УДК 621.391

Типовые разностные операторы в спектральной области в биортогональных базисах

В.В. Рыбин

Аннотация

В работе проведено исследование свойств различных типовых разностных операторов на базе спектрального метода описания и анализа линейных нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления [2-4]. Результатом такого исследования являются общие свойства ДНПФ типовых разностных операторов, операторов l -х и начальных значений, которые определены в биортонормированных базисах [5].

Ключевые слова
биортогональный базис; нестационарные системы автоматического управления; спектральная форма математического описания.

Будем рассматривать два пространства сигналов с операциями покомпонентного сложения и умножения на скаляры. Пространство всех суммируемых с квадратом последовательностей на множестве целых чисел

$$l_2(Z) = \left\{ z = (z(n))_{n \in Z} \;\middle|\; z(n) \in C \text{ для всех } n \in Z \text{ и } \sum_{n \in Z} |z(n)|^2 < +\infty \right\}$$

с скалярным умножением

$$(z, w) = \sum_{k \in Z} z(k) w^*(k)$$

и определяемой им нормой

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k \in Z} |z(k)|^2}.$$

L -мерное векторное пространство над полем C

$$^{2}(\ )\quad \{\quad (\qquad\qquad)\,(\qquad\qquad\qquad -\ )\qquad\qquad \le j \le -\ \ 1\ ,$$

$$= =$$

$$\}$$

$$\|\ \|\quad \sqrt{\quad |\quad\ |\ }$$

$$|$$

l_L z $z = z_0, z_1, \ldots, z_{L-1}$ z $z = (z(0), z(1), \ldots, z(L-1)) : z(j) \in C, 0$ L

где $Z_L = [0, L-1]$, с скалярным умножением

$$(z, w) = \sum_{k=0}^{L-1} z(k) w^*(k)$$

и определяемой им нормой

$$\|z\| = \left(\sum_{k=0}^{L-1} |z(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Известно [1], что выходная переменная дискретной системы определяется через её ИПФ и входное воздействие следующим образом:

$$x(l) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} k(l,m) g(m). \tag{1}$$

Для односторонних функций

$$x_+(l) = x(l) \cdot 1(l), \quad g_+(l) = g(l) \cdot 1(l), \tag{2}$$

где

$$1(l) = \begin{cases} 1, & l \ge 0, \\ 0, & l < 0, \end{cases} \tag{3}$$

на дискретном отрезке $[0, L-1]$ формула (1) примет вид:

$$x_+(l) = \sum_{m=0}^{L-1} k(l, m) g_+(l) = \sum_{m=0}^{L-1} k(l,m) g(l) = x(l). \tag{4}$$

Рассмотрим ИПФ

$$k(l-m) = \nabla_l^s \delta(l-m), \tag{5}$$

где ∇ оператор восходящей разности

$$\nabla_l x(l) = x(l) - x(l-1), \tag{6}$$

а

$$\delta(l) = \nabla_l 1(l) = \begin{cases} 0, & l \neq 0, \\ 1, & l = 0 \end{cases}$$

(7)

- дискретная дельта-функция. Покажем, что дискретная система с ИПФ (5) осуществляет s -кратное взятие разности от входного воздействия при нулевых начальных условиях

$$\nabla^{\nu} x_0 = \nabla^{\nu} x(l)\big|_{l=-1} = 0; \quad \nu = 0,1,\dots, n-1. \tag{8}$$

Положим $s = 1$. Так как

$$\sum_{m=0}^{L-1} \nabla_l \delta(l-m)\, g(m) = g(0)\delta(l) + 1(l-1)\cdot \nabla g(l) - g(L-1)\,\delta(l-L),$$

a

$$\nabla_{+} \quad = \nabla \; g \qquad l \,\Big)\; g \qquad\qquad\qquad \cdot \; g\,l \;,$$
$$\quad {}^{g}_{l}l \qquad \Big(\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad \nabla$$

$( ) \quad {}^{l} \quad (l) \cdot 1( ) \qquad (0)\delta (l) + 1(l-1)\, {}^{l} \quad ( )$

то для $l \in [0, L-1]$ находим

$$\nabla_l g_+(l) = \nabla_l \sum_{m=0}^{l-1} \delta(l-m)\, g(m) . \qquad (9)$$

Следовательно, дискретная система с ИПФ $k(l\, m) = \nabla_l \delta(l - m)$ осуществляет вычисление первой разности от дискретной односторонней функции $g_+(l)$ на конечном дискретном интервале времени при нулевом начальном условии $g_0 = g(-1) = 0$.

В спектральной области соотношение (9) в биортогональном базисе [5] примет вид

$$\left[S_{\nabla_l g(l)} \right] = P(L, L)\, S\left[\,\right] , \qquad (10)$$

где

$$P_{\psi_* \varphi_*}(h,i,L,L) = \nu_{\psi_* \varphi_*}(h,i,L,L) + \sum_{l=1}^{L-1} \psi_*(h,L,l)\, \nabla_l \varphi_*(i,L,l) \qquad (11)$$

- ДНПФ разностного звена первого рода первого порядка, а

$$\nu_{\psi_* \varphi_*}(h,i, L, L) = \psi_*(h, L, 0)\, \varphi_*(i, L, 0) \qquad (12)$$

- ДНПФ начальных значений [2,4].

ДНПФ начальных значений можно записать в виде:

$$\nu_{\psi_* \varphi_*}(h,i, L, L) = \Delta_{\psi_*}(h, L)\, \Delta_{+\varphi_*}(i, L) ,$$

где $\Delta_{q_*}(i, L) = \Delta_{q_*0}(i, L) = \sum_{l=0}^{-1} \delta(l)\, q_*(i, L, l)$ - НСХ дискретной дельта-функции.

Рассмотрим теперь случай вычисления первой разности от односторонней функции $g_+(l)$ при ненулевом начальном условии $g_0 = g(-1)$ в спектральной области. Этот случай равносилен вычислению первой разности от функции $g(l)$. Рассмотрим сначала пример вычисления первой разности от функций $g(l)$ и $g_+(l)$, если $g(l) = l$. Имеем: ∇

$$(13)$$

$$\nabla_{l+} g(l) = g(0) \cdot \delta(l) + 1(l-1) \cdot \nabla_{l} g(l) = 1(l-1), \tag{14}$$

т.е. на отрезке $[0, L-1]$ в момент времени $l = 0$ первые разности (13) и (14) отличаются друг от друга. Если мы хотим осуществить вычисление первой разности от односторонней функции $g_+(l)$, но такое чтобы оно совпало с вычислением первой разности от $g\,(l\,)$, то надо учесть начальное условие для $g_+(l)$ равное значению функции $g(l)$ в точке $l=-1$. Учет начального условия можно осуществить следующим образом. Первую разность от $g_+(l)$ можно записать и в виде:

$$\nabla g_+(l) = \nabla\left[1(l)\cdot g(l)\right] = g(l)\,1(l) - g(l-1)\,1(l-1) = 1(l)\cdot\nabla g(l) + g(l-1)\cdot\delta(l) = 1(l)\cdot\nabla g(l) + g_0\cdot\delta(l). \qquad (15)$$

В спектральной области равенство (15) примет вид:

$$S_\psi\left[\nabla g_+(l)\right](i,L) = g_0\cdot\Delta_\psi(L) + S_\psi\left[1(l)\cdot\nabla g(l)\right](i,L), \qquad (16)$$

где $S_\psi\left[1(l)\cdot\nabla g(l)\right](i,L)$ - НСХ первой разности от двусторонней функции $g(l)$ или, что тоже самое, НСХ от первой разности функции $g_+(l)$ при начальном условии $g_0 = g(-1)$. Поэтому, из сравнения (9) и (15), (10) и (16), будем иметь

$$1(l)\cdot\nabla g(l) = \sum_{m=0}^{L-1}\nabla_l\delta(l-m)\cdot g(m) - g_0\,\delta(l), \qquad (17)$$

$$S_\psi\left[1(l)\cdot\nabla g(l)\right](i,L) = P_{\psi\varphi^*}(L,L)\,S_{\varphi^*}\left[g(l)\right](h,L) + g_0\,\Delta_\psi(L). \qquad (18)$$

Рассмотрим теперь систему с ИПФ

$$k(l-m) = 1(l-1)\cdot\nabla_l\delta(l-m). \qquad (19)$$

Система с ИПФ (19) осуществляет вычисление первой разности от функции $g_+(l)$ в предположении, что начальное значение $g_+(0) = g(0)$ совпадает с начальным условием $g_0 = g(-1)$. Действительно, умножая левую и правую части соотношения (9) на δ получим

$L-1$

$1(l-1)$,

$$\sum_{m=0}^{l} \nabla_{1(l-1)}(l-m)\, g(m) = \nabla_{1(l-1)}\, g_l(l) \qquad (20)$$

В спектральной области равенство (20) примет вид:

$$P^{<>}_{\psi_*\varphi_*}(L,\cdot) \cdot \mathfrak{S}\left[g_{\psi_*(i,L,\cdot)}(m) \right] = \mathfrak{S}\left[\sum_{\psi_*} \nabla^{l}_{(h,L,\cdot)\,1(l-1)}\, g_l(\cdot) \right], \qquad (21)$$

где

$$P^{<>}_{\psi_*\varphi_*}(h,i,L,\cdot) = \mathfrak{I}_L\, \psi_*\varphi_*(h,i,L,\cdot) = \sum_{l=1}^{L} \psi_*(h,L,\cdot)\, \nabla^{l} \varphi^{l}(i,L,\cdot) \qquad (22)$$

- ДНПФ разностного звена первого порядка второго рода, а $S_{\psi} \left[l\, 1(l-1)\nabla g(l) \right]$ - НСХ от функции $x(l) = 1(l-1)\nabla_l g(l)$, которая совпадает с первой разностью от $g(l)$ для $l = 1,2,\ldots,L-1$ и равна нулю при $l = 0$, что равносильно вычислению первой разности при условии равенства начального условия $g_0 = g(-1)$ и начального значения $g(0)$.

Подставляя (20) в (9), найдем соотношение

$$\sum_{m=0}^{l-1} \nabla_l \delta(l-m)\, g(m) = g(0)\delta(l) + \sum_{m=0}^{l-1} 1(l-1)\nabla_l \delta(l-m)\, g(m), \tag{23}$$

которое в спектральной области примет вид:

$$P_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) = P^{\langle 1\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) + g(0)\,\Delta_{\psi_*\psi_*}(L). \tag{24}$$

Обозначим НСХ от $1(l)\nabla_l g(l) = g'_+$ через $G'_{\psi_*}(L)$. Тогда выражения (17) и (18) для g'_+ и $G'_{\psi_*}(L)$, с учетом (23) и (24), запишем в виде:

$$g'_+(l) = \sum_{m=0}^{L-1} 1(l-1)\nabla_l \delta(l-m)\, g(m) + \nabla g(0)\cdot\delta(l), \tag{25}$$

$$G'_{\psi_*}(L) = P^{\langle 1\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) + \nabla g(0)\,\Delta_{\psi_*}(L). \tag{26}$$

где $\nabla g(0) = \nabla_l g(l)\big|_{l=0}$.

Формулы (25) и (26) позволяют определить первую разность и её НСХ от двусторонней функции $g(l)$ по ИПФ и её ДНПФ разностного звена первого порядка второго рода.

Рассмотрим теперь функцию

$$g_1(l) = g_+(l) - g(0)\cdot\delta(l), \tag{27}$$

которая в спектральной области примет вид:

$$G_{1\psi_*}(L) = G_{\psi_*}(L) - g(0)\,\Delta_{\psi_*}(L). \tag{28}$$

Перепишем выражение (24) в виде:

$$\nu^{\langle 0\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) = g(0)\,\Delta_{\psi_*}(L). \tag{29}$$

Подставляя выражение $G(L)$ из (28), при условии $g_{\psi_*}(0) = 0$, в (30), получаем

$$\nu^{<0>}_{\psi_* \varphi_*}(L, L)\, G_1(L_{\psi_*}) = \Theta, \tag{30}$$

т.е. матрица ДНПФ начальных значений (12) является левосторонним нуль-делителем для всех НСХ дискретных одномерных функций с нулевым начальным значением $g(0) = 0$. Примером таких функций являются односторонние обобщенные степени $l_{+[r]}$.

Положим теперь в (29) $G_{\psi_*\psi_*}(L) = \Delta_{\psi_*}(L)$. В этом случае $g(0) = 1$. Следовательно

$$\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) = \Delta_{\psi_*}(L), \tag{31}$$

т.е. матрица ДНПФ начальных значений есть левосторонний тождественный оператор для НСХ от дискретной дельта-функции (7).

Из (29) и (31) также находим:

$$\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L) = \nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L). \tag{32}$$

Положим теперь в (29) $G_{\psi_*\psi_*}(L) = S\left[\;\right] = P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L)$, где

$$P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(h,i,L,L) = \sum_{l=0}^{L-1}\psi_*(h,L,l)\sum_{m=0}^{l}\varphi^*(i,L,m) \tag{33}$$

- ДНПФ суммирующего звена первого порядка [2-4]. Тогда, учитывая что $g(0) = 1$ (0)=1, будем иметь:

$$\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) = \Delta_{\psi_*}(L), \tag{34}$$

т.е. матрица ДНПФ $\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)$ - левосторонний тождественный оператор для НСХ $\Delta_{\psi_*}(L)$. Кроме того

$$\sum_{\alpha=0}^{L-1}\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(h,\alpha,L,L)\,P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(\alpha,i,L,L) = \psi_*(h,L,0)\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{\alpha=0}^{L-1}\psi_*(\alpha,L,l)\,\varphi^*(\alpha,L,0)\sum_{m=0}^{l}\varphi^*(i,L,m) =$$

$$= \psi_*(h,L,0)\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{l}\delta(l)\,\varphi^*(i,L,m) = \psi_*(h,L,0)\,\varphi^*(i,L,0) = \nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(h,i,L,L),\ \text{т.е.}$$

$$\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)\,P^{-1}_{\psi_*\varphi^*}(L,L) = \nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L). \tag{35}$$

Следовательно, матрица ДНПФ суммирующего звена играет роль правосторонней единицы для матрицы ДНПФ начальных значений $\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*}(L,L)$, а она сама – левосторонний

ψ φ^*

$*$ $*$

нуль-делитель для матрицы $P_{\psi_* \varphi^*}^{-1}(L, L) - E$ и $P_{\psi_* \varphi^*}^{-1}(L, L) - E$ - правосторонний нуль-делитель для матрицы $\nu_{\psi_* \varphi^*}^{<0>}(L, L)$.

Аналогично показывается:

$\nu^{<0>} L = \nu^{<0>}$

$$\nu^{*}_{\psi\varphi**}(L,L)\,P_{\psi\varphi*}(L,L)\,\nu_{\psi\varphi**}(L,L-1)\;L; \tag{36}$$

$$P^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)\,\nu^{<0>}_{\psi\varphi**}(L,L)=\sum_{m=0}^{L-1}\Delta^{m}_{\psi*}(L)\cdot\Delta^{+}_{\varphi*}(L), \tag{37}$$

где

$$\Delta^{m}_{\psi*}(h,L)=\sum_{l=0}^{L-1}\delta(l-m)\psi_{*}(h,L,l) \tag{38}$$

- НСХ смещенной дискретной дельта-функции в базисе разложения [2-4, 5].

$$P^{<-1>}_{\psi\varphi**}(L,L)\,P^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)-E=-\sum_{m=0}^{L-1}\Delta^{m}_{\psi*}(L)\cdot\Delta^{+}_{\varphi*}(L); \tag{39}$$

$$P^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)\,P_{\psi\varphi**}(L,L)=P_{\psi\varphi**}(L,L)\,P^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)=E; \tag{40}$$

$$P^{<1>}_{\psi\varphi**}(L,L)\,P^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)-E=-\nu^{<0>}_{\psi\varphi**}(L,L); \tag{41}$$

$$\nu^{<0>}_{\psi\varphi**}(L,L)\,\tau^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)=\Theta; \tag{42}$$

$$\tau^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L)\,\nu^{<0>}_{\psi\varphi**}(L,L)=\Delta^{1}_{\psi*}(L)\cdot\Delta^{+}_{\varphi*}(L); \tag{43}$$

где

$$\tau^{-1}_{\psi\varphi**}(h,i,L,L)=\sum_{l=1}^{L-1}\psi_{*}(h,L,l)\,\varphi_{*}(i,L,l-1) \tag{44}$$

- ДНПФ звена чистого запаздывания на один такт [2-4].

Используя соотношение связи

$$P_{\psi\varphi**}(L,L)=E-\tau^{-1}_{\psi\varphi**}(L,L) \tag{45}$$

и свойства (30), (37)-(43), можно вывести следующие связи:

$$\nu^{<\,>}\quad{}^{<\,>}=\Theta$$

$$\underset{*\,*}{\psi\,\varphi^{*}}{}_{0}(L, L)\, P^{1} \frac{L}{\underset{*\,*}{\overset{\psi}{\varphi}}{}^{*}(L,)}, \tag{46}$$

$$^{<>} \qquad \nu_{<>} \qquad = -\tau_{-} \qquad \nu_{<>}$$

$$P^{\langle 1\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) = \Psi^{*}_{\varphi_*}(L,L^{0})\,\Psi_{\varphi^*_*}(L,L) = \Psi^{*}_{\varphi_*}(L,L^{1})\,\Psi_{\varphi^*_*}(L,L^{0}), \tag{47}$$

$$P^{\langle 1\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) = -\tau^{-1}\Delta_{\psi_*}(L,L) = -\Delta_{\psi_*}(L,L)\,\Delta^{1}_{\psi_*}(L,L), \tag{48}$$

$$P^{\langle 1\rangle}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) = \tau^{-1}\Psi^{*}_{\varphi_*}(L,L^{1})\,\Psi_{\varphi^*_*}(L,L^{1}) = \tau^{-1}\Psi^{*}_{\varphi_*}(L,L)\,P_{\psi\varphi^*_*}(L,L). \tag{49}$$

Положим теперь $s = 2$. Тогда для $l = 0,1,\ldots, L-1$

$$\sum_{m=0}^{L-1} \nabla^2\delta_l(l-m)g(m) = g(l) + \nabla g_l(0)\nabla\delta(l) + g_l(1)\delta(l-1) + 1(l-2)\cdot\nabla^2 g(l). \tag{50}$$

С другой стороны

$$\nabla^2 g_+(l) = \nabla\left(\nabla g_+(l)\right) = \nabla\left(g_l(0)\delta(l) + 1(l-1)\cdot\nabla g(l)\right) = g(l) + \nabla g_l(0)\nabla\delta(l) + g_l(1)\delta(l-1) + 1(l-2)\cdot\nabla^2 g(l). \tag{51}$$

Сравнивая (50) и (51), получим

$$\nabla^2 g_+(l) = \sum_{m=0}^{l-1}\nabla^2\delta_l(l-m)\,g(m). \tag{52}$$

Следовательно, дискретная система с ИПФ $k(l,m) = \nabla^2\delta_l(l-m)$ осуществляет вычисление второй разности от дискретной односторонней функции $g_+(l)$ на конечном дискретном интервале времени при нулевых начальных условиях:

$$g_0 = g(-1) = 0, \ \nabla g(-1) = 0.$$

В спектральной области соотношение (52) примет вид

$$S_{\psi_*}\left[\nabla^2 g(l)\right] = P^{2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,S_{\psi_*}\left[g(l)\right] \tag{53}$$

где $P^{\nabla^2}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)$ - матрица ДНПФ разностного звена первого рода второго порядка.

Учтем теперь начальные условия. Так как

$$g \qquad + \nabla g \cdot \delta\, l \cdot \nabla_{2g} l\,,$$

g

δ

$$l \qquad 0 \quad l \qquad 0 \quad (l)+1(\,) \quad l \quad (\,) \tag{54}$$

то

$$g^{(2)}_{+}l = 1(l)\cdot\nabla_2 \quad g\,l = -g\cdot\nabla\,\delta\,l - \nabla\,g\cdot\delta\,l + \nabla_2\delta \sum_{m=0}^{l-1} l\,m\,m \quad . \tag{55}$$
$$(\,) \qquad l\;(\,) \qquad 0 \quad l\;(\,) \qquad 0 \quad (\,) \quad m=0 \quad l \quad (\qquad) g(\,)$$

Это равенство в спектральной области примет вид

$$G^{(2)}_{\psi_*}(L) = P^{2}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L) - \nabla g^{0}_{\psi_*}\,\Delta L - g\,P^{0}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L)\,, \tag{56}$$

$$ {}^{(2)} \quad = \quad \Big[\; {}^{(2)} \quad \Big] \quad G\,L = \quad S \; [\;] \, . $$

где $G_{\psi}(L) = S_{\psi_*}[g(l)]_{(i,L,)}$, $\Delta_{\psi}(L) = S_{\psi_*}[\delta(l)]_{(i,L,)}$ - 186

Рассмотрим теперь систему с ИПФ

$$k(l-m) = 1(l-2)\cdot\nabla_l^2\delta(l-m). \tag{57}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{m=0}^{L-1} 1(l-2)\left(\nabla_l^2\delta(l-m)\right) g(m) = 1(l-2)\cdot\nabla_l^2 g(l). \tag{58}$$

В спектральной области равенство (58) примет вид:

$$P^{<2>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\cdot S_{\psi_*}\left[g(m)\right]_{(i,L,)} = S_{\psi_*}\left[1(l-2)\nabla_l^2 g(l)\right]_{(h,L,)}, \tag{59}$$

где $P^{<2>}_{\psi\varphi^*}(L,L)$ - матрица ДНПФ разностного звена второго порядка второго рода.

Преобразуем теперь равенство (50) в спектральную область. Учитывая (58) и (59), получим:

$$P^2_{\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L) = P^{<2>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L) + g(0)\,P_{\psi\varphi^*}(L,L)\,\Delta_\psi(L) + \nabla g(1)\,\tau_{-1\psi\varphi^*}(L,L)\,\Delta_\psi(L). \tag{60}$$

Подставляя (46) в (56), находим

$$G^{(2)}_\psi(L) = P^{<2>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L) + (g(0)-g(-1))\,P_{\psi\varphi^*}(L,L)\,\Delta_\psi(L) + \left(\nabla g(1)\,\tau_{-1\psi\varphi^*}(L,L) - \nabla g(-1)E\right)\Delta_\psi(L). \tag{61}$$

Соотношение (60) показывает, что действие операторов ∇^2 и $\nabla^{<2>}$ на функцию $g(l)$ эквивалентно при условии равенства нулю начальных значений, т.е. $g(0)=0$, $\nabla g(1)=0$.

Запишем теперь соотношение (60) в виде:

$$\left(P^2_{\psi\varphi^*}(L,L) - P^{<2>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\right) G_\psi(L) = g(0)\,P_{\psi\varphi^*}(L,L)\,\Delta_\psi(L) + \nabla g(1)\,\Delta_1(L). \tag{62}$$

Так как

$$P^2 \, {}^{*}_{*}\psi(L,\varphi) = \left(\nu_{<0>}\, {}^{*}\psi(L,\varphi) + \nu_{<1>}\, {}^{*}_{*}\psi(L, L P\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ )) \right) \left(\nu_{<0>}\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ ) + \nu_{<1>}\, L P\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ ) \right) =$$

$$= \nu_{<0>} \left(\nu_{<0>}\, {}^{*}_{*}\psi(L,\varphi) + \nu_{<1>}\, {}^{*}_{*}\psi(L, L P\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ )) \right) + \nu_{<0>} \left({}^{*}_{*}\phi + \nu_{<1>}^{2}\, {}^{*}_{*}\psi(L, L P\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ ) \ldots L P\, {}^{*}_{*}\varphi(L,\ )) \right), \qquad (63)$$

то

$$\left(P^{2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L) - P^{<2>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L)\right) = L\,g^{(0)}_{\psi_*}(L) + g^{(0)}_{\psi_*}\,L\,P^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) + L\,P^{<1>2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L). \quad (64)$$

Учитывая, что

$$P^{<>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) = L\,P^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\Delta(L) + \Delta_{\psi_*\psi_*}(L) \quad (65)$$

или, что, то же самое,

$$P^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) = -\tau^{-1}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\Delta_{\psi_*}(L) = -\Delta^{1}_{\psi_*}(L), \quad (66)$$

выражение (64) запишем в виде:

$$\left(P^{2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L) - L\,P^{<2>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L)\right) = \Delta - L\,g^{(0)}_{\psi_*}(L) - L\,g^{(0)}_{\psi_*}(L)\,\Delta^{1}_{\psi_*}(L) +$$

$$+ P^{<1>2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L) - L\,P^{<2>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L) \quad (67)$$

Из (62) и (67) находим

$$\left(P^{<1>2}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L) - L\,P^{<2>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L)\right) =$$

$$= \left(\nu^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L) - \tau^{-1}(L,L)\,\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,G_{\psi_*}(L)\right) = \nabla g^{(1)}_{\psi_*}(L)\,\Delta^{1}_{\psi_*}(L), \quad (68)$$

где

$$\nu^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(h,i,L,L) = \psi^*(h,L,1)\,\varphi_*(i,L,1). \quad (69)$$

- ДНПФ первого значения, а

$$\mu^{<1>}_{\psi^*\varphi}(L,L) = \nu^{<1>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L) - \tau^{-1}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L)\,\nu^{<0>}_{\psi_*\varphi^*_*}(L,L),$$

* *

- матрица ДНПФ приращения первого значения. Тогда (68) примет вид:

$$\mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\, G_{\psi_*}(L) = \nabla g^{1}_{\psi_*}(1)\, \Delta(L). \qquad (70)$$

Из (70) можно вывести следующие равенства:

$$\mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\, \Delta_{1\psi_*}(L) = \Delta_{1\psi_*}(L), \qquad (71)$$

$$\mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\, \mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\, \Delta_{1\psi_*}(L) = \mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\, \Delta_{1\psi_*}(L), \qquad (72)$$

$$\mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,P^{-2}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,\Delta_1(L_{\psi_*}) = \mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,\Delta_1(L_{\psi_*}). \tag{73}$$

Кроме того можно показать, что

$$\mu^{<1>k_L}_{\psi_*\varphi_*}(L,) = \mu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,)\, L, \tag{74}$$

$$\nu^{<1>k_L}_{\psi_*\varphi_*}(L,) = \nu^{<1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,)\, L, \tag{75}$$

Формулы для вычисления ДНПФ начальных значений (12) и ДНПФ первого значения (69) можно обобщить. Введем ИПФ звена p -го значения, которое вычисляет функцию отличную от нуля в одной p - той точке отрезка [0,L -1] :

$$k(l - m) = \delta(l - p)\delta(p - m) \tag{76}$$

Тогда ДНПФ звена p -го значения примет вид:

$$\nu^{<p>}_{\psi_*\varphi_*}(h, i, L,)\, L = \psi_*(h, L, p)\, \varphi_*(i, L,)\, p. \tag{77}$$

Рассмотрим теперь случай произвольного s . Но сначала определим обобщенный разностный оператор $\nabla_{<n,s>}$, который отличается от разностного оператора ∇_s тем, что после вычисления s -кратной разности от функции $g(l)$, $l \in Z$, он преобразует полученный результат в одностороннюю функцию, которая равна нулю для всех $l <$ n и совпадает с $\nabla_s g(l)$ для $l \geq$ n , т.е.

$$\nabla_{<n,s>} g(l) = 1(l - n)\nabla_s g(l). \tag{77}$$

Если в степени оператора $\nabla_{<n,s>}$ n = s , то будем писать $\nabla_{<s>}$, т.е.

$$\nabla_{<s>} g(l) = \nabla_{<s,>} g(l) = 1(l - s)\nabla_s g(l). \tag{78}$$

Результат действия одного обобщенного разностного оператора $\nabla_{<n,s>} g(l)$ на другой разностный оператор $\nabla_{<k,s>} g(l)$ записывается так

$$\nabla_{<n,s>} * \nabla_{<k,s>} = \nabla_{<n,s><k,s>}. \tag{79}$$

Обобщим формулу (15) на случай s -кратного вычисления разности, получим:

$$\nabla_s g(l) = \sum_{k=0}^{s-1} \nabla_k g(k) \cdot \nabla_{s-k-1} \delta(l - k - 1) + 1(l - s) \cdot \nabla_s g(l). \tag{80}$$

Учитывая, что

$$\sum$$

$$\nabla_s g_l^{(\,)} {}_{l\,+}^{(\,)} = \nabla_{m=0}\, {}_s\delta\, {}_l\, l - (\quad m)\, g\,(\,)\, m\,, \tag{81}$$

$\sum -$

$$\nabla^{s} g(l)\cdot 1(l-s) = \sum_{m=0}^{l} 1(l-s)\cdot\nabla^{s}\delta(l-m)\cdot 1(m)\, g(m), \tag{82}$$

соотношение (80) в спектральной области запишем в виде:

$$P^{s}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) = \sum_{k=0}^{s-1} \nabla^{k} g(k)\, P^{s-k-1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, \Delta_{\psi_* k}(L) + P^{<s>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L), \tag{83}$$

где $\Delta_{\psi_* k}(L)$ - НСХ смещенной дельта-функции $\delta(l-k)$.

С другой стороны $\nabla^{s} g(l)$ можно записать и так

$$\nabla^{s} g(l) = \sum_{k=0}^{s-1} \nabla^{k} g(0)\cdot\nabla^{s-k-1}\delta(l) + 1(l)\cdot\nabla^{s} g(l), \tag{84}$$

где $\nabla^{s} g(l)$ - s -кратная разность от функции $g(l)$, которая рассматривается как двусторонняя.

Учитывая (81), выражение (84) в спектральной области запишем в виде:

$$P^{s}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) = \sum_{k=0}^{s-1} \nabla^{k} g(0)\cdot P^{s-k-1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, \Delta_{\psi_*}(L) + S_{\psi_*(i,L,l)}\left[\left[\nabla^{s} g(l)\right] 1(l)\right]. \tag{85}$$

Пусть $X_{\psi_*}(L) = S_{\psi_*(i,L,l)}\left[\left[\nabla^{s} g(l)\right] 1(l)\right]$, тогда из выражений (85) и (83) найдем:

$$X_{\psi_*}(L) = P^{<s>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) + \sum_{k=0}^{s-1} P^{s-k-1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\left(\nabla^{k} g(k)\, \tau^{k}_{\psi_*}(L) - \nabla^{k} g(0)\, \Delta_{\psi_*}(L)\right), \tag{86}$$

$$X_{\psi_*}(L) = P^{s}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, G_{\psi_*}(L) - \sum_{k=0}^{s-1} \nabla^{k} g(0)\, P^{s-k-1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\, \Delta_{\psi_*}(L). \tag{87}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{s-1} \nabla_k\, g(k)\, P^{s-k-1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\,\Delta^{k}_{\psi_*}(L) = \left(\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=0}^{s-j}(-1)^i C^{i}_{s-j}\,\tau^{-}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\right)\nu^{<j-1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\right) G_{\psi_*}(L),$$

то из (83) находим:

$$P^{s}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) - P^{<s>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=0}^{s-j}(-1)^i C^{i}_{s-j}\,\tau^{-}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\right)\nu^{<j-1>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L), \qquad (88)$$

где $\left(P^{s}_{\psi_*\varphi_*}(L,L) - P^{<s>}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\right)$ - матрица ДНПФ суммы всех начальных значений функции $g(l)$ до s -го порядка.

Равенство (88) позволяет уяснить разность действия ДНПФ разностного звена s -го порядка первого рода и ДНПФ разностного звена s -го порядка второго рода на НСХ функции $g(l)$. Из формулы (88) видно, что действие этих двух операторов на функцию $g(l)$

одинаково, если начальные значения $\nabla_k g(k) = 0,\ k = 0,1,\ldots,s-1$ для функции $g(l)$.

Рассмотрим теперь действие разностного оператора ∇_l на оператор $1(l-k)\nabla_k g(l)$.

Для этого запишем следующее равенство

$$\nabla_l \big(1(l-k)\cdot\nabla_k g(l)\big) = \nabla_k g(k)\,\delta(l-k) + 1(l-k-1)\cdot\nabla_{k+1} g(l), \qquad (89)$$

которое в спектральной области примет вид:

$$P_{\psi\varphi^*\psi\varphi^*}(L,L)\,P^{<k>}_{\psi\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L) = P^{<k+1>}_{\psi\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L) + \nabla_k g(k)\,\Delta_{\psi k}(L). \qquad (90)$$

Так как

$$\nabla_k g(k)\,\Delta_{\psi k}(L) = \mu^{<k>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\,G_\psi(L), \qquad (91)$$

где

$$\mu^{<k>}_{\psi\varphi^*}(L,L) = \sum_{\alpha=0}^{k}\left((-1)^{\alpha} C_k^{\alpha}\,\tau^{\alpha}_{\psi\varphi^*}\,\nu^{<k-\alpha>}_{\psi\varphi^*}\right) \qquad (92)$$

- матрица ДНПФ k-го начального значения $\nabla_k g(k)$, т.е. матрица выделяющая из НСХ $G_\psi(L)$ функции $g(l)$ НСХ k-го начального значения $\nabla_k g(k)\Delta_{\psi k}(L)$. Поэтому формулу (90) можно записать в виде:

$$P_{\psi\varphi^*\psi\varphi^*}(L,L)\,P^{<k>}_{\psi\psi\varphi^*}(L,L) - P^{<k+1>}_{\psi\psi\varphi^*}(L,L) = \mu^{<k>}_{\psi\varphi^*}(L,L), \qquad (93)$$

где $k = 0,1,2,\ldots$ и $P^{<0>}_{\psi\varphi^*}(L,L) = E$.

Если в (91) положить $G_\psi(L) = \Delta_{\psi k}(L)$, то будем иметь

$$\mu^{<k>}_{\psi\varphi^*}(L,L)\,\Delta_{\psi k}(L) = \Delta_{\psi k}(L), \qquad (94)$$

$\mu^{<k>}$ $^{*\,*}$ * *

т.е. $\mu^{<k>}_{\psi_*\varphi_*}(L,\ )$ L - левосторонний тождественный оператор для $\Delta_{\psi_*}^{k}(L)$. Из (94) следует, что

$$\mu^{<k>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\,\mu^{<k>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L) = \mu^{<k>}_{\psi_*\varphi_*}(L, L)\ . \tag{95}$$

Умножим левую и правую части равенства (89) на функцию $1(l-1)$, получим

$$\left(-\cdot\nabla^{k}\right)=^{k}\delta\;\cdot-\;--\cdot\nabla_{+}\;\nabla$$

$$1(l-1)\cdot\nabla_{l}1(l\,k)\;g_{l}(\,)\;g(k)(l\,k)+1(l\,k\;1)\;{}^{k}{}_{1}g_{l}(\,)\,. \qquad (97)$$

В спектральной области (97) примет вид:

$$\left(P^{<>}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)\,L\,P^{<>k}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)-L\,P^{<+>k1}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)\right)G_{\psi_*}(\,)=\nabla^{k}g(k)\,\Delta_{k\,\psi_*}(\,)\,L\,. \qquad (98)$$

Сравнивая (90) и (98), найдем

$$P^{<><>}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)\,L\,P^{k}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)-L\,P^{<+>k1}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)=\mu^{<>k}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)\,L\,. \qquad (99)$$

где $k = 1,2,K$.

Заметим, что матрицы ДНПФ разностного звена n -го порядка, разностного звена первого порядка второго рода и звена начальных значений связаны между собой соотношением

$$P^{n}_{\psi_*\varphi_*}(L,L)-P^{<1>n}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)=\left(\sum_{i=0}^{n-1}P^{<1>i}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)\right)V^{<0>}_{\psi_*\varphi_*}(L,\,)\,. \qquad (100)$$

Библиографический список.

1. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. . – М.: Машиностроение, 1962.

2. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ. – М.: Машиностроение, 1979.

3. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.

4. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. –М.: МАИ, 1984.

5. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33.

Сведения об авторах

Рыбин Владимир Васильевич, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.; 8-499-158-48-11; dep805@mai.ru