

УДК 536.22

Расчет эффективной теплопроводности элементарной ячейки с помощью «действия».

Василевский Д.В., Симахин Е.А., Спирин Г.Г.

Аннотация

Предложено использовать «действие» (аналог интеграла энергии электростатического поля) для расчета эффективной теплопроводности элементарной ячейки. Предложенный подход применен для расчета теплопроводности дисперсных материалов, характеристики, необходимой при тепловом проектировании летательных аппаратов. Максимальное расхождение результатов расчета по сравнению с численным расчетом не превышает 10%.

Ключевые слова

Теплопроводность; «действие»; элементарная ячейка; дисперсная среда; температурное поле.

Метод обобщенной проводимости предполагает рассмотрение теплообмена в дисперсной среде в рамках одной элементарной ячейки, моделирующей основные черты переноса тепла в среде в целом. В 19 веке этот метод был предложен для расчета электрических и магнитных свойств дисперсных материалов [1], а затем распространен на тепловые свойства.

Расчет эффективной теплопроводности элементарной ячейки проводится численными методами [2], а в случае линеаризации температурного поля с помощью тепловых сопротивлений [3].

Вместе с тем, к расчету теплопроводности ячейки есть другой подход, основанный на аналогии стационарных электрических и температурных полей, описываемых уравнением Лапласа. Известно, что при заданном распределении зарядов энергия электростатического поля минимальна [4]. Отсюда можно говорить о принципе минимального действия для величины

$$S = \int_V \varepsilon (\nabla \varphi)^2 dV,$$

где ε -диэлектрическая проницаемость среды, φ - электрический потенциал.

Действием применительно к теплопереносу является величина

$$S = \int_V \lambda (\nabla T)^2 dV, \quad (1)$$

λ – коэффициент теплопроводности вещества.

Отметим, что принцип минимума «действия» может быть полезен при оценке точности численных расчетов стационарных температурных полей. В частности, с увеличением точности описания температурного поля, «действие» уменьшается, имея пределом минимальное значение, соответствующее истинному распределению температурного поля.

Остановимся на расчете эффективной теплопроводности элементарной ячейки при использовании «действия». Пусть элементарная ячейка, имеющая форму куба с ребром L , ограничена торцевыми изотермическими поверхностями с температурами T_1 и T_2 соответственно, и боковыми адиабатическими. Потребуем выполнения следующего равенства:

$$S_{\text{эф}} = S, \quad (2)$$

где $S_{\text{эф}}$ - «действие» для ячейки, заполненной однородным веществом с теплопроводностью $\lambda_{\text{эф}}$, а S - «действие» реальной ячейки.

Рассмотрим элементарную ячейку, образованную чередующимися слоями, перпендикулярными тепловому потоку. В данном случае (2) имеет вид

$$\lambda_{\text{эф}} \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 L^3 = \sum_i \lambda_i \left(\frac{dT_i}{dl_i} \right)^2 L^2 l_i, \quad (3)$$

где l_i - толщина i -ого слоя с теплопроводностью λ_i . Учитывая, что $\frac{dT_i}{dl_i} = \frac{q_0}{\lambda_i}$, а

$$\frac{T_2 - T_1}{L} = \frac{q_0}{\lambda_{\text{эф}}}, \quad (q_0 = \text{const}), \quad \text{окончательно получим}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{эф}}} = \sum_i \frac{m_i}{\lambda_i}. \quad (4)$$

Здесь $m_i = \frac{l_i}{L}$ - объемная концентрация i -ого слоя включения, V_i -объем i -ого слоя, V - объем ячейки.

В случае параллельно расположенных слоев относительно теплового потока имеем:

$$S_{\text{эф}} = \lambda_{\text{эф}} \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 L^3, \quad S = \sum_i \lambda_i \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 l_i L^2. \quad \text{Отсюда}$$

$$\lambda_{\text{эф}} = \sum_i \lambda_i m_i. \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) известны, они непосредственно следуют из закона Фурье, примененного к слоистым системам. Вместе с тем понятие «действия» имеет более общий характер и позволяет определить эффективную теплопроводность ячейки следующим интегральным соотношением:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{\int_V \lambda \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} dV}{\left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 L^3}. \quad (6)$$

Расчет теплопроводности существенно упрощается в случае линеаризации температурного поля, т.е. замене криволинейных линий тока прямыми. В качестве примера рассмотрим элементарную ячейку с включением сферической формы (r - радиус включения, λ_2 - теплопроводность его материала, λ_1 - теплопроводность среды, в которой находится включение) (рис. 1).

Сферу заключим внутри воображаемой адиабатической поверхности (цилиндра), предполагая $S_{\text{эф}} = S^{\text{ад}}$, имеем

$$\lambda_{\text{эф}}^{\text{ад}} \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 L^3 = \lambda_1 \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 (L^3 - \pi r^2 L) + \lambda_{\text{эф}(1,2)} \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 (\pi r^2 L), \quad (7)$$

где $\lambda_{\text{эф}(1,2)}$ - эффективная теплопроводность цилиндра.

Учитывая, что объемная концентрация включения $m_2 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{L} \right)^3$, перепишем (7) в виде

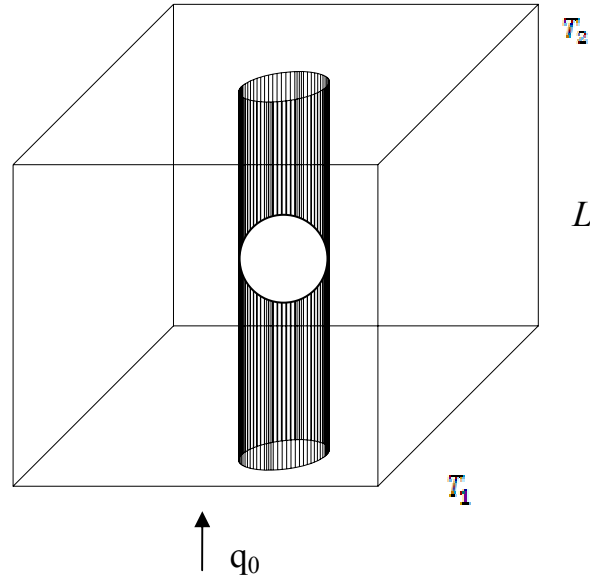


Рис. 1.

$$\lambda_{эф}^{ad} = \lambda_1 \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \lambda_{эф(1,2)} \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (8)$$

Далее рассмотрим «действие» для цилиндра $S_{эф(1,2)} = S_{12}$, или

$$\lambda_{эф(1,2)} = \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right)^2 \pi r^2 L = \lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dx_1} \right)^2 \left(\pi r^2 L - \frac{4}{3} \pi r^3 \right) + \lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dx_2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{\lambda_{эф(1,2)}} = \frac{1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}{\lambda_1} + \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}{\lambda_2}. \quad (9)$$

Объединяя (8) и (9) получим

$$\lambda_{эф}^{ad} = \lambda_1 \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] + \lambda_1 \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (10)$$

Относительная величина эффективной теплопроводности равна

$$\frac{\lambda_{эф}^{ad}}{\lambda_1} = \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{\pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}}}{\left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] + \nu \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}, \quad (11)$$

где $\nu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Рассмотрим отношение $\frac{\lambda_{эф}^{ad}}{\lambda_1}$. В случае $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \rightarrow \infty$ эта величина равна

$$\frac{\lambda_{эф}^{ad}}{\lambda_1} = \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (12)$$

Зависимость $\frac{\lambda_{эф}^{ad}}{\lambda_1}(m_2)$ в диапазоне $0 \leq m_2 \leq \frac{\pi}{6}$, представлена на рис. 3.

Рассмотрим случай расчета эффективной теплопроводности ячейки, для случая, когда в ячейке выделены две плоскости aa' и bb' с температурами соответственно T_1' и T_2' (рис. 2). По принятой терминологии это соответствует изотермическому дроблению ячейки.

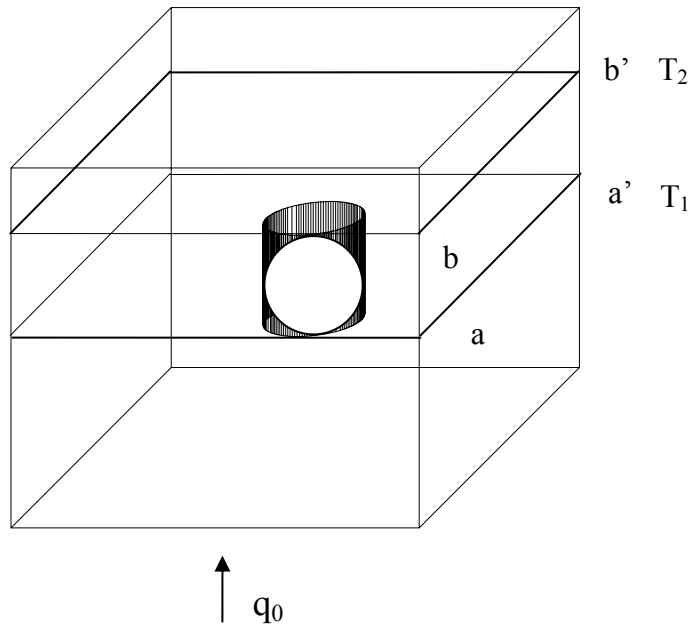


Рис. 2.

Имеем $S_{эф}^{u3} = S^{u3}$, или

$$\lambda_{\text{эф}}^{uz} \left(\frac{q_0}{\lambda_{\text{эф}}^{uz}} \right)^2 L^3 = \lambda_1 \left(\frac{q_0}{\lambda_1} \right)^2 (L^3 - 2rL^2) + \lambda_{12} \left(\frac{q_0}{\lambda_{12}} \right)^2 (2rL^2), \quad (13)$$

Здесь λ_{12} - эффективная теплопроводность слоя, заключенного между изотермическими поверхностями aa' и bb' . Учитывая, что $q_0 = const$, соотношение (13) перепишем в виде

$$\frac{1}{\lambda_{\text{эф}}^{uz}} = \frac{1}{\lambda_1} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{L} \right) \right] + \frac{1}{\lambda_{12\text{эф}}} \cdot 2 \left(\frac{r}{L} \right). \quad (14)$$

Рассмотрим далее выделенный слой, для него имеем $S_{12\text{эф}} = S_{12}$

$$\lambda_{12\text{эф}} \left(\frac{T_2' - T_1'}{2r} \right) \cdot 2rL^2 = \lambda_1 \left(\frac{T_2' - T_1'}{2r} \right) (2rL^2 - \pi r^2 2r) + \lambda'_{12\text{эф}} \left(\frac{T_2' - T_1'}{2r} \right) (\pi r^2 2r). \quad (15)$$

$$\lambda_{12\text{эф}} = \lambda_1 \left[1 - \pi \left(\frac{r}{L} \right)^2 \right] + \lambda'_{12\text{эф}} \pi \left(\frac{r}{L} \right)^2. \quad (16)$$

Здесь $\lambda'_{12\text{эф}}$ - эффективная теплопроводность цилиндра, в котором заключен шар. Боковую поверхность цилиндра считаем адиабатической. В этом случае имеем $S'_{12\text{эф}} = S'_{12}$

$$\lambda'_{12\text{эф}} \left(\frac{q_o}{\lambda'_{12\text{эф}}} \right)^2 \cdot \pi r^2 2r = \lambda_1 \left(\frac{q_o}{\lambda_1} \right)^2 \left(\pi r^2 2r - \frac{4}{3} \pi r^3 \right) + \lambda_2 \left(\frac{q_o}{\lambda_2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \text{ или}$$

$$\frac{1}{\lambda'_{12\text{эф}}} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{2}{3}. \quad (17)$$

Используя (14), (16), (17), получим

$$\lambda_{\text{эф}}^{uz} = \frac{\lambda_1 \left\{ \lambda_1 \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{3\lambda_1\lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right\}}{\left\{ \lambda_1 \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{3\lambda_1\lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \cdot \left[1 - 2 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] + 2\lambda_1 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (18)$$

Относительная величина эффективной теплопроводности равна

$$\frac{\lambda_{\text{эф}}^{uz}}{\lambda_1} = \frac{\left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{3}{1+2\nu} \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{ \left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{3}{1+2\nu} \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right\} \cdot \left[1 - 2 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] + 2 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (19)$$

Рассмотрим предельный случай. При $\nu \rightarrow \infty$ выражение (19) примет вид

$$\frac{\lambda_{\text{эф}}^{uz}}{\lambda_1} = \frac{1 - \pi \left(\frac{3}{4} m_2 \right)^{\frac{2}{3}}}{\left[1 - \pi \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left[1 - 2 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}} \right] + 2 \left(\frac{3}{4\pi} m_2 \right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (20)$$

Зависимость $\frac{\lambda_{\text{эф}}^{uz}}{\lambda_1}(m_2)$, при $\nu \rightarrow \infty$ представлена на рис. 3.

Истинное значение теплопроводности $\lambda_{\text{эф}}$ лежит между $\lambda_{\text{эф}}^{uz}$ и $\lambda_{\text{эф}}^{ad}$. Следовательно,

$$\frac{\lambda_{\text{эф}}}{\lambda_1} \approx \frac{\frac{\lambda_{\text{эф}}^{uz}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_{\text{эф}}^{ad}}{\lambda_1}}{2}. \text{ Зависимость } \frac{\lambda_{\text{эф}}}{\lambda_1}(m_2) \text{ также графически представлена на рис. 3. В том}$$

числе, на этом же рисунке представлена зависимость $\frac{\lambda_{\text{эф}}}{\lambda_1}(m_2)$, для случая сфера в кубе, полученная численными методами [2]. Максимальное расхождение результата составляет не более 10%.

Представляется, что изложенный метод расчета теплопроводности дисперсных материалов может найти свое место в практике расчета теплофизических свойств материалов.

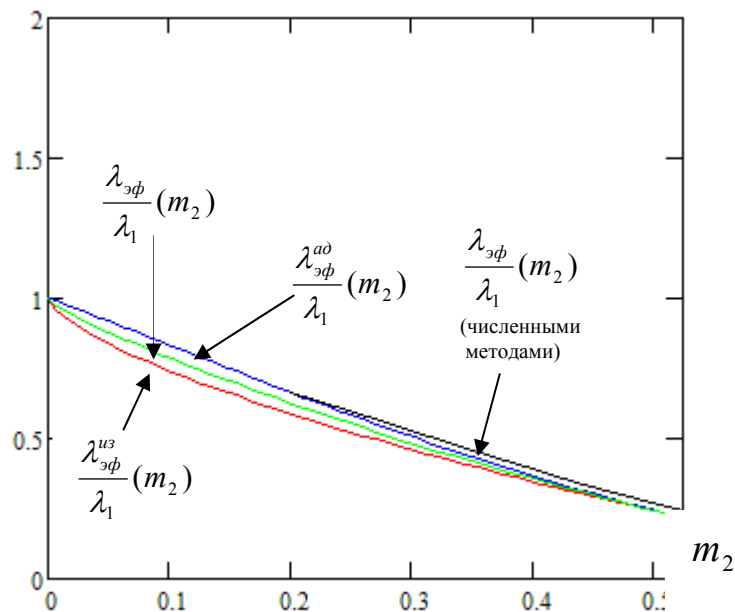


Рис. 3.

Библиографический список

1. Maxwell C. Treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. Oxford Univ. press, London 1892.

2. Дульнев Г.Н. Перенос тепла через твердые дисперсные системы. ИФЖ, Т.9, 1965, №3, с399-404.

3. Дульнев Г.Н. Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов, «Энергия», Ленинград, 1974, 265с.

4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, т.6., «Мир», Москва, 1966, 342с.

Сведения об авторах

1) Василевский Дмитрий Валентинович, МАИ, в.н.с., к.т.н., 25080645.

2) Симахин Евгений Александрович, МАИ, студент, 89266254986.

3) Спирин Геннадий Георгиевич, МАИ, зав. кафедрой, д.т.н., профессор, 89857772487, spirinas@mail.ru.