УДК 519.2

Задача оптимизации производства для наземных космических комплексов с критериями в форме квантили и интегральной квантили[1]

Кибзун А.И., Чернобровов А.И.

Аннотация

Рассматривается задача оптимизации производства (выбора оптимального направления деятельности) с критериями в форме квантили и интегральной квантили. Предложено ускорение стохастического квазиградиентного алгоритма. Рассматривается эквивалентность задач с постановкой в форме квантили и интегральной квантили при больших значениях вероятности. А также использование решения задачи с критерием интегральной квантили для построения верхней оценки квантили. Приведен пример решения задачи для наземного космического комплекса.

Ключевые слова

стохастическое программирование; квантиль; интегральная квантиль; квазиградиентный алгоритм; стохастическая аппроксимация

Введение

Объекты наземной космической инфраструктуры, или наземные космические комплексы (НКС), являются одними из важнейших и дорогостоящих во всей космической индустрии. Стоимость создания наземной космической инфраструктуры для заново создаваемых космических ракетных комплексов, в ряде случаев, составляет более 80% от общей стоимости создания космического комплекса в целом [1]. Поэтому очень важно создавать рентабельные космические комплексы.

Частью наземных космических комплексов являются вспомогательные объекты и технические средства (азотно-кислородные заводы, аэродромы, хранилища компонентов

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-07-00315-а, № 11-07-90407-Укр_ф_а, 11-07-13102-офи-м-2011-РЖД) и государственного финансирования целевых программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Мероприятие 1.2.2, Госконтракт № 14.740.11.1128).

ракетного топлива, вычислетельные и расчетные центры, подъездные железнодорожные и бетонные дороги, средства связи и единого времени и т.д.). С целью повышения эффективности работы данных объектов ряд из них используется для ведения коммерческой деятельности. Например, коммерческие пуски ракет, использование создание химической продукции для других отраслей и т.д.

Оттдача от инвестиций в производство побочной продукции (товаров и услуг) НКС является труднопрогнозируемой, так как сложно оценить спрос, поскольку производимая продукция часто является новой и эксклюзивной. Также сложно спрогнозировать стоимость конечной продукции, поскольку речь идет о наукоемких технологиях и в стоимость товара необходимо закладывать не только стоимость производства, но и стоимость научных исследований.

Таким образом возникает необходимость постороения моделей, учитывающих случайные факторы, а также учета их в критериальных функциях. В последние годы наибольшую популярность в экономических и технических задачах получили критерии в форме квантили и интегральной квантили [2,3,4]. Такие критерии учитывают риски и могут быть применены к широкому классу задач.

Квантильный критерий (VaR или Value-at-Risk) характеризует уровень потерь, который гарантируется с заданной вероятностью. Критерий в форме интегральной квантили (CVaR или Conditional-Value-at-Risk) характеризует усредненные потери, в неблагоприятных случаях (с вероятностью, которая задана). Существуют также более сложные постановки, которые используют оба этих критерия [5].

1. Основные определения

Пусть $\Phi(u,X)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^1$ непрерывная по совокупности аргументов действительная функция потерь, где X — случайный вектор с реализациями в $\mathbb{R}^s$ и абсолютно непрерывной функцией распределения $F_X(x)$, индуцирующей вероятностную меру $\mathcal{P}(\cdot)$, определенную на борелевских множествах из $\mathbb{R}^s$. В дальнейшем везде предполагается, что $\Phi(u,X)$ для всех $X \in \mathbb{R}^s$ определена на выпуклом компакте $U \subset \mathbb{R}^m$ с ненулевой мерой Лебега $mes_m U > 0$. Определим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{X\colon \Phi(u,X) \le \varphi\},\ \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

функцию квантили (VaR) уровня α

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi\colon P_\varphi(u) \ge \alpha\},\ \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

функцию интегральной квантили (CVaR) уровня α

$$\psi_\alpha(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \varphi_\beta(u)\,d\beta,\ \ \alpha \in (0,1), \tag{2}$$

определим также «верхний» CVaR уровня α

$$\psi_\alpha^+(u) \triangleq \mathbf{M}[\Phi(u,X)|\Phi(u,X) > \varphi_\alpha(u)]. \tag{3}$$

Приведем теорему, которая показывает между (1), (2), (3).

Теорема 1[6]. Если для некоторого $u \in U$ выполнено условие $|\psi_\alpha\ (u)| < \infty$, то функция $\psi_\alpha\ (u)$ представима в виде

$$\psi_\alpha\ (u) = \lambda_\alpha(u)\varphi_\alpha(u) + (1-\lambda_\alpha(u))\psi_\alpha^+(u) \tag{4}$$

где

$$\lambda_\alpha(u) = \frac{P_{\varphi_\alpha(u)}(u)-\alpha}{1-\alpha}.$$

Для оценки квантили и интегральной квантили в данной работе будут использоваться выборочные статистики. Будем считать, что для любого $u \in U$ есть возможность получить выборку $\{\Phi(u,X_i)\}_{i=1}^n$ объёма n функции $\Phi(u,X)$. Обозначим через $\{\Phi_{(\mathrm{i})}(u)\}_{i=1}^n$ вариационный ряд выборки, т.е. расположенные в порядке возрастания порядковые статистики

$$\Phi_{(1)}(u) \le \Phi_{(2)}(u) \le \cdots \le \Phi_{(\mathrm{n})}(u)$$

На основе данного вариационного ряда сконструируем выборочную оценку квантили [3]:

$$\hat{\varphi}_{\alpha,n}(u) \triangleq \Phi_{(\mathrm{l})}(u), \tag{5}$$

где

$$l \triangleq \begin{cases} \alpha n, & \alpha n \in \mathbb{N}, \\ [\alpha n]-1, & \alpha n \notin \mathbb{N}, \end{cases} \tag{6}$$

где $[t]$ — обозначает целую часть числа t.

Выборочная оценка интегральной квантили:

$$\hat{\psi}_{\alpha,n}(u) \triangleq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{l}{n}-\alpha\right)\Phi_{(\mathrm{l})}(u) + \hat{\psi}_{\alpha,n}^+(u), \tag{7}$$

где

$$\hat{\psi}_{\alpha,n}^+(u) \triangleq \frac{1}{n-l}\sum_{j=l+1}^n \Phi_{(\mathrm{j})}(u)$$

является выборочной оценкой «верхнего» CVaR уровня α.

Для построения выборочной оценки (7) используется разложение (4).

2. Постановка задачи

Пусть $\Phi(u, x)$ — это доход НКС, взятый с обратным знаком, при инвестировании u и реализации вектора случайного спроса x.

В качестве модели возможных убытков будем рассматривать функцию

$\Phi(u, X) = -\sum_{j=1}^{m} u_i X_i$,

где X_i — случайная величина, отражающая спрос на i-ый вид продукции;

u_i — объем инвестиций в i-ый вид продукции;

Естественными выглядят следующие предположения о множестве ограничений:

$u_i \geq 0$, т.е. инвестиции не могут быть отрицательными;

$\sum_{j=1}^{m} u_i \leq C$,т.е. суммарный объем инвестиций ограничен.

Без ограничения общности можно положить $C = 1$ и расчитывать доли инвестиций. Введем обозначение для множества допустимых стратегий

$$U \triangleq \left\{u \middle| \sum_{j=1}^{m} u_i \leq 1, u_i \geq 0, i = \overline{1, m}\right\}. \tag{8}$$

Сформулируем постановки задач.

Задача оптимизации дохода с критерием в форме квантили

$$u_\alpha^\varphi \triangleq \arg\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{9}$$

Такая постановка означает, что необходимо найти такие стратегии (распределение объема инвестиций в различные виды продукции), при которых потери будут минимальны с заданной вероятностью α.

Задача оптимизации дохода с критерием в форме интегральной квантили

$$u_\alpha^\psi \triangleq \arg\min_{u \in U} \psi_\alpha(u). \tag{10}$$

Такая постановка означает, что необходимо найти такие стратегии (распределение объема инвестиций в различные виды продукции), при которых средние потери в неблагоприятных случаях (вероятность наступления которых $1 - \alpha$) будут минимальны.

3. Алгоритмы решения задач с критерием в форме квантили и в форме интегральной квантили

В [3] рассмотрены различные способы решения задач стохастического программирования с квантильным критерием, такие как построение детерминированного эквивалента, доверительный метод, а также использование выборочных и ядерных оценок. В [7] рассмотрен стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции интегральной квантили, не требующий получения явного вида функции квантили. Он базируется на выборочных оценках вида (5). Однако данный алгоритм требует выпуклости функции квантили. Исследование выпуклости квантили является достаточно сложной задачей [3,8].

В отличие от квантильного критерия, для критерия в форме интегральной квантили значительно проще проверить выпуклость [9].

Теорема 2 [9]. Если выпукла $\Phi(u, x)$ по u на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$ для всех $x \in \mathbb{R}^s$, то функция $\psi_\alpha\ (u)$ также выпукла по u на выпуклом множестве.

В [10] предложен стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили и показана его сходимость с вероятностью единица. В алгоритме используется процедура рандомизированного проектирования.

Опишем оператор рандомизированного проецирования $\Pi_U(u)$ на область U_ε. Оператор рандомизированного проецирования – это отображение $\Pi_U(u): \mathbb{R}^m \to U_\varepsilon$, где U_ε – ε-окрестность области U. $\Pi_U(u)$ задается следующим соотношением

$$\Pi_U(u) \triangleq \begin{cases} u, & u \in U, \\ \hat{u}, & u \notin U, \end{cases}$$

где случайная величина $\hat{u}$ имеет равномерное распределение на шаре

$B_\varepsilon \triangleq \{u_\varepsilon \in U_\varepsilon \colon \|u_\varepsilon - \arg\min_{v \in U} \|v - u\|\| \leq \varepsilon\}$.

На практике нахождение решения такой задачи может быть достаточно трудоемким, поэтому ее можно заменить следующей операцией. Сначала строится обычная проекция на область, затем выбирается случайным образом точка из шара радиуса ε, и затем для нее строится обычная проекция на область. Такая замена никак не повлияет на сходимость, однако может существенно ускорить решение задачи. Будем обозначать такое проецирование $\widetilde{\Pi}_U(u_{k+1})$.

Алгоритм 1.

0. Установим значения начальных параметров: ρ_0 – длина рабочего шага; δ_0 – начальный параметр вычисления градиента; n_0 – начальный объем выборки случайной величины X; ε – параметр разброса оператора рандомизированного проектирования; L – большая константа; K – минимальное число шагов, которое должен сделать алгоритм; ε_1, ε_2 – параметры остановки алгоритма. Полагаем начальное значение шага алгоритма $k \coloneqq 0$. Выбираем стартовую точку из области допустимых значений $u_0 \in U$.
1. Генерируем выборку $\{X_1, \ldots, X_{n_k}\}$ случайной величины X объема n_k. Подставляем выборку в функцию $\Phi_i \triangleq \Phi(u_k, X_i)$ и упорядочиваем эти значения, чтобы

получить вариационный ряд $\Phi_{(1)} \leq \Phi_{(2)} \leq \dots \leq \Phi_{(n_k)}$. Вычисляем $\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(u_k)$ по формуле (7).

2. Используем выборку объема n_k из предыдущего шага алгоритма для построения выборочных оценок $\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(\tilde{u}_1, \dots, u_i - \delta_k, \dots, \tilde{u}_m)$, $\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(\tilde{u}_1, \dots, u_i + \delta_k, \dots, \tilde{u}_m)$, $i = \overline{1,m}$, где $\tilde{u}_i$, имеют равномерное распределение на отрезках $[u_i - \delta_k, u_i + \delta_k]$, $i = \overline{1,m}$. Вычисляем стохастический квазиградиент:
$$\xi(u_k, \delta_k) \triangleq \frac{1}{2\delta_k} \sum_{i=1}^{m} [\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(\tilde{u}_1, \dots, u_i - \delta_k, \dots, \tilde{u}_m) - \hat{\psi}_{\alpha,n_k}(\tilde{u}_1, \dots, u_i + \delta_k, \dots, \tilde{u}_m)]\, e_i$$
3. Если $\|\xi(u_k, \delta_k)\| < L$, то вычисляем следующую точку по формуле $u_{k+1} \coloneqq u_k - \rho_k \xi(u_k, \delta_k)$, иначе выбираем любую $u_{k+1} \in U$ (случайным образом) и переходим к шагу 6.
4. Если $u_{k+1} \in U$, то переходим к шагу 5, иначе $u_{k+1} = \widetilde{\Pi}_U(u_{k+1})$.
5. Если выполнен критерий остановки, то счет окончен, иначе $k \coloneqq k + 1$. В качестве критерия остановки предлагается использовать одновременное выполнение следующих условий:
$$k > K; \left|\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(u_k) - \hat{\psi}_{\alpha,n_k}(u_{k-1})\right| < \varepsilon_1;\ |u_k - u_{k-1}| < \varepsilon_2;$$
$$\left|\hat{\psi}_{\alpha,n_k}(u_{k-1}) - \hat{\psi}_{\alpha,n_k}(u_{k-2})\right| < \varepsilon_1;\ |u_{k-1} - u_{k-2}| < \varepsilon_2;$$
6. Пересчитываем значения параметров $\rho_k \coloneqq \frac{\rho_0}{\mathrm{k}}$; $\delta_k \coloneqq \frac{\delta_0}{\mathrm{k}^{1/2+\varepsilon}}$; $n_k \coloneqq [n_0 \mathrm{k}^{2+\varepsilon}]$ и переходим к шагу 1.

В [10] доказана теорема о сходимости данного алгоритма с вероятностью единица, если функция $\Phi(u, X)$ удовлетворяет ряду требований. Для формулировки теоремы потребуется ввести дополнительное обозначение $V_\delta(u) \triangleq \{\varphi(u) \colon \varphi(u) \geq \varphi_\alpha(u) - \delta\}$, где δ – достаточно малое число.

Теорема 3 [10]. Если выполнены следующие условия:

1. Функция $\Phi(u, X)$ является выпуклой по u на компакте U_ε для всех $x \in \mathbb{R}^s$;
2. $\psi_\alpha\ (u)$ является липшицевой функцией на выпуклом компакте U_ε;
3. для каждого $u \in \mathrm{int}(U)$ функция вероятности $P_\varphi(u)$ дважды дифференцируема по φ и эти производные ограничены, $\frac{\partial}{\partial \varphi} P_\varphi(u) > 0$ для всех $\varphi(u) \in V_\delta(u)$ для каждого $u \in U_\varepsilon$;
4. $f_\Phi\left(\varphi_\beta(u)\right) = O(1 - \beta)$

5. Существует $\gamma > 1$, такое что $\mathbf{M}[|\Phi(u, X)|^{\gamma}] < \infty$ для всех $u \in U_{\varepsilon}$.
6. $\operatorname{mes}\{(u, x) \in U_{\varepsilon} \times \mathbb{R}^{s} \colon \Phi(u, X) = \varphi\} = 0$

Тогда последовательность u_k сходится к решению задачи (10) с вероятностью единица.

Для ускорения алгоритма 1 можно предпринять ряд мер.

Выбор начальной точки предлагается осуществлять алгоритмом, предложенным в [9] и развитым в [11] для дискретных распределений. Численные эксперименты показывают [12], что такой подход дает хорошее приближение к решению задачи (10). Данный алгоритм сводит задачу минимизации интегральной квантили к задаче выпуклого (линейного, в частном случае) программирования. При этом необходимо генерировать выборку большого размера. Эту же выборку можно в дальнейшем использовать при построении выборочных оценок.

Как видно из описания алгоритма, объем выборки n_k достаточно быстро растет, поэтому каждый последующий шаг вычисляется в разы медленнее, чем предыдущий. Поскольку такой рост выборки n_k обусловлен сходимостью в пределе, то на первых нескольких шагах алгоритма можно положить $n_k = n_0$.

Для ускорения вычисления выборочных оценок (самой трудоемкой операции) можно их вычислять параллельно, поскольку они вычисляются независимо.

4. Использование интегральной квантили для построения верхней оценки квантили

Из теоремы 1 следует, что для функции потерь квантиль всегда не превосходит интегральную квантиль. Также легко показать, что $\psi_{\alpha}(u) \le \psi_{\alpha}^{+}(u)$ [6]. Таким образом, верно следующее неравенство

$$\varphi_{\alpha}(u) \le \psi_{\alpha}(u) \le \psi_{\alpha}^{+}(u). \tag{11}$$

Теорема 4. Если для некоторого $u \in U$ функция $\Phi(u, X)$ ограничена, тогда при $\alpha \to 1$ разность квантили и интегральной квантили функции $\Phi(u, X)$ стремится к нулю $|\varphi_{\alpha}(u) - \psi_{\alpha}(u)| \to 0$.

Доказательство. Из условия ограниченности $\Phi(u, X)$ следует существование и ограниченность квантили и интегральной квантили. $\varphi_{\alpha}(u) \to \Phi(u, \max \operatorname{supp}(X))$ при $\alpha \to 1$. Т.е. при $\alpha \to 1$ значение квантили стремится к функции $\Phi(u, X)$ в точке, соответствующей максимальному значению носителя меры.

Рассмотрим предел

$\lim_{\alpha\to 1} \psi_\alpha^+(u) \triangleq \lim_{\alpha\to 1} \mathbf{M}[\Phi(u,X)|\Phi(u,X) > \varphi_\alpha(u)] =$

$= \mathbf{M}[\Phi(u,X)|\Phi(u,X) > \Phi(u, \max\operatorname{supp}(X))] = 0.$

Поскольку вероятность $\mathcal{P}\{\Phi(u,X) > \Phi(u, \max\operatorname{supp}(X))\} = 0$.

Теперь покажем, что $\lim_{\alpha\to 1} \psi_\alpha(u) = \Phi(u, \max\operatorname{supp}(X))$. Для этого достаточно заметить, что в разложении (4), $\lim_{\alpha\to 1} \lambda_\alpha(u) = 1$. Таким образом, $\lim_{\alpha\to 1}(\psi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(u)) = \lim_{\alpha\to 1}(\varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(u)) = 0$.

Теорема 5. Если для некоторого $u \in U$ функция $\Phi(u,X)$ ограничена, тогда для любого $u \in U$ при $\alpha \to 1$ разность выборочной оценки квантили и выборочной оценки интегральной квантили функции $\Phi(u,X)$ стремится к нулю $\left|\hat{\varphi}_{\alpha,n}(u) - \hat{\psi}_{\alpha,n}(u)\right| \to 0$.

Доказательство. Из условия ограниченности $\Phi(u,X)$ следует ограниченность порядковых статистик. Очевидно, что $\lim_{\alpha\to 1} l \triangleq \mathrm{n}$, где l определена по формуле (6).

Тогда предел выборочной оценки квантили по α равен последней порядковой статистике:

$\lim_{\alpha\to 1} \hat{\varphi}_{\alpha,n}(u) \triangleq \Phi_{(\mathrm{n})}(u)$.

Рассмотрим предел выборочной оценки интегральной квантили по α:

$\lim_{\alpha\to 1} \hat{\psi}_{\alpha,n}(u) \triangleq \lim_{\alpha\to 1} \left(\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{l}{n} - \alpha\right)\Phi_{(\mathrm{l})}(u) + \frac{1}{n-l}\sum_{j=l+1}^{n} \Phi_{(\mathrm{j})}(u)\right) =$

$= \lim_{\alpha\to 1} \left(\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{l}{n} - \alpha\right)\Phi_{(\mathrm{n})}(u)\right) + \lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{1}{n-l}\sum_{j=l+1}^{n} \Phi_{(\mathrm{j})}(u)\right) = \Phi_{(\mathrm{n})}(u) + 0 =$

$= \Phi_{(\mathrm{n})}(u)$.

Таким образом, предельные оценки квантили и интегральной квантили совпадают. Из этого следует доказательство теоремы.

Эти теоремы иллюстрируют корректность применения интегральной квантили для оценки сверху квантили.

5. Примеры

Пример 1. Необходимо выбрать оптимальную стратегию инвестирования в 3 различные проекта ($m = 3$), при которой убытки будут минимальны с заданной вероятностью $\alpha = 0.95$, и стратегию, при которой средние потери в неблагоприятных случая (вероятность наступления которых 0.05) будут минимальны. Объем инвестиций равен 1 ($C = 1$). При этом спрос на каждый вид продукции является случайным. Будем считать, что спрос характерезутся случайными величинами X_i, $i = \overline{1,3}$. Они независимы в совокупности и имеют нормальное распределение с параметрами $X_1 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(2,1)$, $X_2 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(2,1)$, $X_3 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(3,1)$. Т.е. необходимо решить задачу квантильной оптизации (9) с ограничениями (8) и оптимизации с критерием в форме интегральной квантили (10) с ограничениями (8).

Для данного случая функция квантили является выпуклой, это следует из свойств нормального распределения. Функция интегральной квантили выпукла по теореме 2.

Решение задачи (9), полученное стохастическим квазиградиентым алгоритмом минимизации функции квантили

$\hat{u}_\alpha^\varphi = (0.2013, 0.2009, 0.5978)$, $\hat{\varphi}_\alpha(u_\alpha^\varphi) = -1.5039$.

Решение задачи (10), полученное алгоритмом 1

$\hat{u}_\alpha^\psi = (0.2351, 0.2342, 0.5307)$, $\hat{\psi}_\alpha(\hat{u}_\alpha^\psi) = -1.2166$.

Как видно из решений, полученные результаты достаточно близки по стратегиям. Подставив решение задачи (10) в функцию квантили $\hat{\varphi}_\alpha(\hat{u}_\alpha^\psi) = -1.4911$, также легко убедиться, что отклонение от оптимального значения меньше 1%!

Пример 2. Рассмотрим аналогичный пример, только с другими распределениями, для случайных велечин. Пусть $X_i, i = \overline{1,3}$ независимы в совокупности и X_1, X_2 имеют нормальное распределение с параметрами $X_1 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(2,1)$, $X_2 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(2,1)$, а X_3 имеет экспоненциальное распределение $X_3 \sim \boldsymbol{\mathcal{E}}(5)$.

Для данного случая выпуклость функции квантили не удается проверить, а интегральная квантиль является выпуклой, это следует из теоремы 2.

Решение задачи (10), полученное алгоритмом 1

$\hat{u}_\alpha^\psi = (0.3423, 0.3420, 0.3157)$, $\hat{\psi}_\alpha(\hat{u}_\alpha^\psi) = -0.8509$.

В качестве приближенного решения задачи квантильной оптимизации мы можем использовать решение задачи (9), поскольку α достаточно близко к 1.

$\hat{u}_\alpha^\varphi \approx \hat{u}_\alpha^\psi = (0.3423, 0.3420, 0.3157)$, $\hat{\varphi}_\alpha(\hat{u}_\alpha^\psi) = -1.1209$,

$\hat{\varphi}_\alpha(\hat{u}_\alpha^\psi)$ в данном случае является верхней оценкой оптимального значения критерия задачи (9), согласно теореме 3 и неравенству (11).

6. Заключение

В работе была рассмотрена задача распределения инвестиций в развитие различных отраслей производства наземного космического комплекса с критериями в форме квантили и итегральной квантили. Для решения задачи был использован стохастический квазиградиентный алгоритм минимазции функции интегральной квантили и его ускоренная модификация. Было показано, что при больших значениях вероятности, критерий в форме интегральной квантили является хорошей верхней оценкой для критерия в форме квантили.

Библиографический список

1. http://www.tsenki.com/ – сайт Центра эксплуатации объектов наземной космической инфраструктуры.
2. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
3. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
4. *Rockafellar R.T, Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distribution // J. Banking & Finance, 2002. No.26. P. 1443 – 1471.
5. *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Алгоритм решения обобщенной задачи Марковица // АиТ, 2011, № 2, С. 77 – 92.
6. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А*. Сравнение критериев VaR и CVaR // АиТ, 2003, № 7, С. 153 – 165.
7. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // АиТ, 2010, № 6, 64 – 78.
8. *Prékopa A.* Stochastic Programming. – Dordrecht: Kluwer, 1995
9. *Rockafellar R.T., Uryasev S*. Optimization of conditional value-at-risk // Journal of Risk, 2000, Vol.2, No. 3, P. 21 – 51
10. *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции интегральной квантили // АиТ, 2012, № 2
11. *Величко А.С., Нурминский Е.А.* Прямодвойственная декомпозиция задачи о репликации портфеля рыночных активов // АиТ, 2004, № 2, 170–178
12. *Chernobrovov A.I.* Optimization of the CVaR by a Stochastic Quasigradient Algorithm // 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Russia, 21-23 September, 2011. P.100-104.

Сведения об авторах

КИБЗУН Андрей Иванович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н., тел.: (499)158-41-13; e-mail: kibzun@mail.ru МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993.

ЧЕРНОБРОВОВ Алексей Игоревич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел.: (499) 158-41-13; e-mail: 4ernobrovov@mail.ru. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993 .