

Труды МАИ. 2023. № 129
Trudy MAI, 2023, no. 129

Научная статья
УДК 534.014
DOI: [10.34759/trd-2023-129-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-02)

СВОБОДНЫЕ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НА ОСНОВЕ ВЗАИМНОГО ОБМЕНА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ МЕЖДУ ТРЕМЯ ГРУЗАМИ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,
Курган, Россия

ip.popov@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается монореактивный гармонический осциллятор с тремя грузами. Для целей настоящей работы удобно использовать плоскую трехкоординатную систему аналогичную трехфазной системе координат, применяемой в электротехнике. Для произвольного вектора \mathbf{R} , лежащего в трехкоординатной плоскости, начало которого совпадает с началом координат, справедлива Теорема 1. Координаты x_1, x_2, x_3 вектора \mathbf{R} образуют правильный треугольник, размер которого не меняется при произвольном повороте вектора \mathbf{R} . Теорема 2. Середина вектора \mathbf{R} совмещена с центром треугольника $x_1x_2x_3$. Половина вектора \mathbf{R} играет роль кривошипа, который в реальных устройствах нужен для развития угловой скорости ω и сообщения момента силы для компенсации диссипативных потерь. В монореактивном гармоническом осцилляторе с тремя

грузами могут возникать свободные синусоидальные колебания любой заданной частоты, которая определяется исключительно начальными условиями.

Ключевые слова: несбалансированность, асимметрия, виброзащита, симметричная схема, трехкоординатная система, кинематика

Для цитирования: Попов И.П. Свободные синусоидальные колебания на основе взаимного обмена кинетической энергией между тремя грузами // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-02)

Original article

FREE SINUSOIDAL OSCILLATIONS BASED ON THE MUTUAL EXCHANGE OF KINETIC ENERGY BETWEEN THREE LOADS

Igor P. Popov

Kurgan State University,

Kurgan, Russia

ip.popov@yandex.ru

Abstract. It is noted that free sinusoidal oscillations in a classical mechanical oscillator are stipulated by the mutual transformation of kinetic energy into potential energy. The oscillator, in which free sinusoidal oscillations are being accompanied by the transformation of the kinetic energy of an inert element into the same kinetic energy of another inert element is well-known. The elements with another nature of reactivity are missing in such oscillator. Such oscillator is essentially mono-reactive. This oscillator

disadvantage consists in its imbalance due to the asymmetry of the structure, which may require additional vibration protection measures. This drawback can be avoided by applying a symmetrical scheme with three weights. For the purposes of this work, it is convenient to employ a flat three-coordinate system similar to the three-phase coordinate system used in electrical engineering. For an arbitrary vector \mathbf{R} , lying in the three-coordinate plane, which origin coincides with the origin, Theorem 1 is true. The coordinates x_1, x_2, x_3 of the vector \mathbf{R} form a regular triangle, which size does not change with an arbitrary rotation of the vector \mathbf{R} . Theorem 2. The middle of the vector \mathbf{R} is aligned with the center of the triangle $x_1 x_2 x_3$. Half of the vector $x_1 x_2 x_3$ plays the role of a crank, which in real devices is needed to develop the angular velocity ω and communicate the moment of force to compensate for dissipative losses. In a mono-reactive harmonic oscillator with three weights, free sinusoidal oscillations of any given frequency may occur, which is determined solely by the initial conditions.

Keywords: imbalance, asymmetry, vibration protection, symmetrical scheme, three-coordinate system, kinematics

For citation: Popov I.P. Free sinusoidal oscillations based on the mutual exchange of kinetic energy between three loads. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-02](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-02)

В классическом механическом осцилляторе свободные синусоидальные колебания [1–4] обусловлены взаимным преобразованием кинетической энергии в потенциальную [5–9].

Известен осциллятор, в котором свободные синусоидальные колебания сопровождаются трансформацией кинетической энергии инертного элемента в кинетическую же энергию другого инертного элемента [10]. Элементы с другим характером реактивности в таком осцилляторе отсутствуют. Такой осциллятор по существу является *монореактивным*, а именно: *m-m*.

Недостатком этого осциллятора является его несбалансированность в силу асимметрии конструкции, что может требовать дополнительных виброзащитных мер.

Этого недостатка можно избежать, используя симметричную схему с тремя грузами.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [11–15]. Особое значение учет колебаний приобретает в авиационной и ракетной отраслях [16–20].

Моделирование осциллятора с тремя грузами

Для целей настоящей работы удобно использовать плоскую трехкоординатную систему аналогичную трехфазной системе координат, применяемой в электротехнике. Для произвольного вектора \mathbf{R} , лежащего в

трехкоординатной плоскости Z , начало которого совпадает с началом координат, справедлива

Теорема 1. Координаты x_1, x_2, x_3 вектора \mathbf{R} образуют правильный треугольник, размер которого не меняется при произвольном повороте вектора \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты вектора \mathbf{R} имеют вид:

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad (1)$$

$$x_2 = R \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right), \quad (2)$$

$$x_3 = R \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right). \quad (3)$$

где φ – угол между вектором \mathbf{R} и осью $0x_1$.

С учетом теоремы косинусов

$$\begin{aligned} (x_1 x_2)^2 &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) - 2 \cos \varphi \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \cos \frac{\pi}{3} \right] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_1 x_3)^2 &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) - 2 \cos \varphi \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \cos \frac{2\pi}{3} \right] = \\ &= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2.$$

$$(x_2 x_3)^2 = R^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \cos \frac{\pi}{3} \right] =$$

$$R^2 \left[\left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] =$$

$$R^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2.$$

Треугольник $x_1 x_2 x_3$ является правильным с фиксированной стороной равной $\frac{3}{4}R^2$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Середина вектора \mathbf{R} совмещена с центром треугольника $x_1 x_2 x_3$.

Доказательство. Далее середина вектора \mathbf{R} обозначается r .

С учетом теоремы косинусов

$$(x_1 r)^2 = R^2 \left(\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} - 2 \cos \varphi \frac{1}{2} \cos \varphi \right) = \frac{R^2}{4}.$$

$$(x_2 r)^2 = R^2 \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) + \frac{1}{4} - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \right] = \frac{R^2}{4}.$$

$$(x_3 r)^2 = R^2 \left[\cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) + \frac{1}{4} - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \right] = \frac{R^2}{4}.$$

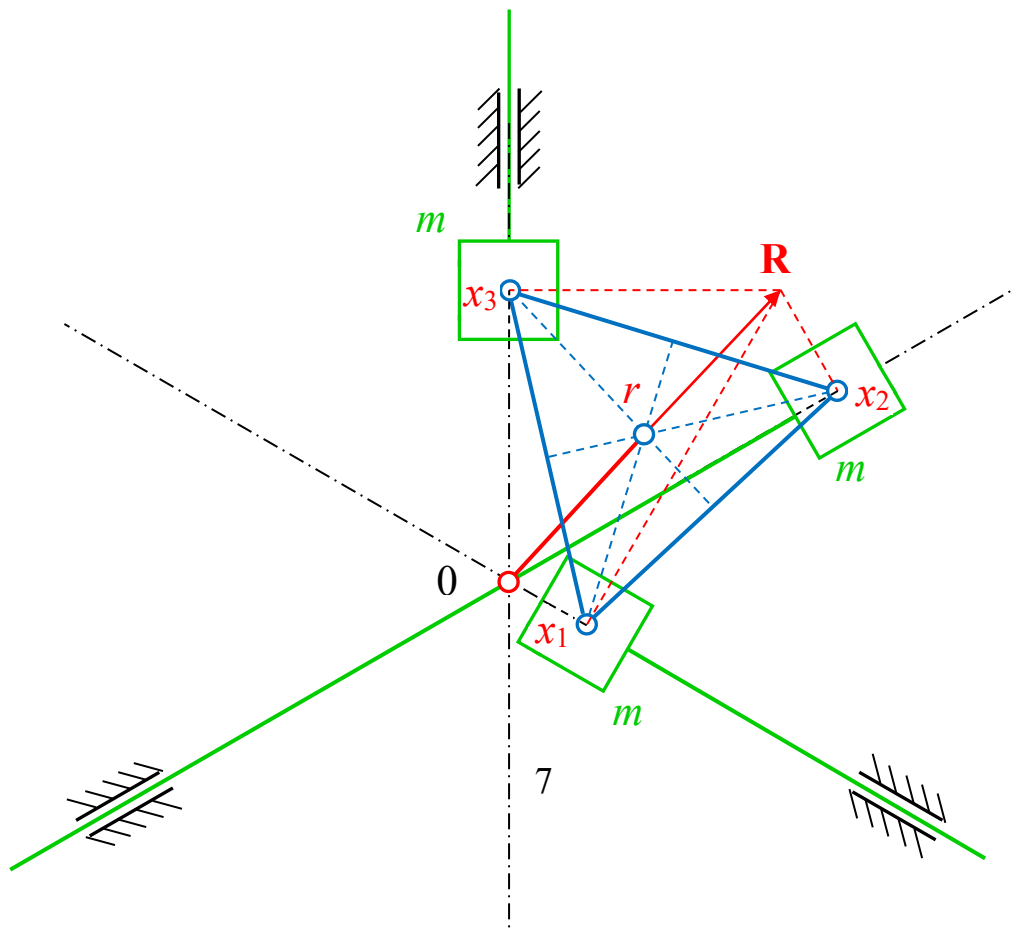
Расстояния от точек x_1 и x_2 до точки r являются одинаковыми. Поэтому точка r лежит на прямой, которая перпендикулярна стороне треугольника $x_1 x_2$ и проходит через ее середину.

То же самое можно сказать про сторону треугольника $x_1 x_3$.

Из этого следует, что точка r относится к высотам треугольника $x_1 x_2 x_3$, а это возможно, только если она совпадает с их пересечением. Пересечение же высот правильного треугольника, которым в соответствии с теоремой 1 является $x_1 x_2 x_3$, совпадает с центром треугольника.

Теорема доказана.

Обе доказанные теоремы дают представление о пространственной схеме монореактивного осциллятора с тремя грузами, представленной на рисунке.



Кинематика монореактивного осциллятора с тремя грузами

Далее принимается, что внешние по отношению к осциллятору силы отсутствуют. Массы вспомогательных элементов осциллятора считаются равными нулю. Потерь на трение нет.

В соответствии с выражениями (1) – (3) мгновенные скорости инертных элементов осциллятора равны

$$\frac{dx_1}{dt} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -R \sin \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -R \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

При свободных синусоидальных колебаниях полная энергия осциллятора со временем не меняется. В монореактивном инертном осцилляторе потенциальная энергия отсутствует. Поэтому полная энергия является исключительно кинетической. В этой связи справедливо выражение

$$T = 0,5mR^2 \left[\sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) + \sin^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 =$$

$$= 0,75mR^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = const.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = C_1,$$

$$\varphi = C_1 t + C_2.$$

Для нахождения постоянных интегрирования следует учесть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Отсюда

$$C_2 = \varphi_0,$$

$$C_1 = \omega_0.$$

С учетом полученного значения φ выражения (1) – (3) конкретизируются

$$x_1 = R \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4)$$

$$x_2 = R \cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega_0 t - \varphi_0\right), \quad (5)$$

$$x_3 = R \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \omega_0 t - \varphi_0\right), \quad (6)$$

Для значений

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$\frac{dx_1}{dt}(0) = v_{10}.$$

имеют место выражения

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_{10}}{R},$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}.$$

$$-R\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_{10},$$

$$\omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}.$$

Заключение

Полученные результаты показывают, что в монореактивном осцилляторе с тремя грузами возможно возникновение свободных синусоидальных колебаний грузов, обусловленных взаимным обменом кинетической энергией между ними.

В соответствии с формулами (4) – (6) при свободных синусоидальных колебаниях вектор \mathbf{R} вращается с неизменной угловой скоростью ω .

Правильный треугольник $x_1 x_2 x_3$ совершает двойное равномерное вращение – вокруг своего центра r и вокруг начала координат 0 .

Половина вектора \mathbf{R} ($0r$) играет роль кривошипа, который в реальных устройствах нужен для развития угловой скорости ω и сообщения момента силы для компенсации диссипативных потерь.

В соответствии с выражениями (4) – (6) в монореактивном гармоническом осцилляторе с тремя грузами могут возникать свободные синусоидальные колебания любой заданной частоты, которая определяется исключительно начальными условиями.

Список источников

1. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
2. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
3. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
4. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>
5. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>

6. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=119888>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
7. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
8. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
9. Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)
10. Попов И.П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168987>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)
11. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
12. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды

МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)

13. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>

14. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)

15. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>

16. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>

17. Благодырёва О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>

18. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего

винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)

19. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>

20. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>

References

1. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>

2. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

3. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: 10.34759/trd-2020-110-6

4. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>

5. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>

6. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888>. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01
7. Mukhametzhanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
8. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
9. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164101>. DOI: 10.34759/trd-2022-122-03
10. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168987>. DOI: 10.34759/trd-2022-126-01
11. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
12. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: 10.34759/trd-2019-109-4
13. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
14. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: 10.34759/trd-2020-113-01
15. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
16. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>

17. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>
18. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: 10.34759/trd-2019-108-4
19. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
20. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>

Статья поступила в редакцию 02.03.2023

Одобрена после рецензирования 12.03.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 02.03.2023; approved after reviewing on 12.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023