

Простой алгоритм стабилизации ориентации спутника с гибким элементом

М. М. Хрусталева, А. С. Халина

Аннотация

Рассматривается задача стабилизации ориентации спутника с гибким элементом (стержнем) на круговой орбите. С использованием принципа разделения движения на медленное квазистатическое и быстрое колебательное получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая управляемое движение спутника с гибким стержнем.

Построенная в работе модель была применена к исследованию стабилизации углового положения спутника относительно местной вертикали. Установлено, что простой линейный регулятор, используемый для стабилизации ориентации жестких спутников, обеспечивает устойчивость ориентации спутника с гибким элементом при надлежащем выборе коэффициентов регулятора.

Ключевые слова

спутник с гибким элементом; стабилизация ориентации спутника; вынужденные колебания стержня большой жесткости; управление с неполной обратной связью; линейный регулятор.

Введение.

В работе исследуется задача стабилизации ориентации спутника с гибким элементом (стержнем) на круговой орбите. Рассматривается компактный спутник с упругим стержнем длины l под действием возмущающего момента.

Как известно, спутник такой конструкции, ориентированный в направлении местной вертикали, сохраняет эту ориентацию. Однако из-за неточности ориентации спутника при его выведении на орбиту и других возмущений спутник совершает незатухающие колебания в окрестности местной вертикали. Погасить эти колебания возможно лишь за счет управляющего

момента.

Исходные уравнения, описывающие движения гибкого спутника, представляют собой совокупность взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих вращение спутника, и уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего колебания гибкого стержня [1].

Установлено, что простой регулятор, используемый для стабилизации ориентации жестких спутников, в котором управляющий момент линейно зависит от доступных измерению угла отклонения оси спутника от местной вертикали и его угловой скорости вращения, при надлежащем выборе коэффициентов обеспечивает устойчивость ориентации и гибкого спутника.

Математическая модель.

Рассматривается плоское движение жесткого спутника с упругим стержнем, обладающего моментом инерции J_c и массой m_c под действием возмущающего момента L . В точке на расстоянии a от центра масс C спутника жестко закреплен прямолинейный однородно упругий стержень длины l с погонной плотностью ρ , модулем Юнга E , коэффициентом h внутреннего трения по Фойгту и моментом инерции поперечного сечения J . Система координат Oxy связана со спутником C , α – угол отклонения спутника от местной вертикали, т.е. ошибка стабилизации, y_c – смещение центра масс, L_c – управляющий момент, N_o – сила реакции стержня в точке O , L_o – момент сил реакции стержня в точке O (Рис. 1).

Согласно [1] уравнения возмущенного движения спутника имеют вид

$$\begin{cases} J_c \ddot{\alpha} = \Omega \alpha + u + aN_o + L_o & , \\ m_c \ddot{y}_c = N_o \end{cases}$$

$$L_o = -\frac{EJ}{l^2} \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$N_o = -\frac{EJ}{l^3} \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial z^3},$$

где $z \in [0,1]$, $y(z,t)$ – зависимость прогиба стержня от продольной координаты z и времени t , Ω – постоянная, определяемая орбитой спутника.

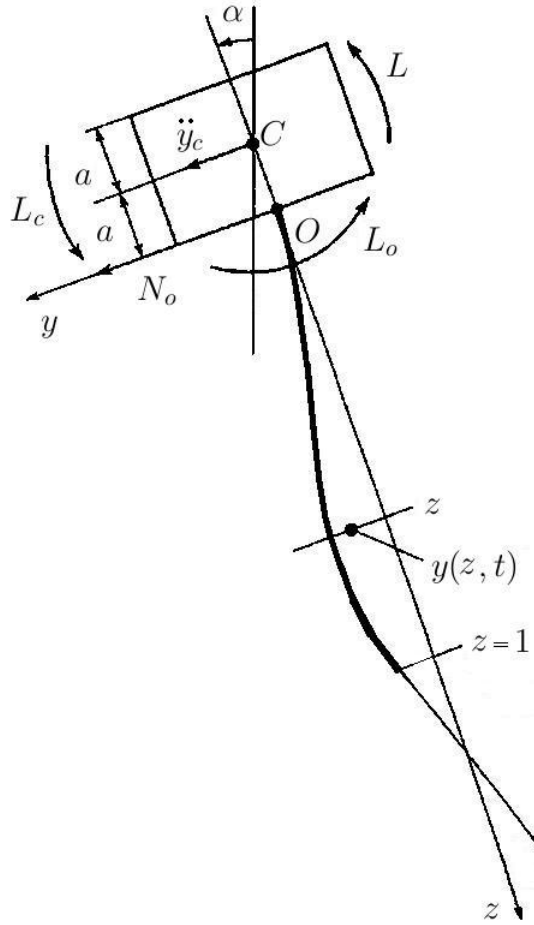


Рис. 1. Спутник с гибким стержнем.

Уравнение колебания стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m_z l^2} \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -\ddot{y}_c + (a + lz)\ddot{\alpha} \quad (2)$$

имеет нулевые граничные условия

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0, & \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 y(1, t)}{\partial z^2} = 0, & \quad \frac{\partial^3 y(1, t)}{\partial z^3} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Частный случай. Абсолютно жесткий спутник.

В качестве первого приближения и введения в проблематику вопроса рассмотрим частный случай: абсолютно жесткий спутник.

Уравнение движения спутника в данном случае будет иметь вид

$$J_c \ddot{\alpha} = u - \Omega \alpha.$$

Зададим управление u в виде линейного регулятора, зависящего от α и $\dot{\alpha}$, где ϕ_1 и ϕ_2 являются неизвестными параметрами

$$u = -\phi_1 \alpha - \phi_2 \dot{\alpha}. \quad (4)$$

С учетом вида управления u аналитически получаем область устойчивости решения уравнения движения спутника (Рис. 2). Решение будет устойчиво при $\phi_1 + \Omega > 0$ и $\phi_2 > 0$.

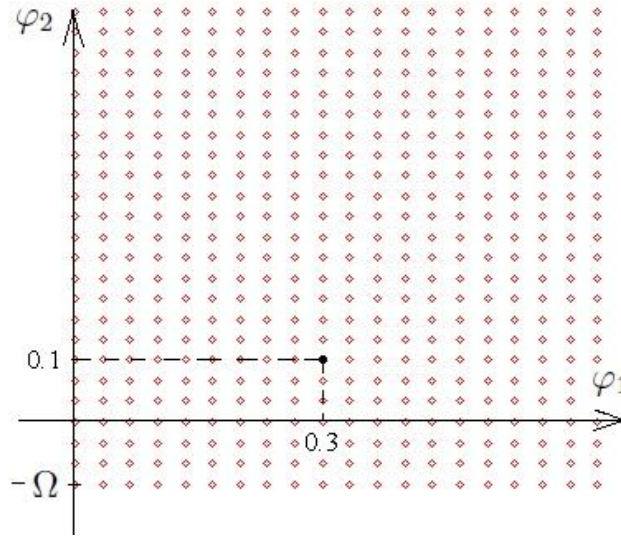


Рис. 2. Диаграмма устойчивости жесткого спутника.

Выбирая на диаграмме устойчивости решения уравнения движения спутника значение параметров $\phi_1 = 0.3$ и $\phi_2 = 0.1$, построим график угла $\alpha(t)$ отклонения от местной вертикали для абсолютно жесткого спутника и спутника с гибким элементом (Рис. 3).

При выбранных параметрах управления в случае абсолютно жесткого спутника решение является устойчивым, а в случае спутника с гибким элементом – неустойчивым (исходные данные для расчета приводятся ниже).

Далее нас будет интересовать вопрос: можно ли применяя управление в виде (4) получить устойчивое решение в случае спутника с гибким элементом, т.е. стабилизировать ориентацию спутника.

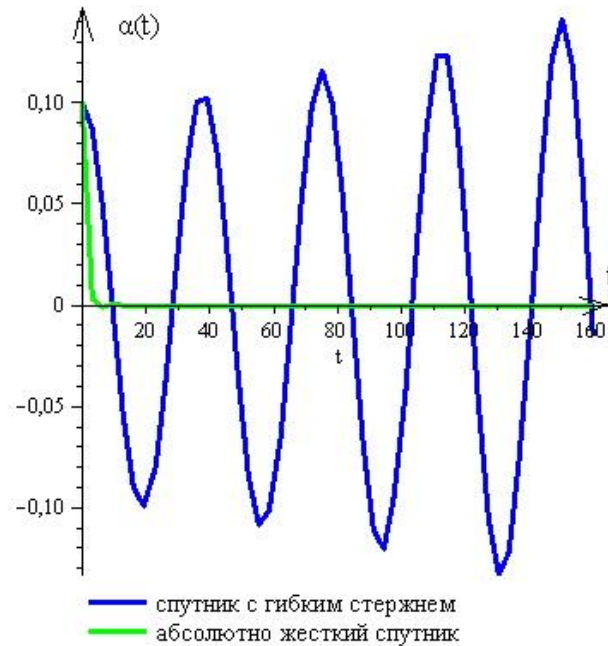


Рис. 3. График функции $\alpha(t)$.

Сведение исходной системы уравнений к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим уравнение (2) колебания стержня.

С целью разделения достаточно медленных движений и быстрых упругих колебаний решение представляется в виде суммы квазистатического решения $y_0(z, t)$ и малой быстропеременной добавки $\Delta y(z, t)$, разлагаемой в ряд по собственным функциям (модам) стержня

$$y(z, t) = y_0(z, t) + \Delta y(z, t). \quad (5)$$

Квазистатическая компонента $y_0(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{EJ}{m_z l^3} \frac{\partial^4 y_0(z, t)}{\partial z^4} = -\ddot{y}_c + (a + lz)\ddot{\alpha} \quad (6)$$

с теми же граничными условиями, что и для исходной системы.

Задача (3), (6) имеет аналитическое решение

$$y_0(z) = a_0(t) + a_1(t)z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + a_4(t)z^4 + a_5(t)z^5, \quad (7)$$

коэффициенты которого находятся из граничных условий (3) и уравнения колебания стержня (6), и зависят от параметров конструкции спутника

$$\begin{aligned}
a_0(t) &= 0, \\
a_1(t) &= 0, \\
a_2(t) &= \frac{1}{6} \frac{m_z l^3}{EJ} \left(\left(\frac{3}{2} a + l \right) \ddot{\alpha} - \frac{3}{2} \ddot{y}_c \right), \\
a_3(t) &= -\frac{1}{6} \frac{m_z l^3}{EJ} \left(\left(a + \frac{1}{2} l \right) \ddot{\alpha} - \ddot{y}_c \right), \\
a_4(t) &= \frac{1}{24} \frac{m_z l^3}{EJ} (a \ddot{\alpha} - \ddot{y}_c), \\
a_5(t) &= \frac{1}{120} \frac{m_z l^3}{EJ} (l \ddot{\alpha}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Быстропеременная компонента $\Delta y(z, t)$ решения (5) удовлетворяет уравнению

$$\frac{EJ}{m_z l^3} \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 \Delta y(z, t)}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 \Delta y(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 y_0(z, t)}{\partial t^2}, \tag{9}$$

решение которого будем искать в виде ряда по собственным функциям $A_k(z)$

$$\Delta y(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta y_k(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) A_k(z). \tag{10}$$

Учитывая вид квазистатической компоненты $y_0(z, t)$ и искомого решения $\Delta y(z, t)$, уравнение (9) колебания стержня для быстропеременной компоненты приобретает следующий вид

$$\frac{EJ}{m_z l^3} \sum_{k=1}^{\infty} A_k''''(z) \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) B_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(z) \ddot{B}_k(t) = \frac{1}{6} \frac{m_z l^3}{EJ} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k^\alpha \ddot{\alpha} + \gamma_k^c \ddot{y}_c) A_k(z). \tag{11}$$

В соответствии с методом разделения переменных полагаем

$$A_k''''(z) = \mu_k^4 A_k(z). \tag{12}$$

Тогда из уравнения (11) получим уравнения для функций $B_k(t)$

$$\mu_k^4 (B_k(t) + h \dot{B}_k(t)) + \varepsilon \ddot{B}_k(t) = \frac{1}{6} \varepsilon^2 (\gamma_k^\alpha \ddot{\alpha} + \gamma_k^c \ddot{y}_c), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где

$$\varepsilon = \frac{m_z l^3}{EJ}. \tag{14}$$

Детализация уравнений движения спутника (1) в соответствии с принципом разделения движения на медленное квазистатическое и быстрое колебательное и учет вида решения для

быстропеременной компоненты $\Delta y(z, t)$ позволяют исключить из выражения (13) высшие производные $(\ddot{\alpha}, \ddot{y}_c)$. Тогда уравнения для функций $B_k(t)$ приобретают вид

$$\ddot{B}_k(t) = -\frac{1}{\varepsilon}(B_k(t) + h\dot{B}_k(t)) + \frac{1}{6} \frac{\varepsilon}{w} (Q_4 \ddot{u} + Q_5 u + Q_6 \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} Q_7 B_i). \quad (15)$$

С описанными выше преобразованиями система уравнений движения спутника (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{y}_c = Q_0 u + Q_1 \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} P_k B_k \\ \ddot{\alpha} = Q_2 u + Q_3 \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} S_k B_k \\ \ddot{B}_k(t) = -\frac{1}{\varepsilon} \mu_k^4 (B_k(t) + h\dot{B}_k(t)) + \frac{1}{6} \frac{\varepsilon}{w} (Q_4 \ddot{u} + Q_5 u + Q_6 \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} Q_7 B_i). \end{cases} \quad (16)$$

Здесь следует заметить, что переменная y_c не входит во второе и третье уравнение, поэтому второе и третье уравнение можно анализировать независимо.

Уравнения движения гибкого спутника содержат не только величину управляющего момента, но величину его второй производной, что значительно усложняет исследование управляемого движения. Задание управления в виде (4), зависящего от угла отклонения от местной вертикали и угловой скорости этого отклонения, позволяет исключить из уравнений движения производную управляющего момента

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = Q_8 \alpha + Q_9 \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^N S_i B_i \\ \ddot{B}_k(t) = Q_{10}^k (B_k(t) + h\dot{B}_k(t)) + Q_{11}^k \alpha + Q_{12}^k \dot{\alpha} + \sum_{i=1}^N \Lambda_{ki} B_i + \sum_{i=1}^N R_{ki} \dot{B}_i. \end{cases} \quad (17)$$

Это система дифференциальных уравнений описывает управляемое угловое движение гибкого спутника и имеет порядок $(2 + 2N)$, где N – количество учитываемых мод.

От системы дифференциальных уравнений второго порядка переходим к системе первого порядка и составляем матрицу системы. Будем считать, что вектор состояния имеет следующий вид

$$\left(\alpha \quad \dot{\alpha} \quad B_1 \quad \dot{B}_1 \quad B_2 \quad \dot{B}_2 \quad \dots \quad B_N \quad \dot{B}_N \right)^T. \quad (18)$$

Тогда матрица системы (17) уравнений углового движения спутника будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_8 & Q_9 & S_1 & S_2 & \dots & S_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ Q_{11}^1 & Q_{12}^1 & Q_{10}^1 + \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1N} & hQ_{10}^1 + R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1N} \\ Q_{11}^2 & Q_{12}^2 & \Lambda_{21} & Q_{10}^2 + \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2N} & R_{21} & hQ_{10}^2 + R_{22} & \dots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{11}^N & Q_{12}^N & \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \dots & Q_{10}^N + \Lambda_{NN} & R_{N1} & R_{N2} & \dots & hQ_{10}^N + R_{NN} \end{pmatrix}$$

Численно исследуя данную матрицу, определим неизвестные параметры управления ϕ_1 и ϕ_2 из условий устойчивости и получим диаграммы устойчивости решения в зависимости от количества мод в пространстве параметров линейного регулятора.

Результаты численных экспериментов.

В предыдущем разделе был описан алгоритм перехода от совокупности взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих вращение спутника, и уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего колебания гибкого стержня, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих управляемое движение спутника. Исследуя матрицу полученной системы на устойчивость при $J_c = 0.7$, $m_c = 35$, $a = 0.1$, $l = 5$, $\Omega = 0.1$, $\rho = 4320$, $E = 1.12 \times 10^{11}$, $J = 5.3 \times 10^{-9}$ и $h = 0.1$, получим диаграммы устойчивости решения в зависимости от количества мод в пространстве параметров линейного регулятора (ϕ_1 , ϕ_2). Результаты представлены на рисунке 4.

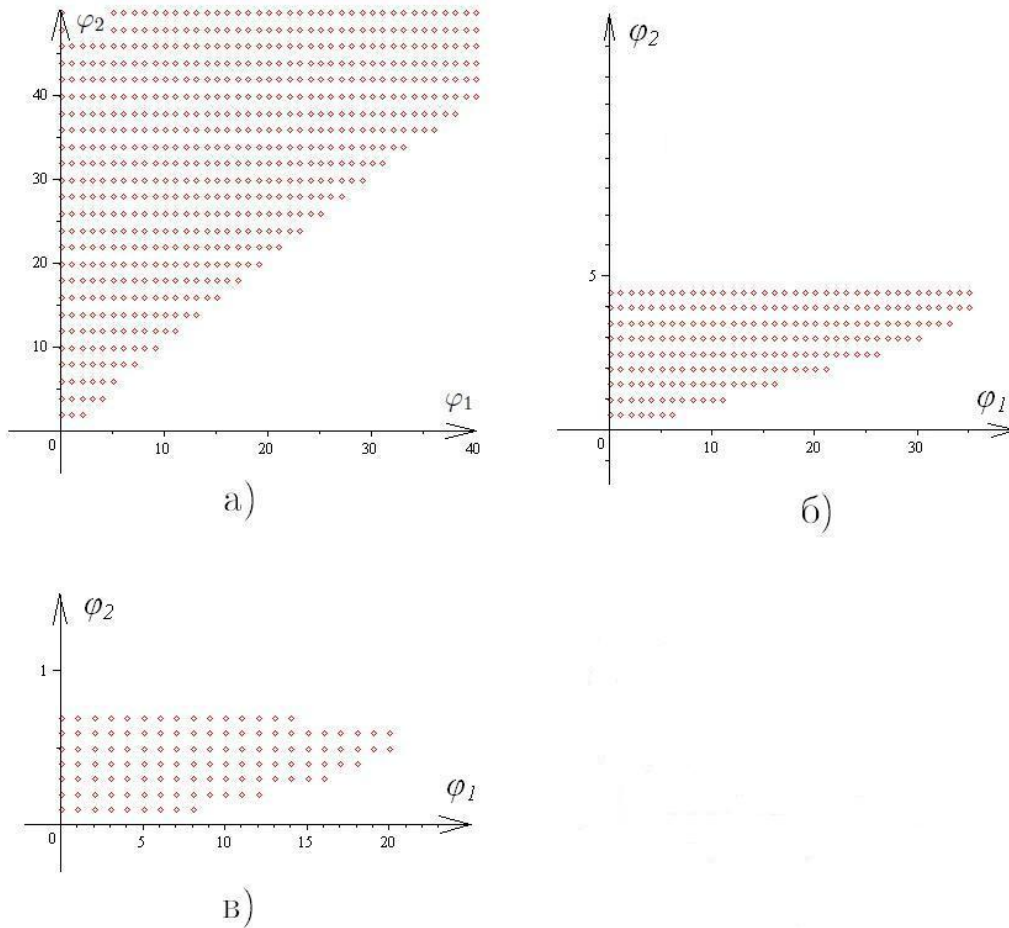


Рис. 4. Диаграмма устойчивости спутника с учетом:

а) одной моды, б) двух мод, в) трех мод.

Для нулевого приближения решение будет устойчиво при $\phi_1 + \Omega > 0$ и $\phi_2 > 0$. Увеличение числа учитываемых мод приводит к сужению области устойчивости, но нет необходимости учета большого количества мод. Наглядно это видно из графика вклада мод в решение (Рис. 5).

Расчеты показали, что первая мода ($k=1$) вносит наиболее существенный вклад в решение. Последующие же моды имеют пренебрежимо малую величину. На графике вклада мод в решение приведен вклад первой моды без коэффициента, второй, третьей и четвертой с коэффициентами 10^4 , 10^6 и 10^9 , соответственно, в момент времени $t=2$. Кроме того, эксперимент показал, что в случае увеличения длины стержня от 5 до 10 при прочих равных условиях области устойчивости сжимаются вдоль оси абсцисс примерно в 10 раз.

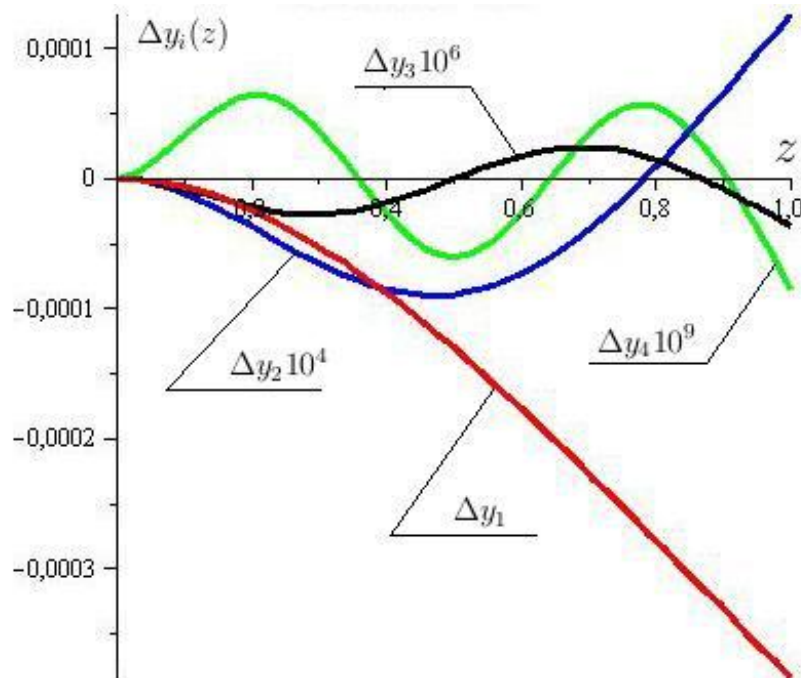


Рис. 5. Вклад мод, умноженный на соответствующие коэффициенты.

На рисунке 6 показан график угла $\alpha(t)$ отклонения спутника от местной вертикали.

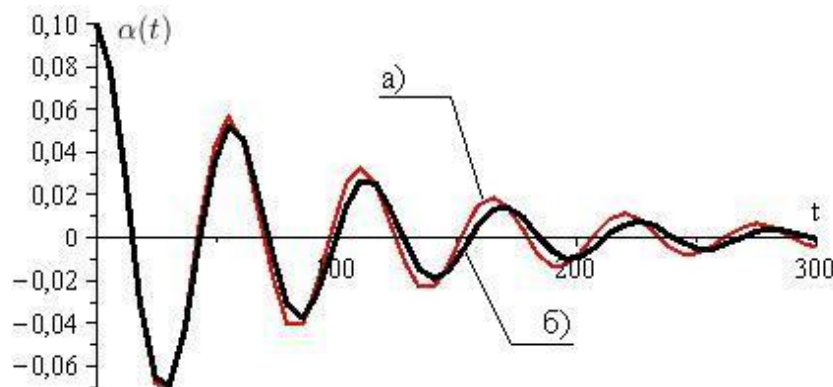


Рис. 6. График функции $\alpha(t)$ с учетом: а) одной моды, б) двух мод.

Расчеты произведены с учетом одной и двух мод при одних и тех же параметрах управления $\phi_1 = 0.2$ и $\phi_2 = 0.1$, выбранных из пересечения соответствующих областей устойчивости. При данных параметрах управления решение будет устойчиво для каждого из указанных случаев.

Заключение.

В работе рассмотрена плоская задача стабилизации углового положения спутника с

гибким элементом (стержнем) на круговой орбите.

С использованием принципа разделения движения на медленное квазистатическое и быстрое колебательное получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая управляемое движение спутника с гибким стержнем. Показано, что квазистатическое решение находится аналитически и представляет собой многочлен пятого порядка от продольной координаты. Получено уравнение в частных производных для быстрых колебаний. И уже решение этого уравнения ищется в виде ряда по модам колебаний.

Построенная в работе модель была применена к исследованию стабилизации углового положения спутника относительно местной вертикали.

В качестве частного случая рассмотрен абсолютно жесткий спутник. Для него вполне приемлемым является простой закон управления моментом линейный по углу отклонения оси спутника от местной вертикали и угловой скорости этого отклонения.

Уравнения движения гибкого спутника содержат не только величину управляющего момента, как в случае жесткого спутника, но и величины его второй производной, что значительно усложняет исследование управляемого движения. Задание структуры управляющего момента с подлежащими определению коэффициентами позволило исключить из уравнений движения производные управляющего момента.

Показано, что простой линейный регулятор, используемый для стабилизации ориентации жестких спутников, обеспечивает устойчивость ориентации спутника с гибким элементом при надлежащем выборе коэффициентов регулятора. Для конкретного примера построена область устойчивости на плоскости двух коэффициентов используемого закона управления.

Развитием данной работы является применение предложенного метода в задаче стабилизации спутника с гибким стержнем с закрепленным на его конце жестким телом (выносной двигатель, исследовательское оборудование).

Библиографический список.

- [1] *Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями. // Изв. РАН ТИСУ, 2004. N 6. с. 150-163.
- [2] *Khustalev M.M., Rummyantsev D.S.* Synthesis of optimal control strategy by damping a vibration of earth flexible satellite with a gravity-gradient stabilization with information constraints. // 58th International Astronautical Congress, 2007.

Сведения об авторах.

Хрусталеv Михаил Михайлович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д. ф.-м. н, e-mail: mmkhrustalev@mail.ru

Халина Анастасия Сергеевна, ст. программист лаборатории теории устойчивости и управления Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (ИМАШ РАН), e-mail: an.khalina@gmail.com