости эквивалентна плоской постановке градиентной модели Тупина, но с иными физическими свойствами, которые определяются иными тензорами модулей, а именно - адгезионными.

7.3.3.2. Механические свойства 2D-структуры при изгибе.

В соответствии с формулировкой выражения потенциальной энергии 2D-структуры в разделе 7.3.3., при деформировании из своей плоскости проекция вектора перемещений на плоскость отсутствует, и лагранжиан приобретает вид:

$$\begin{aligned}
L = & A - \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijmn} n_i n_m R_{,j} R_{,n} + A_{ijkml} n_i n_m R_{,jk} R_{,nl} \} dF = \\
= & A - \frac{1}{2} \iint \{ \delta^F \delta_{pq}^* R_{,p} R_{,q} + A_3^{11} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) R_{,jk} R_{,nl} \} dF
\end{aligned}$$

Силловые факторы можно определить, используя формулы Грина:

$$U_F = \frac{1}{2} \{ \delta^F \delta_{pq}^* R_{,p} R_{,q} + A_3^{11} (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) R_{,jk} R_{,nl} \}$$

$$Q_p = \frac{\partial U_F}{\partial R_{,p}} = \delta^F \delta_{pq}^* R_{,q} = \begin{cases} Q_x = \delta^F R_{,x} \\ Q_y = \delta^F R_{,y} \end{cases}$$

$$M_{jk} = \frac{\partial U_F}{\partial R_{,jk}} = A_3^{11} (\delta_{jk}^* \nabla^2 R + \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* R_{,nl} + \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* R_{,nl}) = \begin{cases} M_{xx} = A_3^{11} (3R_{,xx} + R_{,yy}) \\ M_{xy} = A_3^{11} 2R_{,xy} = M_{yx} = A_3^{11} 2R_{,xy} \\ M_{yy} = A_3^{11} (R_{,xx} + 3R_{,yy}) \end{cases}$$

Вариационное уравнение в силовых факторах:

$$\delta L = \iint (Q_{j,j} - M_{jk,jk} + P^F) \delta R dF + \oint \{ -(M_{jk} v_j v_k) \delta (R_{,i} v_i) + (P^F - Q_j v_j - [(M_{jk} s_j v_k) s_i]_{,i} + M_{jk,k} v_j) \delta R \} ds - \sum (M_{jk} s_j v_k) \delta R = 0$$

Здесь использованы криволинейные ортогональные координаты с ортами s_i и v_i , связанные с плоским контуром 2D-структуры. Естественные граничные условия можно сопоставить с формулировкой краевых задач в классической теории пластин. Так же, как и в классической теории пластин, появляется требование непрерывности крутящего момента при переходе через угловую точку контура (внеинтегральное слагаемое вариационного уравнения). Работа изгибающего момента на угле поворота $(M_{jk} v_j v_k) \delta (R_{,i} v_i)$ так же дает классическую пару граничных условий: или должен быть задан угол поворота, или изгибающий момент должен быть равным нулю. Здесь следует отметить то обстоятельство, что в рамках теории изгиба 2D-структуры нет возможности задать ненулевым изгибающий момент на контуре. Вторая пара естественных граничных условий, связана с работой перерезывающей силы на прогибах $(P^F - Q_j v_j - [(M_{jk} s_j v_k) s_i]_{,i} + M_{jk,k} v_j) \delta R$. Здесь так же, как и в классической теории пластин, не удастся сформулировать граничное условие на Сен-Венанову перерезывающую силу $Q_j v_j$ и приходится вводить определение Кирхгоффовской перерезывающей силы. При этом в отличие от классической теории пластин, она модифицируется не только контурной производной от крутящего момента $[(M_{jk} s_j v_k) s_i]_{,i}$, но и двумя

дополнительными слагаемыми. Первое слагаемое - контурная производная от крутящего момента $M_{jm,n}v_j s_m s_n$, второе слагаемое - нормальная к контуру производная от изгибающего момента $M_{jm,n}v_j v_m v_n$. В сумме они дают «плоскую» дивергенцию $M_{jk,k}v_j$. Вариационное уравнение в прогибах:

$$\delta L = \iint [\delta^F \nabla^2 R - 3A_3^{11} \nabla^2 \nabla^2 R + P^F] \delta R dF + \\ + \oint \{-A_3^{11}(R'' + 3\ddot{R})\delta\dot{R} + [P^s - \delta^F \dot{R} + 3A_3^{11}\ddot{R} + 5A_3^{11}\dot{R}''']\delta R\} ds - \sum 2A_3^{11}\dot{R}'\delta R = 0$$

Так же, как и в теории тонких пленок с идеальной адгезией лицевых поверхностей, изложенной в разделе 7.3.2, разрешающее уравнение теории изгиба 2D-структуры содержит не только бигармонический оператор, но и гармонический. Можно говорить о том, что оператор равновесия в теории изгиба 2D-структуры имеет ту же структуру, что и в теории пластин Тимошенко. Жесткости в операторе равновесия теории изгиба 2D-структуры δ^F, A_3^{11} являются адгезионными модулями, по размерности совпадающие с жесткостями теории пластин Тимошенко Gh и $Eh^3/12(1-\nu^2)$.

7.4. К механике хрупкого разрушения.

На основе прикладной модели сред с полями сохраняющихся дислокаций, в рамках так называемой биплоской 2D-постановки, строится аналитическое решение для полубесконечной трещины.

Предполагается, что области применимости классической и градиентных теорий лежат вне области, в которой характерное напряжение равно или превышает критическое (для хрупких материалов – предел прочности).

Сравнительный анализ построенных решений позволяет утверждать, что в окрестности вершины трещины в любой теории имеют место замкнутые траектории равных напряжений, выделяющих область, где соответствующая теория не применима. Её размер определяет неклассический параметр – длина когезионных взаимодействий в рассматриваемой среде [60-64].

На основании проведенного анализа дается обоснование оценки сверху величины характерной длины когезионных взаимодействий в неклассических (градиентных) теориях (теории сред Коссера, теории Тупина, моментной теории Аэро-Кувшинского, «простейшей» теории когезионного поля) через такие стандартные характеристики материалов, как предел прочности/текучности и вязкость разрушения.

Формулировка прикладной теории сред с сохраняющимися дислокациями (ССД) изложена в разделе 5.2. Здесь приводятся только необходимые для дальнейшего изложения сведения. Лагранжиан L теории:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [E_{ijmn} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl} \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}] dV$$

Здесь A - работа внешних объемных P_i^V и поверхностных P_i^F нагрузок, $E_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu \delta_{in} \delta_{jm} + \mu \delta_{im} \delta_{jn}$ - тензор классических модулей теории упругости, μ, λ - коэффициенты Ламе, C^V - неклассический модуль, R_i - вектор перемещений, V - объем тела. Вариационное уравнение, соответствующее требованию стационарности лагранжиана [65]:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [E_{ijrk} (R_r - E_{nmrl} R_{n,lm} / C^V)_{,jk} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \iint [P_i^F - E_{ijrk} n_j (R_r - E_{nmrl} R_{n,lm} / C^V)_{,k}] \delta R_i dF - \\ & - \iint (E_{rqmn} R_{n,qm} / C^V) \delta (E_{rpj} n_p R_{i,j}) dF = 0 \end{aligned} \quad (7.35.)$$

Здесь n_j - единичный орт нормали к поверхности F тела. Определения классического U_i и когезионного u_i перемещений через полное перемещение R_i :

$$\begin{cases} U_i = R_i - E_{ijmn} R_{n,jm} / C^V \\ u_i = -E_{ijmn} R_{n,jm} / C^V \end{cases} \Rightarrow R_i = U_i - u_i$$

Оператор и классические уравнения равновесия:

$$L_{ij}(\dots) = (\mu + \lambda)(\dots)_{,ij} + \mu \delta_{ij} \Delta(\dots) \quad L_{ij} U_j + P_i^V = 0$$

Оператор и уравнения равновесия когезионных взаимодействий:

$$H_{ij}(\dots) = (\mu + \lambda)(\dots)_{,ij} + \mu \delta_{ij} \Delta(\dots) - C^V \delta_{ij}(\dots) \quad H_{ij} u_j + P_i^V = 0$$

Биплоская 2D-постановка для трещины нормального отрыва.

По аналогии с плоской постановкой задач теории упругости, в биплоской постановке отсутствуют две компоненты перемещений. При этом единственная искомая компонента перемещений может зависеть от всех трех, двух, или одной из координат. Биплоская 2D-постановка определяет искомую компоненту перемещений как функцию двух координат $\{x, y\}$. Трещина определена как разрез в координатной плоскости, совпадающий с положительной частью оси ОХ. Объемные нагрузки отсутствуют. Поверхностные нагрузки на берегах трещины отсутствуют.

Обоснование биплоской постановки в рамках классической теории упругости.

Рассмотрим плоскую постановку для ортотропной среды в перемещениях.

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \end{cases}$$

Здесь $\sigma_{xx}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$ - компоненты тензора напряжений в плоской постановке (2D-постановке).

Уравнения закона Гука:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E_x R_{x,x} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = G(R_{y,x} + R_{x,y}) \\ \sigma_{yy} = E_y R_{y,y} \end{cases}$$

Здесь R_x, R_y - компоненты вектора перемещений в плоской постановке (2D-постановке). E_x, G, E_y - компоненты ортотропного тензора модулей для плоской постановки, причем предположено, что коэффициентами Пуассона можно пренебречь.

Граничные условия.

$$\text{При } x = \pm a : \begin{cases} R_x(\pm a, y) = 0 \\ \sigma_{yx}(\pm a, y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{При } y = \pm b : \begin{cases} R_x(x, \pm b) = 0 \\ \sigma_{yy}(x, \pm b) = \sigma_0 \end{cases}$$

$$\text{На берегах трещины при } \begin{cases} 0 < x \leq a \\ y = 0 \end{cases} : \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_x(x, 0 \pm \varepsilon) = 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{yy}(x, 0 \pm \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

$$\text{В вершине трещины при } \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y = 0 \end{cases} : \begin{cases} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} R_x(x, 0 \pm \varepsilon) = 0 \\ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} R_y(x, 0 \pm \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

Исключим из системы уравнений равновесия напряжения.

$$\begin{cases} E_x R_{x,xx} + G(R_{y,xy} + R_{x,yy}) = 0 \\ G(R_{y,xx} + R_{x,xy}) + E_y R_{y,yy} = 0 \end{cases}$$

Предполагая, что модуль $E_x \rightarrow \infty$, т.е. тело несжимаемо в направлении орта X_i , из первого уравнения равновесия получим:

$$\lim_{E_x \rightarrow \infty} R_{x,xx} = 0$$

С учетом того, что на всей границе области $R_x = 0$, следует, что $R_x(x, y) = 0$.

Соответственно, второе уравнение равновесия записывается только относительно оставшейся неизвестной y -компоненты перемещений:

$$GR_{y,xx} + E_y R_{y,yy} = 0$$

Это и есть биплоская (отсутствуют две компоненты перемещений) 2D-постановка (искомая функция – функция двух переменных).

Оставшиеся граничные условия можно сформулировать следующим образом:

$$\text{При } x = \pm a : R_{y,x}(\pm a, y) = 0$$

$$\text{При } y = \pm b : R_{y,y}(x, \pm b) = \sigma_0 / E_y$$

$$\text{На берегах трещины при } \begin{cases} 0 < x \leq a \\ y = 0 \end{cases} : \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{y,y}(x, 0 \pm \varepsilon) = 0$$

$$\text{В вершине трещины при } \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y = 0 \end{cases} : \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} R_y(x, 0 \pm \varepsilon) = 0$$

Фундаментальное решение, соответствующее классическому перемещению:

$$\nabla^2 U = 0$$

Здесь $U = U_i Y_i = U(\bar{x}, y)$ - искомая компонента вектора классических перемещений, Y_j - орт оси ОУ, $\bar{x} = x\sqrt{(2\mu + \lambda)/\mu}$ - «растянутая» координата x , $\nabla^2(\dots) = \partial^2(\dots)/\partial\bar{x}^2 + \partial^2(\dots)/\partial y^2$ - плоский оператор Лапласа в «растянутых» координатах.

Фундаментальное решение, соответствующее когезионному перемещению:

$$l_E^2 \nabla^2 u - u = 0$$

Здесь $u = u_i Y_i = u(\bar{x}, y)$ - искомая компонента вектора когезионных перемещений, $l_E = \sqrt{(2\mu + \lambda)/C^V}$. Фундаментальные решения в рамках прикладной теории сред с сохраняющимися дислокациями, соответствующие классическим и когезионным перемещениям строятся в полярной системе координат $\{r, \varphi\}$.

7.4.1. Классическое решение для трещины.

Классические перемещения:

$$U(r, \varphi) = 2K_I r^{1/2} \text{Cos}(\varphi/2)/(2\mu + \lambda) \quad (7.35)$$

Классические напряжения:

$$\sigma_{yy} = K_I r^{-1/2} \text{Sin}(\varphi/2) \quad (7.36)$$

Предположим, что в некоторой точке среды одновременно: действующие напряжения становятся равными пределу прочности или текучести $\sigma_{yy} = \sigma_c$, а коэффициент интенсивности напряжений становится равным вязкости разрушения $K_I = K_{Ic}$. В дальнейшем будем просто говорить о критическом напряжении σ_c . Рассмотрим кривую, на которой в соответствии с построенным решением напряжения равны критическим:

$$r(\varphi) = \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}\right)^2 \text{Sin}^2(\varphi/2) \quad (7.37)$$

Не трудно убедиться, что кривая (7.37) замкнутая.

Осредняя $r = r(\varphi)$ по углу, можно получить характерный размер d ,

области, ограниченной траекторией равных критических напряжений (7.37):

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (7.38)$$

Обращая полученное соотношение, приходим к соотношению:

$$\sigma_c = K_{Ic} d^{-1/2} \quad (7.39)$$

Выдвинутая гипотеза с необходимостью приводит к следующей трактовке механизма разрушения среды с трещиной: перед вершиной трещины из среды «выкрашивается» область, имеющая форму (7.37). При этом, если она имеет достаточные размеры, чтобы его внутренность являлась «представительным объемом», сценарий разрушения должен не отличаться от сценария разрушения среды в целом. Если же среда имеет внутреннюю структуру (например, поликристаллическую), и размер области достаточно близок к размерам кристаллита, чтобы было возможно отождествить её с кристаллитом, тогда сценарий разрушения должен существенно измениться. Обобщая, аналогичную трактовку можно дать и для мелкодисперсных композитов в целом, если под областью в этом случае понимать единственную армирующую частицу, окруженную матрицей.

Рассмотрим семейство траекторий равных напряжений, имеющих общую точку в вершине трещины, центры тяжести которых лежат на продолжении линии разреза, моделирующего трещину:

$$\sigma_{yy} = \sigma_c \frac{K_I}{K_{Ic}} \left(\frac{r}{d} \right)^{-1/2} \text{Sin}(\varphi/2) \quad (7.40)$$

Можно убедиться в том, что напряжения вне рассмотренной области меньше критических, а внутри – больше. Поэтому приходится закрывать глаза на то, что внутри напряжения выше критических, а в окрестности вершины трещины они вообще не ограничены. Оправданием такой позиции может служить то, что в области, ограниченной траекторией равных напряжений, в соответствии с видом лагранжиана выбранной модели уже нельзя быть уверенными в справедливости уравнений классической теории упругости, и что решение, полученное для этой области в рамках классической

теории упругости, соответствует физической реальности. Действительно, при формулировке потенциальной энергии классической теории упругости как предельного случая (5.2.4) предполагается, что энергия, связанная с градиентами напряжений пренебрежимо мала по сравнению с энергией самих напряжений. Совершенно очевидно, что внутри области, ограниченной траекторией равных напряжений это предположение уже не применимо. В то же время, вне её, на некотором удалении от его контура, по этим же причинам уравнения теории упругости следует считать справедливыми. Соответственно, среди траекторий (7.40) должна существовать такая, с $d = d_{classic}$, что если $d \geq d_{classic}$ - решение в рамках классической теории упругости соответствует экспериментальным данным. При $d < d_{classic}$ будут наблюдаться неклассические эффекты (не совпадающие с решением, полученным в рамках классической теории упругости), т.е. не объяснимые с точки зрения классической теории упругости.

7.4.2. Несингулярная трещина Баренблатта.

Введем безразмерную переменную $z = r/l_E$, тогда решение в рамках теории сред с сохраняющимися дислокациями приводит к следующим соотношениям. Полные перемещения:

$$R(z, \varphi) = l_E \left\{ A_1 z^{-1/2} - C_1 K_{1/2}(z) + \frac{2K_I}{(2\mu + \lambda)l_E^{1/2}} z^{1/2} \right\} \cos(\varphi/2) \quad (7.41)$$

Полные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma(z, \varphi) = & \{ [-A_1 z^{-3/2} + C_1 K_{3/2}(z)] \sin(3\varphi/2) + \\ & + \left[\frac{2K_I}{(2\mu + \lambda)l_E^{1/2}} z^{-1/2} + C_1 K_{1/2}(z) \right] \sin(\varphi/2) \} (2\mu + \lambda)/2 \end{aligned} \quad (7.42)$$

Здесь $K_{1/2}(z)$ и $K_{3/2}(z)$ - функции Макдональда полуцелого порядка.

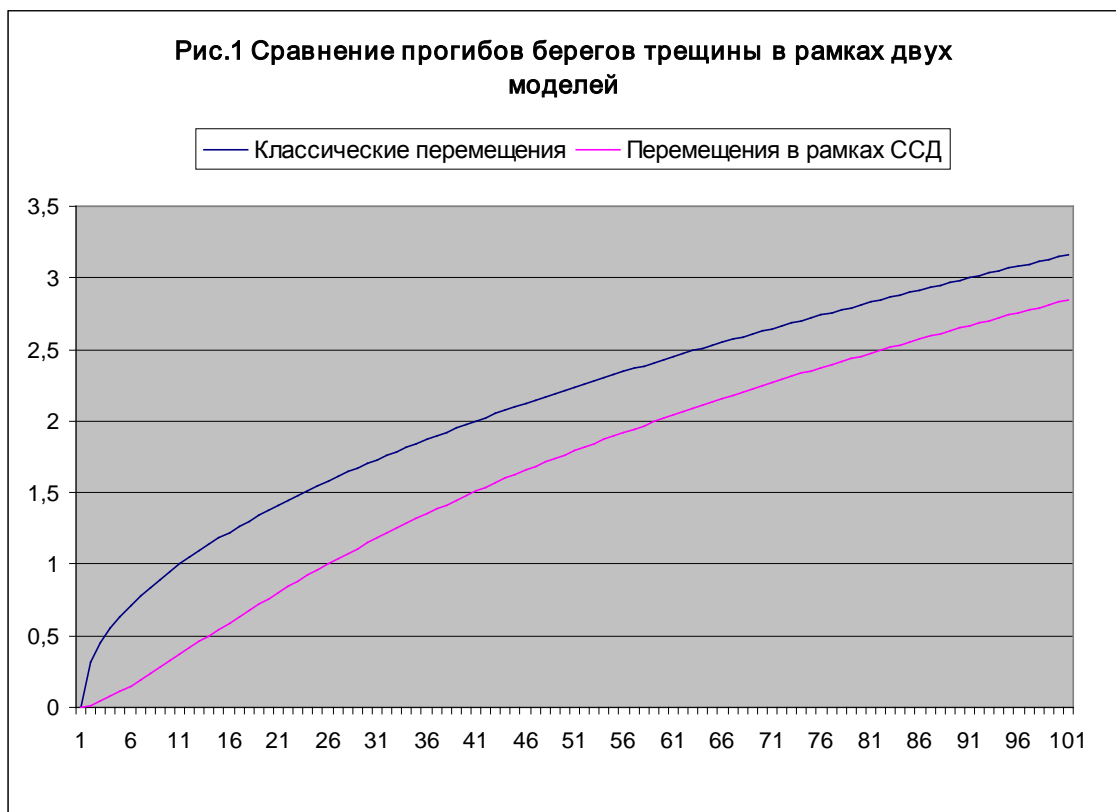
Требование не сингулярности полных перемещений (7.41) в соответствии с (7.35.) выполняется при условии $A_1 = C_1 \sqrt{\pi/2}$. Требование не сингулярности

полных напряжений (7.42) в соответствии с (7.35.) так же удастся выполнить, при $C_1\sqrt{\pi/2} = -2K_I l_E^{-1/2} / (2\mu + \lambda)$. В итоге, выражения для полных перемещений и полных напряжений становятся не сингулярными.

Выражения для перемещений приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} R(z, \varphi) &= \frac{2K_I l_E^{1/2}}{(2\mu + \lambda)} z^{1/2} \left\{ \frac{e^{-z} - 1 + z}{z} \right\} \text{Cos}(\varphi/2) \\ U(z, \varphi) &= -\frac{2K_I l_E^{1/2}}{(2\mu + \lambda)} (z^{-1/2} - z^{1/2}) \text{Cos}(\varphi/2) \\ u(z, \varphi) &= -\frac{2K_I l_E^{1/2}}{(2\mu + \lambda)} z^{-1/2} e^{-z} \text{Cos}(\varphi/2) \end{aligned} \quad (7.43)$$

Здесь было использовано свойство функций Макдональда полуцелого порядка, позволяющее выразить их через элементарные функции. Не трудно обнаружить, что в отличие от классической трещины, угол раствора которой в вершине равен π , в неклассической трещине угол раствора равен нулю.



Также имеют место и отличия в кривизне берегов трещин: если кривизна классической монотонно убывает, оставаясь все время отрицательной, то кривизна неклассической меняет знак, имея точку перегиба при $r = 1,067l_E$.

Примечательно, что расстояние от точки перегиба до вершины трещины практически совпадает с неклассическим параметром среды l_E , т.е. тоже может служить характеристикой материала. Этот факт может служить обоснованием для экспериментального определения этой единственной неклассической характеристики материала среды (в рассмотренной здесь модели). Представляется, что расстояние от точки перегиба до вершины трещины или близкий к нему неклассический параметр среды l_E (характерная длина когезионных взаимодействий) являются естественным эталоном длины в задачах о не сингулярной трещине.

Интересно отметить, что фундаментальное решение, соответствующее классической части перемещений (7.43) приобретает сингулярность порядка $z^{-1/2}$, которая полностью компенсируется неклассической частью решения – когезионным перемещением.

$$u(z, \varphi) = -\frac{2K_I l_E^{1/2}}{(2\mu + \lambda)} [z^{-1/2} - z^{1/2} + O(z^{3/2})] \text{Cos}(\varphi/2)$$

В результате, полные перемещения не имеют сингулярности.

Вернемся к выражению для полного напряжения. Оно приводится к следующему виду:

$$\sigma(z, \varphi) = \frac{K_I}{l_E^{1/2}} z^{1/2} \left\{ \frac{[z(1 - e^{-z}) - (e^{-z} - 1 + z)]}{z^2} \text{Sin}(3\varphi/2) + \frac{(1 - e^{-z})}{z} \text{Sin}(\varphi/2) \right\} \quad (7.44)$$

Траектории критических напряжений так же, как и в классическом случае, выделяют область, в которой напряжения превышают критические. Определим большие значения z так, что для них выполняется неравенство: $z^{-1} \ll 1$. Соответственно, уравнение траектории критических напряжений для этой области упрощается, и может быть записано явно:

$$z = \left(\frac{K_{In}}{\sigma_n l_E^{1/2}} \right)^2 \text{Sin}^2(\varphi/2) \quad (7.45)$$

Обозначим:

$$q = \frac{K_{Ic}}{\sigma_c l_E^{1/2}} \quad (7.46)$$

Таким образом, установлено [63], что решение в рамках классической теории упругости (7.37) и в рамках теории сред с сохраняющимися дислокациями (7.45) совпадают вне области, характерный размер которой равен $d_{classic} = (K_{Ic} / \sigma_c)^2$. Вторая подобласть – область умеренных z . Для этой области, как установлено выше, классическая теория упругости уже не применима. Уравнение траектории критических напряжений из выражения (7.44) уже не удается записать явно. В неявном виде это уравнение имеет вид:

$$f(z, \varphi, q) = 0 \quad (7.47)$$

Здесь $f(z, \varphi, q) = qz^{1/2} \left\{ \left[\frac{(1 - e^{-z})}{z} - \frac{(e^{-z} - 1 + z)}{z^2} \right] \sin(3\varphi/2) + \frac{(1 - e^{-z})}{z} \sin(\varphi/2) \right\} - 1$.

Из (7.47) для каждого фиксированного q можно найти z явно, решая для соответствующих углов φ_i трансцендентное уравнение относительно z_i . Здесь использовался шаг по углу, равный $\pi/18$. В результате получим:

$$z = z(\varphi, q) \quad (7.48)$$

Из (7.48) следует, что второй особенностью уравнения для траектории критических напряжений (7.47) является то, что форма траектории существенным образом зависит от параметра q (7.46), т.е. от неклассических свойств материала среды - характерной длины когезионных взаимодействий l_E . На рисунках, приведенных ниже, представлены области, выделенные траекториями критических напряжений.

Рис.2 Траектория критических напряжений при $q=3,0$

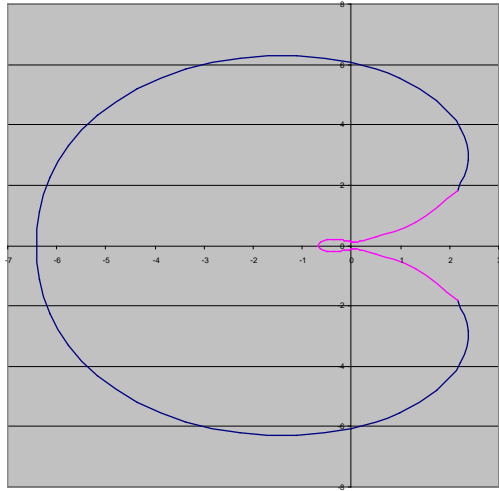


Рис.3 Траектория критических напряжений при $q=2,9$

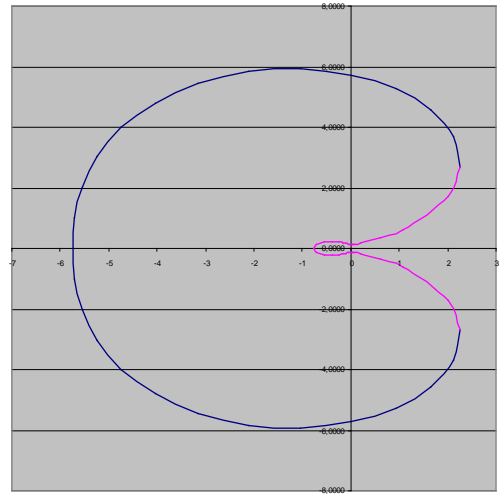


Рис.4 Траектория критических напряжений при $q=2,8$

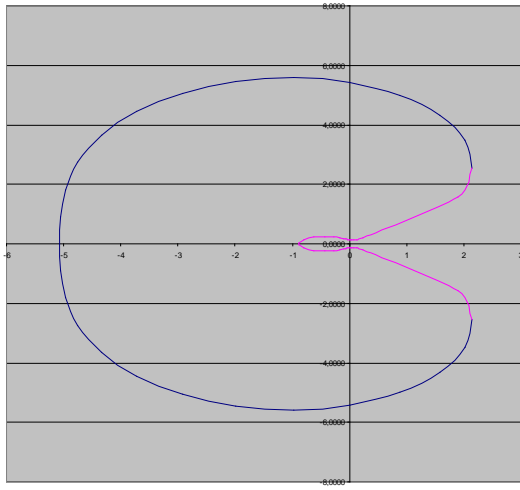


Рис.5 Траектория критических напряжений при $q=2,7$

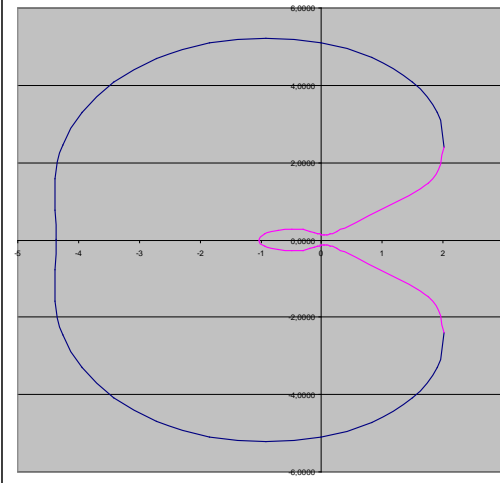


Рис.6 Траектория критических напряжений при $q=2,6$

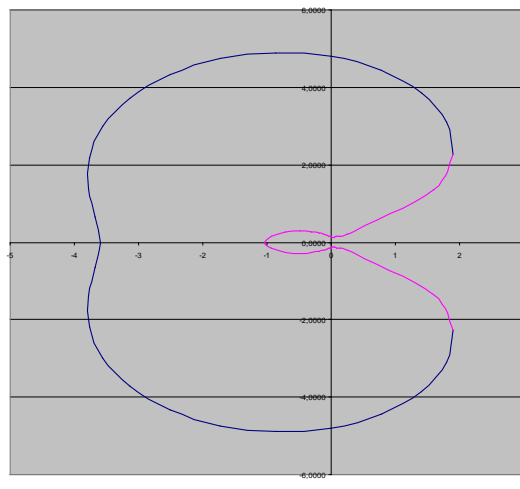
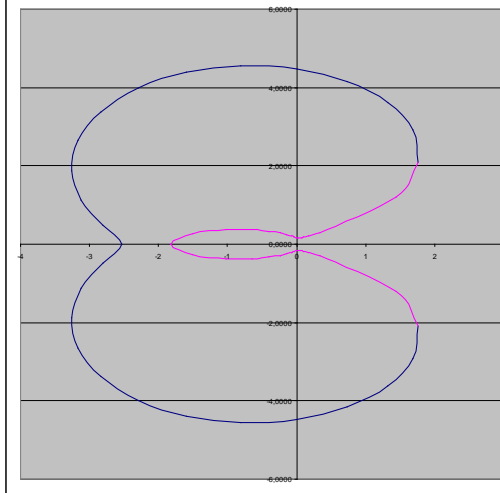
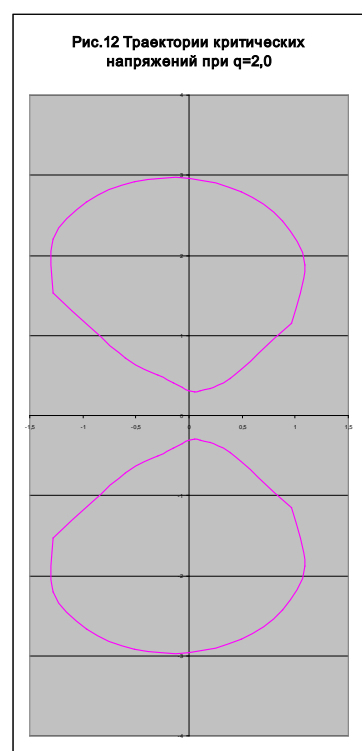
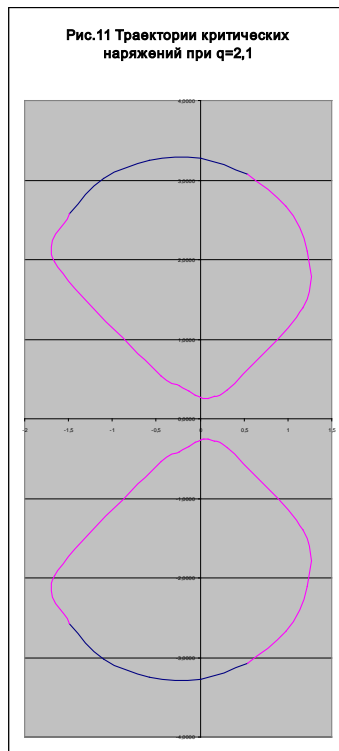
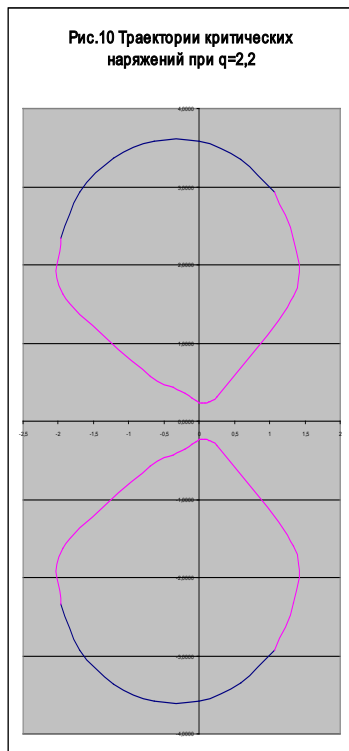
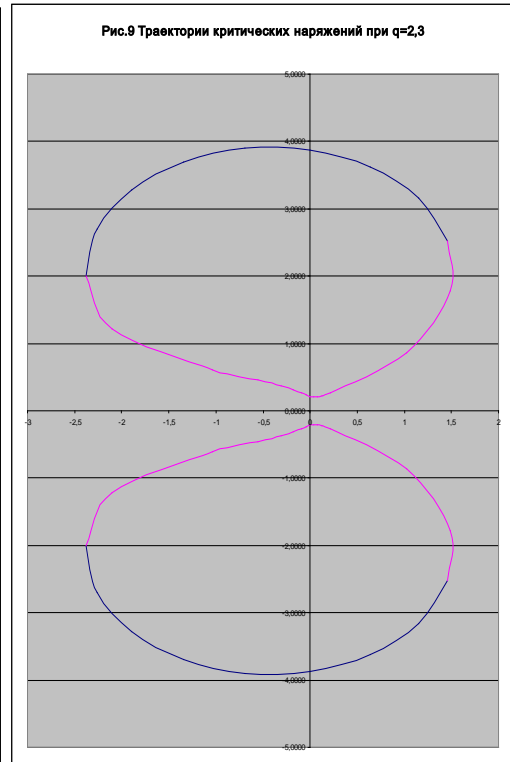
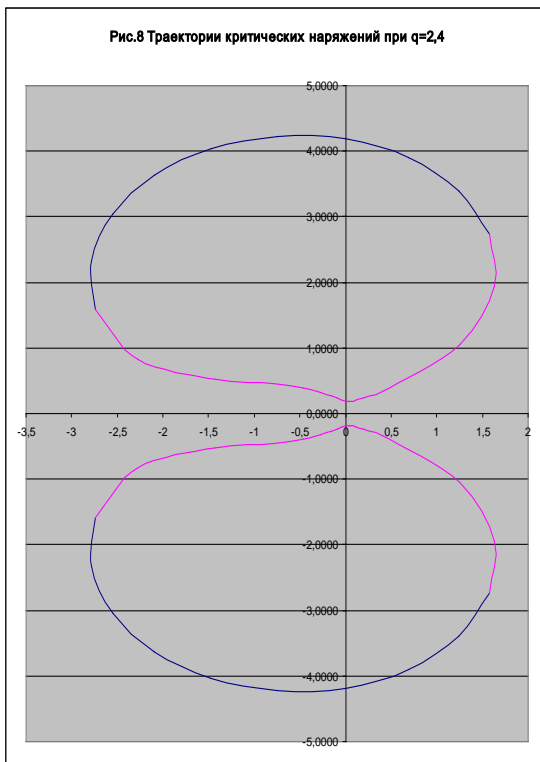


Рис.7 Траектория критических напряжений при $q=2,5$





Определим то значение параметра $q = q_c$, при котором происходит качественный скачок – вместо одной области разрушения в среде симметрично плоскости трещины образуются две. Математически этот случай эквивалентен тому, что при $\varphi = \pi$ уравнение (7.47) имеет не два корня, а один. Анализ этого условия приводит к тому, для среды,

характеризующейся параметром $q_c = 2.489$, существует единственный корень $z_c = 2.149$. Соответственно, при $q > q_c$ траектория критических напряжений является замкнутой, не самопересекающейся, уравнение (7.47) при $\varphi = \pi$ имеет два корня. При $q = q_c$ траектория является самопересекающейся, уравнение (7.47) при $\varphi = \pi$ имеет один корень. При $q < q_c$ - в верхней и нижней полуплоскости имеют место две, симметричные относительно оси ОХ, замкнутые траектории, уравнение (7.47) при $\varphi = \pi$ не имеет корней [66-67].

7.4.3. Обобщения критерия Гриффитса

В этом разделе исследованы возможности «экспансии» развиваемой здесь теории сред с сохраняющимися дислокациями в область применимости механики хрупкого разрушения. В качестве исходной модели выбрана корректная частная модель сред с сохраняющимися дислокациями. Сформулирована потенциальная энергия, состоящая из объёмной и поверхностной частей, и суммарной потенциальной энергии ребер [27]. Сформулирован соответствующий лагранжиан. Используя определения эффективной свободной дисторсии в 3D, в 2D и в 1D, а также эффективной 2D-плотности вектора Бюргерса Ξ_i , лагранжиан можно представить в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned}
 L = & A - \frac{1}{2} \iiint \left\{ C_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{e(3D)} d_{ij}^{e(3D)} + C_{ijnm}^{33} \Xi_{nm} \Xi_{ij} \right\} dV - \\
 & - \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \bar{A}_{ijnm}^{22} d_{nm}^{e(2D)} d_{ij}^{e(2D)} + A_{ij}^{33} \Xi_i \Xi_j \right\} dF - \\
 & - \frac{1}{2} \sum \left\{ B_{in} s_j s_m \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + B_{in}^{22} s_j s_m d_{nm}^{e(1D)} d_{ij}^{e(1D)} \right\} ds
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Вариационное уравнение в кинематических переменных будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \iiint \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi}) + P_i^V \right] \delta R_i + \left[C_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} + C_{akip}^{33} \mathcal{E}_{nmk} \mathcal{E}_{pjb} \frac{\partial^2 d_{an}^{\Xi}}{\partial x_b \partial x_m} \right] \delta d_{ij}^{\Xi} \right\} dV + \\
& + \iint \left\{ \left[P_i^F - (C_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi}) n_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijnm}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - A_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi} - A_{ak}^{13} \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{nmb} n_b \frac{\partial d_{an}^{\Xi}}{\partial x_m}) \right] \delta R_i + \right. \\
& + \left[A_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - A_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} - (C_{akip}^{33} \mathcal{E}_{nmk} \mathcal{E}_{pjb} - A_{ak}^{23} \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{nmb}) n_b \frac{\partial d_{an}^{\Xi}}{\partial x_m} + \right. \\
& - \left. \mathcal{E}_{jdk} n_k \frac{\partial}{\partial x_d} (A_{ib}^{13} \mathcal{E}_{pqb} \frac{\partial R_p}{\partial x_q} + A_{ib}^{23} \mathcal{E}_{pqb} d_{pq}^{\Xi} - A_{pi}^{33} \mathcal{E}_{abq} n_q \frac{\partial d_{pa}^{\Xi}}{\partial x_b}) \right] \delta d_{ij}^{\Xi} \left. \right\} dF + \\
& + \sum \int \left\{ - \left[A_{ijnm}^{11} v_j \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - A_{ijnm}^{12} v_j d_{nm}^{\Xi} - A_{ak}^{13} v_j \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{nmb} n_b \frac{\partial d_{an}^{\Xi}}{\partial x_m} - s_j \frac{\partial}{\partial x_j} (B_{in}^{11} s_m \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - B_{in}^{12} s_m d_{nm}^{\Xi}) \right] \delta R_i + \right. \\
& + \left. \left[(B_{in}^{12} s_m + A_{ib}^{13} \mathcal{E}_{nmb}) \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + (-B_{in}^{22} s_m + A_{ib}^{23} \mathcal{E}_{nmb}) d_{nm}^{\Xi} - A_{pi}^{33} \mathcal{E}_{abq} n_q \frac{\partial d_{pa}^{\Xi}}{\partial x_b} \right] \delta (d_{ij}^{\Xi} s_j) \right\} ds - \\
& - \sum (B_{in}^{11} s_m \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - B_{in}^{12} s_m d_{nm}^{\Xi}) \delta R_i = 0
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Таким образом, вариационное уравнение дает те же уравнения Эйлера, что и простейшая теория сред с сохраняющимися дислокациями.

Количество естественных граничных условий - три «классических» и шесть неклассических - так же сохраняется.

7.4.3.1. Первая энергетическая теорема.

Пусть R_i и d_{ij}^{Ξ} удовлетворяют краевой задаче в форме (7.52). Умножим уравнения равновесия сил на компоненты вектора перемещений и проинтегрируем по объёму среды.

$$\iiint \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V \right) R_i dV = 0$$

Преобразуем это выражение с учетом того, что R_i и d_{ij}^{Ξ} - равновесное кинематическое состояние:

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V \right) R_i dV = A - \iiint \sigma_{ij} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV - \iint a_{ij}^0 \frac{\partial R_i}{\partial x_k} (\delta_{jk} - n_j n_k) dF - \sum \int f_i \frac{\partial R_i}{\partial x_j} s_j ds = 0 \right.$$

С помощью уравнений закона Гука заменим силовые факторы в полученном

соотношении соответствующими кинематическими факторами:

$$\begin{aligned}
 A + \iiint C_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV + \iint [A_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi} + A_{pq}^{13} (\Xi_{pk} n_k) \mathcal{E}_{ijq}] \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF = \\
 = \iiint C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV + \iint A_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF + \sum \oint (B_{ij}^{11} s_n s_m) \frac{\partial R_i}{\partial x_n} \frac{\partial R_j}{\partial x_m} ds
 \end{aligned} \quad (7.53)$$

По условию, силовые факторы $C_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi}$ в 3D, $A_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi}$ и $A_{pq}^{13} (\Xi_{pk} n_k) \mathcal{E}_{ijq}$ в 2D, определяющие поврежденность идеальной среды, известны из решения краевой задачи (7.52). Можно трактовать их произведения с $\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ как работу

повреждения соответственно в 3D и в 2D, т.е. как работу дополнительных внешних силовых факторов. В то же время слагаемые правой части (7.53) можно трактовать как потенциальную энергию деформации идеальной (без дислокаций) среды, с учетом её поверхностных и «рёберных» свойств. Поэтому соотношению (7.53) можно придать вид теоремы Клапейрона - «В состоянии равновесия работа внешних (по отношению к идеальной среде) сил A^R равна удвоенной потенциальной энергии U^R идеальной среды»:

$$A^R = 2U^R \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned}
 A^R &= A + A^{\Xi} \\
 A^{\Xi} &= \iiint C_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV + \iint [A_{ijmn}^{12} d_{nm}^{\Xi} + A_{pq}^{13} (\Xi_{pk} n_k) \mathcal{E}_{ijq}] \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF \\
 U^R &= \frac{1}{2} \iiint C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV + \frac{1}{2} \iint A_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF + \frac{1}{2} \sum \oint (B_{ij}^{11} s_n s_m) \frac{\partial R_i}{\partial x_n} \frac{\partial R_j}{\partial x_m} ds
 \end{aligned}$$

7.4.3.2. Вторая энергетическая теорема.

Пусть R_i и d_{ij}^{Ξ} удовлетворяют краевой задаче теории в форме (7.52). Умножим уравнения равновесия моментов на тензор свободной дисторсии и проинтегрируем по объёму среды.

$$\iiint \left(\frac{\partial m_{in}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} + \sigma_{ij}^{\Xi} \right) d_{ij}^{\Xi} dV = 0$$

Преобразуем это выражение с учетом того, что R_i и d_{ij}^{Ξ} - равновесное кинематическое состояние, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве первой теоремы. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \iiint C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV + \iint [A_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi} + A_{pq}^{13} (\Xi_{pk} n_k) \mathcal{E}_{ijq}] \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dF = \\ & = \iiint \{ C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33} \Xi_{ij} \Xi_{nm} \} dV + \\ & + \iint \{ A_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} - A_{ij}^{23} \mathcal{E}_{pq} d_{pq}^{\Xi} (\Xi_{ik} n_k) + A_{in}^{33} (\Xi_{ij} n_j) (\Xi_{nm} n_m) \} dF \end{aligned} \quad (7.55)$$

Обратим внимание на то, что в левой части полученного соотношения стоит выражение, совпадающее с A^{Ξ} . Однако, толкование этого выражения в соотношении (7.55) иное, чем в (7.53). Действительно, рассмотрим среду с сохраняющимися дислокациями как мелкодисперсный композит, в которой роль матрицы играет идеальная среда, а роль включений играют дислокации – среда дефектов. Тогда в (7.53) A^{Ξ} отражает воздействие среды дефектов на идеальную среду посредством силовых факторов $C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi}$ в 3D, $A_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi}$ и $A_{pq}^{13} (\Xi_{pk} n_k) \mathcal{E}_{ijq}$ в 2D. В то же время в (7.55) A^{Ξ} отражает воздействие идеальной

среды на среду дефектов посредством силовых факторов $C_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ в 3D,

$A_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и $A_{pq}^{13} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijq}$ в 2D. Равенство работ перечисленных силовых факторов

на соответствующих обобщенных перемещениях определяется справедливостью третьего закона Ньютона в формулировке: «Работа сил действия равна работе сил противодействия».

Поэтому соотношению (7.55) можно так же придать вид теоремы Клапейрона - «В состоянии равновесия работа всех внешних (по отношению к среде дефектов) сил A^{Ξ} равна удвоенной потенциальной энергии U^{Ξ} среды дефектов»:

$$A^{\Xi} = 2U^{\Xi} \quad (7.56)$$

$$U^{\Xi} = \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33} \Xi_{ij} \Xi_{nm} \} dV + \\ + \frac{1}{2} \iint \{ A_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} - A_{ij}^{23} \mathcal{E}_{pqj} d_{pq}^{\Xi} (\Xi_{ik} n_k) + A_{in}^{33} (\Xi_{ij} n_j) (\Xi_{nm} n_m) \} dF$$

7.4.3.3. Теорема Клапейрона для дефектной среды.

Трактовка дефектной среды как мелкодисперсного композита, в котором роль матрицы играет идеальная среда, а роль включений играет среда дефектов – полей трех типов дислокаций, позволила дать определения потенциальных энергий U^R , U^{Ξ} для каждой фазы такого композита. Одновременно билинейные слагаемые A^{Ξ} трактуются как работа силовых факторов одной среды на обобщенных перемещениях другой среды. Билинейные слагаемые A^{Ξ} можно также трактовать и как удвоенную потенциальную энергию взаимодействия фаз такого композита $A^{\Xi} = 2U^{R\Xi}$. Согласно такой трактовке в соответствии с (7.51) потенциальная энергия дефектной среды приобретает тогда следующую структуру:

$$U = U^R - 2U^{R\Xi} + U^{\Xi},$$

а сумма доказанных утверждений первой и второй теорем приводит к доказательству теоремы Клапейрона для дефектной среды в целом:

$$A = 2U \tag{7.57}$$

Таким образом, доказана теорема Клапейрона для дефектной среды.

7.4.3.4. Варианты обобщения критерия Гриффитса.

Утверждение, связывающее потенциальную энергию деформации среды и энергию образования новой поверхности в равновесном состоянии, постулировано Гриффитсом [] в виде критерия начала движения трещины.

Обобщением критерия Гриффитса будем называть доказательство утверждения, связывающего потенциальные энергии фаз

дефектной среды в равновесном состоянии:

$$A = 2(U^R - U^\Xi) \quad (7.58)$$

Утверждение (7.58) является разностью утверждений первой (7.54) и второй (7.56) доказанных выше теорем, что приводит к обобщению критерия Гриффитса для дефектной среды.

Согласно представлениям механики хрупкого разрушения [], величина

$$U^R - \frac{1}{2}A = \mathcal{E} \quad (7.59)$$

является источником высвобождающейся потенциальной энергии (с учетом работы раскрытия трещины). Величина U^Ξ является стоком этой потенциальной энергии. Обычно, в соответствии с гипотезой Гриффитса, ее связывают только с образованием новой поверхности, постулируя $U^\Xi = \gamma^{2D}\Sigma$, где γ^{2D} - физическая постоянная поверхности дефектной среды, равная 2D-плотности потенциальной энергии образования единицы «новой» поверхности, Σ - площадь «новой» поверхности. В данном случае имеется возможность естественного определения «новой геометрии» в соответствии с (7.56):

$$U^\Xi = \gamma^{3D}\Omega + \gamma^{2D}\Sigma \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{1}{2\gamma^{2D}} \iint \left\{ (A_{ijnm}^{22} - \frac{1}{4}A_{ab}^{23}A_{bc}^{-33}A_{cd}^{23}\mathcal{E}_{ija}\mathcal{E}_{nmd})d_{nm}^\Xi d_{ij}^\Xi + \right. \\ & \left. + A_{in}^{33}(\Xi_{ij}n_j - \frac{1}{2}A_{ik}^{-33}A_{kj}^{23}\mathcal{E}_{pq}d_{pq}^\Xi)(\Xi_{nm}n_m - \frac{1}{2}A_{nl}^{-33}A_{lf}^{23}\mathcal{E}_{rsf}d_{rs}^\Xi) \right\} dF \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\Omega = \frac{1}{2\gamma^{3D}} \iiint \left\{ C_{ijnm}^{22}d_{nm}^\Xi d_{ij}^\Xi + C_{ijnm}^{33}\Xi_{ij}\Xi_{nm} \right\} dV \quad (7.62)$$

где γ^{3D} - физическая постоянная дефектной среды, равная 3D-плотности потенциальной энергии образования единицы «нового» объема, Ω - «новый» объем. Так как размерности γ^{2D} и $\tilde{A}_{ijnm}^{22} = (A_{ijnm}^{22} - \frac{1}{4}A_{ab}^{23}A_{bc}^{-33}A_{cd}^{23}\mathcal{E}_{ija}\mathcal{E}_{nmd})$ одинаковые, без ущерба для общности можно положить:

$$\gamma^{2D} = \sqrt{\tilde{A}_{ijnm}^{22}\tilde{A}_{ijnm}^{22}} \quad (7.63)$$

То же самое можно сделать и для γ^{3D} и C_{ijnm}^{22} :

$$\gamma^{3D} = \sqrt{C_{ijnm}^{22} C_{ijnm}^{22}} \quad (7.64)$$

Таким образом, утверждение (7.58), доказанное с помощью первой и второй теорем, с учетом определений (7.59)-(7.64) по существу является обобщением критерия Гриффитса для дефектной среды:

$$\mathcal{E} = \Omega \sqrt{C_{ijnm}^{22} C_{ijnm}^{22}} + \Sigma \sqrt{\tilde{A}_{ijnm}^{22} \tilde{A}_{ijnm}^{22}}$$

«Высвобождающаяся при повреждении идеальной среды потенциальная энергия деформации \mathcal{E} расходуется на образование новой геометрии: нового объема Ω и новой поверхности Σ ».

Конечно же, обобщение критерия Гриффитса будет иметь иное содержание при ином определении или толковании слагаемых потенциальной энергии среды с сохраняющимися дислокациями. В частности, излагаемая здесь теория допускает и такую формулировку:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & [\Omega \sqrt{C_{ijnm}^{22} C_{ijnm}^{22}} + \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm}^{33} \Xi_{ij} \Xi_{nm} dV] + \\ & + [\Sigma \sqrt{\tilde{A}_{ijnm}^{22} \tilde{A}_{ijnm}^{22}} + \frac{1}{2} \iint A_{in}^{33} (\Xi_{ij} n_j - \frac{1}{2} A_{ik}^{-33} A_{kj}^{23} \mathcal{E}_{pqj} d_{pq}^{\Xi}) (\Xi_{nm} n_m - \frac{1}{2} A_{nl}^{-33} A_{lf}^{23} \mathcal{E}_{rsf} d_{rs}^{\Xi}) dF] \end{aligned}$$

$$\Omega = \frac{1}{2\gamma^{3D}} \iiint C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} dV$$

$$\Sigma = \frac{1}{2\gamma^{2D}} \iint \tilde{A}_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi} d_{ij}^{\Xi} dF$$

«Высвобождающаяся при повреждении идеальной среды потенциальная энергия деформации \mathcal{E} расходуется не только на образование новой геометрии: нового объема Ω и новой поверхности Σ , но и на увеличение потенциальных энергий дислокаций в объеме и на поверхности».

Здесь хотелось лишь показать, что тот или иной вариант обобщения критерия Гриффитса открывает возможность и показывает перспективность объединения механики сплошной среды и механики хрупкого разрушения в рамках механики дефектной среды.

7.5. Модель изменения механических свойств материалов при больших градиентах деформаций.

Еще одним направлением «экспансии» развиваемой здесь механики дефектных сред является моделирование изменения механических свойств материала при больших градиентах деформаций [51], [68-75]. В качестве исходной модели использована «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями, в рамках которой исследуется эволюция полей дефектов при нагружении среды.

Вместо тензора свободной дисторсии в качестве основной кинематической переменной вводится тензор относительной поврежденности второго ранга. С помощью такой замены в рамках «простейшей» теории сред с сохраняющимися дислокациями удастся сформулировать и доказать теорему, устанавливающую эквивалентность градиентных моделей и модели классической неоднородной среды. Тензор модулей такой классической неоднородной среды представлен в виде явной функции компонентов тензора относительной поврежденности и компонентов тензоров модулей, отражающих дислокационные свойства среды. Показано, что области, в которых тензор модулей поврежденной среды существенно зависит от координат, локализуются вокруг поверхностей, линий и точек возмущения, и экспоненциально затухает по мере удаления от них. Предложен алгоритм реализации модели изменения механических свойств. Он основан на решении связанной задачи механики сред с сохраняющимися дислокациями с искомыми полями перемещений и свободных дисторсий, и последующей оценкой влияния поврежденности на эффективные свойства.

7.5.1. Теорема эквивалентности.

Формулировка теоремы: «Модель «простейшей» среды с

сохраняющимися дислокациями может быть представлена как классическая модель неоднородной среды» [41].

Рассмотрим лагранжиан L «простейшей» модели сред с сохраняющимися дислокациями:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{ C_{ijnm}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2C_{ijnm}^{12} R_{i,j} d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{22} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{BL} \Xi_{nm} \Xi_{ij} \} dV \quad (7.6.1.1)$$

Здесь R_i - вектор перемещений, $R_{i,j}$ - тензор стесненной дисторсии, d_{ij}^{Ξ} - тензор свободной дисторсии, $\Xi_{ij} = d_{in,m}^{\Xi} \mathcal{E}_{nmj}$ - тензор дислокаций Де Вита, \mathcal{E}_{nmj} - тензор Леви-Чивиты, C_{ijnm}^{pq} - тензоры модулей дефектной среды.

$$\begin{aligned} C_{ijnm}^{pq} = & \\ & = (2\mu^{pq} / 3 + \lambda^{pq}) \delta_{ij} \delta_{nm} + \\ & + 2\mu^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} / 2 + \delta_{im} \delta_{jn} / 2 - \delta_{ij} \delta_{nm} / 3) + \\ & + \chi^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) \\ & \text{=====} \end{aligned} \quad (7.6.1.2)$$

$$\begin{aligned} (2\mu^{pq} / 3 + \lambda^{pq}) & = K^{pq} = C_{ijnm}^{pq} \delta_{ij} \delta_{nm} / 9 \\ \mu^{pq} & = C_{ijnm}^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} / 2 + \delta_{im} \delta_{jn} / 2 - \delta_{ij} \delta_{nm} / 3) / 10 \\ \chi^{pq} & = C_{ijnm}^{pq} (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) / 12 \\ E^{pq} & = (2\mu^{pq} + \lambda^{pq}) = C_{ijnm}^{pq} [\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{ij} \delta_{nm}] / 15 \end{aligned}$$

В отличие от «простейшей» модели сред с сохраняющимися дислокациями, в которой основными неизвестными являются компоненты вектора перемещений R_i и тензора свободной дисторсии d_{ij}^{Ξ} , будет удобно вместо тензора свободной дисторсии ввести другую кинематическую переменную - тензор относительной поврежденности t_{ij} . Определим его так, что:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{\Xi} & = t_{ia} R_{a,j} \\ \Xi_{ij} & = d_{in,m}^{\Xi} \mathcal{E}_{nmj} = t_{ia,m} \mathcal{E}_{nmj} R_{a,n} + t_{ia} R_{a,jm} \mathcal{E}_{nmj} = t_{ia,k} \mathcal{E}_{bkj} R_{a,b} \end{aligned} \quad (7.6.1.3)$$

Подставляя (7.6.1.3) в лагранжиан (7.6.1.1), получим:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} dV \quad (7.6.1.4)$$

В результате, модель сред с сохраняющимися дислокациями (7.6.1.1) приведена к виду модели классической неоднородной среды (7.6.1.4). В ней

тензор модулей C_{ijmn} становится тензорным полем, отличным от постоянного поля там, где существенным является вклад составляющих, содержащих t_{ij} . Эффективные модули $\lambda = \lambda(t_{ij}, t_{ij,k})$, $\mu = \mu(t_{ij}, t_{ij,k})$ и $\chi = \chi(t_{ij}, t_{ij,k})$ эквивалентной классической среды в соответствии с (7.6.1.4) выражаются через тензор относительной поврежденности t_{ij} следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= \\ &= (2\mu/3 + \lambda)\delta_{ij}\delta_{nm} + 2\mu(\delta_{in}\delta_{jm}/2 + \delta_{im}\delta_{jn}/2 - \delta_{ij}\delta_{nm}/3) + \chi(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}) = (7.6.1.5) \\ &= C_{ijmn}^{11} + 2C_{ijqm}^{12}t_{qn} + C_{piqm}^{22}t_{pi}t_{qn} + (C_{abcd}^{BL}\mathcal{E}_{jtb}\mathcal{E}_{msd})t_{ai,t}t_{cn,s} \end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что эффективные модули $\lambda = \lambda(t_{ij}, t_{ij,k})$, $\mu = \mu(t_{ij}, t_{ij,k})$ и $\chi = \chi(t_{ij}, t_{ij,k})$ эквивалентной классической среды являются функциями тензоров относительной поврежденности и его градиентов, а также двенадцати классических и неклассических параметров материала среды, входящих в состав тензоров модулей $C_{ijmn}^{11}, C_{ijqm}^{12}, C_{piqm}^{22}, C_{abcd}^{BL}$.

Уравнения Эйлера лагранжиана (7.6.1.3), записанные в переменных R_i и t_{ij} :

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint \{ [C_{ijmn}R_{n,mj} + C_{ijmn,j}R_{n,m} + P_i^V] \delta R_i + \\ &+ [-R_{i,j}(C_{ijqm}^{12} + C_{piqm}^{22}t_{pi}) + (C_{abcd}^{33}\mathcal{E}_{jtb}\mathcal{E}_{msd})(R_{i,j}t_{ai,t})_{,s}] R_{n,m} \delta t_{qn} \} dV + \\ &+ \iint \{ [P_i^F - C_{ijmn}n_j R_{n,m}] \delta R_i - (C_{abcd}^{33}\mathcal{E}_{jtb}\mathcal{E}_{msd}n_s)t_{ai,t}R_{i,j}R_{n,m} \delta t_{qn} \} dF = 0 \end{aligned}$$

Области, в которых тензорное поле эффективных модулей зависит от координат, можно трактовать как некоторые межфазные слои с переменными по координатам упругими свойствами, что и отражено в структуре тензорного поля C_{ijmn} . Переменные по координатам упругие свойства, определяемые концентрацией сохраняющихся дислокаций, в областях таких межфазных слоев, можно описать с помощью следующего алгоритма.

Строится решение связанной задачи механики сред с сохраняющимися дислокациями (7.6.1.1) с искомыми полями R_i и d_{ij}^{Ξ} . По полученным в качестве решения связанной краевой задачи полям R_i и d_{ij}^{Ξ} вычисляется тензор стесненной дисторсии $R_{i,j}$, обратный ему тензор d_{kj}^{-1} из системы

$R_{i,k} d_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$, и, наконец, тензор относительной поврежденности $t_{ij} = d_{ik}^{\bar{z}} d_{kj}^{-1}$. По вычисленному тензору t_{ij} в соответствии с (7.6.1.3) путем дифференцирования строится тензор $t_{ij,k}$. Наконец, в соответствии с (7.6.1.5), по известным t_{ij} и $t_{ij,k}$ строится тензорное поле C_{ijnm} .

7.6. К теории неоднородного межфазного слоя.

В предыдущем разделе предложена модель изменения механических свойств механических свойств среды. При этом структура тензора эффективных модулей C_{ijnm} такова, что существенные изменения его по координатам имеют место там, где велики градиенты тензора относительной поврежденности t_{ik} или тензора свободной дисторсии d_{ij}^2 . Такое положение дел имеет место в гетерогенных структурах и композитах, благодаря наличию развитой системы поверхностей контакта разных фаз с неизбежным появлением высоких градиентов дисторсий. Как следствие, в межфазных слоях также должны моделироваться эффекты переменности механических свойств. В настоящем разделе теория межфазного слоя развивается в этом направлении, и исследуются некоторые прикладные аспекты теории неоднородного межфазного слоя.

7.6.1. Теорема о межфазном слое.

Представим лагранжиан (7.6.1.4) модели неоднородной классической среды в следующем виде:

$$L = A - \frac{1}{2V} \iiint C_{ijnm} dV \iiint R_{i,j} R_{n,m} dV - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijnm} - \frac{1}{V} \iiint C_{ijnm} dV] [R_{i,j} R_{n,m} - \frac{1}{V} \iiint R_{i,j} R_{n,m} dV] dV \quad (7.7.1.1)$$

Введем обозначения:

$$E_{ijnm} = \frac{1}{V} \iiint C_{ijnm} dV \quad \varepsilon_{ijnm} = \frac{1}{V} \iiint R_{i,j} R_{n,m} dV \quad (7.7.1.2)$$

Потенциальная энергия в лагранжиане (7.7.1.1) представлена в виде двух слагаемых. Первое слагаемое определяет потенциальную энергию исходной среды с осредненным по объему тела тензором модулей E_{ijnm} . Второе слагаемое определяет потенциальную энергию исходной среды с тензором модулей, равным уклонению тензорного поля C_{ijnm} от его осредненного по объему значения. Действительно, в соответствии с (7.7.1.2) интеграл по объему тела от разности $(C_{ijnm} - E_{ijnm})$ равен нулю. Обратим внимание на то, что компоненты тензора эффективных модулей E_{ijnm} не зависят от координат с одной стороны, а с другой стороны являются функционалами тензорного поля t_{ij} в соответствии с (7.7.1.2).

Трактовка слагаемых потенциальной энергии, данная выше, дает возможность выдвинуть гипотезу о том, что вторым слагаемым в лагранжиане (7.7.1.1) можно пренебречь. Эта единственная гипотеза позволяет точную постановку (7.7.1.1) заменить более удобной приближенной. В результате, с учетом (7.7.1.2), получим лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2} E_{ijnm} \varepsilon_{ijnm} V \quad (7.7.1.3)$$

Лагранжиан (7.7.1.3) в соответствии с (7.7.1.2) по-прежнему является функционалом независимых переменных: векторного поля R_i и тензорного поля t_{ij} . Причем, потенциальная энергия в (7.7.1.3) представлена в виде произведения двух функционалов, один из которых зависит только от $R_{i,j}$, а второй – только от t_{ij} и $t_{ij,k}$. Вариация лагранжиана (7.7.1.3) имеет вид:

$$\delta L = (\delta A - \frac{1}{2} E_{ijnm} V \delta \varepsilon_{ijnm}) - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijnm} V \delta E_{ijnm}$$

Так как в соответствии с (7.7.1.2) первое слагаемое зависит только от δR_i и $\delta R_{i,j}$, а второе – только от δt_{ij} и $\delta t_{ij,k}$, соответствующее вариационное

уравнение распадается на последовательность двух краевых задач.

Первая краевая задача

$$\begin{aligned} (\delta A - \frac{1}{2} E_{ijnm} V \delta \varepsilon_{ijnm}) = \\ = \iiint (E_{ijnm} R_{n,mj} + P_i^V) \delta R_i dV + \iint (P_i^F - E_{ijnm} n_j R_{n,m}) \delta R_i dF = 0 \end{aligned} \quad (7.7.1.4)$$

сводится к краевой задаче для однородной эффективной среды, если заданы или вычислены эффективные модули E_{ijnm} .

Вторая краевая задача

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijnm} \delta \iiint C_{ijnm} dV = \\ = \iiint [C_{ijqm}^{12} \varepsilon_{ijnm} + (C_{pqm}^{22} \varepsilon_{ijnm}) t_{pi} - (C_{abqd}^{33} \varepsilon_{ijnm} \varepsilon_{bjg} \varepsilon_{dmf}) t_{ai,fg}] \delta t_{qn} dV + \\ + \iint (C_{abqd}^{33} \varepsilon_{bjg} \varepsilon_{dmf} \varepsilon_{ijnm}) t_{ai,g} n_f \delta t_{qn} dF = 0 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$C_{ijqm}^{12} \varepsilon_{ijnm} = U_{qn}^{12} \quad C_{pqm}^{22} \varepsilon_{ijnm} = U_{qmpi}^{22} \quad C_{abqd}^{33} \varepsilon_{ijnm} \varepsilon_{bjg} \varepsilon_{dmf} = U_{qnfaijg}^{33} \quad (7.7.1.5)$$

Тогда вторая краевая задача принимает следующий окончательный вид:

$$\iiint (U_{ij}^{12} + U_{ijnm}^{22} t_{nm} - U_{ijknml}^{33} t_{nm,kl}) \delta t_{ij} dV + \iint U_{ijknml}^{33} t_{nm,l} n_k \delta t_{ij} dF = 0 \quad (7.7.1.6)$$

Эта краевая задача дает возможность определить поврежденность t_{ij} и механические и геометрические свойства межфазных слоев, если заданы или вычислены тензоры энергий $U_{ij}^{12}, U_{ijnm}^{22}, U_{ijknml}^{33}$.

Обратим внимание на то, что для «медленно меняющегося» поля относительной поврежденности, когда производные гораздо меньше самой функции, краевая задача (7.7.1.6) сводится к алгебраической:

$$U_{ij}^{12} + U_{ijnm}^{22} t_{nm} = 0 \Rightarrow U_{pqij}^{-22} U_{ijnm}^{22} = \delta_{pn} \delta_{qm} \Rightarrow t_{pq} = -U_{pqij}^{-22} U_{ij}^{12}$$

Это решение определяет единственный глобальный эффект в дефектных средах – переход от тензора супермодулей C_{ijnm}^{11} к тензору «поврежденных» модулей $E_{ijnm} = \bar{C}_{ijnm}$:

$$\bar{C}_{ijnm} = C_{ijnm}^{11} - 2C_{ijqm}^{12} U_{qnab}^{-22} U_{ab}^{12} + C_{pqm}^{22} U_{picd}^{-22} U_{cd}^{12} U_{qnab}^{-22} U_{ab}^{12} \quad (7.7.1.7)$$

Межфазные слои, как области специфических краевых эффектов, могут появиться только при формулировке контактных задач. В соответствии с

(7.7.1.6), контактная задача для межфазного слоя принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_I (U_{ij}^{12} + U_{ijnm}^{22} t_{nm} - U_{ijknml}^{33} t_{nm,kl}) \delta t_{ij} dV + \\
 & + \iint_{IF} U_{ijknml}^{33} t_{nm,l} n_k \delta t_{ij} dF + \iint_C U_{ijknml}^{33} t_{nm,l} (+n_k) \delta t_{ij} dF + \\
 & + \iiint_{II} (U_{ij}^{12} + U_{ijnm}^{22} t_{nm} - U_{ijknml}^{33} t_{nm,kl}) \delta t_{ij} dV + \\
 & + \iint_{IIF} U_{ijknml}^{33} t_{nm,l} n_k \delta t_{ij} dF + \iint_C U_{ijknml}^{33} t_{nm,l} (-n_k) \delta t_{ij} dF = 0
 \end{aligned}$$

Индекс I относится к первому телу, II - ко второму, IF - к свободной поверхности первого тела, IIF - к свободной поверхности второго, C - к поверхности контакта. Переменные, входящие в подынтегральные выражения, не снабжены соответствующими индексами, чтобы не загромождать эти выражения. Здесь также учтено, что энергии контакта для первого и второго тела должны быть записаны для разных сторон поверхности контакта. Единичные векторы нормали к ним коллинеарны, но имеют разные знаки. Стороной с положительным направлением выбрана сторона поверхности контакта первого тела с нормалью $(+n_k)$, тогда сторона поверхности контакта второго тела будет иметь нормаль, противоположную по знаку, и обозначена как $(-n_k)$. Пусть поврежденность t_{ij} для каждого тела удовлетворяет гельмгольцевой системе неоднородных уравнений в объеме. Кроме того, пусть t_{ij} для каждого тела удовлетворяет и «статическим» граничным условиям на свободных от контакта поверхностях. Выбор этих условий обусловлен тем, что нет возможности задавать/управлять поврежденностью поверхности, если поверхности контакта адгезионно пассивны. Поэтому $\delta t_{ij} \neq 0$. С учетом этого, вариационное уравнение для межфазного слоя принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & \iint_C \{ (U_{ijknml}^{33})_I (t_{nm,l})_I \delta (t_{ij})_I - (U_{ijknml}^{33})_{II} (t_{nm,l})_{II} \delta (t_{ij})_{II} \} n_k dF = \\
 & = \iint_C \{ [(U_{ijknml}^{33})_I (t_{nm,l})_I - (U_{ijknml}^{33})_{II} (t_{nm,l})_{II}] \delta [\frac{1}{2} (t_{ij})_I + \frac{1}{2} (t_{ij})_{II}] + \\
 & + [(U_{ijknml}^{33})_I (t_{nm,l})_I + (U_{ijknml}^{33})_{II} (t_{nm,l})_{II}] \delta [\frac{1}{2} (t_{ij})_I - \frac{1}{2} (t_{ij})_{II}] \} n_k dF = 0
 \end{aligned}$$

Если, как обычно при решении контактных задач считать, что варьируемые величины при переходе через поверхность контакта не имеют скачка, условия контакта формулируются системой:

$$\begin{cases} (U_{ijklm}^{33})_I (t_{nm,l})_I - (U_{ijklm}^{33})_{II} (t_{nm,l})_{II} = 0 \\ (t_{ij})_I - (t_{ij})_{II} = 0 \end{cases} \quad (7.7.1.8)$$

Таким образом, сформулированная теорема о межфазном слое позволяет по лагранжиану теории дефектных сред в форме (7.7.1.1) построить упрощенный лагранжиан (7.7.1.3). Вариационное уравнение для (7.7.1.3) распадается на два: вариационное уравнение классической однородной среды с эффективным тензором модулей (7.7.1.4) и вариационное уравнение межфазного слоя (7.7.1.6). Искомыми функциями в первой из перечисленных моделей являются компоненты вектора перемещений R_i , а параметрами – компоненты тензора эффективных модулей E_{ijmn} , являющиеся функционалами компонентов тензора дислокационной поврежденности t_{ij} .

И наоборот: искомими функциями во второй из перечисленных моделей являются компоненты тензора дислокационной поврежденности t_{ij} , а параметрами – компоненты тензоров энергий $U_{ij}^{12}, U_{ijmn}^{22}, U_{ijklm}^{33}$, являющиеся функционалами компонентов вектора перемещений R_i .

7.6.2. Теорема Клапейрона в теории межфазного слоя.

Пусть перемещения являются экстремальными вариационного уравнения (7.7.1.4). Тогда выполняется и конечное соотношение:

$$\iiint (E_{ijmn} R_{n,mj} + P_i^V) R_i dV + \iint (P_i^F - E_{ijmn} n_j R_{n,m}) R_i dF = 0$$

Из него, после процедуры взятия по частям, следует:

$$A - \iiint E_{ijmn} R_{i,j} R_{n,m} dV = 0 \quad \text{или} \quad U = A/2 \quad (7.7.1.9)$$

Таким образом, и в теории межфазного слоя справедлива теорема Клапейрона: «В состоянии равновесия потенциальная энергия

равна половине работы внешних сил».

7.6.3. Лагранжиан теории межфазного слоя.

Теорема Клапейрона (7.7.1.9) позволяет из (7.7.1.3), при поле перемещений, удовлетворяющем (7.7.1.4), сформулировать лагранжиан для межфазного слоя, из которого следует вариационное уравнение (7.7.1.6):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \iiint E_{ijnm} R_{i,j} R_{n,m} dV = \frac{1}{2} E_{ijnm} \varepsilon_{ijnm} V = \\ &= \frac{1}{2} \iiint (C_{ijnm}^{11} \varepsilon_{ijnm} + 2U_{ij}^{12} t_{ij} + U_{ijnm}^{22} t_{ij} t_{nm} + U_{ijkml}^{33} t_{ij,k} t_{nm,l}) dV \end{aligned} \quad (7.7.1.10)$$

Заметим, что первое слагаемое $C_{ijnm}^{11} \varepsilon_{ijnm}$ в данной постановке можно отбросить, так как при заданных/известных перемещениях вариация этого слагаемого обращается в ноль, в силу (7.7.1.2).

7.6.4. Прикладная теория «поврежденного» межфазного слоя.

Вариационное уравнение (7.7.1.6), и соответствующий ему лагранжиан (7.7.1.10), приводят, в общем случае, к системе девяти уравнений второго порядка и соответствующей краевой задаче, решение которой является достаточно сложным. Поэтому представляется целесообразным предложить упрощенную, прикладную модель, содержащую меньшее количество неизвестных и меньшее количество физических параметров.

Первая цель достигается введением векторного потенциала для тензора относительной поврежденности:

$$t_{ij} = t_{i,j} \quad (7.7.1.11)$$

Соотношение (7.7.1.11) является гипотезой, аналогичной обобщению гипотезы Аэро-Кувшинского. Обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского позволяет выразить тензор свободной дисторсии через вектор перемещений в

теории сред с сохраняющимися дислокациями и существенно сократить в ней количество основных неизвестных. Гипотеза (7.7.1.11) при построении прикладной теории межфазного слоя позволяет сделать то же самое – выразить тензор относительной поврежденности через некоторый вектор, компоненты которого становятся основными неизвестными теории «поврежденного» межфазного слоя.

Лагранжиан (7.7.1.10) при этом принимает вид:

$$L = -\oint P'_i t_i dF + \frac{1}{2} \iiint (U_{ijnm}^{22} t_{i,j} t_{n,m} + U_{ijkml}^{33} t_{i,jk} t_{n,ml}) dV \quad (7.7.1.12)$$

Здесь введено обозначение $U_{ij}^{12} n_j = -P'_i$. Тогда, с точностью до знака, лагранжиан (7.7.1.12) будет совпадать с лагранжианом градиентной модели Тупина [6], если трактовать вектор-потенциал t_i как вектор дополнительных перемещений в межфазном слое, а тензоры энергии $U_{ijnm}^{22}, U_{ijkml}^{33}$ как соответствующие тензоры модулей межфазного слоя. Специфика данной постановки заключается в том, что и «внешняя нагрузка» P'_i , и «тензоры модулей» $U_{ijnm}^{22}, U_{ijkml}^{33}$ межфазного слоя зависят от деформированного состояния тела в целом ε_{ijnm} (7.7.1.2), а также от физических параметров дефектной среды фазы – тензоров модулей $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}, C_{ijnm}^{33}$.

Отметим, что при однопараметрическом нагружении свойства межфазного слоя не зависят от нагрузки, так как лагранжиан (7.7.1.12) является однородной квадратичной функцией амплитуды внешней нагрузки. При многопараметрическом нагружении и свойства межфазного слоя $U_{ijnm}^{22}, U_{ijkml}^{33}$, и «внешняя нагрузка» P'_i , будут являться уже неоднородными квадратичными функциями отношений амплитуд внешних нагрузок. В этом случае свойства межфазного слоя уже будут зависеть от нагрузок.

Вторая цель достигается введением «гипотезы пропорциональности» тензоров $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{33}$ тензору C_{ijnm}^{22} :

$$C_{ijnm}^{12} = k C_{ijnm}^{22} \quad C_{ijnm}^{33} = h^2 C_{ijnm}^{22} \quad (7.7.1.13)$$

Таким образом, физические свойства межфазного слоя для каждой фазы определяются пятью параметрами: тремя компонентами изотропного тензора C_{ijmn}^{22} и введенными параметрами k , h , вместо девяти параметров – компонентов тензоров $C_{ijmn}^{12}, C_{ijmn}^{22}, C_{ijmn}^{33}$. Существует достаточно широко распространенное мнение, что механические свойства межфазного слоя можно описать с помощью трансверсально-изотропного тензора модулей, имеющего, как раз, пять различных компонент. Однако, как было показано выше, эти механические характеристики относятся к разным объектам (тензорам $C_{ijmn}^{12}, C_{ijmn}^{22}, C_{ijmn}^{33}$) и не могут быть объединены. Межфазный слой для каждой фазы является изотропным неклассическим объектом, обладающим неклассическими механическими свойствами, которые в общем случае характеризуются девятью параметрами, а в приближенном (прикладном) варианте – пятью.

Заключение.

1. Сформулирована и решена задача определения свойств эффективных механических свойств мелкодисперсного композита. Дано математическое обоснование «эффекта Мивы» для мелкодисперсных стеклопластиков. Дано математическое обоснование известным гипотезам осреднения в виде представления в разных формах одного и того же неклассического решения в рамках механики дефектной среды.
2. Сформулирована и решена задача определения эффективных механических свойств в теории волокнистых нанокомпозитов, армированных SWNT (эффекты Одегарда). Доказано, что нанотрубки, обладающие высокой удельной поверхностью, определяют два принципиально разных эффекта (на длинных и коротких волокнах). Дано математическое обоснование «эффекта Одегарда на длинных волокнах», обусловленное высокой адгезионной

активностью нанотрубок, связанной с поверхностным натяжением. Дано математическое обоснование «эффекта Одегарда на коротких волокнах», обусловленное высокой когезионной активностью связующего в области контакта с нанотрубкой. В результате абсолютная объемная доля межфазного слоя может в разы превышать абсолютную объемную долю самих нанотрубок.

3. Сформулирована теория тонких пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей. Дано математическое обоснование эффекта «супермодулей» тонких пленок, обусловленное вкладом адгезионных свойств лицевых поверхностей в эффективную жесткость пленки при стремлении толщины пленки к нулю. Как предельный случай теории тонких пленок сформулирована теория механических свойств 2D-структур.

4. Осуществлена «экспансия» механики дефектных сред в теорию трещин. Построено приближенное аналитическое решение для трещины нормального отрыва. Оно отличается от классического тем, что напряжения в вершине трещины не имеют сингулярности, берега трещины имеют знакопеременную кривизну, расстояние от вершины трещины до точки перегиба (зона Баренблатта) определяется неклассическим параметром среды – характерной длиной когезионных взаимодействий в среде, угол раскрытия трещины в вершине равен не π , а нулю. Дана оценка сверху величины характерной длины когезионных взаимодействий через такие стандартные характеристики материалов, как предел прочности/текучести и вязкость разрушения. Эта оценка может быть использована во всех градиентных теориях, разрешающие уравнения которых могут быть сведены к трем уравнениям равновесия в перемещениях четвертого порядка. К таким теориям можно отнести: теорию сред Коссера, теорию пористых сред, теорию Тупина, моментную теорию Аэро-Кувшинского, теорию Джеремилло, «простейшую» теорию когезионного поля.

5. Осуществлена «экспансия» механики дефектных сред в теорию хрупкого разрушения. Сформулировано обобщение критерия Гриффитса. С

его помощью установлен спектр связей между потенциальными энергиями деформации неповрежденной среды, энергиями образования новой поверхности и объема, энергиями дислокационной поврежденности поверхности и объема.

7. Развита теория межфазного слоя. Установлены важные для приложений свойства локальных полей поврежденности. При однопараметрическом нагружении свойства межфазного слоя не зависят от нагрузки, при многопараметрическом нагружении свойства межфазного слоя и, следовательно, эффекты изменения механических свойств зависят от типа напряженного состояния. Соответственно, эффективные свойства материала с учетом повреждений будут зависеть от нагрузок. В результате, построен вариант общей теории поврежденности и изменения свойств линейно деформируемых тел, который оказывается в полном качественном соответствии с известными результатами исследований Е. Ломакина о зависимости свойств сред от вида напряженного состояния.

ГЛАВА 8 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее существенные научные результаты и выводы, полученные в диссертации.

1. В Главе_2 построена общая кинематическая теория полей дефектов, дана их классификация, исследованы их общие свойства и индивидуальные особенности. Введены понятия ранга, сорта, типа и глубины дефектности соответствующих полей дефектов. Установлены общие закономерности рождения/уничтожения полей дефектов. Основные результаты опубликованы в [7,8,12,13,76-82].
2. В Главе_3 сформулирован и применен к построению моделей дефектных сред «кинематический» вариационный принцип, который является частным случаем принципа возможных перемещений со связями. Его формулировка является развитием концепции геометризации физики. Специфика «кинематического» вариационного принципа заключается в том, что совокупность выбранных кинематических связей, названная кинематической моделью дефектной среды, позволяет для линейных моделей однозначно определить соответствующую силовую модель. Под силовой моделью подразумевается спектр силовых взаимодействий, вывод формул Грина, формулировка уравнений обобщенного закона Гука. Основные результаты опубликованы в [4,7,21,23,24,27,83-92].
3. В Главе_4 предложен «конструктор моделей» - многомерное пространство моделей, каждое измерение которого определяется некоторым механическим свойством (модулем) дефектной среды. Выделяя из введенного пространства моделей подпространство соответствующего измерения, изучены дефектные среды с выбранным частным набором механических свойств.

Сформулирован спектр моделей сред с полями сохраняющихся дислокаций. Часть из них сопоставлена с уже известными моделями: средой Миндлина, «простейшей» теорией сред с полями сохраняющихся дислокаций, средой Коссера. Сформулирован спектр моделей бездефектных градиентных сред. Часть из них сопоставлена с уже известными моделями: средой Тупина, средой Аэро-Кувшинского, средой Джеремилло и «простейшей» теорией когезионного поля. Основные результаты опубликованы в [4,7,21,23-35,39,40,60,62,92-93].

4. В Главе_5 исследован ряд теорий когезионных взаимодействий последовательно возрастающей сложности. Сформулированы тестовые примеры, на основании которых даны трактовки всем модулям, фигурирующим в тензорах C_{ijmn}^{ab} и C_{ijkml}^{ab} . Одновременно с выяснением физического смысла модулей построены и исследованы фундаментальные решения для каждой модели. Даны определения когезионных взаимодействий, когезионных перемещений, характерных длин когезионных взаимодействий в различных частных случаях теории. В результате, установлен исчерпывающий спектр возможных когезионных взаимодействий в средах с сохраняющимися дислокациями, определены физические параметры среды, отражающие свойства когезионных взаимодействий, и связь этих параметров с неклассическими модулями. Основные результаты опубликованы в [4,7,21,23-35,39,40,60,62,92-94].

5. В Главе_6 исследован ряд теорий адгезионных взаимодействий последовательно возрастающей сложности. Сформулированы тестовые примеры, на основании которых даны трактовки всем модулям, фигурирующим в тензорах A_{ijmn}^{ab} . Одновременно с выяснением физического смысла модулей исследован широкий спектр краевых задач, к которым приводит учет адгезионных взаимодействий. В результате, установлен спектр возможных адгезионных

взаимодействий на поверхности дефектных и идеальных сред, определены физические параметры среды, отражающие адгезионные свойства поверхностей и связь этих параметров с неклассическими модулями. Основные результаты опубликованы в [23-27, 29,31,32,35,38,58].

6. В Главе_7 в рамках сформулированной механики дефектных сред дано теоретическое объяснение достаточно большого круга известных масштабных эффектов:

1. Объяснен эффект Мивы – аномальное с точки зрения классической механики сплошной среды усиление эффективного модуля композита с уменьшением размера армирующих частиц при фиксированной объемной доле армирующих частиц.

2. Дано математическое обоснование известных гипотез осреднения. Все они представлены как различные формы одного и того же неклассического решения.

3. Объяснен эффект Одегарда на длинных волокнах – аномальное увеличение эффективного модуля нанокompозита с увеличением длины армирующих нанотрубок при их фиксированной объемной доле. Эффект определяется адгезионными взаимодействиями на поверхностях контакта нанотрубок и матрицы.

4. Объяснен эффект Одегарда на коротких волокнах – аномальное увеличение эффективного модуля нанокompозита с увеличением длины армирующих нанотрубок при их фиксированной объемной доле. Эффект определяется когезионными взаимодействиями в межфазном слое матрицы, примыкающем к поверхности контакта нанотрубки и матрицы.

5. Объяснен эффект «супержесткости» тонких пленок при стремлении толщины пленки к нулю. Эффект определяется адгезионными свойствами лицевых поверхностей пленок.

6. Сформулирована теория механических свойств графена и графеноподобных 2D- кристаллических структур.

7. В теории трещин дано математическое обоснование гипотезе Баренблатта о существовании несингулярной трещины. Исследованы свойства несингулярных трещин, установлены параметры, характеризующие их неклассические свойства.

8. Дана оценка сверху характерного размера области неприменимости классической теории упругости к задачам о трещине. Дана оценка сверху длин когезионных взаимодействий через известные параметры механики хрупкого разрушения – вязкость разрушения и предел прочности.

9. В механике хрупкого разрушения доказана «теорема Гриффитса», обобщающая критерий Гриффитса устойчивости макротрещины. Помимо энергии образования новой поверхности, установлены иные стоки высвобождающейся упругой энергии: энергия образования нового объема, энергия дилокационной поврежденности поверхности, энергия дилокационной поврежденности объёма. Установлены внутренние структуры этих энергий, определяемые различными свойствами полей дислокаций. Установлены параметры материала (модули), определяющие эти свойства.

10. Сформулирована теория «неоднородного межфазного слоя». На её основе открывается возможность прогнозировать не только жесткостные, но и прочностные свойства композиционных материалов.

11. Объяснен эффект зависимости свойств сред от вида напряженного состояния, который оказывается в полном качественном соответствии с известными результатами исследований Е. Ломакина.

Основные результаты опубликованы в [94-126].

Разработанные в диссертации математические основы механики дефетных сред дают возможность объединить пока разрозненные теории мелкодисперсных композитов (с микровключениями), нанокompозитов (с нановключениями), теорию трещин, теорию хрупкого разрушения,

теории когезионных и адгезионных взаимодействий в некое мощное обобщение механики сплошной среды – полевою наномеханику. Тем самым, закрывается пробел между классической механикой сплошной среды и квантовой механикой больших систем частиц.

ГЛАВА 9 ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. Формальная техника построения тензоров модулей.

При построении тензоров модулей и исследовании их структуры и свойств используется формальная техника в виде разложения по базисным тензорам того же ранга. В свою очередь базисные тензоры строятся как тензорные произведения ортов выбранной системы координат X_i, Y_i, Z_i . В качестве примера приведено построение тензора модулей четвертого ранга для анизотропной, ортотропной, трансверсально-изотропной и изотропной среды.

9.2. Структура и свойства тензоров модулей четвертого ранга

9.2.1. Структура тензора C_{ijmn}^{11} для анизотропной среды.

Как известно, в общем случае для трехмерного пространства существует восемьдесят один базисный тензор четвертого ранга:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} X_i X_j X_m X_n \\ X_i X_j X_m Y_n \\ X_i X_j X_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i X_j Y_m X_n \\ X_i X_j Y_m Y_n \\ X_i X_j Y_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i X_j Z_m X_n \\ X_i X_j Z_m Y_n \\ X_i X_j Z_m Z_n \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} X_i Y_j X_m X_n \\ X_i Y_j X_m Y_n \\ X_i Y_j X_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i Y_j Y_m X_n \\ X_i Y_j Y_m Y_n \\ X_i Y_j Y_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i Y_j Z_m X_n \\ X_i Y_j Z_m Y_n \\ X_i Y_j Z_m Z_n \end{array} \right. \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} X_i Z_j X_m X_n \\ X_i Z_j X_m Y_n \\ X_i Z_j X_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i Z_j Y_m X_n \\ X_i Z_j Y_m Y_n \\ X_i Z_j Y_m Z_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i Z_j Z_m X_n \\ X_i Z_j Z_m Y_n \\ X_i Z_j Z_m Z_n \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{cases} Y_i X_j X_m X_n \\ Y_i X_j X_m Y_n \\ Y_i X_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i X_j Y_m X_n \\ Y_i X_j Y_m Y_n \\ Y_i X_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i X_j Z_m X_n \\ Y_i X_j Z_m Y_n \\ Y_i X_j Z_m Z_n \end{cases} \\
\begin{cases} Y_i Y_j X_m X_n \\ Y_i Y_j X_m Y_n \\ Y_i Y_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i Y_j Y_m X_n \\ Y_i Y_j Y_m Y_n \\ Y_i Y_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i Y_j Z_m X_n \\ Y_i Y_j Z_m Y_n \\ Y_i Y_j Z_m Z_n \end{cases} \\
\begin{cases} Y_i Z_j X_m X_n \\ Y_i Z_j X_m Y_n \\ Y_i Z_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i Z_j Y_m X_n \\ Y_i Z_j Y_m Y_n \\ Y_i Z_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Y_i Z_j Z_m X_n \\ Y_i Z_j Z_m Y_n \\ Y_i Z_j Z_m Z_n \end{cases} \\
\begin{cases} Z_i X_j X_m X_n \\ Z_i X_j X_m Y_n \\ Z_i X_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i X_j Y_m X_n \\ Z_i X_j Y_m Y_n \\ Z_i X_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i X_j Z_m X_n \\ Z_i X_j Z_m Y_n \\ Z_i X_j Z_m Z_n \end{cases} \\
\begin{cases} Z_i Y_j X_m X_n \\ Z_i Y_j X_m Y_n \\ Z_i Y_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i Y_j Y_m X_n \\ Z_i Y_j Y_m Y_n \\ Z_i Y_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i Y_j Z_m X_n \\ Z_i Y_j Z_m Y_n \\ Z_i Y_j Z_m Z_n \end{cases} \\
\begin{cases} Z_i Z_j X_m X_n \\ Z_i Z_j X_m Y_n \\ Z_i Z_j X_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i Z_j Y_m X_n \\ Z_i Z_j Y_m Y_n \\ Z_i Z_j Y_m Z_n \end{cases} & \begin{cases} Z_i Z_j Z_m X_n \\ Z_i Z_j Z_m Y_n \\ Z_i Z_j Z_m Z_n \end{cases}
\end{array}$$

Перенумеровав эти базисные тензоры индексом Q , вводя для них унифицированное обозначение e_{ijmn}^Q , можно построить разложение произвольного тензора четвертого ранга по этим базисным тензорам. Таким образом, тензор модулей в общем случае имеет вид:

$$C_{ijmn} = A_Q e_{ijmn}^Q$$

При этом проекцией этого тензора на выбранный базисный тензор с номером $1 \leq P \leq 81$ будет соответствующий модуль A_P .

$$C_{ijmn} e_{ijmn}^P = A_P$$

К примеру, если $e_{ijmn}^1 = X_i X_j X_m X_n$, то $C_{ijmn} e_{ijmn}^1 = A_1$, так как прямой проверкой можно убедиться, что

$$e_{ijmn}^Q e_{ijmn}^P = \begin{cases} 1 & \text{при } Q = P \\ 0 & \text{при } Q \neq P \end{cases}$$

Требование существования потенциальной энергии. Требование существования объемной плотности потенциальной энергии $2U_V = C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n}$ приводит к следующему свойству тензора модулей:

$$C_{ijmn} = C_{mnij}$$

Из этого требования вытекает условие, что и каждый базисный тензор должен обладать этим свойством. Выполним это условие следующим формальным образом:

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= A_Q e_{ijmn}^Q = A_Q e_{ijmn}^Q / 2 + A_P e_{ijmn}^P / 2 = \\ &= A_Q [(e_{ijmn}^Q + e_{ijmn}^P) / 2 + (e_{ijmn}^Q - e_{ijmn}^P) / 2] / 2 + A_P [(e_{ijmn}^Q + e_{ijmn}^P) / 2 - (e_{ijmn}^Q - e_{ijmn}^P) / 2] / 2 = \\ &= (A_Q + A_P)(e_{ijmn}^Q + e_{ijmn}^P) / 4 + (A_Q - A_P)(e_{ijmn}^Q - e_{ijmn}^P) / 4 \end{aligned}$$

Здесь индексом P осуществлена другая нумерация базисных тензоров и, соответственно, модулей на основании равенства $e_{mij}^Q = e_{ijmn}^P$. Требование существования потенциальной энергии тогда сводится к требованию:

$$A_Q = A_P$$

Это приводит к сокращению количества модулей с восьмидесяти одного до сорока пяти и соответствующему сокращению базисных тензоров:

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= A_q \delta_{ijmn}^q \\ \delta_{ijmn}^q &= (e_{ijmn}^q + e_{mij}^q) / 2 \end{aligned}$$

Здесь уже индекс q нумерует линейно независимые комбинации исходных базисных тензоров $\delta_{ijmn}^q = (e_{ijmn}^q + e_{mij}^q) / 2$ и модулей при них A_q :

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} X_i X_j X_m X_n \\ (X_i X_j X_m Y_n + X_i Y_j X_m X_n)/2 \\ (X_i X_j X_m Z_n + X_i Z_j X_m X_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i X_j Y_m X_n + Y_i X_j X_m X_n)/2 \\ (X_i X_j Y_m Y_n + Y_i Y_j X_m X_n)/2 \\ (X_i X_j Y_m Z_n + Y_i Z_j X_m X_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i X_j Z_m X_n + Z_i X_j X_m X_n)/2 \\ (X_i X_j Z_m Y_n + Z_i Y_j X_m X_n)/2 \\ (X_i X_j Z_m Z_n + Z_i Z_j X_m X_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} X_i Y_j X_m Y_n \\ (X_i Y_j X_m Z_n + X_i Z_j X_m Y_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i Y_j Y_m X_n + Y_i X_j X_m Y_n)/2 \\ (X_i Y_j Y_m Y_n + Y_i Y_j X_m Y_n)/2 \\ (X_i Y_j Y_m Z_n + Y_i Z_j X_m Y_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i Y_j Z_m X_n + Z_i X_j X_m Y_n)/2 \\ (X_i Y_j Z_m Y_n + Z_i Y_j X_m Y_n)/2 \\ (X_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j X_m Y_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} X_i Z_j X_m Z_n \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i Z_j Y_m X_n + Y_i X_j X_m Z_n)/2 \\ (X_i Z_j Y_m Y_n + Y_i Y_j X_m Z_n)/2 \\ (X_i Z_j Y_m Z_n + Y_i Z_j X_m Z_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (X_i Z_j Z_m X_n + Z_i X_j X_m Z_n)/2 \\ (X_i Z_j Z_m Y_n + Z_i Y_j X_m Z_n)/2 \\ (X_i Z_j Z_m Z_n + Z_i Z_j X_m Z_n)/2 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} Y_i X_j Y_m X_n \\ (Y_i X_j Y_m Y_n + Y_i Y_j Y_m X_n)/2 \\ (Y_i X_j Y_m Z_n + Y_i Z_j Y_m X_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (Y_i X_j Z_m X_n + Z_i X_j Y_m X_n)/2 \\ (Y_i X_j Z_m Y_n + Z_i Y_j Y_m X_n)/2 \\ (Y_i X_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m X_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} Y_i Y_j Y_m Y_n \\ (Y_i Y_j Y_m Z_n + Y_i Z_j Y_m Y_n)/2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (Y_i Y_j Z_m X_n + Z_i X_j Y_m Y_n)/2 \\ (Y_i Y_j Z_m Y_n + Z_i Y_j Y_m Y_n)/2 \\ (Y_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m Y_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} Y_i Z_j Y_m Z_n \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (Y_i Z_j Z_m X_n + Z_i X_j Y_m Z_n)/2 \\ (Y_i Z_j Z_m Y_n + Z_i Y_j Y_m Z_n)/2 \\ (Y_i Z_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m Z_n)/2 \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} Z_i X_j Z_m X_n \\ (Z_i X_j Z_m Y_n + Z_i Y_j Z_m X_n)/2 \\ (Z_i X_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Z_m X_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} Z_i Y_j Z_m Y_n \\ (Z_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Z_m Y_n)/2 \end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l} Z_i Z_j Z_m Z_n \end{array} \right.
\end{array}$$

Требование парности касательных напряжений.

Если предположить справедливость гипотезы парности касательных напряжений, то потенциальная энергия не зависит от поворотов, и следует выполнить еще дополнительное требование симметрии тензора модулей и базисных тензоров при перестановке индексов внутри первой и внутри

второй пары индексов в отдельности. Формальную процедуру симметрирования можно проиллюстрировать следующей цепочкой равенств:

$$\begin{aligned}
C_{ijmn} &= \\
&= [(C_{ijmn} + C_{jimn})/2 + (C_{ijmn} - C_{jimn})/2] = \\
&= [(C_{ijmn} + C_{jimn})/2 + (C_{ijmn} - C_{jimn})/2]/2 + [(C_{ijmn} + C_{jinm})/2 + (C_{ijmn} - C_{jinm})/2]/2 + \\
&+ [(C_{ijmn} + C_{jinn})/2 + (C_{ijmn} - C_{jinn})/2]/2 - [(C_{ijmn} + C_{jinm})/2 + (C_{ijmn} - C_{jinm})/2]/2 = \\
&= C_{ijmn}^{++} + C_{ijmn}^{+-} + C_{ijmn}^{-+} + C_{ijmn}^{--} \\
C_{ijmn}^{++} &= (C_{ijmn} + C_{jimn} + C_{ijnm} + C_{jinn})/4 \Rightarrow \begin{cases} C_{ijmn}^{++} = +C_{jimn}^{++} \\ C_{ijmn}^{++} = +C_{ijnm}^{++} \end{cases} \\
C_{ijmn}^{+-} &= (C_{ijmn} + C_{jimn} - C_{ijnm} - C_{jinn})/4 \Rightarrow \begin{cases} C_{ijmn}^{+-} = +C_{jimn}^{+-} \\ C_{ijmn}^{+-} = -C_{ijnm}^{+-} \end{cases} \\
C_{ijmn}^{-+} &= (C_{ijmn} - C_{jimn} + C_{ijnm} - C_{jinn})/4 \Rightarrow \begin{cases} C_{ijmn}^{-+} = -C_{jimn}^{-+} \\ C_{ijmn}^{-+} = +C_{ijnm}^{-+} \end{cases} \\
C_{ijmn}^{--} &= (C_{ijmn} - C_{jimn} - C_{ijnm} + C_{jinn})/4 \Rightarrow \begin{cases} C_{ijmn}^{--} = -C_{jimn}^{--} \\ C_{ijmn}^{--} = -C_{ijnm}^{--} \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, произведено формальное разложение тензора модулей на сумму тензоров, каждый из которых обладает разной симметрией при перестановке индексов внутри первой и второй пар индексов. Верхние индексы (знаки) определяют симметрию/антисимметрию при перестановке индексов в первой/второй паре. Требование, чтобы потенциальная энергия не зависела от поворотов, сводится тогда к требованию равенства нулю тензоров $C_{ijmn}^{+-} = C_{ijmn}^{-+} = C_{ijmn}^{--} = 0$. Это, в свою очередь, приводит к дальнейшему сокращению количества модулей и соответствующих им линейных комбинаций базисных тензоров. Не трудно убедиться, что таких комбинаций, а соответственно, и модулей остается только двадцать одна штука.

$$\begin{aligned}
& X_i X_j X_m X_n \\
& [X_i X_j (X_m Y_n + X_n Y_m) + X_m X_n (X_i Y_j + X_j Y_i)]/4 \\
& [X_i X_j (X_m Z_n + X_n Z_m) + X_m X_n (X_i Z_j + X_j Z_i)]/4 \\
& (X_i X_j Y_m Y_n + X_m X_n Y_i Y_j)/2 \\
& [X_i X_j (Y_m Z_n + Y_n Z_m) + X_m X_n (Y_i Z_j + Y_j Z_i)]/4 \\
& (X_i X_j Z_m Z_n + X_m X_n Z_i Z_j)/2 \\
& (X_i Y_j + X_j Y_i)(X_m Y_n + X_n Y_m)/4 \\
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Z_m X_n + Z_n X_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Z_i X_j + Z_j X_i)]/8 \\
& [Y_i Y_j (X_m Y_n + X_n Y_m) + Y_m Y_n (X_i Y_j + X_j Y_i)]/4 \\
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)]/8 \\
& [Z_i Z_j (X_m Y_n + X_n Y_m) + Z_m Z_n (X_i Y_j + X_j Y_i)]/4 \\
& (Z_i X_j + Z_j X_i)(Z_m X_n + Z_n X_m)/4 \\
& [Y_i Y_j (Z_m X_n + Z_n X_m) + Y_m Y_n (Z_i X_j + Z_j X_i)]/4 \\
& [(Z_i X_j + Z_j X_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (Z_m X_n + Z_n X_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)]/8 \\
& [Z_i Z_j (Z_m X_n + Z_n X_m) + Z_m Z_n (Z_i X_j + Z_j X_i)]/4 \\
& Y_i Y_j Y_m Y_n \\
& [Y_i Y_j (Y_m Z_n + Y_n Z_m) + Y_m Y_n (Y_i Z_j + Y_j Z_i)]/4 \\
& (Y_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m Y_n)/2 \\
& (Y_i Z_j + Y_j Z_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m)/4 \\
& [Z_i Z_j (Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (Y_i Z_j + Y_j Z_i) Z_m Z_n]/4 \\
& Z_i Z_j Z_m Z_n
\end{aligned}$$

9.2.1. Структура тензора C_{ijmn}^{11} для ортотропной среды.

Специфическое свойство ортотропной среды заключается в том, что потенциальная энергия не содержит билинейных слагаемых относительно диагональных и недиагональных компонент тензора дисторсии. Это свойство приводит к тому, что соответствующие нормальные напряжения не зависят от угловых деформаций, а касательные напряжения от линейных деформаций.

Чтобы формализовать это условие, представим базисные тензоры четвертого ранга как произведения двух базисных тензоров второго ранга. Тогда требование ортотропности эквивалентно тому, что тензор модулей ортотропной среды не должен содержать базисных тензоров

второго ранга, содержащих одновременно пару одинаковых и пару разных ортов. Используя систему базисных тензоров для анизотропной среды и удерживая только те из них, которые удовлетворяют сформулированному выше условию, получим:

$$\begin{aligned}
& X_i X_j X_m X_n \\
& (X_i X_j Y_m Y_n + X_m X_n Y_i Y_j) / 2 \\
& (X_i X_j Z_m Z_n + X_m X_n Z_i Z_j) / 2 \\
& (X_i Y_j + X_j Y_i)(X_m Y_n + X_n Y_m) / 4 \\
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Z_m X_n + Z_n X_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Z_i X_j + Z_j X_i)] / 8 \\
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)] / 8 \\
& (Z_i X_j + Z_j X_i)(Z_m X_n + Z_n X_m) / 4 \\
& [(Z_i X_j + Z_j X_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (Z_m X_n + Z_n X_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)] / 8 \\
& Y_i Y_j Y_m Y_n \\
& (Y_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m Y_n) / 2 \\
& (Y_i Z_j + Y_j Z_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) / 4 \\
& Z_i Z_j Z_m Z_n
\end{aligned}$$

Как видно, тензор модулей ортотропной среды содержит двенадцать базисных тензоров и, соответственно, двенадцать модулей. Такая модель допускает взаимодействие сдвигов с одним одинаковым индексом в касательных напряжениях. Это взаимодействие определяют базисные тензоры:

$$\begin{aligned}
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Z_m X_n + Z_n X_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Z_i X_j + Z_j X_i)] / 8 \\
& [(X_i Y_j + X_j Y_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (X_m Y_n + X_n Y_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)] / 8 \\
& [(Z_i X_j + Z_j X_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m) + (Z_m X_n + Z_n X_m)(Y_i Z_j + Y_j Z_i)] / 8
\end{aligned}$$

и соответствующие модули при них. Классическая ортотропная модель может быть получена из рассмотренной, если удовлетворить еще одно дополнительное условие. Этим условием является отсутствие взаимодействий сдвигов в касательных напряжениях. Требование классической ортотропности эквивалентно тому, чтобы базисные тензоры четвертого ранга состояли из произведений двух одинаковых базисных тензоров второго ранга. Тогда такая «упрощенная» ортотропная модель будет содержать девять базисных тензоров:

$$\begin{cases} X_i X_j X_m X_n \\ Y_i Y_j Y_m Y_n \\ Z_i Z_j Z_m Z_n \end{cases} \begin{cases} (X_i X_j Y_m Y_n + X_m X_n Y_i Y_j)/2 \\ (Y_i Y_j Z_m Z_n + Z_i Z_j Y_m Y_n)/2 \\ (Z_i Z_j X_m X_n + Z_m Z_n X_i X_j)/2 \end{cases} \begin{cases} (X_i Y_j + X_j Y_i)(X_m Y_n + X_n Y_m)/4 \\ (Y_i Z_j + Y_j Z_i)(Y_m Z_n + Y_n Z_m)/4 \\ (Z_i X_j + Z_j X_i)(Z_m X_n + Z_n X_m)/4 \end{cases}$$

Соответственно, и количество модулей сокращается до классических девяти.

9.2.2. Структура тензора C_{ijmn}^{11} для трансверсально-изотропной среды.

Специфическое свойство трансверсально-изотропной среды заключается в том, что механические свойства среды в некотором выделенном направлении отличаются от механических свойств в плоскости, перпендикулярной этому выбранному направлению. Следовательно, тензор модулей должен содержать в качестве множителей базисных тензоров тензоры второго ранга вида $Z_i Z_j$ и $\delta_{ij}^* = X_i X_j + Y_i Y_j = \delta_{ij} - Z_i Z_j$, если выделенное направление – орт оси OZ.

В этом случае можно сразу построить систему базисных тензоров для ортотропной среды. Действительно, базисные тензоры четвертого ранга можно разделить на три группы. Первая будет содержать произведение двух «плоских» тензоров Кронекера вида $\delta_{ij}^* \delta_{mn}^*$, вторая - произведение «плоского» тензора Кронекера и тензора $(Z_i Z_j)$ вида $\delta_{ij}^* (Z_m Z_n)$ и, наконец, третья группа будет содержать единственный базисный тензор $(Z_i Z_j)(Z_m Z_n)$. Всего для трансверсально-изотропной среды можно построить десять базисных тензоров четвертого ранга:

$$\begin{cases} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{jn}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{mj}^* \end{cases} \begin{cases} \delta_{ij}^* Z_m Z_n \\ \delta_{im}^* Z_j Z_n \\ \delta_{in}^* Z_m Z_j \end{cases} \begin{cases} \delta_{jm}^* Z_i Z_n \\ \delta_{jn}^* Z_i Z_m \\ \delta_{nm}^* Z_i Z_j \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ Z_i Z_j Z_m Z_n \end{array} \right.$$

Требование существования потенциальной энергии приводит к сокращению количества базисных тензоров до восьми:

$$\begin{cases} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{jn}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{mj}^* \end{cases} \begin{cases} (\delta_{ij}^* Z_m Z_n + \delta_{mn}^* Z_i Z_j) / 2 \\ \delta_{im}^* Z_j Z_n \\ (\delta_{in}^* Z_m Z_j + \delta_{jm}^* Z_i Z_n) / 2 \end{cases} \begin{cases} \delta_{jn}^* Z_i Z_m \\ Z_i Z_j Z_m Z_n \end{cases}$$

Требование независимости потенциальной энергии от поворотов или, что то же, парности касательных напряжений, приводит к последующему сокращению базисных тензоров и соответствующих модулей с восьми до пяти:

$$\begin{cases} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{mj}^*) / 2 \end{cases} \begin{cases} (\delta_{ij}^* Z_m Z_n + \delta_{mn}^* Z_i Z_j) / 2 \\ (\delta_{im}^* Z_j Z_n + \delta_{jm}^* Z_i Z_n + \delta_{in}^* Z_j Z_m + \delta_{jn}^* Z_i Z_m) / 4 \end{cases} \begin{cases} \\ Z_i Z_j Z_m Z_n \end{cases}$$

Таким образом, тензор модулей для трансверсально-изотропной среды с симметричным тензором напряжений имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{ijmn} = & \\ = & C_1 \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + C_2 (\delta_{ij}^* Z_m Z_n + \delta_{mn}^* Z_i Z_j) / 2 + C_3 Z_i Z_j Z_m Z_n + \\ & + C_4 (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{mj}^*) / 2 + C_5 (\delta_{im}^* Z_j Z_n + \delta_{jm}^* Z_i Z_n + \delta_{in}^* Z_j Z_m + \delta_{jn}^* Z_i Z_m) / 4 \end{aligned}$$

9.2.3. Структура тензора C_{ijmn}^{11} для изотропной среды.

Специфическое свойство изотропной среды заключается в том, что механические свойства среды в любом направлении одинаковы. Следовательно, тензор модулей должен содержать в качестве множителей базисных тензоров тензоры Кронекера, как единственные изотропные тензоры второго ранга. Таких базисных тензоров всего три: $\delta_{ij}^* \delta_{mn}^*, \delta_{im}^* \delta_{jn}^*, \delta_{in}^* \delta_{mj}^*$.

Соответственно, тензор модулей в общем случае имеет вид:

$$C_{ijmn} = C_1 \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + C_2 \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + C_3 \delta_{in}^* \delta_{mj}^*$$

Требование независимости потенциальной энергии от поворотов или, что то же, парности касательных напряжений, приводит к сокращению базисных тензоров и соответствующих модулей с трех до двух:

$$C_{ijmn} = C_1 \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + C_2 (\delta_{im}^* \delta_{jn}^* + \delta_{in}^* \delta_{mj}^*)$$

9.3. Структура и свойства тензоров модулей шестого ранга.

9.3.1. Требование существования потенциальной энергии.

При рассмотрении обратимых процессов деформирования, следует выполнить условие существования потенциальной энергии кривизн, что приводит к требованию:

$$C_{ijkml}^{ab} = C_{mnljk}^{ba}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{ab} &= \\ &= C_1^{ab} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + C_2^{ab} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + C_3^{ab} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \\ &+ C_4^{ab} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + C_5^{ab} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_6^{ab} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \\ &+ C_7^{ab} \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl} + C_8^{ab} \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + C_9^{ab} \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \\ &+ C_{10}^{ab} \delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + C_{11}^{ab} \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + C_{12}^{ab} \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj} + \\ &+ C_{13}^{ab} \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj} + C_{14}^{ab} \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj} + C_{15}^{ab} \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn} = \\ &= C_{mnljk}^{ba} = \\ &= C_1^{ba} \delta_{mn} \delta_{il} \delta_{jk} + C_2^{ba} \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + C_3^{ba} \delta_{mn} \delta_{kl} \delta_{ij} + \\ &+ C_4^{ba} \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + C_5^{ba} \delta_{ml} \delta_{jn} \delta_{ik} + C_6^{ba} \delta_{ml} \delta_{nk} \delta_{ij} + \\ &+ C_7^{ba} \delta_{im} \delta_{nl} \delta_{jk} + C_8^{ba} \delta_{im} \delta_{lj} \delta_{nk} + C_9^{ba} \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \\ &+ C_{10}^{ba} \delta_{mj} \delta_{li} \delta_{nk} + C_{11}^{ba} \delta_{mj} \delta_{nl} \delta_{ik} + C_{12}^{ba} \delta_{mj} \delta_{kl} \delta_{in} + \\ &+ C_{13}^{ba} \delta_{mk} \delta_{li} \delta_{nj} + C_{14}^{ba} \delta_{mk} \delta_{lj} \delta_{in} + C_{15}^{ba} \delta_{mk} \delta_{nl} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Таким образом, требование существования потенциальной энергии сводится к связям между модулями тензоров C_{ijkml}^{pq} :

$$\begin{array}{lll} C_1^{ba} = C_{15}^{ab} & C_2^{ba} = C_6^{ab} & C_3^{ba} = C_3^{ab} \\ C_4^{ba} = C_{11}^{ab} & C_5^{ba} = C_5^{ab} & C_6^{ba} = C_2^{ab} \\ C_7^{ba} = C_7^{ab} & C_8^{ba} = C_8^{ab} & C_9^{ba} = C_9^{ab} \\ C_{10}^{ba} = C_{14}^{ab} & C_{11}^{ba} = C_4^{ab} & C_{12}^{ba} = C_{12}^{ab} \\ C_{13}^{ba} = C_{13}^{ab} & C_{14}^{ba} = C_{10}^{ab} & C_{15}^{ba} = C_1^{ab} \end{array}$$

Для тензоров кривизн одинаковой сортности $p = q = k$ требование существования потенциальной энергии приводит к сокращению

количества модулей с пятнадцати до одиннадцати:

$$C_1^{kk} = C_{15}^{kk} \quad C_2^{kk} = C_6^{kk} \quad C_4^{kk} = C_{11}^{kk} \quad C_{10}^{kk} = C_{14}^{kk}$$

Здесь суммирование по верхним индексам (индексам сортности) не производится.

Для тензоров кривизн разной сортности $p \neq q$ требование существования потенциальной энергии приводит к тому, что тензоры модулей имеют одинаковый набор пятнадцати модулей, в общем случае являющихся множителями при разных базисных тензорах:

$$\begin{aligned} C_1^{21} &= C_{15}^{12} & C_2^{21} &= C_6^{12} & C_3^{21} &= C_3^{12} \\ C_4^{21} &= C_{11}^{12} & C_5^{21} &= C_5^{12} & C_6^{21} &= C_2^{12} \\ C_7^{21} &= C_7^{12} & C_8^{21} &= C_8^{12} & C_9^{21} &= C_9^{12} \\ C_{10}^{21} &= C_{14}^{12} & C_{11}^{21} &= C_4^{12} & C_{12}^{21} &= C_{12}^{12} \\ C_{13}^{21} &= C_{13}^{12} & C_{14}^{21} &= C_{10}^{12} & C_{15}^{21} &= C_1^{12} \end{aligned}$$

Таким образом, структура всех четырех тензоров модулей C_{ijkml}^{pq} разная:

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{22} &= \\ &= C_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mi} \delta_{lj} \delta_{kn}) + C_2^{22} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mi} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\ &+ C_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^{22} (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\ &+ C_5^{22} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^{22} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^{22} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^{22} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} + \\ &+ C_9^{22} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^{22} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^{22} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{12} &= \\ &= C_1^{12} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + C_2^{12} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + C_3^{12} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \\ &+ C_4^{12} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + C_5^{12} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_6^{12} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \\ &+ C_7^{12} \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl} + C_8^{12} \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + C_9^{12} \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \\ &+ C_{10}^{12} \delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + C_{11}^{12} \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + C_{12}^{12} \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj} + \\ &+ C_{13}^{12} \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj} + C_{14}^{12} \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj} + C_{15}^{12} \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{21} &= \\
&= C_{15}^{12} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + C_6^{12} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + C_3^{12} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \\
&+ C_{11}^{12} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + C_5^{12} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_2^{12} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \\
&+ C_7^{12} \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl} + C_8^{12} \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + C_9^{12} \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \\
&+ C_{14}^{12} \delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + C_4^{12} \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + C_{12}^{12} \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj} + \\
&+ C_{13}^{12} \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj} + C_{10}^{12} \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj} + C_1^{12} \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{11} &= \\
&= C_1^{11} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^{11} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\
&+ C_3^{11} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^{11} (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\
&+ C_5^{11} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^{11} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^{11} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^{11} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \\
&+ C_9^{11} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^{11} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^{11} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}
\end{aligned}$$

Каждый тензор модулей шестого ранга участвует в свертке кривизн разных сортов. Свойства кривизн также будут определять соответствующие свертки. Поэтому тензоры модулей с необходимостью будут отражать специфические свойства каждой свертки. С учетом этого замечания, изучение свойств тензоров модулей для каждого сочетания индексов сортности будет проведено отдельно:

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{22} &= \\
&= C_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^{22} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\
&+ C_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^{22} (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\
&+ C_5^{22} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^{22} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^{22} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^{22} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \\
&+ C_9^{22} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^{22} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^{22} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{21} &= \\
&= C_1^{12} (\delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn}) + C_2^{12} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn}) + \\
&+ C_3^{12} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn}) + C_4^{12} (\delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn}) + \\
&+ C_5^{12} (\delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj} + \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj}) + C_6^{12} (\delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj}) + \\
&+ C_7^{12} \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl} + C_8^{12} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + C_9^{12} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{12} &= \\
&= C_1^{12} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl}) + C_2^{12} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml}) + \\
&+ C_3^{12} (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn}) + C_4^{12} (\delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn}) + \\
&+ C_5^{12} (\delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj}) + C_6^{12} (\delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj} + \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj}) + \\
&+ C_7^{12} \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl} + C_8^{12} \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + C_9^{12} \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijklmn}^{11} = & \\
= & C_1^{11} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + \\
& + C_2^{11} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml}) + \\
& + C_3^{11} (\delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\
& + C_4^{11} (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + \\
& + C_5^{11} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl}
\end{aligned}$$

Здесь нумерация модулей изменена в соответствии с оставшимися базисными тензорами.

Обратим внимание на то, что тензор C_{ijklmn}^{22} совпадает с тензором модулей шестого ранга в общепринятой теории Миндлина. Этот тензор содержит одиннадцать модулей. Будем, поэтому, называть его в дальнейшем тензором Миндлина.

Соответственно, тензор C_{ijklmn}^{11} совпадает с тензором когезионных модулей общепринятой теории Тупина. Этот тензор содержит пять модулей. Будем, поэтому, называть его в дальнейшем тензором Тупина.

Кроме того, в предложенной здесь теории тензоры C_{ijklmn}^{12} и C_{ijklmn}^{21} содержат один и тот же набор из пятнадцати модулей. Следует обратить внимание на то, что эти модули являются, в общем случае, множителями при различных базисных тензорах, что приводит к различной структуре тензоров C_{ijklmn}^{12} и C_{ijklmn}^{21} .

Таким образом, изучаемая здесь теория содержит тридцать один когезионный модуль.

Естественно предположить и попытаться установить дополнительные условия, которые бы позволили теоретически обосновать дальнейшее сокращение количества когезионных модулей.

Поэтому будем называть в дальнейшем теории Миндлина и Тупина со структурой тензоров C_{ijklmn}^{22} и C_{ijklmn}^{11} , полученными в данном разделе, - «классическими», а те же теории с более простыми структурами тензоров - «уточненными».

9.3.2. Определение «существенных» и «несущественных» модулей.

В этом разделе предпринята попытка обоснования сокращения количества когезионных модулей формальным, математическим путем. Центральную роль здесь играет теорема «о дивергентном слагаемом в плотности функционала». Для этого представим потенциальную энергию кривизн в виде суммы некоторой квадратичной формы и дивергенции некоторого вектора. Разлагая тензоры модулей на симметричную и антисимметричную, при перестановке третьего-шестого индексов, части, получим:

$$\begin{aligned} & \iiint C_{ijkl}^{ab} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \\ & = \iiint [(C_{ijkl}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab})/2 + (C_{ijkl}^{ab} - C_{ijlmnk}^{ab})/2] D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \\ & = \iiint [(C_{ijkl}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab}) D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b / 2 + (C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} D_{ij,k}^a D_{mn}^b / 2)_l - C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} (\mathcal{E}_{klr} D_{ij,kl}^a) D_{mn}^b / 2] dV \end{aligned}$$

Третье слагаемое правой части этого равенства тождественно равно нулю, так как множитель, выделенный круглыми скобками, является сверткой симметричного по индексам k, l тензора $D_{ij,kl}^a$ с антисимметричным по этим же индексам псевдотензора \mathcal{E}_{klr} . Соответственно, второе слагаемое является дивергенцией вектора $(C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} D_{ij,k}^a D_{mn}^b / 2)$ по свободному индексу l . На основании теоремы о дивергентном слагаемом, уравнения Эйлера будут содержать только те модули, которые входят в симметричную часть $(C_{ijkl}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab})/2$ тензоров модулей. Модули, входящие в антисимметричную часть $(C_{ijkl}^{ab} - C_{ijlmnk}^{ab})/2$ тензоров модулей, напротив, не будут фигурировать в уравнениях Эйлера.

Назовем «существенными» те модули, которые входят в состав тензоров $(C_{ijkl}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab})/2$. Соответственно, «несущественными» назовем модули, которые входят в состав тензоров $(C_{ijkl}^{ab} - C_{ijlmnk}^{ab})/2$. Симметрируем тензоры шестого ранга по третьему-шестому индексам и получим их упрощенную

форму. В итоге, структуры тензоров модулей шестого ранга приобретают вид:

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{22} &= \\
&= c_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\
&+ c_2^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\
&+ c_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\
&+ c_4^{22} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + \\
&+ c_5^{22} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + c_6^{22} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + c_7^{22} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{21} &= \\
&= c_1^{12} \delta_{ij} (\delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{km} \delta_{nl}) + \\
&+ c_2^{12} \delta_{im} (\delta_{kn} \delta_{jl} + \delta_{kl} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{nl}) + \\
&+ c_3^{12} \delta_{jm} (\delta_{il} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{nl}) + \\
&+ c_4^{12} (\delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{12} &= \\
&= c_1^{12} (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{il} \delta_{kj} \delta_{mn}) + \\
&+ c_2^{12} (\delta_{im} \delta_{kn} \delta_{jl} + \delta_{im} \delta_{kl} \delta_{jn} + \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{nl}) + \\
&+ c_3^{12} (\delta_{in} \delta_{km} \delta_{jl} + \delta_{in} \delta_{kl} \delta_{mj} + \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{ml}) + \\
&+ c_4^{12} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{km} \delta_{nj} + \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{mj})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{11} &= \\
&= c_1^{11} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \\
&+ \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \\
&+ \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\
&+ c_2^{11} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk})
\end{aligned}$$

С учетом гипотез обратимости и «существенности», количество «моментных модулей» сокращается с тридцати одного до тринадцати. Это количество не намного больше, чем в «классической» теории Миндлина.

9.3.3. Теорема о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий.

В этом разделе предпринята попытка обоснования сокращения количества когезионных модулей иным, более физичным путем [127].

Все тензоры модулей шестого ранга участвуют в свертках с кривизнами двух

сортов, и общим свойством всех сверток является то, что все кривизны – интегрируемы, т.е. являются градиентами соответствующих дисторсий.

Докажем теорему: «В объемную плотность потенциальной энергии кривизн входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, симметричных при перестановке третьего и шестого индексов. Остальные модули входят в ту часть объемной плотности потенциальной энергии кривизн, которая может быть преобразована в соответствующую часть поверхностной плотности потенциальной энергии адгезионного взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов. Таким образом, часть потенциальной энергии когезионных взаимодействий может быть представлена как часть потенциальной энергии адгезионных взаимодействий, и наоборот, что говорит о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий».

Доказательство.

Рассмотрим ту часть удвоенной потенциальной энергии, которая определяется кривизнами обоих сортов:

$$\begin{aligned} & \iiint C_{ijklmn}^{ab} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \\ & = \iiint [(C_{ijklmn}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab})/2 + (C_{ijklmn}^{ab} - C_{ijlmnk}^{ab})/2] D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \\ & = \iiint [(C_{ijklmn}^{ab} + C_{ijlmnk}^{ab})/2 + C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} / 2] D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV \end{aligned}$$

Второе слагаемое можно преобразовать к виду:

$$\iiint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \oint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF$$

Это соотношение показывает, что часть потенциальной энергии кривизн в

объеме $\iiint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = U_*$ эквивалентна части потенциальной

энергии адгезионных взаимодействий на поверхности

$$\oint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF = U_* .$$

Потенциальная энергия U_* субъективно может быть отнесена как к части

объемной потенциальной энергии кривизн $\iiint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV$, так и к части поверхностной потенциальной энергии адгезии

$$\iint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF = \iint \bar{A}_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF.$$

Здесь следует отметить, что тензоры адгезионных модулей пятого ранга \bar{A}_{ijmnl}^{ab} могут являться только частями тензоров A_{ijmnl}^{ab} , так как их трансверсальная изотропность определяется наличием в их базисных тензорах только одного вектора единичной нормали. В то же время, общая структура тензора A_{ijmnl}^{ab} определяется еще и другой группой базисных тензоров, содержащих в себе тройки векторов единичной нормали. Поэтому, так же, как нельзя полностью свести когезионные взаимодействия к адгезионным, нельзя и адгезионные взаимодействия полностью свести к когезионным.

Если выражение $\iint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF$ взять по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \iint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF = \\ & = -\iint [C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij,l}^a D_{mn}^b + C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_{k,l} D_{ij}^a D_{mn}^b] dF + \sum \int C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k \nu_l D_{ij}^a D_{mn}^b ds \end{aligned}$$

Перенеся первое слагаемое правой части соотношения в её левую часть, получим:

$$\begin{aligned} & \iint (C_{ijpmnq}^{ab} + C_{mnpqij}^{ba}) \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF = \\ & = -\iint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_{k,l} D_{ij}^a D_{mn}^b dF - \sum \int C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} s_r D_{ij}^a D_{mn}^b ds \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношение $C_{mnpqij}^{ba} = C_{ijqmpq}^{ab}$, являющееся условием существования потенциальной энергии, получим:

$$\iint (C_{ijpmnq}^{ab} + C_{ijqmpq}^{ab}) \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_k D_{ij}^a D_{mn,l}^b dF \equiv 0$$

Отсюда следует, что сумма положительно определенных квадратичных форм равна нулю:

$$-\iint C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} \mathcal{E}_{klr} n_{k,l} D_{ij}^a D_{mn}^b dF - \sum \int C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr} s_r D_{ij}^a D_{mn}^b ds = 0$$

Как следствие, эти квадратичные формы равны нулю по отдельности:

$$\begin{cases} \oint (C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr}) \mathcal{E}_{klr} n_{k,l} D_{ij}^a D_{mn}^b dF = 0 \\ \sum \oint (C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr}) s_r D_{ij}^a D_{mn}^b ds = 0 \end{cases} \Rightarrow (C_{ijpmnq}^{ab} \mathcal{E}_{pqr}) = 0$$

Что приводит к требованию равенства нулю антисимметричных по третьему-шестому индексам частей тензоров C_{ijkml}^{ab} :

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{klr} = \\ = (C_1^{ab} - C_2^{ab}) \delta_{ij} \mathcal{E}_{mnr} + (C_4^{ab} - C_{14}^{ab}) \delta_{jm} \mathcal{E}_{inr} + (C_5^{ab} - C_{13}^{ab}) \delta_{jn} \mathcal{E}_{imr} + \\ + (C_6^{ab} - C_{15}^{ab}) \delta_{mn} \mathcal{E}_{ijr} + (C_7^{ab} - C_8^{ab}) \delta_{im} \mathcal{E}_{jnr} + (C_{10}^{ab} - C_{11}^{ab}) \delta_{in} \mathcal{E}_{mjr} = 0 \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы следует, что антисимметричная по третьему и шестому индексу часть тензоров объемных «моментных» модулей определяет потенциальную энергию адгезии, связанную с взаимодействием на поверхности дисторсий и кривизн соответствующих сортов. Таким образом, существенными для формулировки выражения объемной плотности потенциальной энергии кривизн являются только те модули, которые входят в выражение симметричной при перестановке третьего и шестого индекса части тензоров модулей шестого ранга. Остальные объемные «моментные» модули являются слагаемыми в компонентах тензоров адгезионных свойств A_{ijmnl}^{ab} или равны нулю, если таковые адгезионные свойства поверхности не учитываются.

Таким образом, теорема «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий» позволяет сократить количество объемных «моментных» модулей в каждом тензоре шестого ранга с одиннадцати до семи.

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{ab} = \\ = C_1^{ab} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\ + C_3^{ab} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\ + C_6^{ab} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\ + C_7^{ab} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk}) + \\ + [C_5^{ab} \delta_{ij} \delta_{mn} + C_8^{ab} \delta_{im} \delta_{jn} + C_{10}^{ab} \delta_{in} \delta_{jm}] \delta_{kl} \end{aligned}$$

Основное следствие доказанной теоремы – свойство симметрии при

перестановке третьего и шестого индексов всех тензоров модулей шестого ранга:

$$C_{ijkml}^{ab} = C_{ijlmk}^{ab}$$

Таким образом, общая постановка теории сред с полями сохраняющихся дислокаций приводит к требованию симметрии по третьему-шестому индексам всех четырех тензоров когезионных модулей шестого ранга.

9.3.4. Структура тензора Миндлина C_{ijkml}^{22} .

Тензор модулей C_{ijkml}^{22} входит в выражение плотности потенциальной энергии через свертку с двумя тензорами третьего ранга кривизн второго сорта: $C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2$. Поэтому тензор модулей C_{ijkml}^{22} должен обладать следующими свойствами:

$$C_{ijkml}^{22} D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2 = C_{mnljk}^{22} D_{mn,l}^2 D_{ij,k}^2 \Rightarrow (C_{ijkml}^{22} - C_{mnljk}^{22}) D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2 = 0$$

В силу того, что в произвольной точке среды $D_{ij,k}^2 D_{mn,l}^2 \neq 0$, необходимо, чтобы:

$$(C_{ijkml}^{22} - C_{mnljk}^{22}) = 0 \Rightarrow C_{ijkml}^{22} = C_{mnljk}^{22}$$

Таким образом, потенциальная энергия зависит от компонентов симметричной при перестановке первой и второй троек индексов части тензора C_{ijkml}^{22} . Остальные компоненты тензора C_{ijkml}^{22} определяют диссипативные свойства дислокаций, и в обратимой модели должны быть равны нулю. Следовательно, тензор C_{ijkml}^{22} в обратимой модели имеет одиннадцать компонент:

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{22} = & \\ = & C_1^{22} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk}) + C_2^{22} (\delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\ & + C_3^{22} (\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk}) + C_4^{22} (\delta_{in} \delta_{jt} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}) + \\ & + C_5^{22} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_6^{22} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + C_7^{22} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + C_8^{22} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} + \\ & + C_9^{22} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + C_{10}^{22} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + C_{11}^{22} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} \end{aligned}$$

На основании теоремы «О единой природе когезионных и адгезионных

взаимодействий», тензор C_{ijkml}^{22} также должен обладать симметрией при перестановке третьего и шестого индексов $C_{ijkml}^{22} = C_{ijlmk}^{22}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
& (C_{ijkml}^{22} + C_{ijlmk}^{22}) / 2 = \\
& = (C_1^{22} + C_2^{22})(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lm}\delta_{nk} + \delta_{mn}\delta_{ki}\delta_{jl}) / 2 + \\
& + (C_3^{22} + C_4^{22})(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{nk} + \delta_{mk}\delta_{ni}\delta_{jl}) / 2 + \\
& + (C_6^{22} + C_{11}^{22})(\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}) / 2 + \\
& + (C_7^{22} + C_9^{22})(\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk}) / 2 + \\
& + (C_5^{22}\delta_{ij}\delta_{mn} + C_8^{22}\delta_{im}\delta_{jn} + C_{10}^{22}\delta_{in}\delta_{mj})\delta_{kl} \\
C_{ijkml}^{22} = \\
& = C_1^M(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lm}\delta_{nk} + \delta_{mn}\delta_{ki}\delta_{jl}) / 2 + \\
& + C_2^M(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{nk} + \delta_{mk}\delta_{ni}\delta_{jl}) / 2 + \\
& + C_3^M(\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}) / 2 + \\
& + C_4^M(\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk}) / 2 + \\
& + (C_5^M\delta_{ij}\delta_{mn} + C_6^M\delta_{im}\delta_{jn} + C_7^M\delta_{in}\delta_{mj})\delta_{kl}
\end{aligned}$$

9.3.5. Структура тензоров C_{ijkml}^{12} и C_{ijkml}^{21} .

Для тензоров C_{ijkml}^{21} и C_{ijkml}^{12} так же, как и для тензора C_{ijkml}^{22} , компоненты антисимметричной при перестановке первой и второй троек индексов части, при одновременной перестановке индексов сортности, определяют диссипативные свойства, и для обратимой модели должны быть равны нулю. Следовательно, тензоры C_{ijkml}^{21} и C_{ijkml}^{12} обладают свойством:

$$C_{ijkml}^{21} = C_{mnljk}^{12}$$

Можно говорить, что для тензора C_{ijkml}^{12} первая тройка индексов связана с индексами кривизн первого сорта, а вторая – с индексами кривизн второго сорта. Для тензора C_{ijkml}^{21} ситуация противоположная: первая тройка индексов связана с индексами кривизн второго сорта, а вторая – с индексами кривизн первого сорта.

Для этих тензоров существует дополнительное условие,

обусловленное тем, что кривизна первого сорта $D_{ijk}^1 = R_{i,jk} = R_{i,kj}$ симметрична по последним двум индексам. Поэтому тензор модулей C_{ijkml}^{21} должен обладать следующими свойствами:

$$C_{ijkml}^{21} D_{ijk}^2 R_{m,nl} = C_{ijkml}^{21} D_{ijk}^2 R_{m,ln} \Rightarrow (C_{ijkml}^{21} - C_{ijkmln}^{21}) D_{ijk}^2 R_{m,nl} = 0$$

В силу того, что в произвольной точке среды $D_{ijk}^2 D_{mnl}^1 \neq 0$, необходимо, чтобы:

$$(C_{ijkml}^{21} - C_{ijkmln}^{21}) = 0 \Rightarrow C_{ijkml}^{21} = C_{ijkmln}^{21}$$

Это требование приводит к следующей структуре тензора C_{ijkml}^{21} :

$$\begin{aligned} C_{ijkml}^{21} = & \\ = & C_{12}^{12} \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{nl} + C_{14}^{12} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + C_7^{12} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \\ & + (C_5^{12} + C_{13}^{12}) \delta_{ij} (\delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{kl} \delta_{mn}) / 2 + (C_2^{12} + C_6^{12}) \delta_{ik} (\delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{jl} \delta_{mn}) / 2 + \\ & + (C_8^{12} + C_9^{12}) \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{jn} \delta_{lk}) / 2 + (C_{11}^{12} + C_{15}^{12}) \delta_{km} (\delta_{in} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jn}) / 2 + \\ & + (C_4^{12} + C_{10}^{12}) \delta_{jm} (\delta_{in} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{kn}) / 2 + (C_1^{12} + C_3^{12}) (\delta_{ml} \delta_{ni} + \delta_{mn} \delta_{li}) \delta_{jk} / 2 \end{aligned}$$

Следовательно, тензоры $C_{ijkml}^{21} = C_{mnljik}^{12}$ в обратимой модели имеют девять общих компонент.

На основании теоремы «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», тензор C_{ijkml}^{21} также должен обладать симметрией при перестановке третьего и шестого индексов $C_{ijkml}^{21} = C_{ijlmnk}^{21}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
& C_{ijkml}^{21} \mathcal{E}_{kla} = \\
& = C_1^{21} \delta_{ij} \mathcal{E}_{mna} + C_2^{21} \delta_{jm} \mathcal{E}_{ina} + C_3^{21} \delta_{im} \mathcal{E}_{jna} + \\
& + C_4^{21} \delta_{ij} \mathcal{E}_{nma} + C_5^{21} (\delta_{jn} \mathcal{E}_{ima} + \delta_{mn} \mathcal{E}_{ija}) + C_6^{21} \delta_{im} \mathcal{E}_{nja} + \\
& + C_7^{21} (\delta_{in} \mathcal{E}_{mja} + \delta_{jn} \mathcal{E}_{mia}) + C_8^{21} \delta_{mj} \mathcal{E}_{nia} + C_9^{21} (\delta_{mn} \mathcal{E}_{jia} + \delta_{ni} \mathcal{E}_{jma}) = \\
& = (C_1^{21} - C_4^{21}) \delta_{ij} \mathcal{E}_{mna} + \\
& + (C_2^{21} - C_8^{21}) \delta_{jm} \mathcal{E}_{ina} + \\
& + (C_3^{21} - C_6^{21}) \delta_{im} \mathcal{E}_{jna} + \\
& + (C_5^{21} - C_7^{21}) \delta_{jn} \mathcal{E}_{ima} + \\
& + (C_5^{21} - C_9^{21}) \delta_{mn} \mathcal{E}_{ija} + \\
& + (C_7^{21} - C_9^{21}) \delta_{in} \mathcal{E}_{mja} = 0 \\
& \left\{ \begin{array}{l} C_4^{21} = C_1^{21} \\ C_6^{21} = C_3^{21} \\ C_7^{21} = C_5^{21} \\ C_8^{21} = C_2^{21} \\ C_9^{21} = C_5^{21} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

С учетом этой теоремы тензоры C_{ijkml}^{21} и C_{ijkml}^{12} обладают четырьмя общими модулями:

$$\begin{aligned}
& C_{ijkml}^{21} = \\
& = C_1^{21} \delta_{ij} (\delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{kn} \delta_{ml}) + \\
& + C_2^{21} \delta_{jm} (\delta_{kl} \delta_{in} + \delta_{ki} \delta_{nl} + \delta_{kn} \delta_{il}) + \\
& + C_3^{21} \delta_{im} (\delta_{kl} \delta_{jn} + \delta_{kj} \delta_{nl} + \delta_{kn} \delta_{jl}) + \\
& + C_5^{21} (\delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{km} \delta_{in} \delta_{jl} + \delta_{km} \delta_{il} \delta_{jn} + \delta_{jk} \delta_{mn} \delta_{li} + \delta_{jk} \delta_{ml} \delta_{ni}) \\
& C_{ijkml}^{12} = \\
& = C_1^{21} \delta_{mn} (\delta_{lk} \delta_{ij} + \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{lj} \delta_{ik}) + \\
& + C_2^{21} \delta_{ni} (\delta_{lk} \delta_{mj} + \delta_{lm} \delta_{jk} + \delta_{lj} \delta_{mk}) + \\
& + C_3^{21} \delta_{mi} (\delta_{lk} \delta_{nj} + \delta_{ln} \delta_{jk} + \delta_{lj} \delta_{nk}) + \\
& + C_5^{21} (\delta_{ml} \delta_{nj} \delta_{ik} + \delta_{ml} \delta_{nk} \delta_{ij} + \delta_{li} \delta_{mj} \delta_{nk} + \delta_{li} \delta_{mk} \delta_{nj} + \delta_{nl} \delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{nl} \delta_{ik} \delta_{jm})
\end{aligned}$$

9.3.6. Структура тензора Тупина C_{ijkml}^{11} .

Для тензора C_{ijkml}^{11} существует аналогичное условие, обусловленное тем, что

кривизны первого сорта $D_{ijk}^1 = R_{i,jk} = R_{i,kj}$ и $D_{mnl}^1 = R_{m,nl} = R_{m,ln}$ симметричны по последним двум индексам.

$$\begin{aligned}
 C_{ijkml}^{11} &= \\
 &= C_1^{11}(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk}) + C_2^{11}(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik}) + \\
 &+ C_3^{11}(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk}) + C_4^{11}(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li}) + \\
 &+ C_5^{11}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + C_6^{11}\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + C_7^{11}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + C_8^{11}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \\
 &+ C_9^{11}\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{nk} + C_{10}^{11}\delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + C_{11}^{11}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk} \\
 C_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{jka} &= \\
 &= (C_1^{11} - C_3^{11})\delta_{nl}\mathcal{E}_{ima} + (C_2^{11} - C_6^{11})\delta_{ml}\mathcal{E}_{ina} + (C_2^{11} - C_5^{11})\delta_{mn}\mathcal{E}_{lia} + \\
 &+ (C_4^{11} - C_{10}^{11})\delta_{in}\mathcal{E}_{lma} + (C_4^{11} - C_{11}^{11})\delta_{li}\mathcal{E}_{mna} + \\
 &+ (C_8^{11} - C_9^{11})\delta_{im}\mathcal{E}_{nla} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} C_3^{11} = C_1^{11} \\ C_5^{11} = C_2^{11} \\ C_6^{11} = C_2^{11} \\ C_9^{11} = C_8^{11} \\ C_{10}^{11} = C_4^{11} \\ C_{11}^{11} = C_4^{11} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{ijkml}^{11} &= \\
 &= C_1^{11}(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk}) + \\
 &+ C_2^{11}(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} + \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml}) + \\
 &+ C_4^{11}(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li} + \delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}) + \\
 &+ C_7^{11}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \\
 &+ C_8^{11}(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk})
 \end{aligned}$$

Следовательно, тензор C_{ijkml}^{11} в обратимой модели имеет пять компонент.

На основании теоремы «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», тензор C_{ijkml}^{11} также должен обладать симметрией при перестановке третьего и шестого индексов $C_{ijkml}^{11} = C_{ijlmk}^{11}$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{kla} &= \\
&= (C_1^{11} - C_2^{11})(\delta_{ij} \mathcal{E}_{mna} + \delta_{mn} \mathcal{E}_{jia}) + \\
&+ (C_1^{11} - C_4^{11})(\delta_{jm} \mathcal{E}_{ina} + \delta_{ni} \mathcal{E}_{jma}) + \\
&+ (C_2^{11} - C_4^{11}) \delta_{jn} \mathcal{E}_{ima} + \\
&+ (C_7^{11} - C_8^{11}) \delta_{im} \mathcal{E}_{jna} \\
&\left\{ \begin{array}{l} C_2^{11} = C_1^{11} \\ C_4^{11} = C_1^{11} \\ C_8^{11} = C_7^{11} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{11} &= \\
&= C_1^{11} (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \\
&+ \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \\
&+ \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\
&+ C_7^{11} (\delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^T &= \\
&= C_1^T (\delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + \\
&+ \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + \\
&+ \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li} + \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk}) + \\
&+ C_2^T (\delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl})
\end{aligned}$$

Таким образом, тензор Тупина обладает всего двумя существенными модулями.

Итогом изучения структуры и свойств тензоров модулей шестого ранга является следующее:

- тензор Миндлина C_{ijkml}^{22} обладает семью независимыми модулями,
- тензоры C_{ijkml}^{12} и C_{ijkml}^{21} обладает четырьмя общими модулями,
- тензор Тупина C_{ijkml}^{11} обладает двумя независимыми модулями.

Всего общая теория обладает тринадцатью независимыми модулями, что не на много превышает количество «когезионных» модулей классической теории Миндлина (одиннадцать модулей).

9.4. Гипотеза ортогональности типов дислокаций.

Рассмотрим случай разложения потенциальной энергии кривизн по типам:

$$\begin{aligned}
 & \iiint C_{ijkml}^{ab} D_{ij}^a D_{mn,l}^b dV = \iiint C_{ijkml}^{ab} D_{ij,k}^a D_{mn,l}^b dV = \\
 & = \iiint C_{ijkml}^{ab} [\gamma_{ij}^a + \frac{1}{3} \theta^a \delta_{ij} - \omega_p^a \mathcal{E}_{ijp}]_{,k} [\gamma_{mn}^b + \frac{1}{3} \theta^b \delta_{mn} - \omega_q^b \mathcal{E}_{mnq}]_{,l} dV = \\
 & = \iiint C_{ijkml}^{ab} [\gamma_{ij,k}^a + \frac{1}{3} \theta_{,k}^a \delta_{ij} - \omega_{p,k}^a \mathcal{E}_{ijp}] [\gamma_{mn,l}^b + \frac{1}{3} \theta_{,l}^b \delta_{mn} - \omega_{q,l}^b \mathcal{E}_{mnq}] dV = \\
 & = \iiint [C_{ijkml}^{ab} \gamma_{ij,k}^a \gamma_{mn,l}^b + \frac{1}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{ij} \theta_{,k}^a \gamma_{mn,l}^b - C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \gamma_{mn,l}^b + \\
 & + \frac{1}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \gamma_{ij,k}^a \theta_{,l}^b + \frac{1}{9} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \delta_{ij} \theta_{,k}^a \theta_{,l}^b - \frac{1}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \theta_{,l}^b - \\
 & - C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{mnq} \gamma_{ij,k}^a \omega_{q,l}^b - \frac{1}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{ij} \mathcal{E}_{mnq} \theta_{,k}^a \omega_{q,l}^b + C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \omega_{q,l}^b] dV = \\
 & = \iiint [C_{ijkml}^{ab} \gamma_{ij,k}^a \gamma_{mn,l}^b + \frac{1}{9} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \delta_{ij} \theta_{,k}^a \theta_{,l}^b + C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \omega_{q,l}^b + \\
 & + \frac{1}{3} (C_{ijkml}^{ab} + C_{mnljk}^{ba}) \delta_{ij} \theta_{,k}^a \gamma_{mn,l}^b - (C_{ijkml}^{ab} + C_{mnljk}^{ba}) \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \gamma_{mn,l}^b - \frac{1}{3} (C_{ijkml}^{ab} + C_{mnljk}^{ba}) \delta_{mn} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \theta_{,l}^b] dV = \\
 & = \iiint [C_{ijkml}^{ab} \gamma_{ij,k}^a \gamma_{mn,l}^b + \frac{1}{9} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \delta_{ij} \theta_{,k}^a \theta_{,l}^b + C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{mnq} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \omega_{q,l}^b + \\
 & + \frac{2}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{ij} \theta_{,k}^a \gamma_{mn,l}^b - 2 C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \gamma_{mn,l}^b - \frac{2}{3} C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \mathcal{E}_{ijp} \omega_{p,k}^a \theta_{,l}^b] dV = \\
 & = \\
 & \left\{ \begin{aligned} (C_{mnlk}^{ab})^{\theta\gamma} &= C_{ijkml}^{ab} \delta_{ij} = \\ &= (3C_1^{ab} + 2C_3^{ab} + C_6^{ab} + C_7^{ab}) (\delta_{kn} \delta_{ml} + \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{2}{3} \delta_{mn} \delta_{kl}) \\ (C_{mnlkp}^{ab})^{\gamma\omega} &= C_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{ijp} = \\ &= (C_3^{ab} - C_6^{ab}) (\delta_{ml} \mathcal{E}_{nkp} + \delta_{km} \mathcal{E}_{nlp}) + \\ &+ (C_3^{ab} - C_7^{ab}) (\delta_{nl} \mathcal{E}_{kmp} + \delta_{nk} \mathcal{E}_{lmp}) \\ (C_{lkp}^{ab})^{\omega\theta} &= C_{ijkml}^{ab} \delta_{mn} \mathcal{E}_{ijp} \equiv 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} C_3^{ab} &= -\frac{3}{4} C_1^{ab} \\ C_6^{ab} &= -\frac{3}{4} C_1^{ab} \\ C_7^{ab} &= -\frac{3}{4} C_1^{ab} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{kmnl}^{22\gamma\theta} &= C_{ijkmnl}^{22} \delta_{ij} = \\
&= (3C_1^{22} + 3C_2^{22} + 2C_3^{22} + 2C_4^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} + C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right) = \\
&= (3C_1^{22} + 3C_1^{22} + 2C_3^{22} + 2C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} + C_7^{22} + C_6^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right) = \\
&= 2(3C_1^{22} + 2C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right) = \\
&===== \\
&= 2(3C_1^{22} + 2C_3^{22} + 2C_6^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{km} \delta_{nl} + \frac{1}{2} \delta_{kn} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \delta_{kl} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pkl}^{22\theta\omega} &= C_{ijkmnl}^{22} \mathcal{E}_{ijp} \delta_{mn} = \\
&= (-3C_1^{22} + 3C_2^{22} + C_6^{22} - C_7^{22} + C_9^{22} - C_{11}^{22}) \mathcal{E}_{pkl} = \\
&= (-3C_1^{22} + 3C_1^{22} + C_6^{22} - C_7^{22} + C_7^{22} - C_6^{22}) \mathcal{E}_{pkl} \equiv 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkql}^{22\omega\gamma} &= C_{ijkmnl}^{22} \mathcal{E}_{mnq} = \\
&= (C_6^{22} - C_7^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathcal{E}_{iql} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathcal{E}_{jql} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{kql} \right) + (-C_9^{22} + C_{11}^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jl} \mathcal{E}_{kiq} + \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{kjq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{klq} \right) = \\
&= (C_6^{22} - C_7^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jk} \mathcal{E}_{iql} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathcal{E}_{jql} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{kql} \right) + (-C_7^{22} + C_6^{22}) \left(\frac{1}{2} \delta_{jl} \mathcal{E}_{kiq} + \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{kjq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{E}_{klq} \right) = \\
&= -\frac{1}{2} (C_6^{22} - C_7^{22}) (\delta_{jk} \mathcal{E}_{ilq} + \delta_{ik} \mathcal{E}_{jlq} + \delta_{jl} \mathcal{E}_{ikq} + \delta_{il} \mathcal{E}_{jkq})
\end{aligned}$$

Ортогональность θ - и ω - дислокаций дает возможность выдвинуть предположение о том, что все типы дислокаций ортогональны. Это предположение требует, чтобы:

$$C_6^{22} - C_7^{22} = 0$$

для ортогональности γ - и ω - дислокаций и

$$3C_1^{22} + 2C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22} = 0$$

для ортогональности γ - и θ - дислокаций.

Таким образом, «гипотеза ортогональности типов дислокаций» сводится к требованию равенства нулю всего двух линейных комбинаций «моментных» модулей и приводит к сокращению их количества с семи до пяти:

$$C_7^{ab} = C_6^{ab} = -(3C_1^{ab} + 2C_3^{ab})/2$$

$$\begin{aligned}
C_{ijkml}^{ab} = & \\
= C_1^{ab} & [\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} - \frac{3}{2}(\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk})] + \\
+ C_3^{ab} & [\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{nk}\delta_{li} - \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk} - \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk}] + \\
+ [C_5^{ab} & \delta_{ij}\delta_{mn} + C_8^{ab} \delta_{im}\delta_{jn} + C_{10}^{ab} \delta_{in}\delta_{jm}] \delta_{kl}
\end{aligned}$$

9.5. Структура и свойства адгезионных тензоров четвертого ранга.

Тензоры адгезионных модулей четвертого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Базисные тензоры можно разбить на три группы. В первую будут входить только такие, которые содержат в качестве сомножителей «плоские» тензоры Кронекера, во вторую – такие, которые содержат в качестве сомножителей «плоский» тензор Кронекера и один вида $(n_i n_j)$, в третью – те, которые содержат два тензора вида $(n_i n_j)$.

Базисные тензоры первой группы (3штуки):

$$\begin{cases} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{jn}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{mj}^* \end{cases}$$

Базисные тензоры второй группы (6штук):

$$\begin{cases} \delta_{ij}^* n_m n_n \\ \delta_{im}^* n_j n_n \\ \delta_{in}^* n_m n_j \end{cases} \begin{cases} \delta_{jm}^* n_i n_n \\ \delta_{jn}^* n_i n_m \end{cases} \begin{cases} \delta_{mn}^* n_i n_j \end{cases}$$

Базисные тензоры третьей группы (1штука):

$$n_i n_j n_m n_n$$

Таким образом, тензоры адгезионных модулей четвертого ранга имеют общий вид:

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{pq} = & \\
= & a_1^{pq} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{pq} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{pq} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + \\
& + a_4^{pq} \delta_{ij}^* n_m n_n + a_5^{pq} \delta_{im}^* n_j n_n + a_6^{pq} \delta_{in}^* n_m n_j + a_7^{pq} \delta_{jm}^* n_i n_n + a_8^{pq} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_9^{pq} \delta_{mn}^* n_i n_j + \\
& + a_{10}^{pq} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

Требование существования потенциальной энергии. Тензоры A_{ijmn}^{pq} должны удовлетворять условию существования потенциальной энергии, которое сводится к требованию симметрии относительно перестановки первой и второй пары индексов:

$$A_{ijmn}^{pq} = A_{mnij}^{qp}$$

Из условия существования потенциальной энергии следует:

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{pq} = & \\
= & a_1^{pq} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{pq} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{pq} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + \\
& + a_4^{pq} \delta_{ij}^* n_m n_n + a_5^{pq} \delta_{im}^* n_j n_n + a_6^{pq} \delta_{in}^* n_m n_j + a_7^{pq} \delta_{jm}^* n_i n_n + a_8^{pq} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_9^{pq} \delta_{mn}^* n_i n_j + \\
& + a_{10}^{pq} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{mnij}^{qp} = & \\
= & a_1^{qp} \delta_{mn}^* \delta_{ij}^* + a_2^{qp} \delta_{mi}^* \delta_{nj}^* + a_3^{qp} \delta_{mj}^* \delta_{in}^* + \\
& + a_4^{qp} \delta_{mn}^* n_i n_j + a_5^{qp} \delta_{mi}^* n_n n_j + a_6^{qp} \delta_{nj}^* n_i n_n + a_7^{qp} \delta_{ni}^* n_m n_j + a_8^{qp} \delta_{nj}^* n_m n_i + a_9^{qp} \delta_{ij}^* n_m n_n + \\
& + a_{10}^{qp} n_m n_n n_i n_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1^{qp} = a_1^{pq} & \quad a_2^{qp} = a_2^{pq} & \quad a_3^{qp} = a_3^{pq} & \quad a_4^{qp} = a_9^{pq} & \quad a_5^{qp} = a_5^{pq} \\
a_6^{qp} = a_7^{pq} & \quad a_7^{qp} = a_6^{pq} & \quad a_8^{qp} = a_8^{pq} & \quad a_9^{qp} = a_4^{pq} & \quad a_{10}^{qp} = a_{10}^{pq}
\end{aligned}$$

При $p = q = 2$, для тензора адгезионных модулей четвертого ранга A_{mnij}^{22} , условия существования потенциальной энергии проводят к сокращению количества модулей с десяти до восьми:

$$a_7^{22} = a_6^{22} \quad a_9^{22} = a_4^{22}$$

Соответственно, тензор адгезионных модулей четвертого ранга A_{mnij}^{22} , как тензор наиболее общего вида, содержит в своем составе 8 модулей и имеет структуру:

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{22} = & \lambda^{22F} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + (\mu^{22F} + \chi^{22F}) \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + (\mu^{22F} - \chi^{22F}) \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\
& + \alpha^{22} (n_i n_n \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{in}^*) + \beta^{22} (n_i n_j \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{ij}^*) + \delta^{22F} n_i n_m \delta_{jn}^* + B^{22} n_j n_n \delta_{im}^* + \\
& + A^{22} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

При $p \neq q$, для тензоров адгезионных модулей четвертого ранга A_{mnij}^{12} и A_{mnij}^{21} , условия существования потенциальной энергии приводят к тому, что оба тензора содержат один и тот же набор модулей.

$$\begin{aligned}
a_1^{21} = a_1^{12} \quad a_2^{21} = a_2^{12} \quad a_3^{21} = a_3^{12} \quad a_4^{21} = a_9^{12} \quad a_5^{21} = a_5^{12} \\
a_6^{21} = a_7^{12} \quad a_7^{21} = a_6^{12} \quad a_8^{21} = a_8^{12} \quad a_9^{21} = a_4^{12} \quad a_{10}^{21} = a_{10}^{12}
\end{aligned}$$

При этом так как общие модули тензоров A_{ijmn}^{12} и A_{ijmn}^{21} стоят в них множителями при разных базисных тензорах, структура тензоров остается разной:

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{12} = & a_1^{12} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{12} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{12} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + \\
& + a_4^{12} \delta_{ij}^* n_m n_n + a_5^{12} \delta_{im}^* n_j n_n + a_6^{12} \delta_{in}^* n_m n_j + a_7^{12} \delta_{jm}^* n_i n_n + a_8^{12} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_9^{12} \delta_{mn}^* n_i n_j + \\
& + a_{10}^{12} n_i n_j n_m n_n \\
A_{ijmn}^{21} = & a_1^{12} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{12} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{12} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + \\
& + a_9^{12} \delta_{ij}^* n_m n_n + a_5^{12} \delta_{im}^* n_j n_n + a_7^{12} \delta_{in}^* n_m n_j + a_6^{12} \delta_{jm}^* n_i n_n + a_8^{12} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_4^{12} \delta_{mn}^* n_i n_j + \\
& + a_{10}^{12} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

Тензоры A_{ijmn}^{12} и A_{ijmn}^{21} должны обладать следующими дополнительными свойствами:

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{12} n_j = 0 \\
A_{ijmn}^{21} n_n = 0
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что эти тензоры имеют следующую, более простую, структуру, чем тензор A_{ijmn}^{22} :

$$\begin{aligned}
A_{ijmn}^{12} = & a_1^{12} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{12} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{12} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + a_4^{12} \delta_{ij}^* n_m n_n + a_7^{12} \delta_{jm}^* n_i n_n + a_8^{12} \delta_{jn}^* n_i n_m \\
A_{ijmn}^{21} = & a_1^{12} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{12} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{12} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + a_7^{12} \delta_{im}^* n_m n_j + a_8^{12} \delta_{jn}^* n_i n_m + a_4^{12} \delta_{mn}^* n_i n_j \\
----- \\
a_5^{12} = 0 \quad a_6^{12} = 0 \quad a_9^{12} = 0 \quad a_{10}^{12} = 0
\end{aligned}$$

При $p = q = 1$, для тензора адгезионных модулей четвертого

ранга A_{mij}^{11} , условия существования потенциальной энергии проводят к сокращению количества модулей с десяти до восьми:

$$a_7^{11} = a_6^{11} \quad a_9^{11} = a_4^{11}$$

Тензор A_{ijmn}^{11} должен обладать также следующими дополнительными свойствами:

$$A_{ijmn}^{11} n_j = 0 \quad A_{ijmn}^{11} n_n = 0$$

что приводит его структуру к еще более простому виду, чем у тензоров A_{ijmn}^{22} ,

$$A_{ijmn}^{21} \text{ и } A_{ijmn}^{12} :$$

$$A_{ijmn}^{11} = a_1^{11} \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + a_2^{11} \delta_{im}^* \delta_{jn}^* + a_3^{11} \delta_{in}^* \delta_{mj}^* + a_8^{11} \delta_{jn}^* n_i n_m$$

9.6. Структура и свойства адгезионных тензоров пятого ранга.

Тензоры адгезионных модулей пятого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам пятого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или векторов единичной нормали n_i со всеми возможными перестановками индексов. Базисные тензоры можно разбить на три группы. В первую будут входить только такие, которые содержат в качестве сомножителей два «плоских» тензора Кронекера и один вектор единичной нормали, во вторую – такие, которые содержат в качестве сомножителей один «плоский» тензор Кронекера и три вектора единичной нормали, в третью – произведение пяти векторов единичной нормали.

Базисные тензоры первой группы (15штук):

$$\left\{ \begin{array}{l} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* \\ n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* \\ n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* \\ n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* \\ n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* \\ n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* \\ n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* \\ n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^* \\ n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_l \delta_{jm}^* \delta_{ni}^* \\ n_l \delta_{jn}^* \delta_{im}^* \\ n_l \delta_{ji}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\}$$

Базисные тензоры второй группы (10штук):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij}^* n_m n_n n_l \\ \delta_{im}^* n_j n_n n_l \\ \delta_{in}^* n_j n_m n_l \\ \delta_{il}^* n_j n_m n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{jm}^* n_i n_n n_l \\ \delta_{jn}^* n_i n_m n_l \\ \delta_{jl}^* n_i n_m n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{mn}^* n_i n_j n_l \\ \delta_{ml}^* n_i n_j n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m \end{array} \right\}$$

Базисные тензоры третьей группы (1 штука):

$$n_i n_j n_m n_n n_l$$

В силу того, что плотность потенциальной энергии U_F определена так, что в ней отсутствуют нормальные производные дисторсий, структура всех тензоров модулей A_{ijmnl}^{ab} не должна содержать те базисные тензоры, которые содержат вектор единичной нормали с индексом l . Таким образом, количество базисных тензоров сокращается с двадцати шести до шестнадцати:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* \\ n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* \\ n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* \\ n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* \\ n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* \\ n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* \\ n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* \\ n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^* \\ n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* \end{array} \right\}$$

$$\delta_{il}^* n_j n_m n_n \quad \delta_{jl}^* n_i n_m n_n \quad \delta_{ml}^* n_i n_j n_n \quad \delta_{nl}^* n_i n_j n_m$$

Тензоры адгезионных модулей пятого ранга приобретают следующую структуру:

$$\begin{aligned} A_{ijmnl}^{ab} = & \\ = & G_1^{ab} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{ab} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_3^{ab} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\ & + G_4^{ab} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_5^{ab} n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* + G_6^{ab} n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + \\ & + G_7^{ab} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{ab} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_9^{ab} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\ & + G_{10}^{ab} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* + G_{11}^{ab} n_n \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_{12}^{ab} n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* + \\ & + G_{13}^{ab} \delta_{il}^* n_j n_m n_n + G_{14}^{ab} \delta_{jl}^* n_i n_m n_n + G_{15}^{ab} \delta_{ml}^* n_i n_j n_n + G_{16}^{ab} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m \end{aligned}$$

Требование существования потенциальной энергии. Требование существования потенциальной энергии взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов на поверхности тела можно записать в виде следующих связей:

9.6.1. Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{22} .

Наиболее общей структурой обладает тензор A_{ijmnl}^{22} :

$$\begin{aligned}
 A_{ijmnl}^{22} = & \\
 = & G_1^{22} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{22} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_3^{22} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\
 & + G_4^{22} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_5^{22} n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* + G_6^{22} n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + \\
 & + G_7^{22} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{22} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_9^{22} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\
 & + G_{10}^{22} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* + G_{11}^{22} n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^* + G_{12}^{22} n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* + \\
 & + G_{13}^{22} \delta_{il}^* n_j n_m n_n + G_{14}^{22} \delta_{jl}^* n_i n_m n_n + G_{15}^{22} \delta_{mi}^* n_i n_j n_n + G_{16}^{22} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m
 \end{aligned}$$

9.6.2. Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{12} .

Тензор A_{ijmnl}^{12} обладает дополнительными свойствами:

$$A_{ijmnl}^{12} n_j = 0$$

Эти свойства, наряду с общими свойствами тензоров A_{ijmnl}^{pq} приводят к следующей структуре тензора A_{ijmnl}^{12} :

$$\begin{aligned}
 A_{ijmnl}^{12} = & \\
 = & G_1^{12} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{12} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_3^{12} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\
 & + G_7^{12} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{12} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_9^{12} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\
 & + G_{10}^{12} n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* + G_{11}^{12} n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^* + G_{12}^{12} n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^* + \\
 & + G_{14}^{12} \delta_{jl}^* n_i n_m n_n
 \end{aligned}$$

9.6.3. Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{21} .

Тензор A_{ijmnl}^{21} обладает дополнительными свойствами:

$$A_{ijmnl}^{21} n_n = 0$$

Эти свойства, наряду с общими свойствами тензоров A_{ijmnl}^{pq} приводят к

следующей структуре тензора A_{ijmnl}^{21} :

$$\begin{aligned}
A_{ijmnl}^{21} = & \\
= & G_1^{21} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{21} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_3^{21} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_4^{21} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_5^{21} n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* + G_6^{21} n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_7^{21} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{21} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_9^{21} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\
& + G_{16}^{21} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m
\end{aligned}$$

С учетом свойства симметрии кривизны первого сорта, $A_{ijmnl}^{21} = A_{ijmln}^{21}$. Отсюда:

$$G_3^{21} = G_2^{21} \quad G_6^{21} = G_5^{21} \quad G_9^{21} = G_8^{21}$$

Тензор A_{ijmnl}^{21} приобретает структуру, содержащую только семь модулей:

$$\begin{aligned}
A_{ijmnl}^{21} = & \\
= & G_1^{21} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_2^{21} n_i (\delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{jl}^* \delta_{mn}^*) + \\
& + G_4^{21} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_5^{21} n_j (\delta_{in}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{mn}^*) + \\
& + G_7^{21} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_8^{21} n_m (\delta_{jn}^* \delta_{li}^* + \delta_{jl}^* \delta_{in}^*) + \\
& + G_{16}^{21} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m
\end{aligned}$$

Свойство $A_{ijmnl}^{12} = A_{nmijl}^{21}$ приводит к связям между модулями G_a^{21} и G_a^{12} . В результате, тензоры модулей A_{ijmnl}^{12} и A_{ijmnl}^{21} содержат одинаковый набор из десяти модулей G_a^{12} , но при разных базисных тензорах:

$$\begin{aligned}
A_{ijmnl}^{21} = & \\
= & G_9^{12} n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + G_8^{12} n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* + G_7^{12} n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_{12}^{12} n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + G_{10}^{12} n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* + G_{11}^{12} n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + \\
& + G_3^{12} n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^* + G_2^{12} n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + G_1^{12} n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + \\
& + G_{14}^{12} \delta_{nl}^* n_i n_j n_m
\end{aligned}$$

9.6.4. Структура адгезионного тензора A_{ijmnl}^{11} .

Тензор A_{ijmnl}^{11} входит в выражение потенциальной энергии в свертке с тензором пятого ранга $D_{ij}^1 D_{mnl}^1$, который может быть представлен в виде $R_{i,j} R_{m,nl}$. Отсюда следует дополнительная симметрия при перестановке

индексов внутри пары nl и тензор адгезионных модулей A_{ijmnl}^{11} должен обладать дополнительным свойством $A_{ijmnl}^{11} \mathcal{E}_{nlr} = 0$. С учетом этих свойств симметрии, получим:

$$\begin{aligned} A_{ijmnl}^{11} \mathcal{E}_{nlr} n_r &= \\ &= (G_2^{11} - G_1^{11}) n_m \mathcal{E}_{ijr} n_r + (G_2^{11} - G_3^{11}) n_i \mathcal{E}_{jmr} n_r + (G_5^{11} - G_6^{11}) n_j \mathcal{E}_{imr} n_r = 0 \end{aligned}$$

Тензор A_{ijmnl}^{11} приобретает более простую структуру и, соответственно, количество модулей сокращается с восьми до пяти.

$$\begin{aligned} A_{ijmnl}^{11} &= \\ &= G_1^{11} (n_i \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* - n_m \delta_{jl}^* \delta_{in}^* + n_i \delta_{jn}^* \delta_{lm}^* - n_m \delta_{jn}^* \delta_{li}^* + n_i \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* - n_m \delta_{ji}^* \delta_{nl}^*) + \\ &+ G_4^{11} (n_j \delta_{im}^* \delta_{nl}^* - n_n \delta_{jl}^* \delta_{mi}^*) + \\ &+ G_5^{11} (n_j \delta_{in}^* \delta_{lm}^* - n_n \delta_{jm}^* \delta_{il}^* + n_j \delta_{il}^* \delta_{mn}^* - n_n \delta_{ji}^* \delta_{lm}^*) + \\ &+ G_{13}^{11} (\delta_{il}^* n_j n_m n_n - \delta_{ml}^* n_i n_j n_n) + \\ &+ G_{14}^{11} (\delta_{jl}^* n_i n_m n_n - \delta_{nl}^* n_i n_j n_m) \end{aligned}$$

9.7. Структура и свойства адгезионных тензоров шестого ранга.

Тензоры адгезионных модулей шестого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями троек «плоских» тензоров Кронекера $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Базисные тензоры можно разбить на четыре группы. В первую будут входить только такие, которые содержат в качестве сомножителей «плоские» тензоры Кронекера, во вторую – такие, которые содержат в качестве сомножителей два «плоских» тензора Кронекера и один вида $(n_i n_j)$, в третью – те, которые содержат один «плоский» тензор Кронекера и два тензора вида $(n_i n_j)$, и в четвертый – три тензора вида $(n_i n_j)$.

Базисные тензоры первой группы (15штук):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* \\ \delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* \\ \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* \\ \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* \\ \delta_{ik}^* \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{in}^* \delta_{km}^* \delta_{jl}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{il}^* \delta_{km}^* \delta_{nj}^* \\ \delta_{il}^* \delta_{mn}^* \delta_{kj}^* \\ \delta_{il}^* \delta_{nk}^* \delta_{mj}^* \end{array} \right\}$$

Базисные тензоры второй группы (45штук):

$$\left\{ \begin{array}{l} n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* \\ n_i n_j \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* \\ n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_i n_k \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* \\ n_i n_k \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* \\ n_i n_k \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_i n_m \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* \\ n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* \\ n_i n_m \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* \\ n_i n_n \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* \\ n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_i n_l \delta_{km}^* \delta_{nj}^* \\ n_i n_l \delta_{mn}^* \delta_{kj}^* \\ n_i n_l \delta_{nk}^* \delta_{mj}^* \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_j n_k \delta_{im}^* \delta_{nl}^* \\ n_j n_k \delta_{in}^* \delta_{ml}^* \\ n_j n_k \delta_{il}^* \delta_{mn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_j n_m \delta_{ik}^* \delta_{nl}^* \\ n_j n_m \delta_{in}^* \delta_{kl}^* \\ n_j n_m \delta_{il}^* \delta_{kn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_j n_n \delta_{ik}^* \delta_{ml}^* \\ n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* \\ n_j n_n \delta_{il}^* \delta_{km}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_j n_l \delta_{ik}^* \delta_{mn}^* \\ n_j n_l \delta_{im}^* \delta_{kn}^* \\ n_j n_l \delta_{in}^* \delta_{km}^* \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_k n_m \delta_{ij}^* \delta_{nl}^* \\ n_k n_m \delta_{in}^* \delta_{lj}^* \\ n_k n_m \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_k n_n \delta_{ij}^* \delta_{ml}^* \\ n_k n_n \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \\ n_k n_n \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_k n_l \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ n_k n_l \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \\ n_k n_l \delta_{in}^* \delta_{jm}^* \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_m n_n \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \\ n_m n_n \delta_{ik}^* \delta_{lj}^* \\ n_m n_n \delta_{il}^* \delta_{jk}^* \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_m n_l \delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \\ n_m n_l \delta_{ik}^* \delta_{nj}^* \\ n_m n_l \delta_{in}^* \delta_{jk}^* \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_n n_l \delta_{ij}^* \delta_{km}^* \\ n_n n_l \delta_{ik}^* \delta_{mj}^* \\ n_n n_l \delta_{im}^* \delta_{jk}^* \end{array} \right\}$$

Базисные тензоры третьей группы (15штук):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij}^* n_k n_m n_n n_l \\ \delta_{ik}^* n_j n_m n_n n_l \\ \delta_{im}^* n_j n_k n_n n_l \\ \delta_{in}^* n_j n_k n_m n_l \\ \delta_{il}^* n_j n_k n_m n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{jk}^* n_i n_m n_n n_l \\ \delta_{jm}^* n_i n_k n_n n_l \\ \delta_{jn}^* n_i n_k n_m n_l \\ \delta_{jl}^* n_i n_k n_m n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{km}^* n_i n_j n_n n_l \\ \delta_{kn}^* n_i n_j n_m n_l \\ \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{mn}^* n_i n_j n_k n_l \\ \delta_{ml}^* n_i n_j n_k n_n \end{array} \right\} \left\{ \delta_{nl}^* n_i n_j n_k n_m \right\}$$

Базисные тензоры четвертой группы (1штука):

$$n_i n_j n_k n_m n_n n_l$$

Требование существования потенциальной энергии. Все базисные тензоры должны удовлетворять условию существования потенциальной энергии, которое сводится к требованию симметрии всех тензоров модулей шестого ранга относительно перестановки первой и второй троек индексов:

$$A_{ijkml}^{ab} = A_{mnljk}^{ba}$$

Этим требованиям удовлетворяют следующие линейные комбинации исходных базисных тензоров.

Итоговый лист базисных тензоров первой группы (11 штук):

$$\begin{pmatrix} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) \\ (\delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{mn}^* \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) \\ (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) \\ (\delta_{in}^* \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + \delta_{mj}^* \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* \\ \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* \\ \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* \end{pmatrix} \begin{cases} \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* \\ \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* \\ \delta_{il}^* \delta_{km}^* \delta_{nj}^* \end{cases}$$

Итоговый лист базисных тензоров второй группы (27 штук):

$$\begin{pmatrix} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) \\ (n_i n_j \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_n \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) \\ (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) \\ (n_i n_k \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + n_m n_l \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) \\ (n_i n_k \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_l \delta_{nj}^* \delta_{ik}^*) \\ (n_i n_k \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_l \delta_{nk}^* \delta_{ij}^*) \\ (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) \\ (n_i n_n \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ik}^* \delta_{nl}^*) \\ (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (n_i n_l \delta_{km}^* \delta_{nj}^* + n_m n_k \delta_{li}^* \delta_{jn}^*) \\ (n_i n_l \delta_{mn}^* \delta_{kj}^* + n_m n_k \delta_{ij}^* \delta_{nl}^*) \\ (n_i n_l \delta_{nk}^* \delta_{mj}^* + n_m n_k \delta_{jl}^* \delta_{in}^*) \\ (n_j n_k \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + n_n n_l \delta_{mi}^* \delta_{jk}^*) \\ (n_j n_k \delta_{in}^* \delta_{ml}^* + n_n n_l \delta_{nj}^* \delta_{ik}^*) \\ (n_j n_k \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + n_n n_l \delta_{mk}^* \delta_{ij}^*) \\ (n_j n_l \delta_{ik}^* \delta_{mn}^* + n_n n_k \delta_{ml}^* \delta_{ij}^*) \\ (n_j n_l \delta_{im}^* \delta_{kn}^* + n_n n_k \delta_{mi}^* \delta_{lj}^*) \\ (n_j n_l \delta_{in}^* \delta_{km}^* + n_n n_k \delta_{mj}^* \delta_{li}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_i n_m \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* \\ n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* \\ n_i n_m \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* \\ n_j n_n \delta_{ik}^* \delta_{ml}^* \\ n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* \\ n_j n_n \delta_{il}^* \delta_{km}^* \\ n_k n_l \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \\ n_k n_l \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \\ n_k n_l \delta_{in}^* \delta_{jm}^* \end{pmatrix}$$

Итоговый лист базисных тензоров третьей группы (9 штук):

$$\begin{pmatrix} (\delta_{ij}^* n_k n_m n_n n_l + \delta_{mn}^* n_k n_i n_j n_l) \\ (\delta_{ik}^* n_j n_m n_n n_l + \delta_{ml}^* n_j n_i n_n n_k) \\ (\delta_{in}^* n_j n_k n_m n_l + \delta_{mj}^* n_n n_k n_i n_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta_{il}^* n_j n_k n_m n_n + \delta_{mk}^* n_j n_l n_i n_n) \\ (\delta_{jk}^* n_i n_m n_n n_l + \delta_{nl}^* n_i n_m n_j n_k) \\ (\delta_{jl}^* n_i n_k n_m n_n + \delta_{nk}^* n_i n_l n_m n_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{im}^* n_j n_k n_n n_l \\ \delta_{jn}^* n_i n_k n_m n_l \\ \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n \end{pmatrix}$$

Итоговый лист базисных тензоров четвертой группы (1 штука):

$$n_i n_j n_k n_m n_n n_l$$

Таким образом, тензоры адгезионных модулей шестого ранга содержат в своих составах по 48 модулей и имеют вид:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{ab} = & \\
= & A_1^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_2^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{mn}^* \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + \\
& + A_3^{ab} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) + A_4^{ab} (\delta_{in}^* \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + \delta_{mj}^* \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_5^{ab} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_6^{ab} \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + A_7^{ab} \delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_8^{ab} \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + \\
& + A_9^{ab} \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + A_{10}^{ab} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + A_{11}^{ab} \delta_{il}^* \delta_{km}^* \delta_{nj}^* + \\
& + A_{12}^{ab} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_{13}^{ab} (n_i n_j \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_n \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + A_{14}^{ab} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{15}^{ab} (n_i n_k \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + n_m n_l \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) + A_{16}^{ab} (n_i n_k \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_l \delta_{nj}^* \delta_{ik}^*) + A_{17}^{ab} (n_i n_k \delta_{jl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_l \delta_{nk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{18}^{ab} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + A_{19}^{ab} (n_i n_n \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ik}^* \delta_{nl}^*) + A_{20}^{ab} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{21}^{ab} (n_i n_l \delta_{km}^* \delta_{nj}^* + n_m n_k \delta_{li}^* \delta_{jn}^*) + A_{22}^{ab} (n_i n_l \delta_{mn}^* \delta_{kj}^* + n_m n_k \delta_{ij}^* \delta_{nl}^*) + A_{23}^{ab} (n_i n_l \delta_{nk}^* \delta_{mj}^* + n_m n_k \delta_{jl}^* \delta_{in}^*) + \\
& + A_{24}^{ab} (n_j n_k \delta_{im}^* \delta_{nl}^* + n_n n_l \delta_{mi}^* \delta_{jk}^*) + A_{25}^{ab} (n_j n_k \delta_{in}^* \delta_{ml}^* + n_n n_l \delta_{mj}^* \delta_{ik}^*) + A_{26}^{ab} (n_j n_k \delta_{il}^* \delta_{mn}^* + n_n n_l \delta_{mk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{27}^{ab} (n_j n_l \delta_{ik}^* \delta_{mn}^* + n_n n_k \delta_{ml}^* \delta_{ij}^*) + A_{28}^{ab} (n_j n_l \delta_{im}^* \delta_{kn}^* + n_n n_k \delta_{mi}^* \delta_{lj}^*) + A_{29}^{ab} (n_j n_l \delta_{in}^* \delta_{km}^* + n_n n_k \delta_{mj}^* \delta_{li}^*) + \\
& + A_{30}^{ab} n_i n_m \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_{31}^{ab} n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_{32}^{ab} n_i n_m \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + \\
& + A_{33}^{ab} n_j n_n \delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + A_{34}^{ab} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{35}^{ab} n_j n_n \delta_{il}^* \delta_{km}^* + \\
& + A_{36}^{ab} n_k n_l \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* + A_{37}^{ab} n_k n_l \delta_{im}^* \delta_{nj}^* + A_{38}^{ab} n_k n_l \delta_{in}^* \delta_{jm}^* + \\
& + A_{39}^{ab} (\delta_{ij}^* n_k n_m n_n n_l + \delta_{mn}^* n_k n_i n_j n_l) + A_{40}^{ab} (\delta_{ik}^* n_j n_m n_n n_l + \delta_{ml}^* n_j n_i n_n n_k) + A_{41}^{ab} (\delta_{in}^* n_j n_k n_m n_l + \delta_{mj}^* n_n n_k n_i n_l) + \\
& + A_{42}^{ab} (\delta_{il}^* n_j n_k n_m n_n + \delta_{mk}^* n_j n_l n_i n_n) + A_{43}^{ab} (\delta_{jk}^* n_i n_m n_n n_l + \delta_{ni}^* n_i n_m n_j n_k) + A_{44}^{ab} (\delta_{ji}^* n_i n_k n_m n_n + \delta_{nk}^* n_i n_l n_m n_j) + \\
& + A_{45}^{ab} \delta_{im}^* n_j n_k n_n n_l + A_{46}^{ab} \delta_{jn}^* n_i n_k n_m n_l + A_{47}^{ab} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n + \\
& + A_{48}^{ab} n_i n_j n_k n_m n_n
\end{aligned}$$

С учетом свойств $A_{ijkml}^{ab} n_k = 0$ и $A_{ijkml}^{ab} n_l = 0$:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{ab} = & \\
= & A_1^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_2^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{mn}^* \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + \\
& + A_3^{ab} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) + A_4^{ab} (\delta_{in}^* \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + \delta_{mj}^* \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_5^{ab} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_6^{ab} \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + A_7^{ab} \delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_8^{ab} \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + \\
& + A_9^{ab} \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + A_{10}^{ab} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + A_{11}^{ab} \delta_{il}^* \delta_{km}^* \delta_{nj}^* + \\
& + A_{12}^{ab} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^*) + A_{13}^{ab} (n_i n_j \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + n_m n_n \delta_{lj}^* \delta_{ik}^*) + A_{14}^{ab} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{15}^{ab} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^*) + A_{16}^{ab} (n_i n_n \delta_{ml}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ik}^* \delta_{nl}^*) + A_{17}^{ab} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{18}^{ab} n_i n_m \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + A_{19}^{ab} n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_{20}^{ab} n_i n_m \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + \\
& + A_{21}^{ab} n_j n_n \delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + A_{22}^{ab} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{23}^{ab} n_j n_n \delta_{il}^* \delta_{km}^* + \\
& + A_{24}^{ab} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

Здесь модули перенумерованы по нижнему индексу.

Симметричная при перестановке третьего и шестого индексов часть этих тензоров [128]:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{ab} = & \\
= & A_1^{ab} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_2^{ab} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_3^{ab} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_4^{ab} (\delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^*) + A_5^{ab} (\delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_6^{ab} \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_7^{ab} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + \\
& + A_8^{ab} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + n_i n_j \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + n_m n_n \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_9^{ab} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^* + n_i n_n \delta_{lm}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ki}^* \delta_{nl}^*) + \\
& + A_{10}^{ab} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{11}^{ab} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{12}^{ab} n_i n_m (\delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lj}^* \delta_{nk}^*) + A_{13}^{ab} n_i n_m \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* + A_{14}^{ab} n_j n_n (\delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{mk}^*) + \\
& + A_{15}^{ab} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{16}^{ab} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

Здесь модули повторно перенумерованы по нижнему индексу.

Требование симметрии тензоров A_{ijkml}^{ab} по третьему-шестому индексам удовлетворяется.

$$A_{ijkml}^{ab} \mathcal{E}_{klp} n_p = 0$$

9.7.1. Структура адгезионного тензора Миндлина A_{ijkml}^{22} .

Адгезионный тензор Миндлина обладает наиболее общей структурой, выявленной в предыдущем параграфе.

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{22} = & \\
= & A_1^{22} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_2^{22} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_3^{22} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_4^{22} (\delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^*) + A_5^{22} (\delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_6^{22} \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_7^{22} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + \\
& + A_8^{22} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + n_i n_j \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + n_m n_n \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_9^{22} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^* + n_i n_n \delta_{lm}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ki}^* \delta_{nl}^*) + \\
& + A_{10}^{22} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{11}^{22} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{12}^{22} n_i n_m (\delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lj}^* \delta_{nk}^*) + A_{13}^{22} n_i n_m \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* + A_{14}^{22} n_j n_n (\delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{mk}^*) + \\
& + A_{15}^{22} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{16}^{22} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

9.7.2. Структура адгезионных тензоров A_{ijkml}^{12} и A_{ijkml}^{21} .

Тензоры адгезионного взаимодействия кривизн разных сортов обладают дополнительными свойствами, обусловленных тем, что кривизна первого сорта симметрична при перестановке своего второго и третьего индексов.

Тензор A_{ijkml}^{12} должен обладать следующим свойством:

$$A_{ijkml}^{12} = A_{ikjml}^{12}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} A_{ijkml}^{12} = & \\ = & A_1^{12} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ik}^* \delta_{lm}^* \delta_{nj}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ji}^* \delta_{kl}^*) + \\ & + A_2^{12} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^*) + \\ & + A_3^{12} (\delta_{ij}^* \delta_{kl}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jl}^*) \delta_{mn}^* + \\ & + A_4^{12} (\delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{kn}^* \delta_{mj}^*) + \\ & + (A_5^{12} \delta_{im}^* + A_8^{12} n_i n_m) (\delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lk}^* \delta_{nj}^*) + \\ & + (A_6^{12} \delta_{im}^* + A_9^{12} n_i n_m) (\delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + \delta_{nk}^* \delta_{jl}^*) + \\ & + A_7^{12} \delta_{in}^* (\delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + \delta_{lj}^* \delta_{km}^*) + \\ & + A_8^{12} (\delta_{kl}^* n_j + \delta_{jl}^* n_k) n_i n_m n_n \end{aligned}$$

Соответственно, тензор A_{ijkml}^{21} должен обладать следующим свойством:

$$A_{ijkml}^{21} = A_{ijkml}^{21}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} A_{ijkml}^{21} = & \\ = & A_1^{12} (\delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{kn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ki}^* \delta_{nj}^* + \delta_{ij}^* \delta_{mn}^* \delta_{kl}^*) + \\ & + A_2^{12} (\delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^*) + \\ & + A_3^{12} (\delta_{mn}^* \delta_{lk}^* + \delta_{ml}^* \delta_{nk}^*) \delta_{ij}^* + \\ & + A_4^{12} (\delta_{ml}^* \delta_{jn}^* \delta_{ik}^* + \delta_{mk}^* \delta_{jn}^* \delta_{il}^* + \delta_{mn}^* \delta_{lj}^* \delta_{ik}^* + \delta_{mk}^* \delta_{lj}^* \delta_{in}^*) + \\ & + (A_5^{12} \delta_{im}^* + A_8^{12} n_i n_m) (\delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lj}^* \delta_{nk}^* + \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{lk}^* \delta_{nj}^*) + \\ & + (A_6^{12} \delta_{im}^* + A_9^{12} n_i n_m) (\delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + \delta_{nk}^* \delta_{jl}^*) + \\ & + A_7^{12} \delta_{mj}^* (\delta_{lk}^* \delta_{ni}^* + \delta_{kn}^* \delta_{li}^*) + \\ & + A_8^{12} (\delta_{kl}^* n_n + \delta_{nk}^* n_l) n_i n_m n_j \end{aligned}$$

Таким образом, оба тензора A_{ijkml}^{12} и A_{ijkml}^{21} содержат один и тот же набор из девяти модулей, однако их структура разная, так как этот набор модулей является множителями при разных базисных тензорах.

9.7.3. Структура адгезионного тензора Тупина A_{ijkml}^{11} .

Общий вид:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{11} = & \\
= & A_1^{11} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_2^{11} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_3^{11} \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + A_4^{11} (\delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^*) + A_5^{11} (\delta_{im}^* \delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{im}^* \delta_{lj}^* \delta_{nk}^*) + \\
& + A_6^{11} \delta_{im}^* \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_7^{11} \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + \\
& + A_8^{11} (n_i n_j \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + n_m n_n \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + n_i n_j \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + n_m n_n \delta_{ki}^* \delta_{jl}^*) + \\
& + A_9^{11} (n_i n_n \delta_{km}^* \delta_{jl}^* + n_m n_j \delta_{li}^* \delta_{nk}^* + n_i n_n \delta_{lm}^* \delta_{jk}^* + n_m n_j \delta_{ki}^* \delta_{nl}^*) + \\
& + A_{10}^{11} (n_i n_j \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + n_m n_n \delta_{lk}^* \delta_{ij}^*) + \\
& + A_{11}^{11} (n_i n_n \delta_{lk}^* \delta_{jm}^* + n_m n_j \delta_{kl}^* \delta_{ni}^*) + \\
& + A_{12}^{11} n_i n_m (\delta_{kj}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ij}^* \delta_{nk}^*) + A_{13}^{11} n_i n_m \delta_{nj}^* \delta_{kl}^* + A_{14}^{11} n_j n_n (\delta_{ik}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{mk}^*) + \\
& + A_{15}^{11} n_j n_n \delta_{im}^* \delta_{kl}^* + A_{16}^{11} \delta_{kl}^* n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}$$

Условие симметрии по второму-третьему и по пятому-шестому индексам:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{jkp} n_p = 0 \quad A_{ijkml}^{11} \mathcal{E}_{nlq} n_q = 0 \\
(-A_1^{11} + A_2^{11}) = 0 \quad (-A_1^{11} + A_4^{11}) = 0 \quad (-A_1^{11} + A_3^{11}) = 0 \quad (-A_2^{11} + A_4^{11}) = 0 \\
(-A_2^{11} + A_7^{11}) = 0 \quad (-A_5^{11} + A_6^{11}) = 0 \quad (-A_8^{11} + A_{10}^{11}) = 0 \quad (-A_9^{11} + A_{11}^{11}) = 0 \\
(-A_{12}^{11} + A_{13}^{11}) = 0
\end{aligned}$$

В результате, перенумеровав модули, получим окончательную структуру адгезионного тензора Тупина:

$$\begin{aligned}
A_{ijkml}^{11} &= \\
&= A_1^{11} (\delta_{ij}^* \delta_{km}^* \delta_{nl}^* + \delta_{mn}^* \delta_{li}^* \delta_{jk}^* + \delta_{ij}^* \delta_{lm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mn}^* \delta_{ki}^* \delta_{jl}^* + \\
&+ \delta_{ik}^* \delta_{jm}^* \delta_{nl}^* + \delta_{ml}^* \delta_{ni}^* \delta_{jk}^* + \delta_{il}^* \delta_{jm}^* \delta_{nk}^* + \delta_{mk}^* \delta_{ni}^* \delta_{jl}^* + \\
&+ \delta_{ij}^* \delta_{kl}^* \delta_{mn}^* + \delta_{ik}^* \delta_{jn}^* \delta_{ml}^* + \delta_{il}^* \delta_{jn}^* \delta_{mk}^* + \delta_{in}^* \delta_{lk}^* \delta_{jm}^*) + \\
&+ A_2^{11} \delta_{im}^* (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*) + \\
&+ A_3^{11} n_i n_m (\delta_{jk}^* \delta_{nl}^* + \delta_{jn}^* \delta_{kl}^* + \delta_{jl}^* \delta_{kn}^*)
\end{aligned}$$

9.8. Лемма о тройной дивергенции тензора пятого ранга $(T_{ijkml} \varphi_m)_{,nlk}$.

Произвольный тензор второго ранга, построенный как тройная дивергенция тензора пятого ранга $(T_{ijkml} \varphi_m)_{,nlk}$, имеет структуру линейной комбинации четырех дифференциальных операторов третьего порядка над векторным полем φ_m . Причем два из них – интегрируемы в квадратурах, а два других – не интегрируемы.

$$\begin{aligned}
T_{ijkml} \varphi_{m,nlk} &= \\
&= [T_1 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + T_2 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ml} + \\
&+ T_3 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{nl} + T_4 \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \\
&+ T_5 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + T_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{ml} + T_7 \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{nl} + T_8 \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \\
&+ T_9 \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{nk} + T_{10} \delta_{in} \delta_{mj} \delta_{kl} + T_{11} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{mk} + \\
&+ T_{12} \delta_{mn} \delta_{li} \delta_{jk} + T_{13} \delta_{mn} \delta_{lj} \delta_{ik} + \\
&+ T_{14} \delta_{ml} \delta_{ni} \delta_{jk} + T_{15} \delta_{mj} \delta_{nk} \delta_{li}] \varphi_{m,nlk} = \\
&= (T_1 + T_2 + T_5) \delta_{ij} \Delta \varphi_{k,k} + (T_3 + T_{10} + T_{15}) \Delta \varphi_{j,i} + \\
&+ (T_7 + T_8 + T_9) \Delta \varphi_{i,j} + (T_4 + T_6 + T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14}) \varphi_{k,ijk} = \\
&= X_1 \Delta \varphi_{i,j} + X_2 \varphi_{k,ijk} + X_3 \delta_{ij} \Delta \varphi_{k,k} + X_4 \Delta \varphi_{j,i} = \\
&= (X_1 \Delta \varphi_i + X_2 \varphi_{k,ik})_{,j} + X_3 \delta_{ij} \Delta \varphi_{k,k} + X_4 \Delta \varphi_{j,i}
\end{aligned}$$

Не трудно убедиться в том, что первые два слагаемых интегрируемы в квадратурах, а два последних – не интегрируемы.

ГЛАВА 10 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Cosserat E., Cosserat F., «Theorie des Corps Deformables», 1909, Paris, Hermann.
2. Jaramillo T.J. «A generalization of the energy function of elasticity theory», Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.
3. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. «Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц», 1960, ФТТ, т. 2, вып. 7, 1399-1409.
4. Лурье С.А., Белов П.А. «Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами», Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2006. № 14. С. 114-132.
5. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.
6. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», 1962, Arch. Ration. Mech. And Analysis.
7. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», 2009, «Прикладная математика и механика», Т. 73. № 5. стр. 599-608.
8. Белов П.А. «Об определении компонентов вектора перемещений через компоненты тензора девиатора деформаций», 1982, Тематический сборник трудов Московского авиационного института «Расчет тонкостенных элементов конструкций на прочность устойчивость и живучесть».
9. Папкович П.Ф. «Теория упругости», 1939, Государственное издательство оборонной промышленности, 643стр.
10. De Wit R. «The Continual Theory of the Stationary Dislocations», Solid State Physics, New York, Academic Press Inc, 1960, V10, h. 249-.
11. Лихачев В.А., Волков А.Е., Шудегов В.Е., «Континуальная теория дефектов», Л., Изд-во ЛГУ, 1986, 228стр.

12. Белов П.А., Лурье С.А. «Общая теория дефектов сплошных сред», 2003, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.9, №4, стр. 471-485.
13. Белов П.А., Лурье С.А. «К общей геометрической теории дефектных сред», Физическая мезомеханика, 2007. Т. 10. № 6. С. 49-61.
14. Бабешко В.А., Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. «Масштабные эффекты (multyscale-effects) в моделях механики сплошных сред», 2002, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.8., №1, стр. 71-82.
15. Kadic A., Edelen D.G.B. «A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations: Lect. Notes in Physics», Berlin-New York, Springer-Verlag, 1983, V.174, 290p.
16. Белов П.А. «Обобщенные разложения в задачах механики деформируемого твердого тела», Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04, М., 1998.
17. Лурье С.А., Белов П.А., Кривошук И.И. «О некоторых классах моделей тонких структур», 2000, "Конструкции из композиционных материалов", ВИМИ. Вып.2
18. Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
19. Лагранж Ж. Аналитическая механика, том 2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
20. Вариационные принципы механики. Сборник статей классиков науки. Под редакцией Полак Л. С., М.: Физматгиз, 1959.
21. Образцов И.Ф., Елпатьевский А.Н., Белов П.А. «Об общем подходе к формулировке линейных моделей сред различной гладкости», 1988, Известия АН СССР, т. 303, № 6.
22. Ланцош К. «Вариационные принципы механики», 1965, Физматгиз, 411стр.
23. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Обобщение модели Миндлина», Композиты и наноструктуры. 2011. № 1. стр. 24-38.

24. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория идеальных адгезионных взаимодействий», Механика композиционных материалов и конструкций, 2007, Т. 13. № 4. С. 519-536.
25. S.A.Lurie, P.A.Belov, N.Tuchkova «Gradient theory of media with conserved dislocations application to microstructured materials», 2010, BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua. Springer, New York
26. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием»», Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005, Изд. ИРПИМ РАН, стр. 235-268.
27. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2009, т.15, №4, , 610-629.
28. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. «Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения», 1996, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.2, №2, стр.84-104.
29. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А. «Об обобщенных разложениях в прикладных задачах теории упругости и их приложениях к задачам механики композитных конструкций», 1997, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.3, №3, стр. 62-79.
30. Лурье С.А., Белов П.А. «Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля», 1998, Известия Российской академии наук. Механика твердого тела., №3, стр. 157-166.
31. Бодунов А.М., Кривошук И.И., Белов П.А., Лурье С.А. «Масштабные эффекты в тонких пленках», 2002, "Конструкции из композиционных материалов ", ВИМИ, N 2, p.33-40.
32. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф.,

- Яновский Ю.Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах», 2002, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.8, №4, стр. 585-598.
33. Белов П.А. «Пространство моделей градиентных теорий упругости», Сборник трудов Международной заочной научно-практической конференции «Актуальные вопросы образования и науки», Россия, Тамбов, 30 декабря 2013 г.
34. Белов П.А., Лурье С.А. «Модели сплошных сред с неинтегрируемым полем тензора деформаций», Сборник аннотаций докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001, с.98.
35. Белов П.А. «Об одной двухпараметрической градиентной модели деформируемых сред», Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 2. С. 170-176.
36. Gurtin M.E., Murdoch A.I., 1975. A continuum theory of elastic material surfaces. Arch. Ration. Mech. Anal.57, 291–323.
37. Gurtin M. E., Murdoch, A. I., 1978, Surface Stress in Solids, International Journal of Solids and Structures, 14(6), pp. 431–440.
38. Белов П.А., Жигалин Г.Я. «Математическое моделирование механических свойств графена», "Механика и процессы управления. Труды XXXXI всероссийского симпозиума", Т.1, М, РАН, 2011, стр. 220-227.
39. Лурье С.А., Белов П.А. "Математические модели механики сплошной среды и физических полей", 2000, Изд. ВЦ РАН, 150стр.
40. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. "Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой.", 2011, Издательство МАИ, 156стр
41. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Общая и прикладная теория межфазного слоя», Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. № 4. С. 5-14.

42. Адамов А.А. «О гипотезе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континуума Коссера», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2010, т.16, №3, стр. 329-346.
43. Miva M. «Influence of the diameters of particulates on the modulus of elasticity of reinforced polymers», *Kobunshi Ronbunshu*, 1978, 35(2), p.125-129.
44. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «The application of the multiscale models for description of the dispersed composites», 2005, *J. "Computational Materials Science" A.*, 2005, 36(2), p. 145-152.
45. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М. Изд-во Моск. Ун-та, 1984. – 336 с.
46. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.Мир, 1982. – 334 с.
47. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической
48. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // *Acta Metallurgica* 1973. V.21, p. 571-574.
49. Taya M., Chow T.-W. On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: An application to a hybrid composite // *Int Journal of Solids and Structures* 1981, V.17, p.553-563.
50. Weng G.J. Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions // *Int. J. Engng. Sci.* 1984, V.22, p. 845-856.
51. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П. «Основы теории межфазного слоя», 2004, " Механика композиционных материалов и конструкций ", Т.10, №4, стр. 596-612.
52. Белов П.А., Лурье С.А., Гордеев А.В. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Градиентная модель нанокompозита, армированного SWNT», 2013, "Материаловедение", №5, стр. 35-39.

53. Odegard, G.M., T.S. Gates, K.E. Wise, C. Park, E.J. Siochi, "Constitutive Modeling of Nanotube-Reinforced Polymer Composites," *Composites Science and Technology*, Vol. 63, no. 11, pp. 1671-1687 (2003)
54. Гордеев А.В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами// *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2010, Т.16, №1
55. Белов П.А., Зайцев О.В. «Объяснение «Эффекта Одегарда на коротких SWNT», в рамках градиентной теории межфазного слоя», 2013, "Материаловедение", №7, стр. 44-46.
56. Белов П.А., Гордеев А.В. «Адгезионная модель нанокompозита, армированного SWNT», 2013, "Материаловедение", №6, стр. 33-38.
57. Odegard G. M., Frankland S. J. V., Gates T. S. Effect of nanotube functionalization on the elastic properties of polyethylene nanotube composites//*AIAA J.*2005. V. 43. P. 1828-1835
58. Belov P.A. «Mechanical properties of graphene within the framework of gradient theory of adhesion», ICCS17, June 17-21, 2013, Porto, Portugal.
59. Geim A.K., Novoselov K.S., Jiang D., Schedin F., Booth T.J., Khotkevich V.V., Morozov S.V. «Two-dimensional atomic crystals», *PNAS* 102, 10451 (2005) DOI:10.1073/pnas.0502848102
60. Белов П.А. «Теория упругости или наномеханика. Что заложено в решатель?», Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы 2011», Москва
61. Белов П.А. «Масштабные эффекты в мелкодисперсных композитах», III международная научно-практическая конференция "Компьютерные технологии в проектировании и производстве конструкций", Санкт-Петербург.
62. Белов П.А. «Теория дефектных сред как модель континуальной наномеханики», X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 2011.
63. Белов П.А., Юхацков М.В. «О применимости решений

классической теории упругости в области вершины трещины», IV международная научно-практическая конференция «КомпозИТ-2012: Информационные технологии в проектировании и производстве конструкций из композиционных материалов» 24 мая 2012 г., Москва.

64. Е.Н. Каблов, В.Б. Литвинов, И.С. Деев, П.А. Белов, Л.П. Кобец «Экспериментальные исследования новой моды разрушения в полимерных матрицах композиционных материалов и её математическое моделирование», 2012, Международная конференция, посвященная 80-летию ВИАМ.

65. Лурье С.А., Белов П.А. «О масштабных эффектах в механике хрупкого разрушения», 2013, "Деформации и разрушение материалов", № 5, стр. 10-17.

66. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Объяснение систематического отклонения экспериментальных данных от закона Холла-Петча», 2012, 17 Европейская конференция по механике разрушения, Россия, Казань.

67. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Вывод G-интеграла», 2012, 17 Европейская конференция по механике разрушения, Россия, Казань.

68. Lurie S.A., Belov P.A. «Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion and Interfacial Interactions, Defects», Annual conference of the American scientific organization of composites, USA, Blacksburg, 10.10.2001г.

69. Lurie S.A., Belov P.A. «Multiscale modeling in the mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects», 12 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Darmstadt, Sept. 2002.

70. Lurie S., Belov P. «The application of the multiscale models for description of the dispersed composites», 7th Int. Conf. On the Deformation and Fracture of Composites (DFC-7), The University of Sheffield, April 2003, Book of Abstracts.

71. Lurie S.A., Belov P.A. «Mathematical model of the interfacial layer in the mechanics of materials», 2004, 6-th International Congress on Mathematical Modeling. Russia, Nigny Novgorod, September, p.34-35.

72. Lurie S.A., Belov P.A., Zubov V., Tuchkova N.P. «Modeling of the interphase layer in the mechanics of composite materials. Identification of the model parameters», Euromech, 2004, Colloquium 458, Lomonosov Moscow State University, Abstracts pp.72-74.
73. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Theory of the interfacial interactions as particular variant of the theory for continuous media with kept dislocations», Euromech, 2005, S-Petersburg (Repino).
74. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Multi-Scale Modeling of Interphase Layer in Mechanics of Heterogeneous Mediums», Euromech, 2005, S-Petersburg (Repino).
75. Lurie S.A., Belov P.A. «On Variant of Interphase Layer Theory», Int Conf. Advanced in Multiscale Modeling of Composite Materials Systems & Components, CA., 25-30 Spt. Monterey, Abstracts p. 55-57.
76. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. «Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения», 1996, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.2, №2, стр.84-104.
77. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А. «Об обобщенных разложениях в прикладных задачах теории упругости и их приложениях к задачам механики композитных конструкций», 1997, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.3, №3, стр. 62-79.
78. Lurie S.A., Belov P.A., Orlov A.P., Pankratov V.V. «Continuum mechanics models with generalized kinematics and fracture mechanics application», 1997, 16th Canadian Congress of Applied Mechanics. Canada. Quebec 93-94/
79. Lurie S.A., Belov P.A. «Models continuums with the generalized kinematics and some applications», 1997, 3-rd international symposium "Dynamic and technological problems of the mechanics of designs and continuous media", Russia, Yaropoletz.
80. Lurie S.A., Belov P.A., Sergeev V.N. «About a method of orthogonal kinematic statements in problems of mechanics», 1998, 4-th international

symposium "Dynamic and technological problems of the mechanics of designs and continuous media", Russia, Yaropoletz.

81. Белов П.А., Лурье С.А. «Модели сплошных сред с неинтегрируемым полем тензора деформаций», Сборник аннотаций докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001, с.98.

82. Белов П.А. «Вариант моментной теории упругости», 1982, Тематический сборник трудов МАИ «Прочность элементов конструкций летательных аппаратов»

83. Лурье С.А., Белов П.А. «Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля», 1998, Известия Российской академии наук. Механика твердого тела., №3, стр. 157-166.

84. Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. «О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах», 2000, "Механика композиционных материалов и конструкций ", Т.6, №3, стр.436-444.

85. Лурье С.А., Белов П.А. «Вариационная формулировка моделей неголономных сред», 2001, "Механика композиционных материалов и конструкций ", Т.7, №2, стр. 266-276.

86. Белов П.А., Горшков А.Г., Лурье С.А. «Вариационная модель неголономных 4D-сред», Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2006. № 6. С. 29-46.

87. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория 4D-сред с сохраняющимися дислокациями», Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 26-41.

88. Белов П.А., Лурье С.А. «Идеальная несимметричная 4D-среда как модель обратимой динамической термоупругости», Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 5. С. 108-120.

89. Белов П.А. «Теория дефектных сред как модель континуальной наномеханики», X Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 2011.

90. Лурье С.А., Белов П.А. "Математические модели механики сплошной среды и физических полей", 2000, Изд. ВЦ РАН, 150стр.
91. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. "Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой.", 2011, Издательство МАИ, 156стр.
92. Лурье С.А., Белов П.А., Криволицкая И.И. «О некоторых классах моделей тонких структур», 2000, "Конструкции из композиционных материалов", ВИМИ. Вып.2
93. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи», "Advanced problems of heterogeneous media.", Inst. of Appl. Mech. Of Russian Academy of Sciences, 2006, (1) pp.235-267.
94. Бодунов А.М., Криволицкая И.И., Белов П.А., Лурье С.А. «Масштабные эффекты в тонких пленках», 2002, "Конструкции из композиционных материалов ", ВИМИ, N 2, p.33-40.
95. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах», 2002, "Механика композиционных материалов и конструкций", Т.8, №4, стр.585-598.
96. Бабешко В.А., Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. «Масштабные эффекты (multiscale-effects) в моделях механики сплошных сред», 2002, "Механика композиционных материалов и конструкций ", Т.8., №1, стр.71-82.
97. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B. « Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects», 2003, in BOOK "Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics", Analysis and Simulation of Multifield Problems, vol. 12, Springer, (2003), P. 101-110.
98. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Tuchkova N. «Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites», 2003, J. Computational Materials Science, 28(3-4), p.529-539.
99. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «The application of the multiscale

models for description of the dispersed composites», 2005, J. "Computational Materials Science" A., 2005, 36(2), p. 145-152.

100. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials», Journal of Materials Science, 2006. V. 41. № 20. p. 6693-6707.

101. Лурье С.А., Белов П.А., Дудченко А.А., Семернин А.М., Хадарман Х «Об одном алгоритме учета поврежденности в механике материалов», 2006, "Механика композиционных материалов и конструкций ", Т.12, №4, p.566-

102. Lurie S.A., Belov P.A. «Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations», International Journal of Fracture. 2008. Т. 150. № 1-2. С. 181-194.

103. Lurie S.A., Belov P.A. «The model of heterogeneous continuum description tension surface and some generalization to the theory of field in physics», 1995, 2th Symposium "Advances in structural and heterogeneous continua", Russia, Moscow.

104. Lurie S.A., Belov P.A. «On the Theory of the Thin Films and Cohesion Field», 2000, Annual Scientific Conference, Book of Annotations, 2000, 2-7 April, Gottingen, Germany.

105. Lurie S.A., Belov P.A. «Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion and Interfacial Interactions, Defects», Annual conference of the American scientific organization of composites, USA, Blacksburg, 10.10.2001г.

106. Lurie S.A., Belov P.A. «Multiscale modeling in the mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects», 12 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Darmstadt, Sept. 2002.

107. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Nanomechanical modeling of the nanostructures and dispersed composites», 12 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Darmstadt, Sept. 2002.

108. Lurie S., Belov P. «Multiscale modeling in continuum mechanics of

solids. Applications in fracture mechanics and mechanics of composites», VII Int. Conf. Computer-Aided Design of Advanced Materials and Technologies. Book of Abstracts, August, Tomsk, 2003, pp.200-201.

109. Lurie S., Belov P. «About new classification of the defects in the solid mechanics (some applications)», 13 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Magdeburg, Sept. 2003, pp.42-43.

110. Belov P., Tuchkova N., Lurie S. «Multiscale modeling of the reinforcement effects of the nanocomposites», 13 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Magdeburg, Sept. 2003, pp.69-70.

111. Lurie S., Belov P. «The application of the multiscale models for description of the dispersed composites», 7th Int. Conf. On the Deformation and Fracture of Composites (DFC-7), The University of Sheffield, April 2003, Book of Abstracts.

112. Lurie S.A., Belov P.A. «Mathematical model of the interfacial layer in the mechanics of materials», 2004, 6-th International Congress on Mathematical Modeling. Russia, Nigny Novgorod, September, p.34-35.

113. Lurie S.A., Belov P.A., Zubov V., Tuchkova N.P. «Modeling of the interphase layer in the mechanics of composite materials. Identification of the model parameters», Euromech, 2004, Colloquium 458, Lomonosov Moscow State University, Abstracts pp.72-74.

114. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Theory of the interfacial interactions as particular variant of the theory for continuous media with kept dislocations», Euromech, 2005, S-Petersburg (Repino).

115. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., N.Tuchkova «Multi-Scale Modeling of Interphase Layer in Mechanics of Heterogeneous Mediums», Euromech, 2005, S-Petersburg (Repino).

116. Lurie S.A., Belov P.A. «On Variant of Interphase Layer Theory», Int Conf. Advanced in Multiscale Modeling of Composite Materials Systems & Components, CA., 25-30 Spt. Monterey, Abstracts p. 55-57.

117. Sergey Lurie, Petr Belov «Cohesion field: Barenblatt's hypothesis as formal corollary of theory of continuous media with conserved dislocations»,

International Congress on Fracture, 2007.

118. Потупчик Е.М., Лурье С.А., Белов П.А. «Исследование адгезионных взаимодействий в рамках неклассических моделей сплошных сред», II International Conference «Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials» DFMN2007.

119. Лурье С.А., П.А. Белов, Ю.О. Соляев, Потупчик Е.М. «Об одном варианте континуальной теории адгезионных взаимодействий», II International Conference «Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials» DFMN2007.

120. Лурье С.А., Белов П.А. «Градиентная теория межфазного слоя и её возможности при моделировании и прогнозе свойств микро- и наноструктурированных сред», 2009, Всероссийская конференция "Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред" к 20-летию ИПРИМ РАН.

121. Белов П.А. «Теория упругости или наномеханика. Что заложено в решатель?», Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы 2011», Россия, Москва

122. Белов П.А. «Масштабные эффекты в мелкодисперсных композитах», III международная научно-практическая конференция "Компьютерные технологии в проектировании и производстве конструкций", Россия, Санкт-Петербург.

123. Белов П.А., Юхацков М.В. «О применимости решений классической теории упругости в области вершины трещины», IV международная научно-практическая конференция «КомпозИТ-2012: Информационные технологии в проектировании и производстве конструкций из композиционных материалов» 24 мая 2012 г., Россия, Москва.

124. Е.Н. Каблов, В.Б. Литвинов, И.С. Деев, П.А. Белов, Л.П. Кобец «Экспериментальные исследования новой моды разрушения в полимерных матрицах композиционных материалов и её математическое моделирование»,

2012, Международная конференция, посвященная 80-летию ВИАМ, Россия, Москва.

125. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Объяснение систематического отклонения экспериментальных данных от закона Холла-Петча», 2012, 19 Европейская конференция по механике разрушения, Россия, Казань.

126. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Вывод G-интеграла», 2012, 19 Европейская конференция по механике разрушения, Россия, Казань.

127. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», 2013, Сборник трудов Международной заочной научно-практической конференции "«Актуальные вопросы образования и науки»", Россия, Тамбов, 30 декабря 2013 г.

128. Белов П.А., Нелюб В.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. О единой природе адгезионных и реберных взаимодействий», 2013, "Клеи. Герметики. Технологии", №5, стр. 28-34