

## АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ

Владимир Николаевич БАКУЛИН родился в 1949 г. в городе Новомосковске Тульской обл. Ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН). Кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Основные научные интересы — в области механики, численных методов, вычислительной механики, математического моделирования, механики слоистых конструкций и композитных материалов. Автор более 170 научных работ. E-mail: vbak@yandex.ru.

Vladimir N. BAKULIN, Ph.D., was born in 1949 in Novomoskovsk, Tula region. The leading scientific employee of Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences. His major research interests are in mechanics, numerical methods, calculating mechanics, mathematical modeling, mechanics of layered structures and composite materials. He has published over 170 technical papers. E-mail: vbak@yandex.ru.

Вацловас Вацлович ИНФЛЯНСКАС родился в 1955 г. в городе Вильнюсе Литовской ССР. Научный сотрудник Института прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН). Основные научные интересы — в области механики, численных методов, вычислительной механики, математического моделирования, механики композитных материалов. Автор более 15 научных работ. E-mail: vinf@mail.ru.

Vaclovas V. INFLIANSKAS was born in 1955 in Vilnius, Lithuania. The scientific employee of Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences. His major research interests are in mechanics, numerical methods, calculating mechanics, mathematical modeling, mechanics of composite materials. He has published over 15 technical papers. E-mail: vinf@mail.ru.

*Рассмотрены два основных случая сходимости решения в конечно-элементных задачах. Приведен алгоритм для оценки поточечной сходимости решения при локальном измельчении конечно-элементной сетки. Для иллюстрации метода представлены результаты расчета цилиндрической трехслойной композитной оболочки под действием локальной нагрузки. Для напряжений, достигающих максимальных значений в нагруженной области, определены параметры плотности сетки, дающие сходящееся решение.*

*We have considered two basic cases of the convergence of solution in finite element problems. An algorithm has been given to evaluate point-by-point convergence of solution for local finite element mesh refinement. To illustrate the method the results of cylindrical three-layered composite shell computation under the action of local load have been presented. For stresses reaching maximal value in loaded area, we have determined parameters of mesh density producing converge solution.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, численные решения, оценка сходимости, задачи механики слоистых оболочек, конечно-элементная сетка.

**Key words:** finite element method, numerical solutions, evaluation of the convergence, mechanical problems of layer-built shells, finite element mesh.

### Введение

С развитием вычислительной техники для расчета подавляющего большинства конструкций стал основным универсальный метод конечных элементов (МКЭ).

Особенностью метода является достаточно произвольное построение конечно-элементной сетки, вследствие чего решается не исходная, а некоторая другая, близкая к исходной задача.

Естественное желание снять случайный фактор и свести погрешность к нулю приводит к стремлению неограниченно измельчить сетку. Однако на практике такой предельный переход неосуществим не только ввиду роста вычислительной погрешно-

сти при увеличении порядка системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), но также из-за чисто экономических причин.

В реальных конструкциях интегральная оценка точности решения по всей области может не дать желаемого результата, поскольку пики напряжений могут действовать на малом участке и их вклад в общую энергию деформации может быть незначительным, но зачастую именно они представляют основной интерес для разработчика.

### Постановка задачи

Рассмотрим алгоритм для анализа поточечной сходимости решения для выбранной функции (на-

пряжения, перемещения и т.д.) в рассматриваемой точке конструкции.

Как уже отмечалось, решение задачи, полученное МКЭ, является функцией плотности конечно-элементной сетки. Под линейной плотностью  $t_i$  разбиения области будем понимать количество конечных элементов в единице длины выбранного локального направления  $i, i = 1, 2, \dots, n$ . Количество  $n$  выбранных параметров может быть любым. Дело в том, что в реальной конструкции разбиение обычно не бывает равномерным. С одной стороны, естественно стремление уменьшить порядок системы, с другой стороны, наличие зон концентрации напряжений и приложение локальных нагрузок вынуждают использовать местное измельчение сетки.

Будем считать, что в соответствии с принципом Сен-Венана полное решение задачи можно представить в виде суммы главного медленно меняющегося решения  $Y_m$  и локального решения  $Y_l$ :

$$Y = Y_m + Y_l.$$

Полагаем, что главное решение задачи можно получить на достаточно грубой сетке плотностью  $t_p$ , а для нахождения локального решения разобьем тело по границам некоторых элементов грубой сетки на  $M$  неперекрывающихся подобластей  $\Omega_j, j = 1, 2, \dots, M$  таким образом, что каждой подобласти  $\Omega_j$  соответствует свое локальное решение  $Y_{lj}$ , причем выполняются условия, что в подобластях  $\Omega_k$  локальные решения смежных подобластей заходят:

$$Y_{lj} \approx 0 \text{ при } j \neq k.$$

Такое построение позволяет использовать локальное измельчение сетки и уменьшить общее количество параметров плотности сетки до минимума.

Сделаем теперь качественную оценку локальной сходимости функций к своим предельным значениям. Сравнение характера зависимости функций от плотности разбиения в практических задачах и переходных процессов в колебательных системах при ступенчатом по времени воздействии, а также результатов теории краевого эффекта позволяет сделать вывод об их внешнем сходстве. Соответствующие графики приведены на рис. 1.

Уравнение

$$f_1(t) = 1 - e^{-\gamma t} \tag{1}$$

соответствует аperiodическому звену;

$$f_2(t) = 1 - \cos(\delta t)e^{-\gamma t} \tag{2}$$

— колебательному;

$$f_3(t) = \gamma e^{-\gamma t} = f_1'(t)$$

— производная аperiodического звена;

$\gamma, \delta$  — некоторые параметры колебательной системы.

Начальное и конечное состояния для простоты приняты соответствующими значениям

$$f(0) = 0; f(\infty) = 1,$$

но при необходимости могут быть без труда перенормированы.

После перенормировки  $f_1(t), f_2(t)$ , выражения (1), (2) примут вид

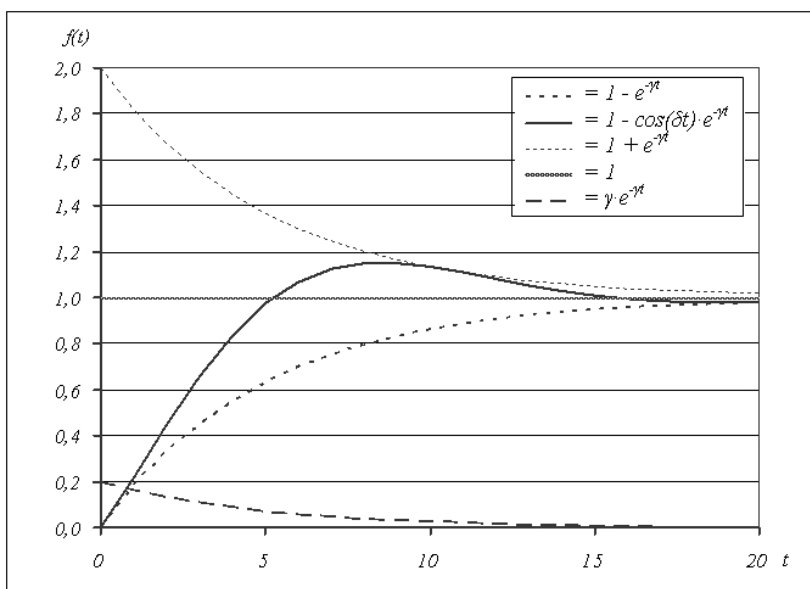


Рис. 1. Различные виды сходимости функций к своим предельным значениям

$$f_1(t) = f_1(\infty)(1 - e^{-\eta t}); \quad (1')$$

$$f_2(t) = f_2(\infty)(1 - \cos(\delta t)e^{-\eta t}), \quad (2')$$

где  $f_1(\infty), f_2(\infty)$  — предельные значения.

Будем считать, что рассмотренные колебательные процессы и сходимость конечно-элементных функций по параметрам плотности сетки математически качественно подобны, то есть характер сходимости имеет вид (1) либо (2). Значения плотности

$$t \rightarrow \infty$$

соответствуют неограниченному измельчению сетки.

### Алгоритм оценки сходимости конечно-элементного решения

Пусть в качестве начального приближения на основе грубой сетки построено главное решение и в подобласти  $\Omega_j$  рассмотрим некоторую выбранную функцию (напряжение, перемещение и т.д.)

$$Y_j(t_{1j}, t_{2j}, \dots, t_{nj}),$$

зависящую от  $n = n(j)$  параметров плотности сетки. По построению для главной части решения

$$\frac{\partial Y_{mj}}{\partial t_{ij}} = 0 \text{ при } t_{ij} > t_r.$$

Признаком сходимости локальной части к решению при неограниченном измельчении сетки в подобласти  $\Omega_j$  являются условия

$$\frac{\partial Y_{ij}}{\partial t_{ij}} = 0 \text{ при } t_{ij} \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n.$$

На рис. 1 с точностью до нормировки этому соответствует уровень

$$f(t) = 1.$$

Дальнейшие действия зависят от того, какого рода сходимость выполняется для выбранной функции. Так как начальные участки функций (1) и (2) схожи, то для уточнения характера сходимости следует сравнить между собой скорость сходимости различных функций (напряжений, перемещений и т.д.) в той же точке, поскольку, как правило, сходимость этих функций разная. Будем далее полагать, что низкая скорость соответствует аperiodическому характеру.

Дадим некоторые дополнительные определения.

Назовем областью насыщения функции в колебательном случае значения, соответствующие значениям аргумента, лежащим правее ее первого минимакса, который будем называть точкой насыщения.

Для аperiodического случая в качестве точки насыщения выберем некоторое достаточно малое пороговое значение производной

$$f'_n(t) > 0$$

и областью насыщения будем считать значения функции после выполнения ее производной условия

$$|f'(t)| < f'_n(t). \quad (3)$$

Решение конечно-элементной задачи после перехода выбранной функции в область насыщения назовем насыщенным решением.

Заметим попутно, что пока мы рассматривали непрерывную последовательность значений аргумента (плотности сетки). На практике ввиду трудоемкости задачи плотность сетки может принимать только дискретные значения, причем их количество невелико. Для того чтобы не попасть на ложные узкие минимаксы функции, вызванные случайными факторами (например, смещением границ элементов при измельчении сетки и т.д.), смежные дискретные значения аргумента должны различаться существенно (например, кратно).

Для получения информации, позволяющей делать какие-либо выводы, необходимы результаты расчета по крайней мере по трем разным сеткам. Для дальнейшей обработки применим интерполяцию второго порядка. Ввиду единственности задачи интерполяции для большей прозрачности получаемых результатов выберем представление в виде квадратичного отрезка ряда Тейлора без остаточного члена в окрестности первой точки:

$$Y(t) = Y(t_1) + \frac{Y'(t_1)}{1!}(t - t_1) + \frac{Y''(t_1)}{2!}(t - t_1)^2, \quad (4)$$

где в качестве независимой переменной  $t$  можно взять плотность разбиения по какой-либо координате. При этом плотность разбиения по другим координатам фиксирована. Таким образом, ряд (4) — частный ряд Тейлора функции по выбранной координате, а  $Y'(t_1), Y''(t_1)$  — частные производные.

После подстановки в разложение (4) значений

$$t = t_2, t = t_3$$

и проведения выкладок определяются величины  $Y'(t_1), Y''(t_1)$ :

$$\frac{Y'(t_1)}{1!} = \frac{(Y(t_2) - Y(t_1))(t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} - \frac{(Y(t_3) - Y(t_1))(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}; \quad (5)$$

$$\frac{Y''(t_1)}{2!} = \frac{(Y(t_2) - Y(t_1))(t_3 - t_1) - (Y(t_3) - Y(t_1))(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \quad (6)$$

и соотношения

$$Y'(t_2) = -Y'(t_1) + 2 \frac{Y(t_2) - Y(t_1)}{t_2 - t_1};$$

$$Y'(t_3) = -Y'(t_1) + 2 \frac{Y(t_3) - Y(t_1)}{t_3 - t_1}. \quad (7)$$

Рассмотрим картину изменения функции  $Y(t)$  в зависимости от увеличения параметра — плотности разбиения для квадратичной интерполяции. Очевидно, что в вершине параболы, где

$$Y'(t_0) = 0, \quad t_0 = t_1 - \frac{Y'(t_1)}{Y''(t_1)} \quad \text{при условии } t_0 \leq t_3, \quad (8)$$

можно считать, что функция в колебательном случае достигла насыщения и искомое решение получено.

Если же функция  $Y(t)$  продолжает монотонно изменяться, то возможен и аperiodический случай. Если текущее значение  $|Y'(t)|$  недостаточно мало

(не удовлетворяет условию (3)), следует сделать расчет для следующего значения плотности сетки. При этом квадратичную интерполяцию либо каждый раз проводим по трем последним расчетным точкам, либо применяем интерполяцию третьего порядка. При определении остаточного порога следует учесть то обстоятельство, что разные функции в задаче сходятся с разной скоростью и что результат вычислений всех функций, в том числе и быстро сходящихся, подвержен некоторым случайным колебаниям по параметру — плотности разбиения. Характерная амплитуда этих колебаний для быстро сходящейся функции, взятая с некоторым запасом, и может являться ориентиром для выбора остаточного порога  $Y_n'(t)$ .

Для удобства примем следующее. Плотность разбиения пронормируем начальной плотностью. Поэтому  $t_1 = 1$ .

Производную  $Y'(t)$  пронормируем величиной  $Y_{\max}'$ :

$$Y_{\max} = \max(|Y(t_1)|, |Y(t_2)|, |Y(t_3)|).$$

Получение насыщенного конечно-элементного решения проиллюстрируем на примере наибольших напряжений, возникающих в трехслойной цилиндрической оболочке под действием локальной нагрузки (рис. 2). Исследования методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек рассматривались в работах [1–5] и др.

**Вычислительный эксперимент и анализ результатов работы**

На внутренний несущий слой трехслойной оболочки действует нагрузка, равномерно распределенная по двум прямоугольным площадкам. Расчет

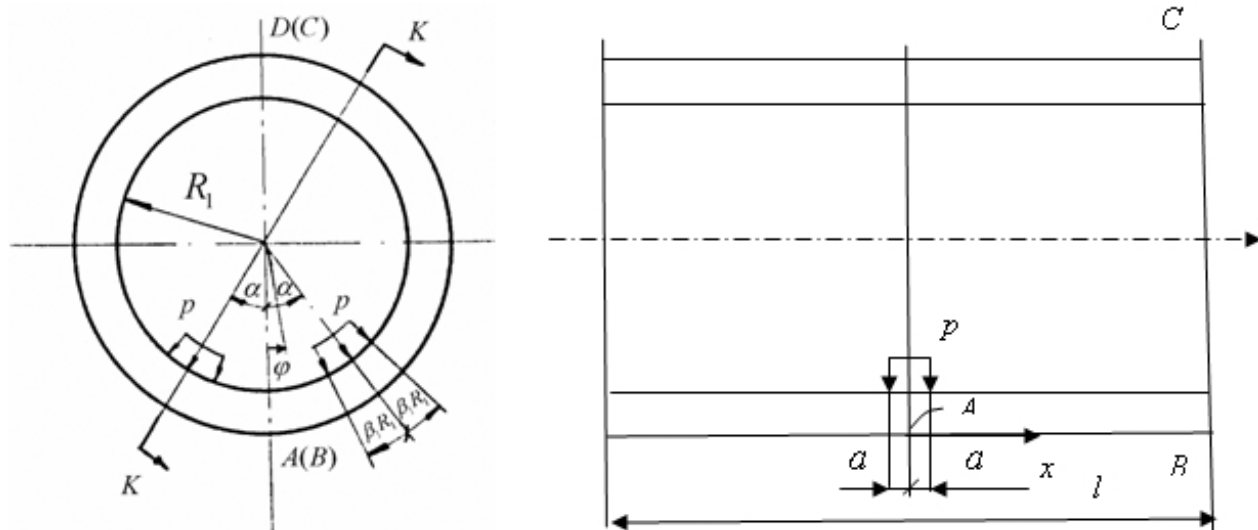


Рис. 2. Расчетная схема трехслойной цилиндрической оболочки под действием локальной нагрузки

проводился для случая, когда площадки, на которые передается нагрузка на оболочку, находятся на одинаковом расстоянии от опорных шпангоутов. Несущие слои трехслойной цилиндрической оболочки на торцах шарнирно закреплены.

Исследуемая оболочка имеет следующие характеристики [6]:

$l/R_1 = 2,8; H/R_1 = 0,07; h_1/H = 0,1; h_1/h_2 = 2; E_1 = 21 \text{ ГПа}; E_2 = 25 \text{ ГПа}; G_{12} = 3,5 \text{ ГПа}; \mu_{12} = 0,1; \mu_{21} = 0,084.$

Здесь  $E_1, E_2, G_{12}$  — модули упругости в осевом и окружном направлениях и модуль сдвига в срединной плоскости несущих слоев;  $\mu_{12}$  и  $\mu_{21}$  — коэффициенты Пуассона (заполнитель считался изотропным с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,2$ ); модуль сдвига  $G_{13} = 10 \text{ МПа}$ ; толщины несущих слоев: внутренний —  $h_1$ , наружный —  $h_2$ ;  $H$  — толщина трехслойного пакета;  $2\alpha_0 = 0,28, 2\beta_1 = 0,14$  — размеры области нагружения,  $\alpha_0 = a/R_1$ ;  $2a$  — длина площадки нагружения;  $2\beta_1$  — угловой размер площадки нагружения в окружном направлении.

Ввиду наличия двух плоскостей симметрии решение строилось для четверти конструкции, представляющей собой полуцилиндр длиной  $L/2 = 1,4 \text{ м}$  и углом  $\beta = 180^\circ$ .

Задача решалась с помощью пакета прикладных программ МКЭ; конечно-элементная сетка строилась из конечных элементов прямоугольной формы.

Так как напряженное состояние вблизи локальной нагрузки имеет большую неравномерность, то шаг сетки был неравномерным — меньшим вблизи нагрузки. Помимо прямоугольной области непосредственно под нагрузкой, моделированной распределенным единичным давлением, малошаговые элементы использованы и для окаймляющего на-

груженную область слоя, имеющего ширину, примерно равную размеру нагруженного прямоугольника.

В исходной сетке нагруженная область представляла собой  $2 \cdot 4 = 8$  прямоугольников, а вместе с окаймляющей —  $4 \cdot 8 = 32$  прямоугольника (рис. 3).

Окружная плотность разбиения в зоне локальной нагрузки для мелкой сетки составляла 1 эл./ $0,5^\circ$ . Чтобы уменьшить число параметров плотности сетки и не получить вытянутые элементы (что могло бы ухудшить обусловленность матрицы системы), было зафиксировано отношение сторон элементов в ближнем поле. Таким образом, при увеличении плотности сетки подобие элементов сохранялось.

Для исследования напряжений, возникающих в заполнителе, проводилось разбиение по толщине заполнителя на 2, 4 и 8 слоев.

На рис. 4 и 5 представлены интерполяционные графики для напряжений в заполнителе.

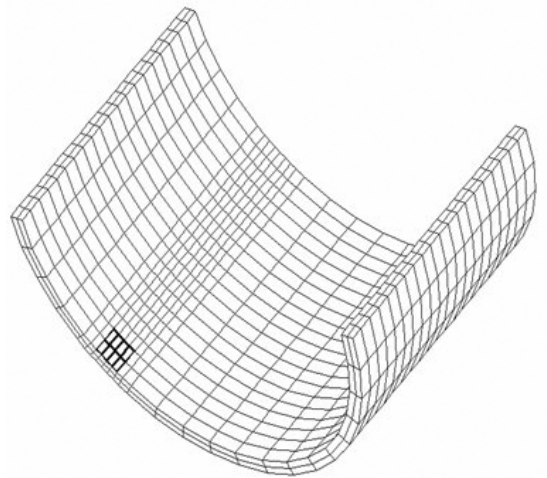


Рис. 3. Грубый вариант конечно-элементной сетки на основе конечных элементов прямоугольной формы

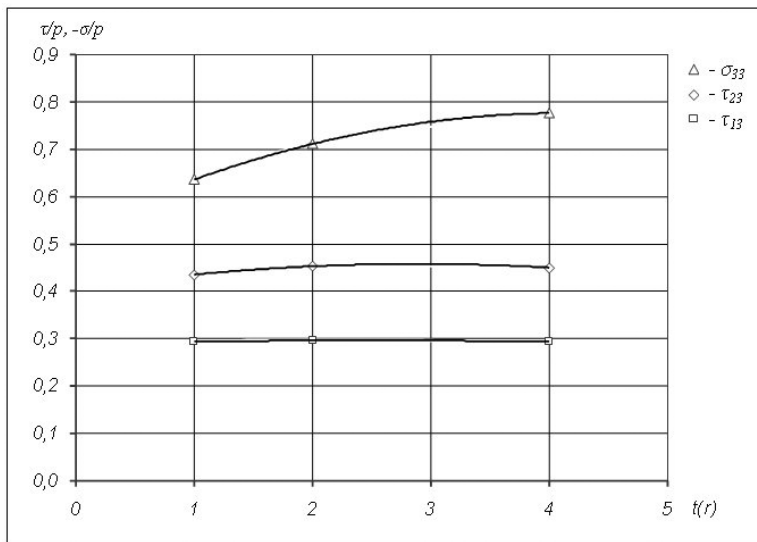


Рис. 4. Изменение поперечных напряжений в заполнителе в зависимости от радиальной плотности разбиения слоя заполнителя

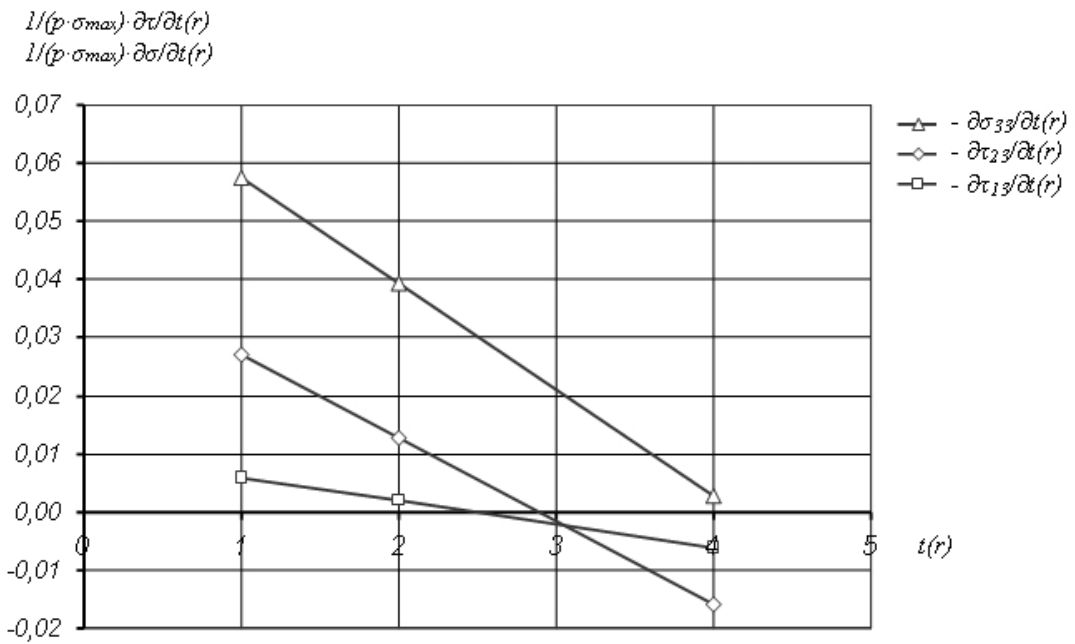


Рис. 5. Изменение производных от поперечных напряжений в заполнителе в зависимости от радиальной плотности разбиения слоя заполнителя

Заметим, что максимальные нормальные напряжения обжатия  $\sigma_{33}$  получаются по центру площади нагружения, а перерезывающие  $\tau_{13}, \tau_{23}$  — по ее краям. Здесь  $t(r)$  — нормированная радиальная плотность разбиения слоя заполнителя.

Из рис. 4 и 5 видно, что при  $t(r) = 4$  напряжения  $\tau_{13}, \tau_{23}$  прошли точку насыщения (колебательный тип), а  $\sigma_{33}$  продолжают монотонно расти, то есть относятся к аperiодическому типу. Однако при  $t(r) = 4$

$$1/(p_0 \cdot \sigma_{\max}) \cdot \partial\sigma/\partial t(r) = 0,00272,$$

т. е. достаточно малая величина. Следовательно, можно сделать вывод, что для расчета напряжений в заполнителе достаточно разбиения на 8 слоев.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 07-01-00634-а, № 08-08-13732-офи\_ц).*

### Библиографический список

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984.

2. Бакулин В.Н. Метод конечных элементов для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных цилиндрических оболочек. — М.: ЦНИИ Информации, 1985.

3. Бакулин В.Н. Эффективные модели для уточненного анализа деформированного состояния трехслойных неосесимметричных цилиндрических оболочек // Доклады РАН 2007. Т. 407. №1. С. 1-4.

4. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. — М.: Физматлит, 2006.

5. Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993.

6. Бакулин В.Н., Инфлянскас В.В. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек вращения // Материалы XVI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009). М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 103-106.

Институт прикладной механики РАН  
Статья поступила в редакцию 7.09.2009