

УДК: 621.001.5.

## **О построении математической модели движения автомобиля**

С.В. Иванников, Г.Л. Родионов, А.С. Сидоренко

*С целью формирования блока математического моделирования, входящего в состав транспортного тренажера, выполнен анализ отечественных и зарубежных исследований по разработке алгоритмов, описывающих динамику автомобиля. Рассмотрены методы моделирования динамики автомобиля как упруго-массовой системы, моделирования двигательной установки и трансмиссии. Разработаны предложения по рациональной структуре и составу алгоритма имитации динамики легкового автомобиля в виде взаимосвязанных подсистем дифференциальных уравнений. Предложенные уравнения движения являются основой для создания программного обеспечения, позволяющего имитировать на ЭВМ движение легкового автомобиля в реальном масштабе времени.*

### **1. Введение**

Существующие в настоящее время тренажерные комплексы для обучения водителя автотранспорта ориентированы на имеющиеся ранее относительно маломощные вычислительные средства, не позволяющие с достаточной подробностью описывать движение автомобиля как системы со многими степенями свободы. Например, в работе [1] рассмотрена математическая модель одного из таких комплексов, ориентированная на использование персональной ЭВМ с процессором Pentium 233. Быстрое развитие вычислительной мощности современных персональных ЭВМ открывает возможности для получения лучших характеристик блока моделирования тренажера посредством учета большего количества конструктивных параметров автомобиля при математическом описании процесса его движения. Предпосылкой для этого является достаточно широкий круг уже существующих математических моделей динамики автомобиля.

Целью данной работы является сравнительный анализ существующих теоретических исследований динамики автомобиля и выбор наиболее общих и универсальных алгоритмов имитации процесса его движения, применимых к основным режимам его эксплуатации: разгону и торможению на прямолинейном участке траектории, маневрированию и поворотам. Предполагаемые ограничения для математической модели – ровный характер покрытия дороги и пренебрежение аэродинамическим воздействием воздушного потока, обтекающего автомобиль.

Выбор математического аппарата и алгоритмов имитации движения проводился с использованием следующих критериев:

- полнота описания математического аппарата в первоисточнике;

- возможность использования математического аппарата для описания основных режимов эксплуатации автомобиля;
- полнота учета инерционных и массовых характеристик основных узлов автомобиля, повышающая адекватность модели движения;
- возможность упрощения модели движения путем простого исключения из математической модели отдельных уравнений и параметров с целью обеспечения вычислительного режима в реальном масштабе времени.

## **2. Анализ исследований динамики автомобиля**

Работы, посвященные развитию математических моделей движения автомобиля, в зависимости от задач, поставленных в этих работах, можно разделить на две группы.

В первой группе работ ([2]) ставится задача проектирования конструкции автомобиля и нахождения «отклика» параметров движения на изменение конструктивных параметров в процессе проектирования. Математические модели этого класса отличаются высокой степенью адекватности и сложности, а реализация таких моделей на ЭВМ требует больших вычислительных ресурсов. Следствием этого является то, что эти модели являются «медленными» и в большинстве случаев не могут функционировать в режиме реального времени.

Вторая, менее многочисленная группа работ, посвящена математическому описанию движения в реальном масштабе времени, проводимому в рамках решения проблемы создания автотранспортных тренажеров. К этой группе относится работа [1]. Остановимся на содержании упомянутых работ подробнее.

В работе [2] приведены основные результаты моделирования на ЭВМ динамики легкового автомобиля, проведенного в рамках решения проблемы конструирования машины. Обсуждаются конструктивные параметры, вводимые в модель, и допущения (ограничения), используемые при формировании упруго-массовой модели.

При моделировании автомобиль рассматривался как пятимассовая система – кузов и четыре колеса. Кузов считался абсолютно жестким телом. Учтены гироскопический момент и моменты инерции колес. Данная математическая модель применима для всех основных режимов движения, включая торможение двигателем и переезд неровностей. Собственно уравнения движения в работе не приведены, что затрудняет использование её результатов в задаче математического моделирования. Кроме того, результаты, приведенные в работе [2], не удовлетворяют первым двум критериям, изложенным во введении к настоящей работе.

Наиболее близкой к теме моделирования динамики легкового автомобиля, с целью создания транспортного тренажера, является статья [1]. В этой работе построена математическая модель движения легкового автомобиля и выполнена ее реализация в виде программного продукта на

ПЭВМ. Особое внимание уделено описанию решения практических вопросов, связанных с реализацией метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений движения. Описан прием восстановления трехмерной поверхности дороги при вычислениях в режиме реального времени. Проверено функционирование программного продукта в реальном времени на базе процессора Pentium 233. Создана система смены кадра визуального положения автомобиля через каждые 50 мс, обеспечивающая наблюдение маневрирования, кренов, заносов и поворотов.

Автомобиль рассматривался как упруго-массовая система в виде подрессоренного твердого тела, имеющего заданную массу и момент инерции. Перемещение и скорость автомобиля имеют по шесть компонент (два трехмерных вектора – линейные и угловые составляющие). При построении динамической модели используется ряд упрощающих предположений. Предполагается, в частности, что все колеса имеют независимую подвеску и массу равную нулю. Это приводит к тому, что у системы остается шесть степеней свободы (координаты центра масс и ориентация автомобиля). Далее предполагалось, что автомобиль не подвержен деформациям, возникающим, например, при переезде через препятствия, т.е. ход подвесок не смещается относительно центра масс. Еще одно упрощение – радиус колес принимается равным нулю, т. е. колесо стягивается в точку на конце пружины подвески. Это, например, упрощает вычисление координат точек касания колес и поверхности дороги.

Система дифференциальных уравнений, описывающая упруго-массовую модель автомобиля, характеризуется наличием степенных нелинейностей и параметров, значения которых определяются свойствами дорожного покрытия и рельефом дороги под колесом. Она позволяет учитывать возможность отрыва колес от грунта, вертикальные ограничения хода подвесок и получать параметры курсового движения с достаточной для практических целей точностью. Вместе с тем, приведенная математическая модель является упрощенной, соответствующей возможностям персональной ЭВМ с процессором Pentium 233.

Возможности современных ПЭВМ допускают реализацию более сложных моделей движения, обладающих большей степенью адекватности реальным условиям эксплуатации автомобиля, что делает актуальной задачу, поставленную в настоящей работе.

Результаты разработок, связанных с решением проблемы математического моделирования движения автомобиля достаточно полно представлены в отечественной литературе.

Например, в работе [3] подробно рассмотрены различные подходы к формированию математической модели движения автомобиля в различных режимах эксплуатации. Приведены законы движения колесной машины как механической системы. Исследованы характеризующие эти законы зависимости.

В работе [4] представлена нелинейная динамическая модель автомобиля в виде упруго-массовой системы с 94 степенями свободы. В модели учитываются передняя и задняя подвески, система

рулевого управления, колеса, шины, а также параметры инерции кузова. Учтены все основные источники демпфирования, жесткости узлов вместе с их нелинейными характеристиками. Приведены результаты моделирования поворота автомобиля при объезде препятствия.

Однако в отношении полноты математического описания основных режимов движения, работы [3, 4] не удовлетворяют первым двум критериям, изложенным во введении к предлагаемой работе.

В монографии [5] рассмотрены колебания автомобиля при торможении и описано влияние колебаний системы на устойчивость и управляемость курсового поступательного движения. Приведена математическая модель колебаний автомобиля на ровной и неровной дорогах. Предлагаемая модель предусматривает возможность анализа условий возникновения колебаний при случайных, статистически определенных внешних воздействиях неровностей дороги и параметрах торможения.

В целом работа [5] отражает исследование частного режима движения и не удовлетворяет первым двум критериям, изложенным в предлагаемой работе.

Наиболее полно результаты математического моделирования движения автомобиля представлены в работах [6], [7] и [8].

В работе [6] предложена плоская, непространственная упруго-массовая модель автомобиля. Её анализ отражает динамику прямолинейного движения легкового автомобиля классической компоновки с одним ведущим задним мостом и рессорной подвеской. Модель учитывает инерционные свойства кузова, дисков колес, вращающихся деталей трансмиссии, упругость рессор, упругость шин. Она позволяет определить параметры продольного и вертикального поступательного движения, а также угловые перемещения кузова относительно центра масс в вертикальной плоскости. Практическая ценность этой работы состоит в том, что в ней расчетным путем показано влияние крутильных колебаний трансмиссии на продольно-угловые колебания поступательно движущейся массы автомобиля. Учет в модели упругих свойств трансмиссии привел к повышению продольно-угловой частоты собственных колебаний модели кузова на 26,6%.

Сформированная в [6] расчетная схема получила развитие в работе [7] в направлении учета упругих свойств отдельных элементов трансмиссии. Здесь приведена обоснованная методика построения систем уравнений динамики движения автомобиля и указаны два возможных подхода к построению таких систем применительно к режиму разгона.

Первый подход основан на общих уравнениях аналитической механики применительно к большой системе, рассматриваемой как единая совокупность взаимосвязанных механических подсистем. Второй - предполагает соединение в единую систему отдельных, частных, уже имеющих, и возможно, разработанных ранее математических описаний объекта путем применения методов диакоптики, т.е. исследования больших систем по частям [9].

Идея диакоптики заключается в том, что сначала между подсистемами сложной для анализа общей (большой) системы устанавливают взаимные функциональные связи. Затем для каждой отдельной подсистемы выводят собственную систему дифференциальных уравнений. Методы диакоптики определяют способы объединения уравнений отдельных подсистем в единое целое, предположительно описывающее поведение общей, большой системы.

В работе [7] отмечено, что первый подход, как правило, приводит к весьма громоздким соотношениям. При этом затруднен анализ физической сущности окончательных результатов.

Второй подход к моделированию динамики автомобиля позволяет в процессе численного решения на ЭВМ получать и систематизировать выходные данные для подсистем автомобиля и отбирать для практики наиболее значимые из них.

Авторы работы [7] ввели также принцип многоструктурности для математической модели трогания автомобиля с места. В соответствии с этим принципом в разные периоды исследуемого режима движение автомобиля описывают разными системами дифференциальных уравнений. В работе предложено шестнадцать различных структур уравнений, описывающих динамику движения колесного транспортного средства.

Выявленное существенное влияние упруго-инерционных свойств элементов трансмиссии на динамику процесса разгона автомобиля и полнота описания математической модели движения, делают перспективным использование математического аппарата работы [6] в разработке алгоритмов блока моделирования автотранспортного тренажера.

Наиболее полно, подробно и систематично теория движения автомобиля изложена в монографии [8]. В том числе исследованы законы курсового движения и методы построения моделей автомобиля как колебательной упруго-массовой системы (глава 5), модели качения колеса с эластичной шиной по неровным и ровным поверхностям (глава 4). Подробно исследованы нагрузки, действующие на колесо в процессе его качения, рассмотрено явление бокового увода колеса при торможении. Наибольший практический интерес представляет пространственная упруго-массовая модель автомобиля и полученные на ее основе уравнения движения. Учет большого числа конструктивных параметров в упруго-массовой модели, а также возможность приложения выведенных уравнений к любым режимам движения позволяет использовать данные уравнения как базовый вариант подсистемы моделирования динамики легкового автомобиля.

### ***3. Предлагаемые структура и состав модели движения легкового автомобиля***

В качестве базового (исходного) варианта упруго-массовой модели и уравнений динамики движения автомобиля предлагается использовать модель и уравнения, приведенные в работе [8].

## Упруго-массовая модель автомобиля

Модель принимается в виде системы пяти тел, которые соответствуют кузову, соединенному с четырьмя колесами упругими безмассовыми элементами и демпферами.

Кузов рассматривается как свободное твердое тело и имеет шесть вариаций обобщенных координат  $\delta x_c, \delta y_c, \delta z_c, \delta \psi, \delta \varphi, \delta \alpha$  (рис. 1).

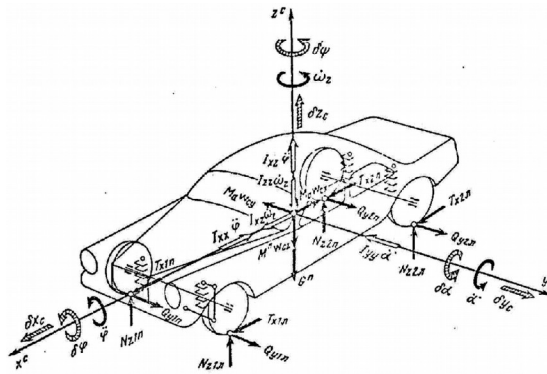


Рис. 1. Упруго - массовая модель автомобиля

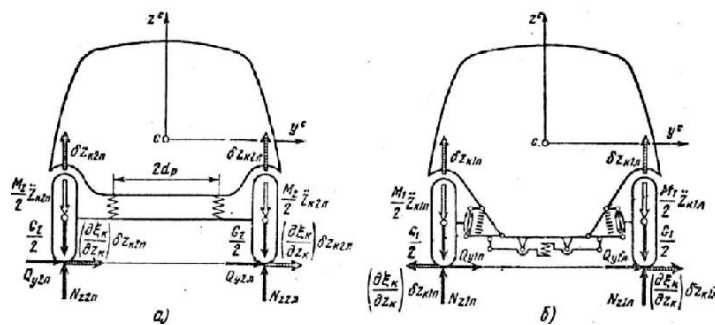


Рис. 2. Расчетные схемы неподрессоренных масс колес

Колеса моделируются массами, сосредоточенными в центрах колес. Эти массы движутся только в поперечных плоскостях ( $xOz, yOz$ ). Силы инерции, действующие на колеса и соответствующие крену кузова и его движению в горизонтальной плоскости не учитываются. Расчетные схемы для составления уравнений движения неподрессоренных масс колес, соответствующие сделанным допущениям, показаны на рис. 2,а и 2,б.

Движение кузова происходит под действием реакций дороги, внешних активных сил и сил в подвеске в системе отсчета, связанной с землей (рис. 1). Проекции равнодействующих реакций дороги для каждого колеса на оси  $C_x^c, C_y^c, C_z^c$  обозначены соответственно как  $T_x, Q_y, N_z$ . Без большой погрешности, можно считать, что эти силы приложены в точках контакта недеформированных колес с поверхностью дороги при статическом положении автомобиля и при нейтральном положе-

нии управляемых колес. Силы инерции приводятся к главному вектору, приложенному в центре тяжести кузова, и к главному моменту (их составляющие показаны на рис. 1). Проекции главного вектора и главного момента сил инерции выражаются через проекции  $w_{cx}$ ,  $w_{cy}$ ,  $w_{cz}$  ускорения центра масс, производные  $\dot{\omega}_z$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\alpha}$  и инерционные параметры автомобиля.

### 3.1 Уравнения курсового движения автомобиля и уравнения колебаний кузова

Кинематические схемы для составления уравнений курсового движения автомобиля представлены на рис. 3 и 4.

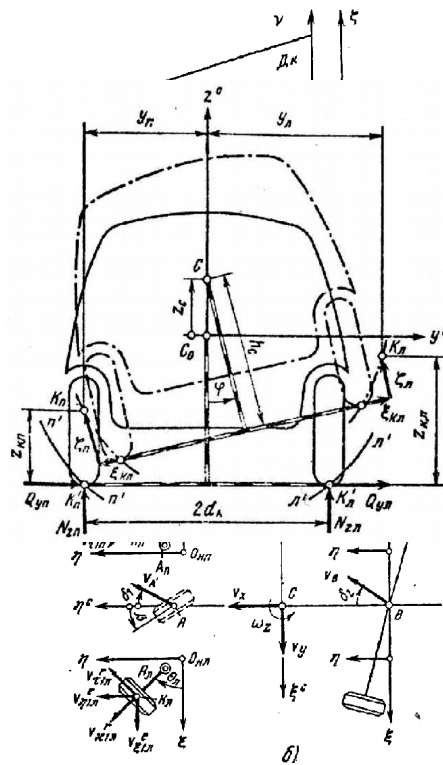


Рис. 3. Кинематические схемы передней и задней подвесок

Рис. 4. Кинематическая схема курсового движения автомобиля

Уравнения, описывающие курсовое движение автомобиля имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{1}{M_a} (T_{x1l} + T_{x2l} + T_{x1n} + T_{x2n}) + \omega_z v_y; \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{M_a} (Q_{y1l} + Q_{y2l} + Q_{y1n} + Q_{y2n}) - \omega_z v_x; \\ \dot{\omega}_z &= \left( \frac{a}{I_{zz}^*} + \frac{h_{1l}}{I_{xz}^*} \right) Q_{y1l} + \left( \frac{a}{I_{zz}^*} + \frac{h_{1n}}{I_{xz}^*} \right) Q_{y1n} - \\ &\quad - \left( \frac{b}{I_{zz}^*} + \frac{h_{2l}}{I_{xz}^*} \right) Q_{y2l} - \left( \frac{b}{I_{zz}^*} + \frac{h_{2n}}{I_{xz}^*} \right) Q_{y2n} + \\ &\quad + \frac{d_k}{I_{zz}^*} [T_{x1n} + T_{x2n} - T_{x1l} - T_{x2l}] + \frac{G^n h_\varphi}{I_{xz}^*} \varphi + \\ &\quad + \frac{(c_{p1} + 2c_{стаб1}) d_k}{I_{xz}^*} (\zeta_{1l} - \zeta_{1n}) + \frac{(c_{p2} + 2c_{стаб2}) d_k}{I_{xz}^*} (\zeta_{2l} - \zeta_{2n}) + \\ &\quad + \frac{r_{p1} d_k}{I_{xz}^*} (\dot{\zeta}_{1l} - \dot{\zeta}_{1n}) + \frac{r_{p2} d_k}{I_{xz}^*} (\dot{\zeta}_{2l} - \dot{\zeta}_{2n}) \end{aligned} \right\}$$

В этих уравнениях обозначено:

$I_{xx}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{xz}$  - моменты инерции, показанные на рис. 1;

$$I_{zz}^* = \frac{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2}{I_{xx}}, \quad I_{xx}^* = \frac{I_{zz} I_{xx} - I_{xz}^2}{I_{zz}}, \quad I_{xz}^* = \frac{I_{zz} I_{xz} - I_{xz}^2}{I_{xz}};$$

$v_x$ ,  $v_y$  - проекции скорости поступательного движения на оси  $X$  и  $Y$  соответственно,  $M_a$

- масса автомобиля,  $\dot{v}_x$ ,  $\dot{v}_y$  - производные по времени от скоростей,  $\dot{\omega}_z$  - угловое ускорение относительно оси  $Z^c$ ;

$T_{x1l}$ ,  $T_{x2l}$ ,  $T_{x1n}$ ,  $T_{x2n}$  - продольные силы, действующие на колеса автомобиля (тормозящие силы или силы, приведенные к двигателю и ускоряющие движение) (см. рис. 1);

$Q_{y1l}$ ,  $Q_{y2l}$ ,  $Q_{y1n}$ ,  $Q_{y2n}$  - боковые силы, действующие на колеса автомобиля;

$I_{xx}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{xz}$  - моменты инерции автомобиля относительно осей  $x^c$ ,  $y^c$ ,  $z^c$ , проходящих через центр масс;

$a$ ,  $b$  - расстояния (вдоль оси  $X$ ) от поперечной вертикальной плоскости  $y^c o z^c$  до поперечных плоскостей  $y_n o z_n$  и  $y_3 o z_3$  - соответственно, содержащих центры масс передних и задних колес (рис. 3);

$h_{1l}$  и  $h_{1n}$  - параметры передней подвески, относящиеся к левому и правому колесу соответственно (рис. 4) и определяемые уравнениями:

$$\frac{\partial y_l}{\partial \varphi} = h_l, \quad \frac{\partial y_n}{\partial \varphi} = h_n;$$



$h_{2л}$  и  $h_{2п}$  - аналогичные параметры, вводимые для задней подвески;

$d_k \approx d_p$  - расстояние от продольной плоскости автомобиля до точки крепления рессор (подвески) (рис. 2);

$$h_\varphi - \text{параметр, определяемый выражением: } h_\varphi = (h_c - 2h_1^*) \frac{b}{a+b} + (h_c - 2h_2^*) \frac{a}{a+b},$$

в котором  $h_c$  - расстояние от центра масс автомобиля до линии, соответствующей вертикальному и угловому смещению исходной горизонтальной поверхности дороги (рис. 4);

$$h_1^* = \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial \zeta} \right)_1 d_k + \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial \zeta} \right)_1^* d_k, \quad h_2^* = \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial \zeta} \right)_2 d_k + \left( \frac{\partial \xi_k}{\partial \zeta} \right)_2^* d_k;$$

$c_{p1}$  - жесткость передней подвески (жесткость передних рессор);

$c_{p2}$  - жесткость задней подвески;  $c_{стаб}$  - жесткость стабилизатора поперечного крена;

$r_{p1}$  и  $r_{p2}$  - коэффициенты диссипации демпферов передней и задней подвесок.

Уравнения, описывающие вертикальные колебания кузова и неподрессоренных колес имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_c &= \frac{1}{M^n} (c_{p1} \dot{\zeta}_{1л} + c_{p1} \dot{\zeta}_{1п} + c_{p2} \dot{\zeta}_{2л} + c_{p2} \dot{\zeta}_{2п} + r_{p1} \dot{\zeta}_{1л} + r_{p1} \dot{\zeta}_{1п} + r_{p2} \dot{\zeta}_{2л} + \\ &+ r_{p2} \dot{\zeta}_{2п}); \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{I_{xx}^*} [(c_{p1} + 2c_{стаб}) d_k (\dot{\zeta}_{1л} - \dot{\zeta}_{1п}) + (c_{p2} + 2c_{стаб}) d_k (\dot{\zeta}_{2л} - \dot{\zeta}_{2п})] + \\ &+ \left( \frac{h_{1л}}{I_{xx}^*} + \frac{a}{I_{xz}^*} \right) Q_{y1л} + \left( \frac{h_{1п}}{I_{xx}^*} + \frac{a}{I_{xz}^*} \right) Q_{y1п} + \left( \frac{h_{2л}}{I_{xx}^*} - \frac{b}{I_{xz}^*} \right) Q_{y2л} + \\ &+ \left( \frac{h_{2п}}{I_{xx}^*} - \frac{b}{I_{xz}^*} \right) Q_{y2п} + \frac{d_k}{I_{xz}^*} (T_{x1л} + T_{x2п} - \\ &- T_{x1п} - T_{x2л}) + \frac{1}{I_{xx}^*} [r_{p1} d_k (\dot{\zeta}_{1л} - \dot{\zeta}_{1п}) + r_{p2} d_k (\dot{\zeta}_{2л} - \dot{\zeta}_{2п})] + \frac{G^n h_\varphi}{I_{xx}^*} \varphi; \\ \ddot{\alpha} &= -\frac{1}{I_{yy}} [h_{a1} (T_{x1л} + T_{x1п}) + h_{a2} (T_{x2л} + T_{x2п}) + c_{p1} (\dot{\zeta}_{1л} + \dot{\zeta}_{1п}) a - \\ &- c_{p2} (\dot{\zeta}_{2л} + \dot{\zeta}_{2п}) b + r_{p1} (\dot{\zeta}_{1л} + \dot{\zeta}_{1п}) a - r_{p2} (\dot{\zeta}_{2л} + \dot{\zeta}_{2п}) b + h_a G^n \alpha]; \\ \ddot{z}_{к.л} &= \frac{2}{M^n} \left[ N_n - c_p \dot{\zeta}_n - c_{стаб} (\dot{\zeta}_л - \dot{\zeta}_п) - r_p \dot{\zeta}_л - \left( \frac{\partial \xi_{к.л}}{\partial z_{к.л}} \right) Q_{yл} - \right. \\ &\left. - \left( \frac{\partial \xi_{к.п}}{\partial z_{к.п}} \right) Q_{yп} \right]; \\ \ddot{z}_{к.п} &= \frac{2}{M^n} \left[ N_n - c_p \dot{\zeta}_п - c_{стаб} (\dot{\zeta}_л - \dot{\zeta}_п) - r_p \dot{\zeta}_п + \left( \frac{\partial \xi_{к.п}}{\partial z_{к.п}} \right) Q_{yп} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\partial \xi_{к.л}}{\partial z_{к.л}} \right) Q_{yл} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $z_c$  - вертикальная координата смещения центра масс относительно статического положения автомобиля;

$\varphi, \alpha$  - угловые перемещения автомобиля (рис. 1);

$z_{кн}, z_{кп}$  - вертикальные перемещения нижних точек недеформированных колес (рис. 4);

$$r_p = \frac{\partial R_{дис}}{\partial \dot{\zeta}_n}, \text{ где } R_{дис} - \text{диссипативная функция: } R_{дис} = 0.5(r_{p1}\dot{\zeta}_{1n}^2 + r_{p1}\dot{\zeta}_{1n}^2 + r_{p2}\dot{\zeta}_{2n}^2 + r_{p2}\dot{\zeta}_{2n}^2),$$

$\dot{\zeta}_n$  - производная от параметра  $\zeta_n$  по времени (параметр  $\zeta_n$  показан далее на рис. 6).

При формировании полной модели движения предлагается использовать подход, изложенный в [7], [9], который предполагает соединение в единую систему отдельных, разработанных ранее математических описаний подсистем автомобиля.

### 3.2 Уравнения динамики управляемых колес для заднеприводных автомобилей

В работе [8, глава 5] приведены расчетные схемы и дифференциальные уравнения движения неуправляемых колес и элементов трансмиссии, а также управляемых колес вместе с рулевым управлением для заднеприводного легкового автомобиля. Предложены различные варианты расчетных схем и соответствующие этим схемам уравнения движения управляемых колес (рис. 5).

Расчетные схемы системы «рулевое управление – передние колеса» учитывают наличие зазора в рулевом механизме, упругость тяг рулевого привода, сухое и вязкое трение в элементах рулевого управления, инерционность подвижных деталей.

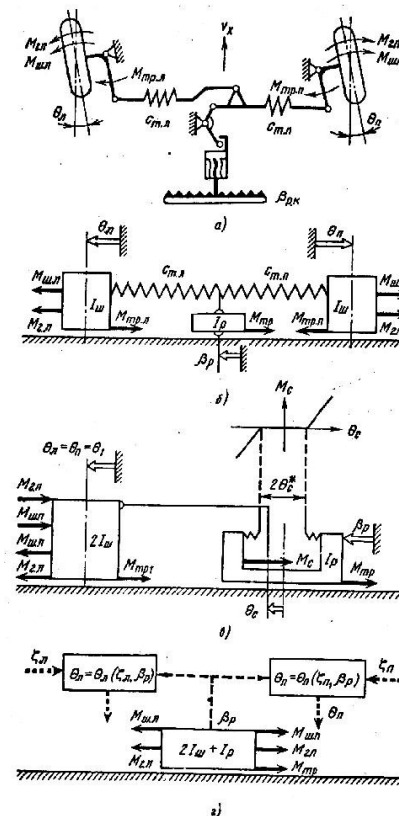


Рис. 5 Кинематические расчетные схемы системы «рулевое управление – передние колеса»

Первый вариант – трехмассовая расчетная схема, в которой учтены жесткости поперечных тяг  $c_{т.л}$  и  $c_{т.п}$  (рис. 5 а,б). Угол поворота  $\beta_p$  является углом поворота рулевого колеса, приведен-

ным к управляемым колесам:  $\beta_{p.k}$  ( $\beta_p = \beta_{p.k} / i_p$ ). В качестве расчетного передаточного числа  $i_p$  принято его значение при нейтральном положении управляемых колес.

2-й вариант - двухмассовая расчетная схема, в которой управляемые колеса соединены абсолютно жесткими поперечными тягами и поворот колес задается углом  $\theta_1$  (рис. 5, в). Рулевой вал обладает крутильной жесткостью. В рулевом механизме имеется зазор, равный  $2\theta_c^*$ .

3-й вариант - одномассовая расчетная схема (рис. 5 г). Здесь предполагается, что положение управляемых колес однозначно задается углом поворота рулевого колеса  $\beta_p$  и вертикальными смещениями колес относительно кузова. Положение управляемых колес задается углами их поворота  $\theta_l, \theta_n$ .

Уравнения кинематических связей, определяющих положение управляемых колес, имеют вид:

$$\theta_l = \theta_0 + \beta_p + \frac{1}{2}(\partial^2\theta / \partial\beta^2)\beta_p^2 + (\partial\theta / \partial\zeta)\zeta_{1l} - (\partial\theta / \partial\zeta)^* \zeta_{1n};$$

$$\theta_n = \theta_0 - \beta_p + \frac{1}{2}(\partial^2\theta / \partial\beta^2)\beta_p^2 + (\partial\theta / \partial\zeta_{1n})\zeta_{1n} - (\partial\theta / \partial\zeta)^* \zeta_{1l}.$$

На начальном этапе математического моделирования предлагается использование одномассовой расчетной схемы, в которой не учтены кинематические связи, наложенные на движение управляемых колес. Для исследования рулевого управления по линейной одномассовой расчетной схеме уравнение его движения записывается в виде:

$$\ddot{\beta}_p = (1 / I^*)(M_{ш.л} - M_{ш.н} + M_{z.л} - M_{z.н}) - 2n_\beta \dot{\beta}_p$$

где  $I^* = 2I_{ш} + I_p$  - приведенный к оси шкворня момент инерции движущихся масс рулевого управления,  $2n_\beta$  - коэффициент вязкого сопротивления в рулевом управлении.

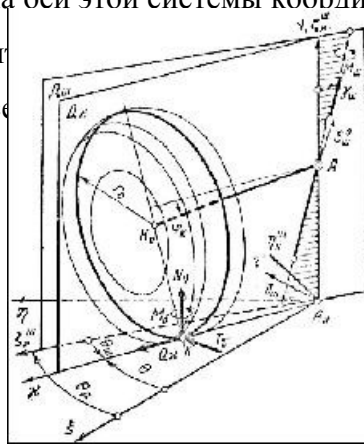
В уравнения движения масс рулевого управления входят моменты реакций дороги относительно оси шкворня и гироскопические моменты. Действие реактивных сил в контакте колеса с дорогой сводится к составляющим  $N_v, Q_x, T_\tau$  и упругому стабилизирующему моменту  $M_\delta$ . Расчетная схема для определения моментов этих сил относительно оси шкворня, входящих в уравнение движения рулевого управления приведена на рис. 6. Вычисления удобно вести в следующем порядке:

а) определить координаты точек  $A, O_{ш}$  и  $K$  в системе координат  $A_H \eta_H^u \xi_H^u \zeta_H^u$ ;

б) определить проекции сил на оси этой системы координат;

в) вычислить моменты относи

г) найти проекцию момента вс



$A$  на направление оси шкворня.

Рис. 6. Расчетная схема для определения моментов сил

Момент реакций дороги относительно точки  $A$  определяется из следующего векторного равенства:

$$\overline{M}_A = (\overline{AO}_u + \overline{O}_u \overline{K}) \times (\overline{Q}_\kappa + \overline{N}_v + \overline{T}_\tau) + \overline{M}_\delta.$$

Момент реакций относительно оси шкворня определяется как скалярное произведение:

$$M_u = \overline{M}_A \cdot \overline{S}_u^0.$$

Функция  $M_u = M_u(Q_\kappa, N_v, T_\tau, \theta, M_\delta)$  приближенно представляется в следующей форме:

$$M_u = \left( \frac{\partial M_u}{\partial T} \right) T_\tau + \left( \frac{\partial M_u}{\partial Q} \right) Q_\kappa + \left( \frac{\partial M_u}{\partial N} \right) N_v + \left( \frac{\partial^2 M_u}{\partial N \partial \theta} \right) N_{cm} \theta + M_\delta,$$

где  $N_{cm}$  - нагрузка на колесо в статическом положении.

Значения постоянных коэффициентов определяют по формулам:

$$\left( \frac{\partial M_u}{\partial T} \right) = r_0 \gamma_{u0} \cos \theta_{\delta 0} - h_{\kappa 0}; \quad \left( \frac{\partial M_u}{\partial N} \right) = -h_{\kappa 0} \sin \theta_{\delta 0} \gamma_{u0};$$

$$\left( \frac{\partial M_u}{\partial Q} \right) = -r_0 \gamma_{u0} \sin \theta_{\delta 0}; \quad \left( \frac{\partial^2 M_u}{\partial N \partial \theta} \right) = h_{\kappa 0} \cos \theta_{\delta 0} \gamma_{u0}.$$

Здесь  $h_{\kappa 0} = l_c \cos \varphi_{\kappa 0} - r_0 \sin \varphi_{\kappa 0} \approx l_c - r_0 \varphi_{\kappa 0}$ ;  $l_c = AK_0$ .

Гироскопические моменты на левом и правом колесах находятся из выражений:

$$M_{z,l} = I_{\kappa} \omega_{\kappa,l} \dot{\varphi}_{Hl}, \quad M_{z,r} = I_{\kappa} \omega_{\kappa,r} \dot{\varphi}_{Hr},$$

в которых  $\dot{\varphi}_{Hl}$ ,  $\dot{\varphi}_{Hr}$  - абсолютные угловые скорости поворота управляемых колес относительно центральных продольных осей (рис. 7). В качестве первого приближения предлагается рассматривать качение колеса по сухой и ровной поверхности с заданным коэффициентом трения скольжения.

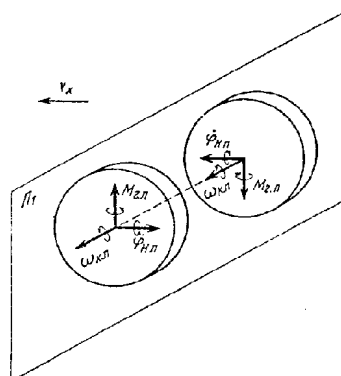


Рис. 7. Схема возникновения гироскопических моментов

Взаимодействие колеса автомобиля с опорной поверхностью по отношению к силам, действующим на колесо в различных режимах движения автомобиля подробно рассмотрено в работе [3]. Отдельно рассмотрены вопросы сопротивления колеса качению и сцепления колеса с опорной поверхностью в зависимости от состояния последней (мокрая или сухая поверхность, поверхность, покрытая снегом). Приведены таблицы коэффициентов сцепления колеса с поверхностью.

### 3.3 Математические модели двигательной установки и трансмиссии

Модель движения заднеприводного легкового автомобиля в режиме трогания с места, в виде системы дифференциальных уравнений движения, разработана в [7]. Отмечено, что взаимодействие момента трения муфты сцепления, крутящего момента двигателя, частоты вращения коленчатого вала со свойствами трансмиссии определяет динамические нагрузки в трансмиссии, работу пробуксовывания муфты сцепления и динамику трогания автомобиля с места. Крутящий момент двигателя зависит от частоты вращения коленчатого вала и перемещения рейки подачи топлива.

Соответствующая система дифференциальных уравнений учитывает влияние следующих параметров:

- инерционных характеристик вращающихся частей двигателя, ведомых частей муфты сцепления, первичного вала коробки передач, карданного вала и ведущих шестерен главной передачи, ведущих колес и части шин, подрессоренной массы автомобиля;
- крутильных жесткостей коленчатого вала двигателя, валов коробки передач, карданного вала, изгибных жесткостей рессор;
- коэффициентов демпфирования крутильных колебаний силового агрегата, переднего и заднего мостов.

В качестве примера реализации модели приведены зависимости от времени параметров, характеризующих процессы в трансмиссии и динамику движения автомобиля.

Из общей системы уравнений движения легкового автомобиля в режиме трогания с места, приведенной в работе [7], можно выделить подсистему (1.1 – 1.11), описывающую движение частей двигателя и трансмиссии с учетом инерционных и диссипативных свойств подсистемы двигатель-трансмиссия.

$$m_p \ddot{z}_p + N \dot{z}_p + E(z_p) = A(z_p) \dot{\varphi}_{\text{дв}}^2 \quad (1.1)$$

$$J_{\text{дв}} \dot{\varphi}_{\text{дв}} + M_{\text{дв}} = M_{\text{дв}}^k [\dot{\varphi}_{\text{дв}}, h(z_p)] \quad (1.2)$$

$$J_{\text{м}} \ddot{\varphi}_{\text{м}} - M_{\text{дв}} = -M_{\text{дв}}^c (\dot{\varphi}_{\text{дв}}) - M_{\text{сц}}^{cm} \beta_{\text{д}}(t) F(\Delta \varphi_{\text{сц}}) \quad (1.3)$$

$$\dot{A}_{cy} = M_{cy}^{cm} \beta_o(t) F(\Delta \dot{\varphi}_{cy}) |\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_{cy}| \quad (1.4)$$

$$J_{cy} \ddot{\varphi}_{cy} + M_z = M_{cy}^{cm} \beta_o(t) F(\Delta \dot{\varphi}_{cy}) \quad (1.5)$$

$$\dot{A}_z = M_z^{cm} F(\Delta \dot{\varphi}_z) |\dot{\varphi}_{cy} - \dot{\varphi}_z| \quad (1.6)$$

$$J_z \ddot{\varphi}_z - M_z + M_{n.e} = 0 \quad (1.7)$$

$$J_{n.e} \ddot{\varphi}_{n.e} - M_{n.e} + M_{np.e} / i_{\kappa 1} = -M_{n.e}^c \quad (1.8)$$

$$J_{n.e} \ddot{\varphi}_{n.e} - M_{n.e} + M_{np.e} / i_{\kappa 1} = -M_{n.e}^c \quad (1.9)$$

$$J_{z.n} \ddot{\varphi}_{z.n} - M_{\kappa.e} + M_{пол} / i_0 = -M_{\kappa.e}^c \quad (1.10)$$

$$J_{\kappa} \ddot{\varphi}_{\kappa} - M_{пол} + M_{\kappa} = -M_{пол}^c \quad (1.11)$$

Уравнения этой системы учитывают инерционные и диссипативные свойства подсистемы двигатель-трансмиссия. В них приняты следующие обозначения:

в уравнениях (1.1) и (1.2)

$m_p$  - масса движущихся частей муфты синхронизатора (регулятора) коробки передач;

$z_p$  - координата положения муфты регулятора;  $N$  - координата демпфирования регулятора;

$E(z_p)$  - восстанавливающая сила пружин регулятора;

$A(z_p)$  - коэффициент инерционности грузов регулятора;

$\varphi_{ов}$  - угол поворота коленчатого вала двигателя;

$J_{ов}$  - момент инерции вращающихся частей двигателя;

$M_{ов}$  - упруго - демпфирующий момент механизма двигателя, приведенный к его коленчатому валу;

$M_{ов}^{\kappa} [\dot{\varphi}_{ов}, h(z_p)]$  - крутящий момент двигателя, зависящий от частоты вращения коленчатого вала двигателя и перемещения рейки подачи топлива;

в уравнениях (1.3) и (1.4)

$J_m$  - момент инерции маховика двигателя;

$M_{ов}^c(\dot{\varphi}_{ов})$  - момент сопротивления вращению коленчатого вала двигателя пропорциональный частоте вращения последнего;

$M_{cy}^{cm} \beta_o(t) F(\Delta \dot{\varphi}_{cy})$  - момент трения демпфера муфты сцепления;

$A_{cy}$  - работа буксования муфты сцепления;

$|\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_{cy}|$  - модуль разности угловых скоростей ведомых ( $\dot{\varphi}_{cy}$ ) и ведущих дисков ( $\dot{\varphi}_m$ ) муфты сцепления;

в уравнениях (1.5 – 1.7)

$J_{cy}$  - момент инерции ведомых частей муфты сцепления (без ступицы);

$J_z$  - момент инерции ступицы муфты сцепления;

$M_z$  - упруго -демпфирующий момент ступицы муфты сцепления;

$M_{n.в}$  - упруго -демпфирующий момент первичного вала коробки передач (КП);

$A_z$  - работа трения демпфера муфты сцепления;

$F(\Delta\dot{\varphi}_{cu})$  - характеристика пар трения муфты сцепления в зависимости от относительной скорости скольжения ведущих и ведомых дисков муфты сцепления;

$M_z^{cm} F(\Delta\dot{\varphi}_z)$  - момент трения;

$|\dot{\varphi}_{cu} - \dot{\varphi}_z|$  - модуль разности угловых скоростей ведомого диска и ступицы муфты сцепления;

в уравнениях (1.8 - 1.11)

$J_{n.в}^0$  - момент инерции первичного вала коробки передач;

$J_{к.в}^0$  - момент инерции карданного вала;  $J_{z.n}^0$  - момент инерции шестерен главной передачи;

$$J_{n.в} = J_{n.в}^0 + \frac{J'_{np.в}}{i_{к1}^2}, \quad J_{к.в} = J_{к.в}^0 + \frac{J''_{np.в}}{i_{к2}^2}, \quad J_{z.n} = J_{z.n}^0 + \frac{J_{z.в}}{i_0^2}$$

$J'_{np.в}$  - момент инерции ведомых шестерен промежуточного вала коробки передач;

$J''_{np.в}$  - момент инерции ведущих шестерен промежуточного вала коробки передач;

$i_{к1}, i_{к2}, i_0$  - передаточные числа ступеней коробки передач;

$M_{к.в}$  - упруго -демпфирующий момент карданного вала;  $\varphi_k$  - угол поворота ведущих колес.

Углы поворота соответствующих элементов трансмиссии конструктивно и кинематически связаны в последовательную цепь. Соответственно этому уравнения (1.1 – 1.11) оказываются связанными в систему при включенном сцеплении. В случае выключенного сцепления уравнения (1.2) и (1.3) исключаются из системы.

Особенность движения автомобиля состоит в том, что темп изменения режимов движения зависит от индивидуальных качеств водителя. Например, темп трогания автомобиля с места задается движением педалей привода муфты сцепления и подачи топлива.

Законы перемещения педали подачи топлива  $h(t)$  и перемещения педали привода муфты сцепления  $H(t)$  являются входными воздействиями для подсистем «двигатель» и «сцепление» соответственно. Выходным параметром подсистемы «двигатель» являются частота вращения коленчатого вала двигателя  $\omega_{дв}(t)$  и его крутящий момент  $M_{дв}^k(t)$ . Для подсистемы «сцепление» выходным параметром является осевая сила нажимного диска  $P_n(t)$ , которая преобразуется в момент трения муфты сцепления  $M_{cu}(t)$ .

Для подсистемы «двигатель – трансмиссия» выходным параметром является крутящий момент  $M_k$  на ведущих колесах автомобиля.

Функция  $M_{\partial\phi}^{\kappa}[\dot{\phi}_{\partial\phi}, h(z_p)]$  - крутящий момент двигателя, зависящий от частоты вращения коленчатого вала двигателя и перемещения рейки подачи топлива  $z_p(t)$  есть заданная характеристика двигателя. Она является правой частью уравнения (1.2). Зависимость перемещения рейки подачи топлива от параметра  $h_n(t)$  должна быть плавной, монотонной и однозначной. Таким образом, эта зависимость, функция  $M_{\partial\phi}^{\kappa}[\dot{\phi}_{\partial\phi}, h(z_p)]$  и система уравнений (1.1-1.11) описывают зависимость действующих на автомобиль сил от перемещения  $h_n(t)$ .

Все приведенные в данной статье уравнения соответствуют движению по дороге с плавным рельефом, т.е. в условиях города и автострад. При моделировании движения по дорогам с существенными неровностями необходимо иметь дополнительную информацию о рельефе дорожной поверхности.

#### **4. Структурная схема и алгоритм функционирования блока моделирования**

Предлагаемая структурная схема блока моделирования показана на рис. 8. В блок двигательной установки и трансмиссии включены уравнения (1.1) – (1.11). Входными управляющими параметрами этого блока являются перемещение  $h(t)$  педали подачи топлива и перемещение  $H(t)$  педали привода муфты сцепления. Выходным параметром рассматриваемого блока является крутящий момент  $M_{\kappa}$ , действующий на ведущие колеса автомобиля в режиме ускорения и тормозящий момент, действующий на те же колеса в режиме включенного сцепления и выключенного двигателя.

Момент сил  $M_m$  тормозного устройства является в первом приближении линейной функцией перемещения  $S(t)$  педали тормозного устройства. Параметры  $M_{\kappa}$  и  $M_m$  преобразуются в блоке расчета продольных сил в значения равнодействующих сил, действующих на все четыре колеса модели автомобиля.



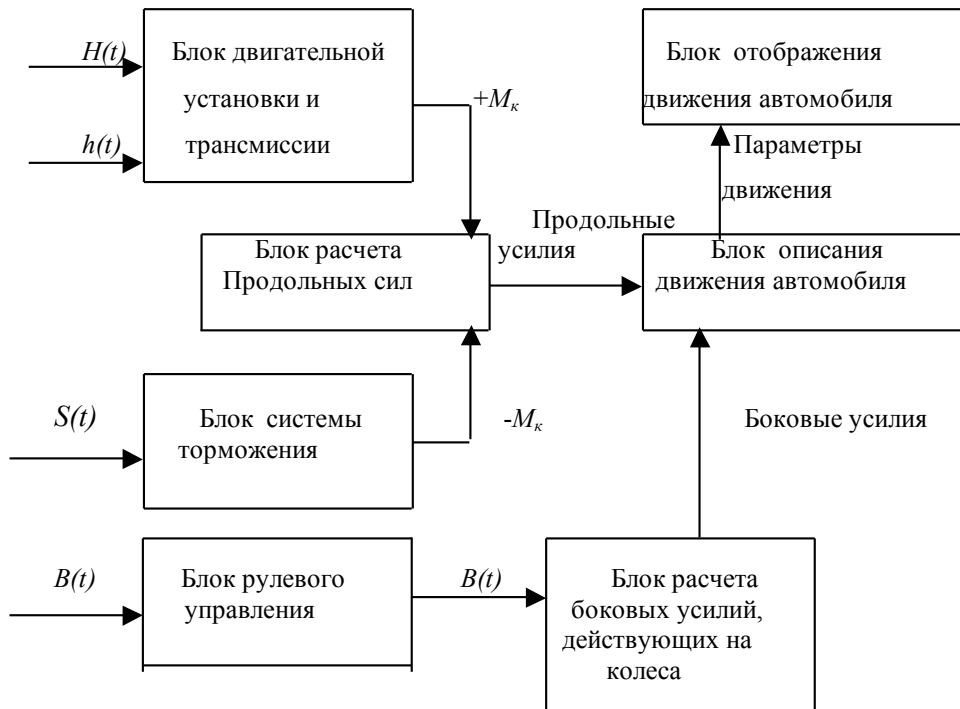


Рис. 8. Функциональная блок-схема численного моделирования движения автомобиля

Входным параметром блока рулевого управления является значение производной угла поворота руля. Рассматриваемый блок содержит уравнения для одномассовой расчетной схемы системы «рулевое управление - передние колеса». Выходной параметр этого блока – угол поворота рулевого колеса преобразуется далее в блоке расчета боковых усилий в значение угла поворота передних колес, который используется для расчета боковых усилий, действующих на колеса.

Блок описания движения автомобиля содержит приведенные выше уравнения курсового движения и уравнения колебаний кузова и колес. Основными входными параметрами этого блока являются продольные и поперечные усилия, действующие на колеса автомобиля, а выходными параметрами - угловые перемещения кузова автомобиля и линейные перемещения его центра масс.

### 5. Основные результаты работы

Разработаны предложения по формированию состава и структуры блока математического моделирования транспортного тренажера.

По сравнению с существующими моделями блока математического моделирования предлагается вариант более детального учета упругих и инерционных свойств двигателя и трансмиссии, рулевого управления и кузова автомобиля. Это повышает адекватность модели реальным условиям движения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартош В.С., Лаврентьев М.М. Динамическая модель автомобиля в реальном времени. // Автометрия. - 2000, № 4.- с. 108-115.
  2. Uffelmann Friedrich Autolin-bin digitales. Simulation srechn-programm fur die Fabirdynamik von Personenkzaft-vagen. // Automobiltechnik zeitschrift, ATZ. - 1984, v. № 86, 2.- p.p.41-46.
  3. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. - М.: Машиностроение, 1990.- 353 с.
  4. Полунгян А.А., Фоминых А.Б., Жеглов Л.Ф. Колебания колесной машины и ее систем. - М.: МГТУ, 1992.- 110 с.
  5. Яценко Н.Н., Енаев А.А. Колебания автомобиля при торможении. - Иркутск: Иркутский университет, 1989.- 248 с.
  6. Семенов В.М., Кондрашкин С.И., Контанистов С.П. О динамике автомобиля как колебательной системы со многими степенями свободы. // Автомобильная промышленность. - 1976, № 4.- с. 21-23.
  7. Кондрашкин В.М., Контанистов С.П., Семенов В.М. Принципы построения математических моделей динамики движения автомобилей. // Автомобильная промышленность. - 1979, № 7.- с. 24-27.
  8. Хачатуров А.А. Динамика системы шина- дорога - автомобиль - водитель. - М.: Машиностроение, 1976.- 536 с.
  9. Крон Г. Исследование сложных систем по частям– диакоптика - М.: Наука, 1972.- 275 с.
- 

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

*Иванников Сергей Васильевич, старший преподаватель кафедры основ физики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, к.т.н.*

*Родионов Георгий Леонидович, старший преподаватель кафедры машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (государственного технического университета).*

*Сидоренко Александр Сергеевич, профессор кафедры машиноведения и деталей машин Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.*