УДК 629.7

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНЕШНЕГО ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА ПРИ ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ОПТИМАЛЬНОГО ТИПАЖА

Акимов Е.Н., Балык В.М.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия
e-mail: K608@mai.ru

Рассматривается метод статистического синтеза функции распределения целевых задач между отдельными типами летательных аппаратов. Приводятся статистические выборки, описывающие в целом систему летательных аппаратов оптимального типажа, а также выборки, описывающие функцию целераспределения. Представлены аналитические модели функций распределения целевых задач, которые являются аппроксимацией представленных статистик. Приводится простой, но в то же время эффективный способ статистического удовлетворения функциональным ограничениям.

Ключевые слова: статистический синтез, функция распределения, статистическая выборка, базисные функции, редукция, система ЛА, оптимальный типаж.

Введение

В работе рассматривается специфический класс летательных аппаратов (ЛА) — многоцелевые системы ЛА, которые отличаются многоцелевым характером. Основные особенности многоцелевых систем:

— наличие разнообразных условий функционирования и выполняемых целевых задач;

— использование для оценки эффективности многоцелевых ЛА векторного критерия оптимальности;

— сложная структура системы, состоящая из нескольких автономных элементов, между которыми распределено выполнение отдельных целевых задач.

Такие особенности требуют наиболее общего аппарата исследования, каким является методология статистического синтеза. Статистический синтез позволяет восстанавливать функциональные связи между характеристиками целевой задачи и проектными параметрами, между проектными параметрами отдельных типов ЛА и функцией распределения целевых задач по типам ЛА и функционалам задачи. Особо важной задачей при построении системы ЛА оптимального типажа является идентификация функции распределения. По своему устройству функция распределения представляет собой вектор-функцию, компонентами которой являются так называемые характеристические функции распределения. Эти функции представляют собой ноль-единичные характеристики, указывающие на выполнение целевых задач. Средства статистического синтеза позволяют обобщить такие функции распределения на произвольный случай по характеристикам целевых задач.

Задачи построения многоцелевых систем оптимального типажа отличаются большим числом функциональных ограничений. При этом значительная их часть слабо формализуема. Например, когда на определённый тип ЛА возлагается несколько видов целевых задач, то не допускается та целевая задача, которая требует долива топлива более 30%. Такое требование весьма трудно формализовать, в то время как элементарный экспертный анализ на этапе формирования исходной статистической выборки позволяет соответствующий вариант из выборки отбросить. Регуляризованная таким образом статистическая выборка, согласно принципу статистического синтеза, будет аппроксимировать функциональную связь со всеми теми свойствами и ограничениями, которые были в порождающей выборке. Здесь весьма уместна аналогия с построением лагранжиана. Исходный функционал задачи переводится в конечномерную статистику, в которой далее отбрасываются все те варианты (строки), в которых не удовлетворяются заданные функциональные ограничения. По регуляризованной выборке вновь восстанавливается функционал, обладающий всеми свойствами функции Лагранжа.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача построения многоцелевой системы ракет-носителей оптимального типажа. Оптимальность системы оценивается по критерию стоимости системы.

Каждая отдельная ракета характеризуется вектором проектного решения $d_j = (a_1,...,a_k,u_1,...,u_s)_j$, где $a_i, i=\overline{1,k}$ — вектор проектных параметров; $u_j = (u_1,...,u_s)_j$ — вектор функций управления; $j = 1,2,...,m$; m — число типов ракет-носителей. Совокупность любых элементов d_j, $j=\overline{1,m}$, называется стратегией построения системы ЛА, $d_j \in A$, где A — множество стратегий.

В качестве внешнего целевого множества W рассматриваются характеристики и параметры орбит, на которые выводятся полезные грузы:

$$W = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_i, ..., \omega_n\},$$

где n — количество целевых задач.

На множестве W определена целочисленная распределяющая функция $E(\omega)$, принимающая значения 1, 2,..., m. Тогда каждому центру d_j, $j=\overline{1,m}$, сопоставляется в W его область Дирихле D_j, в точках которой распределяющая функция принимает значение, равное j:

$$D_j = \{\omega \in W \mid E(\omega) = j\},\ j=\overline{1,m}.$$

На области Дирихле накладываются условия:

— области Дирихле не пересекаются

$$D_i \bigcap D_j = \varnothing,\ \forall i,j=\overline{1,m},\ i \neq j;$$

— объединение областей Дирихле образует внешнее целевое множество

$$\bigcup_{j=1}^{m} D_j = W.$$

Тройка $(W, A, E(\omega))$ называется простой многоцелевой системой [1], показатель эффективности которой определяется функционалом (функцией)

$$J = J(W, A, E(\omega)).$$

Значение функционала

$$J = J(\omega, d, \mu(D_{E(\omega)}))$$

есть показатель эффективности выполнения задачи $\omega \in W$ центром d стратегии A. Здесь $\mu(D_{E(\omega)})$ — мера области Дирихле.

На проектные параметры $a_1, a_2, ..., a_k$ и функции управления $u_1, u_2, ..., u_s$ накладываются параметрические и функциональные ограничения:

$$\begin{aligned}
&a_{1\min} \le a_1 \le a_{1\max};\\
&a_{2\min} \le a_2 \le a_{2\max};\\
&\dots\\
&a_{k\min} \le a_k \le a_{k\max};\\
&u_{1\min} \le u_1 \le u_{1\max};\\
&u_{2\min} \le u_2 \le u_{2\max};\\
&\dots\\
&u_{s\min} \le u_s \le u_{s\max};
\end{aligned} \tag{1}$$

$$g_j(d) \ge 0 \quad j=\overline{1,l}, \tag{2}$$

где l — число функциональных ограничений.

Задача построения многоцелевой системы ЛА оптимального типажа ставится следующим образом. Найти:

$$J^{\text{opt}} = \min_{a,u} \min_{E(\omega)} J(W, A, E(\omega)) \tag{3}$$

при выполнении ограничений (1) и (2).

Задача (3) записана в виде двухуровневой оптимизации. На верхнем уровне оператором $\min\limits_{E(\omega)}(\bullet)$ решается задача оптимального целераспределения между типами ЛА (это задача структурного выбора). На нижнем уровне, в рамках текущей структуры, оператором $\min\limits_{a,u}(\bullet)$ выбирается вектор проектного решения d (это задача параметрического выбора). Функция распределения $E(\omega)$ представляет собой вектор-функцию, компонентами которой являются характеристические функции $e(i,j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. По определению:

$$e(i,j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-я целевая задача} \\ \text{выполняется } j\text{-м типом ЛА;} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функция распределения представляется через характеристические функции в следующем виде:

$$E(e(1,1),e(1,2),\ldots,e(1,m),\ldots,e(i,1),$$
$$e(i,2),\ldots,e(i,m),\ldots,\ e(n,1),e(n,2),\ldots,e(n,m)).$$

Решение задачи (3) сталкивается с двумя принципиальными трудностями:

— критериальная функция $J=J(W,A,E(\omega))$ является многоэкстремальной с целочисленными аргументами;

— задачи оптимального типажирования системы ЛА отличаются большим количеством функциональных ограничений, причем большинство таких ограничений являются трудно формализуемыми.

В связи с этим крайне важно найти аналитическое представление математической модели системы ЛА оптимального типажа в целом и, в частности, аналитические связи между функцией распределения $E(\omega)$ и характеристиками внешнего целевого множества:

$$\begin{aligned}
&e(1,1)=f_1(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&e(1,2)=f_2(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&\ldots\\
&e(1,m)=f_m(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&\ldots\\
&e(i,1)=f_{(i-1)m+1}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&e(i,2)=f_{(i-1)m+2}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&\ldots\\
&e(i,m)=f_{(i-1)m+m}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&\ldots\\
&e(n,1)=f_{(n-1)m+1}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&e(n,2)=f_{(n-1)m+2}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n);\\
&\ldots\\
&e(n,m)=f_{(n-1)m+m}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n).
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Идентификация функции распределения целевых задач

При статистическом синтезе различных проектно-функциональных связей необходимо решить следующие основные задачи:

— построить статистическую выборку, связывающую выходные данные с входными;

— найти наиболее адекватные типы базисных функций, по которым восстанавливаются проектно-функциональные связи;

— определить оптимальные значения нелинейных параметров $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ в восстанавливаемых зависимостях.

Рассмотрим статистическую выборку, полученную зондированием математической модели определения стоимости системы ЛА оптимального типажа [2], приведенную в табл. 1.

Таблица 1

ω	$e(i,j)$	C
$(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)_1$	$(e(1,1),e(1,2),\ldots,e(1,m),\ldots,e(i,1),e(i,2),\ldots,e(i,m),\ldots,\ e(n,1),e(n,2),\ldots,e(n,m))_1$	C_1
$(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)_2$	$(e(1,1),e(1,2),\ldots,e(1,m),\ldots,e(i,1),e(i,2),\ldots,e(i,m),\ldots,\ e(n,1),e(n,2),\ldots,e(n,m))_2$	C_2
...	...	...
$(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)_N$	$(e(1,1),e(1,2),\ldots,e(1,m),\ldots,e(i,1),e(i,2),\ldots,e(i,m),\ldots,\ e(n,1),e(n,2),\ldots,e(n,m))_N$	C_N

Восстановить проектно-функциональную связь непосредственно по статистике из табл. 1 нельзя, так как входные данные и выходные представлены в виде векторов.

В [3] приводится ряд операций над статистическими выборками, позволяющих преобразовать исходную статистическую выборку, по которой можно получить взаимно однозначную проектно-функциональную связь.

Операция редукции — это операция сведения *n*-мерной выборки к *n* одномерным выборкам. Схематически эта операция представлена на рис. 1 (см. с. 17). На рис. 1 $\boxed{(d_1,d_2,\ldots,d_n) \mid J}_N$ — символьное обозначение статистической выборки объема *N* с входами $d_1, d_2,\ldots,d_n$ и одним выходом *J*; *R* — символьное обозначение операции редукции.

Операция инверсии формирует обратную выборку, по которой можно построить обратную функциональную зависимость (рис. 2).

Представим выборку из табл. 1 в виде выборки, связывающей характеристические функции $e(i,j)$ с целевыми значениями $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ (табл. 2).

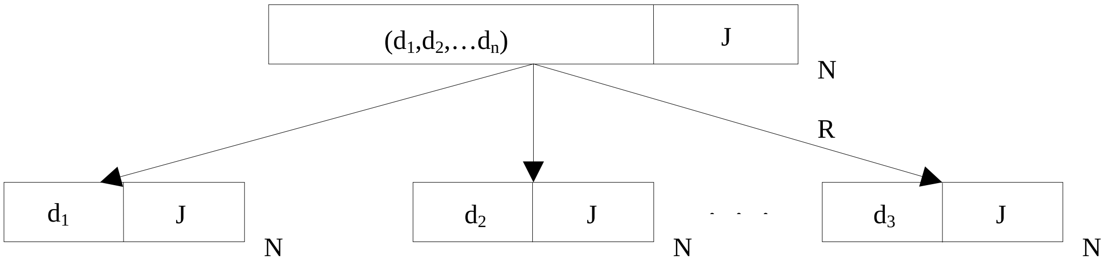

Рис. 1. Операция редукции

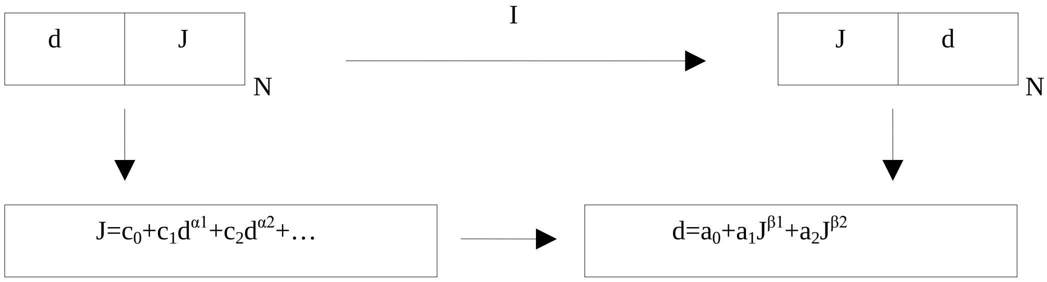

Рис. 2. Операция инверсии

Таблица 2

$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$	$e(1,1),e(1,2),...,e(1,m),..., e(n,1),e(n,2),...,e(n,m)$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_1$	$[e(1,1),e(1,2),...,e(1,m),..., e(n,1),e(n,2),...,e(n,m)]_1$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_2$	$[e(1,1),e(1,2),...,e(1,m),..., e(n,1),e(n,2),...,e(n,m)]_2$
...	...
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_N$	$[e(1,1),e(1,2),...,e(1,m),..., e(n,1),e(n,2),...,e(n,m)]_N$

По выборке из табл. 2 проводится операция редукции, в результате чего будет получено $n\times m$ статистических выборок с одномерным входом (табл. 3—8, где индекс «Т» указывает, что характеристическая функция — табличная).

По статистикам из табл. 3—8 восстанавливаются проектно-функциональные связи вида (4).

Таблица 3

$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(1,1)$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(1,1)_1$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(1,1)_2$
...	...
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(1,1)_N$

Таблица 4

$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(1,2)$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(1,2)_1$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(1,2)_2$
...	...
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(1,2)_N$

Таблица 5

$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(1,m)$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(1,m)_1$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(1,m)_2$
...	...
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(1,m)_N$

Таблица 6

$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(n,1)$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(n,1)_1$
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(n,1)_2$
...	...
$(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(n,1)_N$

Таблица 7

$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(n,2)$
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(n,2)_1$
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(n,2)_2$
...	...
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(n,2)_N$

Таблица 8

$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$	$e^{\mathrm{T}}(n,m)$
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_1$	$e^{\mathrm{T}}(n,m)_1$
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_2$	$e^{\mathrm{T}}(n,m)_2$
...	...
$(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)_N$	$e^{\mathrm{T}}(n,m)_N$

Если в качестве базисной функции принят обобщенный степенной полином, то выражения для характеристических функций $e(i,j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ будут иметь вид:

$$e^{\mathrm{M}}(1,1) = C_0^{(1)} + C_1^{(1)}\omega_1^{\alpha_1^{(1)}}\omega_2^{\alpha_2^{(1)}}...\omega_n^{\alpha_n^{(1)}} +$$

$$+C_2^{(1)}\omega_1^{\beta_1^{(1)}}\omega_2^{\beta_2^{(1)}}...\omega_n^{\beta_n^{(1)}} + ... + C_q^{(1)}\omega_1^{\gamma_1^{(1)}}\omega_2^{\gamma_2^{(1)}}...\omega_n^{\gamma_n^{(1)}};$$

$$e^{\mathrm{M}}(1,2) = C_0^{(2)} + C_1^{(2)}\omega_1^{\alpha_1^{(2)}}\omega_2^{\alpha_2^{(2)}}...\omega_n^{\alpha_n^{(2)}} +$$

$$+C_2^{(2)}\omega_1^{\beta_1^{(2)}}\omega_2^{\beta_2^{(2)}}...\omega_n^{\beta_n^{(2)}} + ... + C_q^{(2)}\omega_1^{\gamma_1^{(2)}}\omega_2^{\gamma_2^{(2)}}...\omega_n^{\gamma_n^{(2)}};$$

...

$$e^{\mathrm{M}}(1,m) = C_0^{(m)} + C_1^{(m)}\omega_1^{\alpha_1^{(m)}}\omega_2^{\alpha_2^{(m)}}...\omega_n^{\alpha_n^{(m)}} +$$

$$+C_2^{(m)}\omega_1^{\beta_1^{(m)}}\omega_2^{\beta_2^{(m)}}...\omega_n^{\beta_n^{(m)}} + ... + C_q^{(m)}\omega_1^{\gamma_1^{(m)}}\omega_2^{\gamma_2^{(m)}}...\omega_n^{\gamma_n^{(m)}}; \quad (5)$$

...

$$e^{\mathrm{M}}(n,m) = C_0^{((n-1)m+m)} +$$

$$+C_1^{((n-1)m+m)}\omega_1^{\alpha_1^{((n-1)m+m)}}\omega_2^{\alpha_2^{((n-1)m+m)}}...\omega_n^{\alpha_n^{((n-1)m+m)}} +$$

$$+C_2^{((n-1)m+m)}\omega_1^{\beta_1^{((n-1)m+m)}}\omega_2^{\beta_2^{((n-1)m+m)}}...\omega_n^{\beta_n^{((n-1)m+m)}} +$$

$$+... + C_q^{((n-1)m+m)}\omega_1^{\gamma_1^{((n-1)m+m)}}\omega_2^{\gamma_2^{((n-1)m+m)}}...\omega_n^{\gamma_n^{((n-1)m+m)}}.$$

Индекс «М» указывает, что характеристическая функция рассчитывается по модели (5). Линейные и нелинейные параметры в системе (5) определяются из условия минимума критерия регулярности [3]:

$$\Delta^2(B) =$$

$$= \min_{\chi} \frac{\sum_{P=1}^{N_A}[e^{\mathrm{M}}(i,j)_P - e^{\mathrm{T}}(i,j)_P]^2}{\sum_{P=1}^{N_A}[e^{\mathrm{T}}(i,j)_P]^2}, \; i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}, \quad (6)$$

где χ — вектор варьируемых параметров:

$$\chi = \{C_0^{(i)}, C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, ..., C_q^{(i)}, \alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_n^{(i)},$$

$$\beta_0^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, ..., \beta_n^{(i)}, \gamma_0^{(i)}, \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, ..., \gamma_n^{(i)}\}, \; i=\overline{1, n\times m};$$

N_A — объем обучающей части статистической выборки.

Оценка точности восстанавливаемых зависимостей (5) проводится также по критерию регулярности, но рассчитанному на проверочной части статистической выборки N_B:

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{P=1}^{N_B}[e^{\mathrm{M}}(i,j)_P - e^{\mathrm{T}}(i,j)_P]^2}{\sum_{P=1}^{N_B}[e^{\mathrm{T}}(i,j)_P]^2}.$$

Статистический синтез здесь позволяет оценивать сами функции из (5), а не отдельные коэффициенты в их разложении. Особенно просто функциональное представление характеристических функций может быть получено при одномерном внешнем целевом множестве $W=\{\omega_1\}$. В этом случае характеристические функции могут быть представлены в виде тригонометрических полиномов:

$$e(1,1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{s_1}[a_j^{(1)}\cos(\omega_1\nu_j^{(1)}) + b_j^{(1)}\sin(\omega_1\nu_j^{(1)})];$$

...

$$e(1,m) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{s_2}[a_j^{(m)}\cos(\omega_1\nu_j^{(m)}) + b_j^{(m)}\sin(\omega_1\nu_j^{(m)})];$$

...

$$e(n,m) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{s_{m\times n}}[a_j^{(m\times n)}\cos(\omega_1\nu_j^{(m\times n)}) + b_j^{(m\times n)}\sin(\omega_1\nu_j^{(m\times n)})].$$

Здесь коэффициенты Фурье

$$a_j^{(i)},\; b_j^{(i)},\; j=\overline{1,s};\; i=\overline{1, m\times n}$$

и частота $\nu_j^{(i)}$ определяются из условия минимума критерия регулярности (6).

3. Регуляризация статистической выборки на основе принципа статистического синтеза

В статистической выборке из табл. 1 целераспределение, описываемое характеристическими функциями

$$e(1,1),\ e(1,2),...,\ e(1,m),...,\ e(n,1),\ e(n,2),...,\ e(n,m),$$

может не удовлетворять ряду требований, предъявляемых к системе ЛА. Например, может оказаться, что одну и ту же целевую задачу выполняют несколько различных типов ЛА, или к некоторому типу ЛА добавляется целевая задача, для которой требуемая масса полезной нагрузки больше, чем может доставить данный тип ЛА, или в добавленных задачах требуемые высоты перигея либо характеристической скорости больше, чем может обеспечить данный тип ЛА.

Формально это означает, что в выборке есть такие строчки, в которых не выполняются какие-либо функциональные ограничения из (2). Очевидно, что такие строчки выборки необходимо или заменить, или удалить. Такой процесс замены называется регуляризацией статистической выборки. Регуляризованная выборка состоит лишь из «хороших» в смысле удовлетворения заданным ограничениям выбранных проектных решений и функций распределения. Полученная по такой выборке аналитическая зависимость будет удовлетворять всем заданным ограничениям. Это следует из так называемого принципа статистического изоморфизма. Согласно данному принципу, все свойства и закономерности, имеющиеся в статистической выборке, отображаются в полиномиальных моделях, полученных методом статистического синтеза. Очевидно, что принцип статистического изоморфизма будет справедлив при выполнении ряда условий, относящихся к структуре исходной статистической выборки. Пусть, например, исходная статистическая выборка описывает систему ЛА, состоящую из трех типов аппаратов, обслуживающих пять целевых задач, т.е. $n = 5$, $m = 3$. Каждая целевая задача описывается потребной массой полезной нагрузки $m_{\text{пн}}$, высотой перигея h_{P}, характеристической скоростью V_K.

Тогда исходную статистическую выборку можно представить в виде табл. 9.

Как видно из данной статистики, третья целевая задача решается вторым и третьим типом ЛА (вторая строчка), что недопустимо. Поэтому вторую строчку необходимо удалить или задать новый набор характеристических функций.

Набор исходной статистики осуществляется параллельно с решением задачи (3) методом глобального поиска, в процессе которого удачные поисковые шаги пополняют статистику из табл. 9. Следовательно, для регуляризации исходной статистической выборки необходимо дополнительно подключить блок глобальной оптимизации.

Таблица 9

$m_{\text{пн}}$, кг h_P, м V_K, м/с	$e(i,j)$	C_Σ, млрд руб.
6800 350000 7100	$e(1,1)=0,\ e(1,2)=1,\ e(1,3)=0$ $e(2,1)=0,\ e(2,2)=0,\ e(2,3)=1$ $e(3,1)=0,\ e(3,2)=1,\ e(3,3)=0$ $e(4,1)=1,\ e(4,2)=0,\ e(4,3)=0$ $e(5,1)=1,\ e(5,2)=0,\ e(5,3)=0$	12,755
2800 250000 7600	$e(1,1)=0,\ e(1,2)=0,\ e(1,3)=1$ $e(2,1)=0,\ e(2,2)=1,\ e(2,3)=0$ $e(3,1)=0,\ e(3,2)=1,\ e(3,3)=1$ $e(4,1)=1,\ e(4,2)=0,\ e(4,3)=0$ $e(5,1)=0,\ e(5,2)=0,\ e(5,3)=1$	12,072
...		
2000 200000 7900	$e(1,1)=1,\ e(1,2)=0,\ e(1,3)=0$ $e(2,1)=0,\ e(2,2)=0,\ e(2,3)=1$ $e(3,1)=1,\ e(3,2)=0,\ e(3,3)=0$ $e(4,1)=1,\ e(4,2)=0,\ e(4,3)=0$ $e(5,1)=0,\ e(5,2)=0,\ e(5,3)=1$	11,324

4. Модельная задача

Рассматривается задача построения многоцелевой системы ракет-носителей, внешнее целевое множество которых имеет следующий состав:

$\omega_1 = m_{\text{пн}}$ — масса обслуживающей полезной нагрузки;

$\omega_2 = h_{\text{P}}$ — высота перигея вывода;

$\omega_3 = V_{\text{K}}$ — характеристическая скорость вывода.

Каждый отдельный тип ракеты-носителя описывается следующими проектными параметрами:

$\alpha_1 = \mu_{\text{K1}}$ — относительный вес первой ступени;

$\alpha_2 = n_{01}$ — начальная тяговооруженность первой ступени;

$\alpha_3 = n_{02}$ — начальная тяговооруженность второй ступени.

В качестве функции управления принят угол наклона траектории в конце работы первой ступени $u_1 = v_К$.

Система функциональных ограничений имеет следующий состав:

$$g_1(\alpha,u) = h_Р - h_Р^{зад} = 0;$$

$$g_2(\alpha,u) = V_К - V_К^{зад} = 0;$$

$$g_3(\alpha,u) = \nu_К - \nu_К^{зад} = 0;$$

$$g_4(\alpha,u) = D_j \cap D_i \neq \varnothing,\ \ j,i = \overline{1,m};$$

$$g_4(\alpha,u) = \bigcup_{j=1}^{m} D_j = W.$$

В качестве критерия оптимальности принята суммарная стоимость многоцелевой ракеты-носителя C_Σ.

Система ракет-носителей решает десять целевых задач ($n = 10$) и имеет в своем составе десять возможных типажей ($m = 10$). Очевидно, что система оптимального типажа будет содержать меньшее число типажей.

Исходная статистическая выборка представлена в табл. 10.

Применим к первым двум столбцам табл. 10 операцию редукции, в результате чего получим табл. 11—13.

Таблица 10

$(m_{пн}, h_Р, V_К)$	$e(i,j)$	$(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)$	$g(\alpha,u),\ C_\Sigma$
$(m_{пн1}, h_{Р1}, V_{К1})_1$ $(m_{пн2}, h_{Р2}, V_{К2})_1$ ... $(m_{пнn}, h_{Рn}, V_{Кn})_1$	$(e(1,1), e(1,2),..., e(1,m),$ $e(2,1), e(2,2),..., e(2,m),$ ... $e(n,1), e(n,2),..., e(n,m))_1$	$(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{1,1}$ $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{2,1}$ ... $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{n,1}$	$g_i(\alpha,u)_1,\ C_{\Sigma_1}$ $i = \overline{1,5}$
$(m_{пн1}, h_{Р1}, V_{К1})_2$ $(m_{пн2}, h_{Р2}, V_{К2})_2$ ... $(m_{пнn}, h_{Рn}, V_{Кn})_2$	$(e(1,1), e(1,2),..., e(1,m),$ $e(2,1), e(2,2),..., e(2,m),$ ... $e(n,1), e(n,2),..., e(n,m))_2$	$(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{1,2}$ $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{2,2}$ ... $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{n,2}$	$g_i(\alpha,u)_2,\ C_{\Sigma_2}$
...			
$(m_{пн1}, h_{Р1}, V_{К1})_N$ $(m_{пн2}, h_{Р2}, V_{К2})_N$ ... $(m_{пнn}, h_{Рn}, V_{Кn})_N$	$(e(1,1), e(1,2),..., e(1,m),$ $e(2,1), e(2,2),..., e(2,m),$ ... $e(n,1), e(n,2),..., e(n,m))_N$	$(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{1,N}$ $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{2,N}$ ... $(\mu_{К1}, n_{01}, n_{02}, \nu_К)_{n,N}$	$g_i(\alpha,u)_N,\ C_{\Sigma_N}$

Таблица 11

$(m_{пн}, h_Р, V_К)$	$e(1,1)$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_1$	$e(1,1)_1$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_2$	$e(1,1)_2$
...	...
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_N$	$e(1,1)_N$

Таблица 12

$(m_{пн}, h_Р, V_К)$	$e(1,2)$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_1$	$e(1,2)_1$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_2$	$e(1,2)_2$
...	...
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_N$	$e(1,2)_N$

Таблица 13

$(m_{пн}, h_Р, V_К)$	$e(n,m)$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_1$	$e(n,m)_1$
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_2$	$e(n,m)_2$
...	...
$(m_{пн}, h_Р, V_К)_N$	$e(n,m)_N$

Зависимость между характеристическими функциями и характеристиками целевых задач представим в базисе тригонометрических полиномов. Характеристики целевых задач представляются в виде аддитивной свертки

$$\omega = \alpha_1 \overline{m_{пн}} + \alpha_2 \overline{h_Р} + \alpha_3 \overline{V_К}.$$

Здесь $\overline{m_{\text{пн}}}, \overline{h_{\text{Р}}}, \overline{V_{\text{К}}}$ представлены в безразмерном виде; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — весовые коэффициенты:

$$\alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1,$$

которые выбираются из условия минимума критерия регулярности.

Полиномы имеют вид:

$$e^{\text{М}}(1,1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{m_1} [a_i^{(1)} \cos(\nu_i^{(1)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}})) +$$
$$+ b_i^{(1)} \sin(\nu_i^{(1)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}}))];$$

$$e^{\text{М}}(1,2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{m_1} [a_i^{(2)} \cos(\nu_i^{(2)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}})) +$$
$$+ b_i^{(2)} \sin(\nu_i^{(2)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}}))];$$

...

$$e^{\text{М}}(n,m) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n\times m} [a_i^{(n\times m)} \cos(\nu_i^{(n\times m)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}})) +$$
$$+ b_i^{(n\times m)} \sin(\nu_i^{(n\times m)}(\alpha_1 \overline{m_{\text{пн}}} + \alpha_2 \overline{h_{\text{Р}}} + \alpha_3 \overline{V_{\text{К}}}))].$$

Коэффициенты Фурье, частота и весовые коэффициенты определяются из условия минимума критерия регулярности:

$$\Delta^2(B)_1 = \min_{\chi_{1,1}} \frac{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{М}}(1,1)_i - e^{\text{Т}}(1,1)_i]^2}{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{Т}}(1,1)_i]^2};$$

$$\chi_{1,1} = \{a_i^{(1)},\ b_i^{(1)},\ \nu_i^{(1)},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\};$$

$$\Delta^2(B)_2 = \min_{\chi_{1,2}} \frac{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{М}}(1,2)_i - e^{\text{Т}}(1,2)_i]^2}{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{Т}}(1,2)_i]^2};$$

$$\chi_{1,2} = \{a_i^{(2)},\ b_i^{(2)},\ \nu_i^{(2)},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\};$$

$$\Delta^2(B)_{n\times m} = \min_{\chi_{n\times m}} \frac{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{М}}(n,m)_i - e^{\text{Т}}(n,m)_i]^2}{\sum_{i=1}^{N_A} [e^{\text{Т}}(n,m)_i]^2};$$

$$\chi_{n\times m} = \{a_i^{(n\times m)},\ b_i^{(n\times m)},\ \nu_i^{(n\times m)},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}.$$

Таким образом, статистический синтез позволяет получить не только многоцелевую систему ракет-носителей оптимального типажа, но и аналитические связи между оптимальным целераспределением и характеристиками целевых задач.

Выводы

Сформирована задача статистического синтеза многоцелевой системы ЛА оптимального типажа в виде статистической выборки, в которую включены характеристики внешнего целевого множества.

Приведены операции редукции и инверсии над статистическими выборками, позволяющие получать одномерные функциональные связи между характеристическими функциями и характеристиками внешнего целевого множества, представленные в виде тригонометрических полиномов.

Сформирован принцип статистического изоморфизма, позволяющий учитывать значительное число функциональных ограничений, присутствующих в задачах построения систем ЛА оптимального типажа.

Библиографический список

1. *Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А.* Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1974. — 168 с.
2. *Балык В.М., Веденков К.В., Кулакова Р.Д.* Методы структурно-параметрического синтеза многоцелевых систем летательных аппаратов с многомерным внешним неоднородным целевым множеством // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. №4. С. 49-58.
3. *Балык В.М.* Статистический синтез проектных решений при разработке сложных систем. — М.: Изд-во МАИ, 2011. — 280 с.
4. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1981. — 296 с.
5. *Балык В.М., Кулакова Р.Д., Хесин Л.Б.* Статистический синтез летательных аппаратов оптимального типажа методом координатного спуска // Полет. 2010. №9. С. 32-41.
6. *Балык В.М., Веденков К.В., Кулакова Р.Д.* Метод структурно-параметрического синтеза многоцелевых летательных аппаратов с многомерным внешним неоднородным целевым множеством // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. №4. С. 49-59.
7. *Балык В.М., Северцев Н.А.* Аппроксимация обратных целевых функций в задаче глобальной оптимизации // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вып. 17. — М.: ВЦ РАН, 2015. С. 128-141.
8. *Константинов М.С., Петухов В.Г.* Поддержание орбитальной конфигурации систем КА на высоких эллиптических орбитах // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т. 15. №1. С. 8-16.

OUTER SET POLYNOMIAL MODELING IN CONSTRUCTING AN OPTIMAL TYPE AIRCRAFT SYSTEM

Akimov E.N., Balyk V.M.

Moscow Aviation Institute (National Research University),
MAI, 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia
e-mail: K608@mai.ru

Abstract

The article considers a method of statistical synthesis of a distribution function of targets between various types of aircraft. It presents statistical samples, describing an optimal type aircraft system in large, as well as samples describing the function of target distribution.

The process of building of design and functional bindings that model aircraft systems at large starts from forming a statistical sample, which input data represents the characteristics of a goal set, while elementary functions of targets distribution by aircraft types are taken as intermediate characteristics. We accept the values of criterion of optimality as output data. This work assumes as criterion of optimality the cost of aircraft system. Intermediate characteristics have special meaningfulness when modeling aircraft systems.

According to the principle of mathematical model self-organization, at successive complexity increase of a model (in the course of the transition from a linear model to a square one and further to higher degree models) all external criteria pass through their minimum. It gives the possibility to obtain a model of optimal complexity, unique for each criterion. In self-organizing theory of complex systems models all basic algorithms for building models of optimal complexity are based on grouped account of arguments. Combinatorial algorithms appear effective for problem order no more than the specified sample size. For problems of higher complexity, such as designing systems for an optimal type aircraft, the multi-row algorithms become more effective. The perspective of multi-row algorithms should be noted, since, in principle, they are the prototypes of genetic algorithms, which allow solving simulation problems of with dimension of several thousand variables. However, whichever the algorithm is, it does not allow going beyond the framework of the specified class of basic functions. These algorithms increase only the complexity of the model within a specified basis.

With statistical synthesis employed in the paper the modeling algorithms are built in the way that provides the possibility in principle to obtain the models involving various basic functions.

This corresponds to the basic statistical synthesis' concept, according to which the output data of the initial statistical sample is modified in a certain manner in the process of building of a mathematical model. This adjustment is carried out according to the conditions and requirements that the formed model should meet. Thus, at each stage of the mathematical model building we form the statistical sample inherent to it, and the inherent optimal system of basic functions corresponds to each sample.

The article presents the analytical models of the targets distribution function, which represent an approximation of statistics reported in terms of trigonometric polynomials.

The article considers the operation of statistical sampling reduction, which reduces the initial n-dimensional sample to n one-dimensional samples, and operation of inversion allowing obtaining the inverse sampling required for the formation of inverse functions. Based on these operations, build one-dimensional functional relationships between characteristic functions and outer target set characteristics presented in the form of trigonometric polynomials. The paper presents a simple, but at the same time effective way to meet the statistical functional limitations. This method is based on statistical sampling regularizing. It consists in replacing or eliminating fragments of statistical sampling, which do not agree with the specified limitaions.

Keywords: statistical synthesis, distribution function, statistical sampling, basic functions, reduction, aircraft system, optimal type.

References

1. Piyavskii S.A., Brusov V.S., Khvilon E.A. *Optimizatsiya parametrov mnogotselevykh letatel'nykh apparatov* (Multi-purpose aircraft parameters optimization), Moscow, Mashinostroenie, 1974, 168 p.
2. Balyk V.M., Vedenkov K.V., Kulakova R.D. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 49-58.

3. Balyk V.M. *Statisticheskii sintez proektnykh reshenii pri razrabotke slozhnykh system* (Staistical synthesis of design decisions when developing complex systems), Moscow, MAI, 2011, 280 p.
4. Ivakhnenko A.G. *Induktivnyi metod samoorganizatsii modelei slozhnykh system* (Inductive method of self-organization of complex systems models), Kiev, Naukova dumka, 1981, 296 p.
5. Balyk V.M., Kulakova R.D., Khesin L.B. *Polet*, 2010, no. 9, pp. 32-41.
6. Balyk V.M., Vedenkov K.V., Kulakova R.D. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 49-59.
7. Balyk V.M., Severtsev N.A. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoichivosti sistem*, Moscow, VTs RAN, 2015, no. 17, pp. 128-141.
8. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2008, vol. 15, no. 1, pp. 8-16.