УДК 681.3.06

Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита

В.А. Романов, К.А. Рыбаков

Аннотация

В работе рассмотрены обобщенные функции Эрмита, получены рекуррентные соотношения для их производных и первообразных. Разработаны алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования. Они апробированы на ряде примеров (примеры представления функций, их производных и первообразных, примеры анализа линейных детерминированных систем управления). Полученные алгоритмы могут быть полезными при решении задач анализа и синтеза систем управления сложными техническими объектами (например, летательными аппаратами) в спектральной форме математического описания.

Ключевые слова:

базис; полиномы Эрмита; функции Эрмита; спектральный метод; спектральная характеристика

Введение

Для представления функций рядами по ортогональным функциям на всем множестве действительных чисел широкое распространение получили полиномы и функции Эрмита [2, 5, 6, 16]. Функции Эрмита удобны для представления квадратично интегрируемых функций, т.е. таких функций $f(x)$, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx < \infty$, хотя при некоторых допущениях, возможно представление функций, которые этому условию не удовлетворяют, допустимо представление и обобщенных функций [1]. В случае, когда $f(x) \not\to 0$ при $x \to \infty$, обычно применяются полиномы Эрмита. Существуют также базисные системы, порожденные вейвлетами, но их использование осложнено отсутствием явных формул, задающих базисные функции, за редким исключением, например, системы функций, порожденных вейвлетом Хаара [13].

При анализе стохастических систем управления спектральным методом [6] более предпочтительным оказывается применение функций Эрмита, так как решение задачи вероятностного анализа заключается в нахождении плотности вероятности вектора состояния, т.е. интегрируемой (а часто и квадратично интегрируемой) функции на множестве действительных чисел. Для решения задачи синтеза оптимального управления стохастическими системами ситуация несколько иная [8]. Наряду с плотностью вероятности вектора состояния требуется найти и оптимальное управление – функцию $u^*(t,x)$, для которой условие $u^*(t,x) \to 0$ при $x \to \infty$ не выполняется (при отсутствии ограничений на значения координат вектора состояния), не говоря уже об условии квадратичной интегрируемости этой функции по переменной x. В этом случае используются полиномы Эрмита [10], но тогда плотность вероятности представляется полиномами и для нее, очевидно, не выполняются такие условия, как неотрицательность значений и условие нормировки. Другой проблемой при решении задачи синтеза оптимального управления является необходимость вычисления в ряде случаев спектральной характеристики оператора умножения на $\omega^{-1}(x)$, где $\omega(x)$ – весовая функция, относительно которой ортогональны функции базисной системы. В случае полиномов Эрмита явно вычислить эту характеристику не удается.

В связи со сказанным выше предлагается рассмотреть систему обобщенных функций Эрмита, которые удобны как для представления плотности вероятности, поскольку функции этой системы являются квадратично интегрируемыми на множестве действительных чисел, так и для представления оптимального управления, поскольку эти функции ортогональны с весовой функцией, аналогичной по структуре весовой функции полиномов Эрмита. Более того, полиномы Эрмита и функции Эрмита являются частным случаем рассматриваемых обобщенных функций Эрмита.

Эта работа важна в плане развития спектральной формы математического описания систем управления [6, 13–15]. В работе дано определение обобщенных функций Эрмита, приведены рекуррентные соотношения для их производных, первообразных и получены формулы для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего). Рассмотрены частные случаи и приведены примеры применения спектральной формы математического описания с использованием обобщенных функций Эрмита к задачам представления функций, их производных и первообразных, к задаче анализа линейных детерминированных систем управления.

Обобщенные функции Эрмита

Как и в работе [9], будем рассматривать полиномы Эрмита второго рода [5], задаваемые выражением

$$G_j^{m,D}(x)=(-1)^j D^j\, \mathrm{e}^{\frac{(x-m)^2}{2D}}\,\frac{d^j}{dx^j}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}\right), \tag{1}$$

которые ортогональны с весом $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi D}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}$ на всей числовой оси, т.е.

$$\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty);\omega(x))}=\begin{cases} j!D^j, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

где m и D – числовые параметры ($D>0$), $\left(\,\cdot\,,\cdot\,\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)$ [2]:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)f(x)h(x)dx,\quad f(x),h(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right).$$

Функции Эрмита определяются следующим образом:

$$\Phi_j^{m,D}(x)=\omega^{\frac{1}{2}}(x)G_j^{m,D}(x),\quad j=0,1,2,... \tag{2}$$

Они ортогональны на всей числовой оси с единичным весом, так как

$$\left(\Phi_i^{m,D}(x),\Phi_j^{m,D}(x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty))}=\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2((-\infty,+\infty);\omega(x))}=\begin{cases} j!D^j, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

где $\left(\,\cdot\,,\cdot\,\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty)\right)$:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)h(x)dx,\quad f(x),h(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty)\right).$$

Для представления функций рядами, как правило, удобнее использовать ортонормированные системы [2, 6], поэтому обозначим через $g_j^{m,D}(x)$ нормированные полиномы Эрмита, а через $\varphi_j^{m,D}(x)$ – нормированные функции Эрмита [9]:

$$g_j^{m,D}(x)=\frac{G_j^{m,D}(x)}{\sqrt{h_j}},\quad \varphi_j^{m,D}(x)=\frac{\Phi_j^{m,D}(x)}{\sqrt{h_j}},\quad h_j=j!D^j,\quad j=0,1,2,...$$

Далее рассмотрим функции

$$E_j^{m,D,\alpha}(x) = \omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x) G_j^{m,D}(x), \quad j = 0,1,2,..., \tag{3}$$

где числовой параметр α может принимать любые значения из отрезка $[0,1]$.

Нетрудно видеть, что при $\alpha = 1$ функции $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ совпадают с полиномами Эрмита $G_j^{m,D}(x)$, а при $\alpha = 0$ – с функциями Эрмита $\Phi_j^{m,D}(x)$. Функции $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ будем называть *обобщенными функциями Эрмита*. Они ортогональны на всей числовой оси с весом $\omega^\alpha(x)$, при этом

$$\left(E_i^{m,D,\alpha}(x), E_j^{m,D,\alpha}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)} = \left(G_i^{m,D}(x), G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)} = \begin{cases} j!D^j, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

В приведенном соотношении $(\,\cdot\,,\cdot\,)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)$:

$$\left(f(x), h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^\alpha(x) f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right).$$

Функции $e_j^{m,D,\alpha}(x) = \dfrac{E_j^{m,D,\alpha}(x)}{\sqrt{h_j}}$, $j = 0,1,2,...$, будем называть *нормированными обобщенными функциями Эрмита* (при $\alpha = 1$ они совпадают с нормированными полиномами Эрмита $g_j^{m,D}(x)$, а при $\alpha = 0$ – с нормированными функциями Эрмита $\varphi_j^{m,D}(x)$). Доказательство полноты системы функций $\{e_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^\infty$ при $\alpha \in (0,1)$ аналогично доказательству полноты системы функций Эрмита в [2].

Для упрощения обозначений в случае полиномов $G_j^{m,D}(x)$ и $g_j^{m,D}(x)$, а также функций $\Phi_j^{m,D}(x)$ и $\varphi_j^{m,D}(x)$ будем опускать параметры m и D, а для функций $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ и $e_j^{m,D,\alpha}(x)$ не будем указывать параметры m, D и α.

Для полиномов Эрмита $G_j(x)$ справедлива рекуррентная формула [5, 9]

$$G_{j+1}(x) = (x-m)G_j(x) - jDG_{j-1}(x), \quad G_0(x) = 1, \quad j = 0,1,2,...,$$

а так как обобщенные функции Эрмита $E_j(x)$ (и функции Эрмита $\Phi_j(x)$, которые являются их частным случаем), от полиномов $G_j(x)$ отличаются множителем, не зависящим от номера функции, то аналогичные рекуррентные формулы (с точностью до обозначений) справедливы и для функций $E_j(x)$ и $\Phi_j(x)$, в частности,

$$E_{j+1}(x) = (x-m)E_j(x) - jDE_{j-1}(x), \quad E_0(x) = \omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x), \quad j = 0,1,2,... \tag{5}$$

Эти соотношения удобны для получения явных формул. Так, например, первые четыре обобщенные функции Эрмита имеют вид

$$E_0(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad E_1(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} (x-m), \quad E_2(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \times$$

$$\times (x^2 - 2mx + m^2 - D), \quad E_3(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(x^3 - 3mx^2 + (3m^2 - 3D)\, x - m^3 + 3mD \right).$$

Их графики при $m = 0$, $D = 1$ и различных значениях α изображены на рис. 1–4.

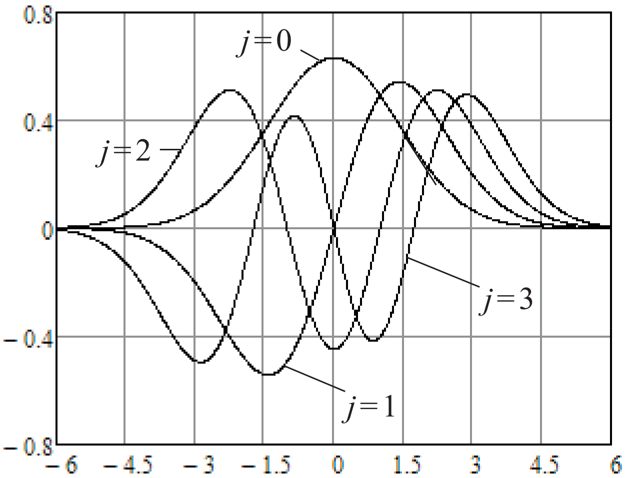

Рис. 1. Графики обобщенных функций Эрмита при $\alpha = 0$ (функций Эрмита)

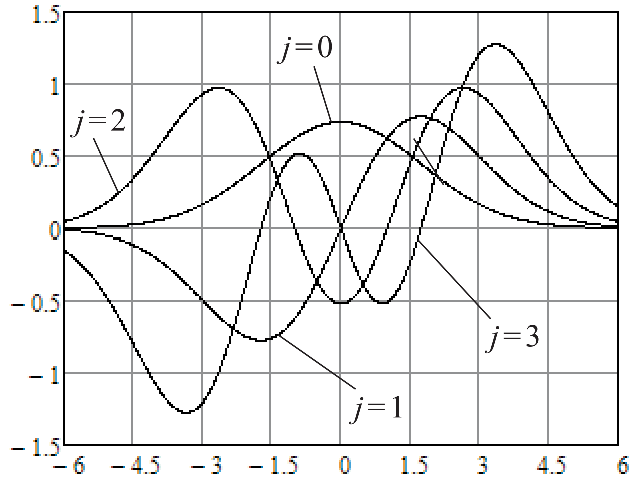

Рис. 2. Графики обобщенных функций Эрмита при $\alpha = \frac{1}{3}$

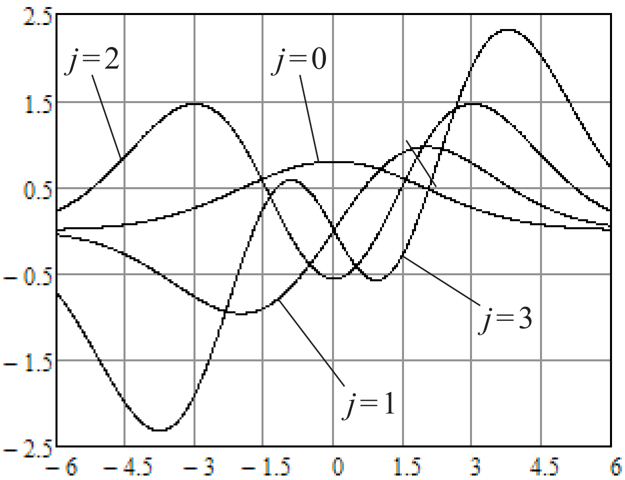

Рис. 3. Графики обобщенных функций Эрмита при $\alpha = \frac{1}{2}$

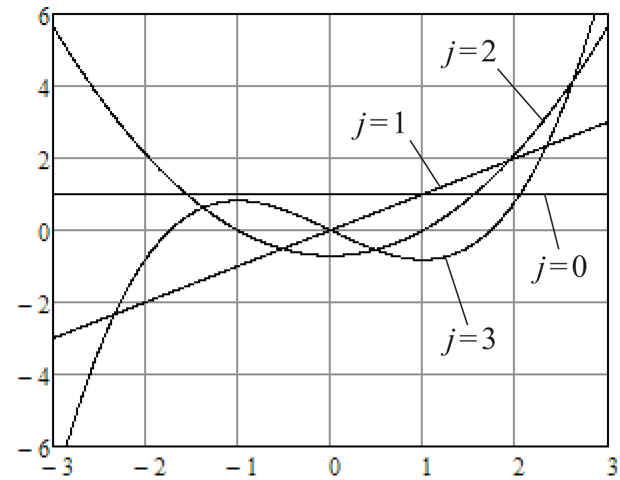

Рис. 4. Графики обобщенных функций Эрмита при $\alpha = 1$ (полиномов Эрмита)

Нормированные обобщенные функции Эрмита будем использовать для представления функций – элементов пространства $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)$ – в виде ряда [2, 6]:

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j e_j(x), \quad f(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right), \tag{6}$$

где числа f_j определяются соотношением

$$f_j=\left(e_j(x), f(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)e_j(x)f(x)dx, \quad j=0,1,2,..., \tag{7}$$

и называются *коэффициентами разложения* функции $f(x)$ относительно системы функций $\{e_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

Напомним, что упорядоченную совокупность коэффициентов разложения f_j, представленную в виде бесконечной матрицы-столбца [3, 6, 15] $\left[\, f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad ... \,\right]^{\mathrm{T}}$, называют спектральной характеристикой функции $f(x)$ (здесь $^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование).

Пример 1. Рассмотрим задачу приближенного представления функции $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Эрмита.

Найдем коэффициенты разложения, используя формулу (7):

$$f_j=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)e_j(x)\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\,dx,$$

ограничившись конечным числом первых N членов ряда (6), в этом случае функция

$$f_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1} f_j e_j(x) \tag{8}$$

является наилучшим приближением $f(x)$ в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)$ [16], т.е.

$$f(x)\approx f_N(x), \quad \left\|f(x)-f_N(x)\right\|_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)}\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty. \tag{9}$$

Очевидно, что коэффициенты разложения зависят от числовых параметров m, D и α. Сравним погрешности аппроксимации функции $f(x)$ функцией $f_N(x)$ при различных N и α, положив $m=0$ и $D=\frac{1}{2}$. Погрешность аппроксимации будем вычислять, используя три критерия:

$$\begin{aligned}
J_1(f,f_N)&=\left\|f(x)-f_N(x)\right\|_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)}=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)(f(x)-f_N(x))^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},\\
J_2(f,f_N)&=\left\|f(x)-f_N(x)\right\|_{L_2((-\infty,+\infty))}=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x)-f_N(x))^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},\\
J_3(f,f_N)&=\left\|f(x)-f_N(x)\right\|_{C((-\infty,+\infty))}=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|f(x)-f_N(x)\right|.
\end{aligned} \tag{10}$$

Результаты расчетов приведены на рис. 5–8 и в таблице 1.

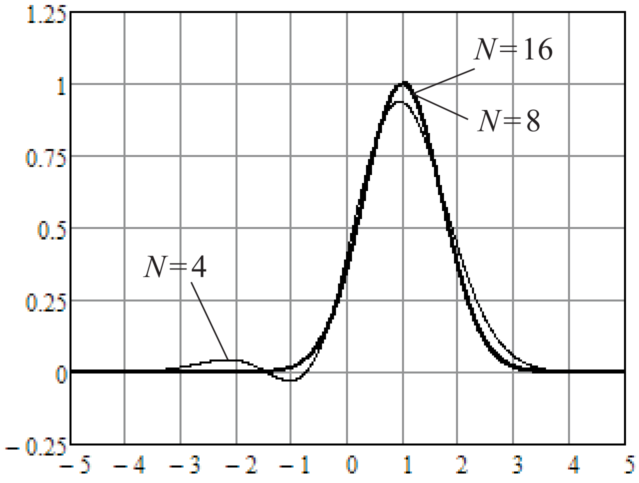

Рис. 5. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = 0$ и различных значениях N

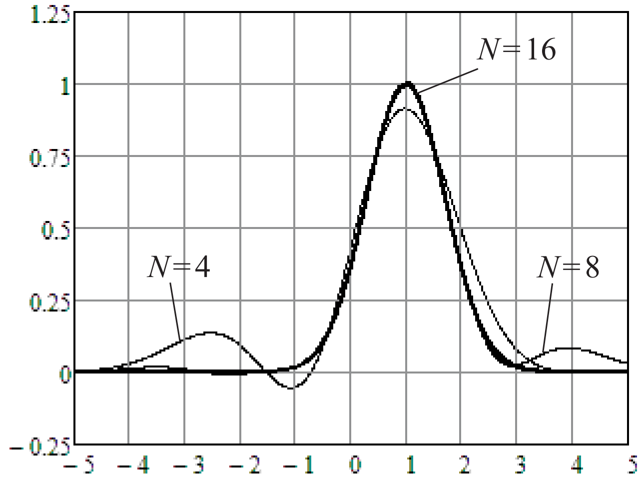

Рис. 6. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

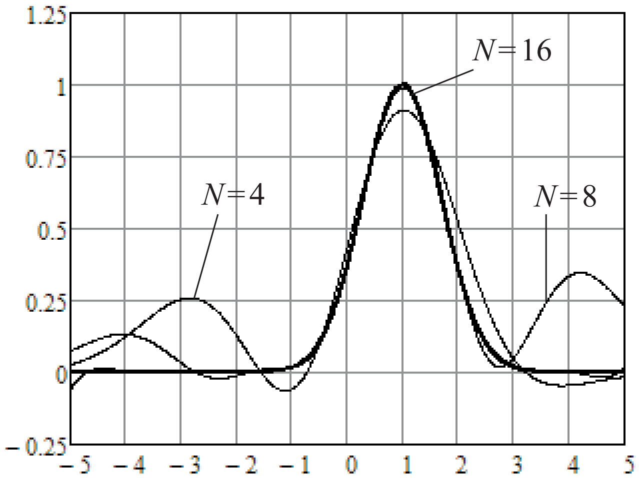

Рис. 7. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

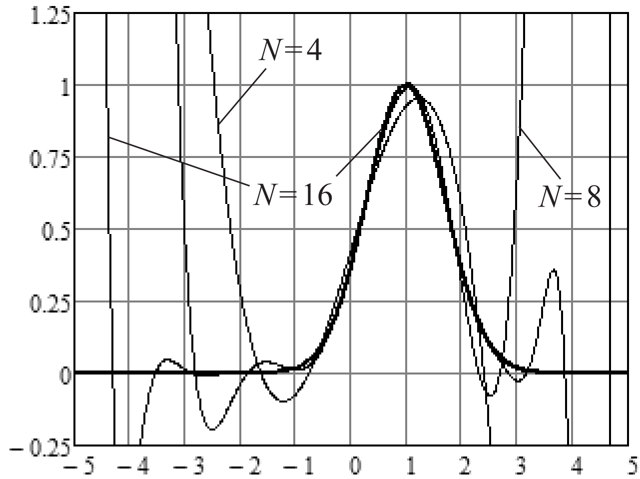

Рис. 8. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = 1$ и различных значениях N

Таблица 1

Погрешности аппроксимации функции $f(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	0.112455/ 0.112455/ 0.077079	0.101199/ 0.220128/ 0.137704	0.092361/ 0.362243/ 0.258464	0.071997/ –/ –
$N = 8$	0.005680/ 0.005680/ 0.003266	0.011924/ 0.094106/ 0.084435	0.015042/ 0.441647/ 0.346429	0.019967/ –/ –
$N = 16$	0.000109/ 0.000109/ 0.000053	0.000244/ 0.020224/ 0.018432	0.000324/ 0.784199/ 0.504466	0.000962/ –/ –

На представленных рисунках толстой линией показан график функции $f(x)$, а тонкой – графики функций $f_N(x)$ при различных N, в следующих примерах принята такая же система обозначений: толстая линия для аппроксимируемой функции, тонкие – для ее приближений. В таблице 1 и в последующих таблицах, если это не оговорено особо, данные (погрешности, вычисленные по различным критериям) представлены в форме $J_1 / J_2 / J_3$.

Пример 2. Рассмотрим задачу приближенного представления плотности логарифмически нормального распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, \quad x \le 0, \end{cases}$$

с параметрами $\mu = 1$ и $\sigma^2 = \frac{1}{5}$ в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Эрмита.

Как и в примере 1, найдем коэффициенты разложения, используя формулу (7):

$$f_j = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \omega^\alpha(x) e_j(x) \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-\frac{5(\ln x - 1)^2}{2}} dx,$$

и ограничимся конечным числом первых N членов ряда (6), в этом случае функция $f_N(x)$ аппроксимирует $f(x)$ в пространстве $L_2\big((-\infty, +\infty); \omega^\alpha(x)\big)$ (см. (8) и (9)). Используя критерии (10), сравним погрешности аппроксимации функции $f(x)$ функцией $f_N(x)$ при различных N и α, положив $m = 3$ и $D = 1$ (см. рис. 9–12 и табл. 2).

Проведенные в примерах 1 и 2 расчеты показывают, что значение критерия J_1 убывает с ростом N (*порядка усечения*) (отметим, что значения критериев J_2 и J_3 не определены при $\alpha = 1$, так как в этом случае модуль разности $f(x) - f_N(x)$ неограниченно возрастает при $x \to \infty$ и фиксированном N).

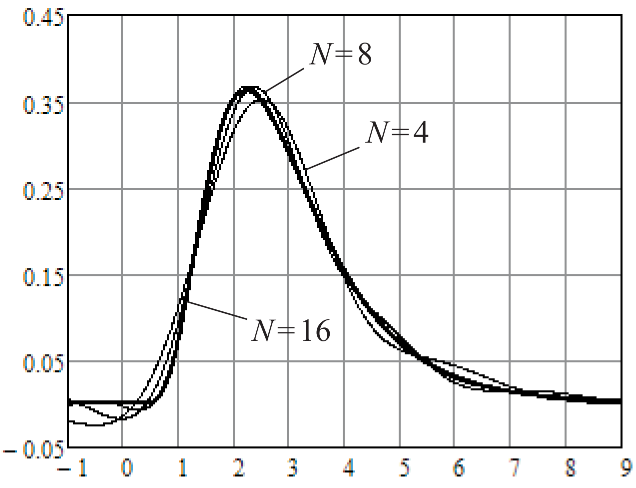

Рис. 9. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = 0$ и различных значениях N

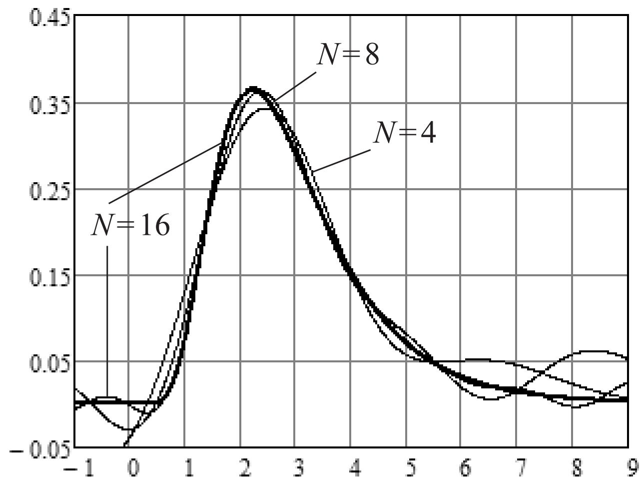

Рис. 10. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

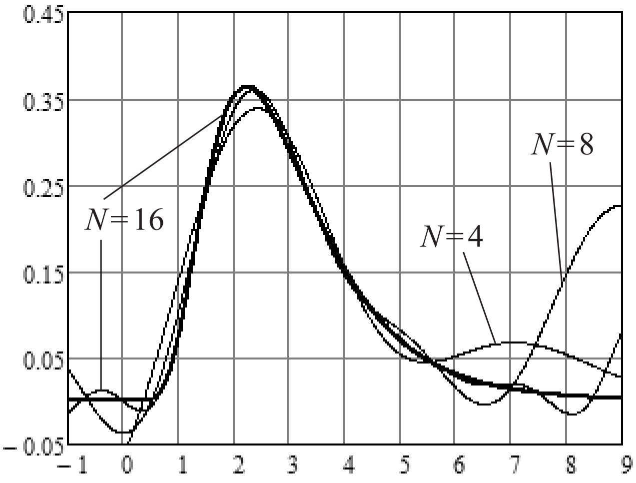

Рис. 11. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

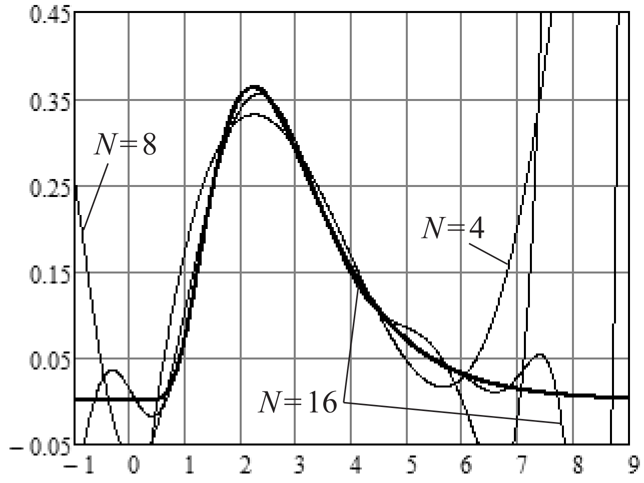

Рис. 12. Графики функций $f(x)$ и $f_N(x)$ при $\alpha = 1$ и различных значениях N

Таблица 2

Погрешности аппроксимации функции $f(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	0.060035/ 0.060035/ 0.049587	0.044643/ 0.115902/ 0.073689	0.039420/ 0.219134/ 0.140157	0.031663/ –/ –
$N = 8$	0.032141/ 0.032141/ 0.027641	0.023297/ 0.094601/ 0.057536	0.019621/ 0.337968/ 0.223236	0.011905/ –/ –
$N = 16$	0.009743/ 0.009743/ 0.008399	0.006132/ 0.320016/ 0.179507	0.004935/ 6.981292/ 3.903064	0.002739/ –/ –

Критерии J_2 и J_3 характеризуют среднеквадратическое и равномерное приближение функции $f(x)$ функциями $f_N(x)$ без учета веса; погрешность, рассчитанная по этим критериям приведена для сравнения. Если при решении задачи аппроксимации функции ориентироваться на подобные критерии, то имеет смысл (особенно с ростом α) рассчитывать погрешности по формулам, аналогичным для J_2 и J_3 в (10), только для конечных подмножеств множества действительных чисел.

Отметим также, что существенное влияние на точность аппроксимации при фиксированном N оказывает выбор параметров m и D.

Спектральные характеристики линейных операторов

Используя определение обобщенных функций Эрмита и рекуррентную формулу для них (см. (3) и (5)), получим соотношения для вычисления спектральных характеристик линейных операторов: умножения, дифференцирования и интегрирования. Эти соотношения требуются, например, для решения задачи анализа выходных процессов линейных детерминированных нестационарных систем управления (как при детерминированных, так и при случайных воздействиях) с помощью спектральной формы математического описания [4, 14, 15].

Важно отметить, что полученные здесь соотношения могут быть полезными и для более сложных задач: анализа и синтеза нелинейных детерминированных и стохастических систем управления [6, 8, 12].

Предложенную методику вывода соотношений можно использовать и для расчета спектральных характеристик других линейных операторов: операторов Фредгольма, операторов сдвига и т.п. [2], необходимых при применении спектральной формы математического описания к решению, например, линейных интегральных уравнений и уравнений с отклоняющимся аргументом [11].

Спектральные характеристики операторов умножения

Рассмотрим оператор умножения на функцию $a(x)$, т.е. линейный оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ произведение $a(x)f(x)$.

Спектральной характеристикой оператора умножения на функцию $a(x)$ (*двумерной нестационарной передаточной функцией усилительного звена*) называется бесконечная двумерная матрица A, элементы которой вычисляются следующим образом [6, 15]:

$$A_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x)a(x)e_i(x)e_j(x)dx = \frac{\tilde{A}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0,1,2,...,$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x)a(x)E_i(x)E_j(x)dx. \tag{11}$$

Для получения рекуррентных формул, требующихся при вычислении элементов $\tilde{A}_{ij+1}$, преобразуем произведение $E_i(x)E_{j+1}(x)$, используя соотношение (5):

$$E_i(x)E_{j+1}(x) = E_i(x)\Big((x-m)E_j(x) - jDE_{j-1}(x)\Big) = (x-m)E_i(x)E_j(x) - jDE_i(x)E_{j-1}(x) =$$
$$= \big(E_{i+1}(x) + iDE_{i-1}(x)\big)E_j(x) - jDE_i(x)E_{j-1}(x) = E_{i+1}(x)E_j(x) + iDE_{i-1}(x)E_j(x) - jDE_i(x)E_{j-1}(x),$$

следовательно, $\tilde{A}_{ij+1} = \tilde{A}_{i+1j} + iD\tilde{A}_{i-1j} - jD\tilde{A}_{ij-1}$.

Заметим, что полученное выражение совпадает с рекуррентной формулой для элементов спектральной характеристики оператора умножения в случае полиномов Эрмита ($\alpha = 1$) и функций Эрмита ($\alpha = 0$), полученной в [9].

Наряду с найденным соотношением можно использовать свойство симметричности спектральной характеристики оператора умножения: $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}$.

Элементы $\tilde{A}_{i0}$ и $\tilde{A}_{0j}$ можно вычислить по определению:

$$\tilde{A}_{i0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) a(x) E_i(x) E_0(x) dx, \quad \tilde{A}_{0j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) a(x) E_0(x) E_j(x) dx = \tilde{A}_{j0}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $a(x) = (x-m)^n$ (n – заданное целое неотрицательное число). Умножая левую и правую части соотношения (5) на $(x-m)^n E_i(x)$, где m – один из параметров обобщенных функций Эрмита, имеем

$$(x-m)^n E_i(x) E_{j+1}(x) = (x-m)^{n+1} E_i(x) E_j(x) - jD(x-m)^n E_i(x) E_{j-1}(x),$$

или

$$(x-m)^{n+1} E_i(x) E_j(x) = (x-m)^n E_i(x) E_{j+1}(x) + jD(x-m)^n E_i(x) E_{j-1}(x).$$

Отсюда несложно получить, что элементы A_{ij}^n спектральной характеристики оператора умножения на функцию $(x-m)^n$ связаны соотношением

$$A_{ij}^n = \frac{\hat{A}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}},$$

причем

$$\hat{A}_{ij}^{n+1} = \hat{A}_{ij+1}^n + jD\hat{A}_{ij-1}^n. \tag{12}$$

Для $n = 0$ $\hat{A}_{ij}^n = \Delta_{ij}$, где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} h_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \text{или} \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} j!D^j, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{13}$$

что является следствием ортогональности обобщенных функций Эрмита (см. (4)).

Заметим, что матрица с элементами Δ_{ij} (*ненормированная спектральная характеристика оператора умножения* на функцию $(x-m)^0 = 1$) представляет собой диагональную матрицу, поэтому с учетом (12) получаем, что матрицы с элементами $\hat{A}_{ij}^n$ (ненормированные спектральные характеристики операторов умножения на функции $(x-m)^n$) при $n > 0$ являются ленточными матрицами [7] (при $n = 1$ – трехдиагональной, при $n = 2$ – пятидиагональной и т.д.). На основании этого, а также свойства симметричности ($\hat{A}_{ij}^n = \hat{A}_{ji}^n$) имеем

$$\hat{A}_{ij}^{n}=\begin{cases}\Delta_{ij}, & n=0,\\ 0, & |i-j|>n,\\ \hat{A}_{ij+1}^{n-1}+jD\hat{A}_{ij-1}^{n-1}, & i\le j,\\ \hat{A}_{ji}^{n}, & i>j.\end{cases}$$

Это соотношение можно использовать для вычисления элементов спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a(x)=x^n$:

$$A_{ij}^{n}=\frac{\tilde{A}_{ij}^{n}}{\sqrt{h_i h_j}},$$

где

$$\tilde{A}_{ij}^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k m^{n-k}\hat{A}_{ij}^{k}. \tag{14}$$

Последнее выражение следует из разложения функции x^n по степеням $(x-m)$ и свойства линейности интеграла (11); $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k.

В качестве примера приведем спектральную характеристику оператора умножения на функцию $a(x)=x$ при $m=0,\ D=\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{1}{3}$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots\\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \cdots\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу приближенного представления функции $w(x)=x\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Эрмита.

Воспользуемся результатами примера 1, в котором вычислялись коэффициенты разложения функции $f(x)=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ относительно системы нормированных обобщенных функций Эрмита. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику F функции $f(x)$, которая представляет собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец:

$$F=[\ f_0\quad f_1\quad f_2\quad \ldots\ ]^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

Используя свойства спектральных характеристик операторов умножения [6, 15], можно вычислить спектральную характеристику W функции $w(x)$ как произведение спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $a(x)=x$ и спектральной характеристики F функции $f(x)$:

$$W = A \cdot F = [\; w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \ldots \;]^{\mathrm{T}},$$

и, таким образом, приближенно получить коэффициенты разложения w_j функции $w(x)$ относительно системы нормированных обобщенных функций Эрмита, т.е.

$$w(x) \approx w_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} A_{ji} f_i \right) e_j(x).$$

Здесь важно подчеркнуть, что спектральные характеристики F, A и W определены относительно одной и той же системы функций $\{e_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ (имеющих фиксированные параметры m, D и α). Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения N, т.е. A – квадратная матрица размеров $N \times N$, F и W – матрицы-столбцы размеров $N \times 1$. Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, в этом случае F, A и W – бесконечные матрицы [3, 6].

Как и в примере 1, положим $m=0$ и $D=\frac{1}{2}$ и найдем функцию $w_N(x)$ при различных N и α. Погрешность аппроксимации функции $w(x)$ функцией $w_N(x)$ будем вычислять по критериям (10). Результаты расчетов приведены на рис. 13–16 и в таблице 3.

Соотношения для элементов *спектральной характеристики множительного звена* (*трехмерной нестационарной передаточной функции множительного звена*), необходимость в которой возникает при анализе и синтезе нелинейных систем управления, аналогичны полученным в [9]:

$$V_{ijk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_i(x) e_j(x) e_k(x) dx = \frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{h_i h_j h_k}}, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + jD\tilde{V}_{ij-1k} - kD\tilde{V}_{ijk-1}.$$

При $\alpha = 1$ элементы V_{0jk}, V_{i0k}, V_{ij0} – это элементы единичной матрицы, а при $\alpha \neq 1$ – их можно вычислять с помощью определения. Кроме того, при вычислении этой характеристики нужно использовать свойство симметричности: $V_{ijk} = V_{ikj} = V_{jik} = V_{jki} = V_{kij} = V_{kji}$.

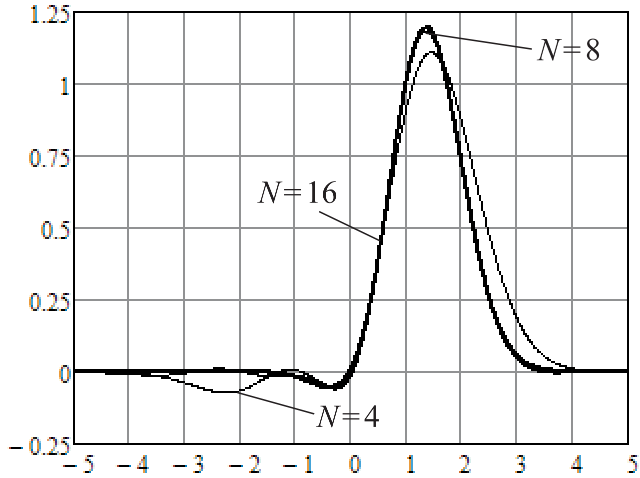

Рис. 13. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = 0$ *и различных значениях* N

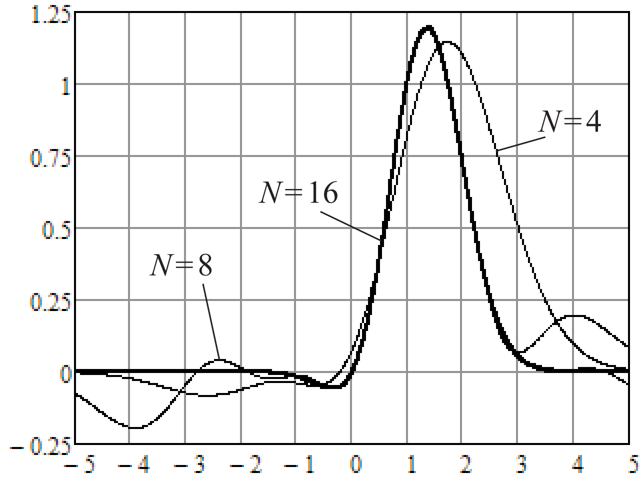

Рис. 14. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{3}$ *и различных значениях* N

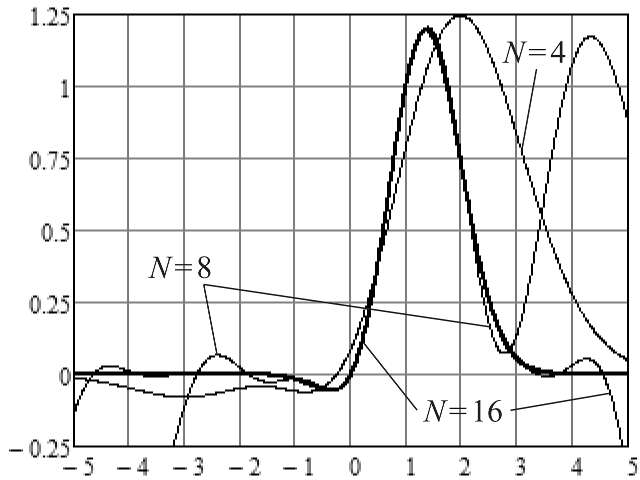

Рис. 15. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{2}$ *и различных значениях* N

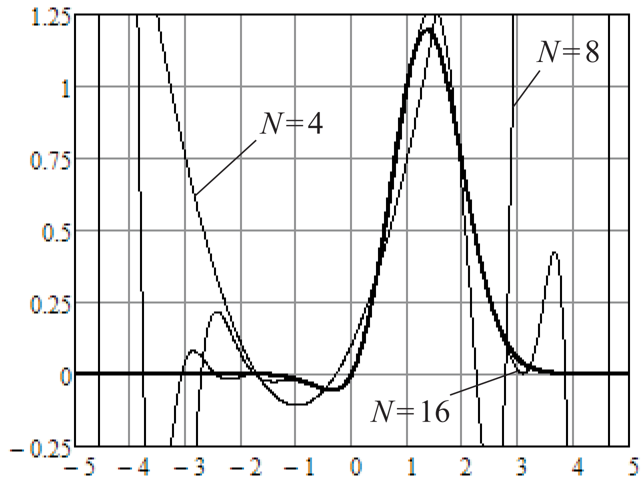

Рис. 16. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = 1$ *и различных значениях* N

Таблица 3

Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	0.227673/ 0.227673/ 0.210512	0.221761/ 0.628256/ 0.573349	0.203314/ 1.002709/ 0.863621	0.142124/ –/ –
$N = 8$	0.024555/ 0.024555/ 0.013792	0.026694/ 0.303896/ 0.197122	0.034887/ 1.758577/ 1.173026	0.046266/ –/ –
$N = 16$	0.000382/ 0.000382/ 0.000248	0.001041/ 0.100573/ 0.093576	0.001251/ 1.916836/ 1.400537	0.002547/ –/ –

Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Найдем соотношение, связывающее обобщенные функции Эрмита и их производные. Воспользуемся определением (3):

$$
\begin{aligned}
E_j'(x) &= \omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)G_j'(x) + \left(\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)\right)' G_j(x) = j\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)G_{j-1}(x) + \\
&+ \frac{1-\alpha}{2}\omega^{-\frac{1+\alpha}{2}}(x)\left(-\frac{x-m}{D}\right)\omega(x)G_j(x) = jE_{j-1}(x) - \frac{1-\alpha}{2D}(x-m)E_j(x).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Затем выразим функцию $(x-m)E_j(x)$ из соотношения (5):

$$
(x-m)E_j(x) = E_{j+1}(x) + jDE_{j-1}(x). \tag{17}
$$

Подставляя (17) в (16), получаем

$$
E_j'(x) = j\frac{1+\alpha}{2}E_{j-1}(x) - \frac{1-\alpha}{2D}E_{j+1}(x). \tag{18}
$$

Напомним определение *спектральной характеристики оператора дифференцирования*, ставящего в соответствие функции $f(x)$ ее производную $f'(x)$. Спектральной характеристикой P оператора дифференцирования называется бесконечная двумерная матрица, элементы которой задаются в виде [6, 15]

$$
\mathrm{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i,j = 0,1,2,..., \tag{19}
$$

где

$$
\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x)E_i(x)E_j'(x)dx. \tag{20}
$$

Матрица P также называется *двумерной нестационарной передаточной функцией дифференцирующего звена*.

Подставляя правую часть равенства (18) в (20) и учитывая условие ортогональности обобщенных функций Эрмита с весом $\omega^{\alpha}(x)$, находим выражение для элементов $\tilde{\mathrm{P}}_{ij}$:

$$
\tilde{\mathrm{P}}_{ij} = j\frac{1+\alpha}{2}\Delta_{ij-1} - \frac{1-\alpha}{2D}\Delta_{ij+1}. \tag{21}
$$

Так как матрица с элементами Δ_{ij} диагональная (см (13)), спектральная характеристика P при $\alpha \in [0,1)$ представляет собой матрицу, у которой отличны от нуля только элементы P_{ij}, индексы которых связаны соотношением $|i-j| = 1$. При $\alpha = 1$ только элементы вида P_{ii+1} отличны от нуля.

Формула для вычисления элементов P_{ij} спектральной характеристики P при $i = j-1$ записывается в виде

$$\mathrm{P}_{ij} = j\frac{1+\alpha}{2}\frac{h_{j-1}}{\sqrt{h_i h_j}} = j\frac{1+\alpha}{2}\frac{(j-1)!D^{j-1}}{\sqrt{(j-1)!D^{j-1}j!D^j}} = j\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\frac{(j-1)!}{j!D}} = \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\frac{j}{D}}.$$

Аналогично, при $i = j+1$ получаем

$$\mathrm{P}_{ij} = -\frac{1-\alpha}{2D}\frac{h_i}{\sqrt{h_i h_j}} = -\frac{1-\alpha}{2D}\frac{(j+1)!D^{j+1}}{\sqrt{(j+1)!D^{j+1}j!D^j}} = -\frac{1-\alpha}{2D}\sqrt{\frac{(j+1)!D^{j+1}}{j!D^j}} = -\frac{1-\alpha}{2}\sqrt{\frac{i}{D}}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(1+\alpha)}{2}\sqrt{\dfrac{j}{D}}, & i = j-1, \\ 0, \quad i \neq j-1, & i \neq j+1, \\ -\dfrac{(1-\alpha)}{2}\sqrt{\dfrac{i}{D}}, & i = j+1. \end{cases}$$

Например, при $D = 1$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ спектральная характеристика оператора дифференцирования имеет вид

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Рассмотрим задачу приближенного представления производной $w(x) = f'(x)$ плотности логарифмически нормального распределения с параметрами $\mu = 1$ и $\sigma^2 = \frac{1}{5}$ (см. пример 2) в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Эрмита.

Воспользуемся результатами примера 2, в котором приведена формула расчета коэффициентов разложения f_j относительно системы нормированных обобщенных функций Эрмита. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику F функции $f(x)$, которая представляет собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец (см. (15)).

Используя свойства спектральных характеристик оператора дифференцирования [6, 15], получаем

$$W = \mathrm{P} \cdot F = [\, w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \ldots \,]^{\mathrm{T}},$$

где W – спектральная характеристика функции $w(x) = f'(x)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции относительно системы $\{e_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Следовательно,

$$w(x) \approx w_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j e_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{P}_{ji} f_i \right) e_j(x).$$

Как и в примере 3, спектральные характеристики F, P и W определены относительно одной и той же системы функций $\{e_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения N, т.е. P – квадратная матрица размеров $N \times N$, F и W – матрицы-столбцы размеров $N \times 1$. Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, в этом случае F, P и W – бесконечные матрицы.

Положим $m = 3$ и $D = 1$ и найдем функцию $w_N(x)$ при различных N и α. Погрешность аппроксимации функции $w(x)$ функцией $w_N(x)$ будем вычислять по критериям (10). Результаты расчетов приведены на рис. 17–20 и в таблице 4.

Далее рассмотрим оператор дифференцирования второго порядка, ставящий в соответствие функции $f(x)$ ее вторую производную $f''(x)$. Элементы спектральной характеристики P^2 этого оператора задаются выражением

$$\mathrm{P}_{ij}^2 = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^2}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

где

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) E_j''(x) dx, \tag{23}$$

или, согласно свойствам композиции линейных операторов [6],

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P} \cdot \mathrm{P}. \tag{24}$$

При усечении спектральных характеристик (которое используется, например, для приближенного решения задачи представления функций и их производных) формула (24) в общем случае оказывается неверна. При приближенных расчетах можно использовать как $\mathrm{P} \cdot \mathrm{P}$, так и P^2, однако в последнем случае точность приближения производных будет выше.

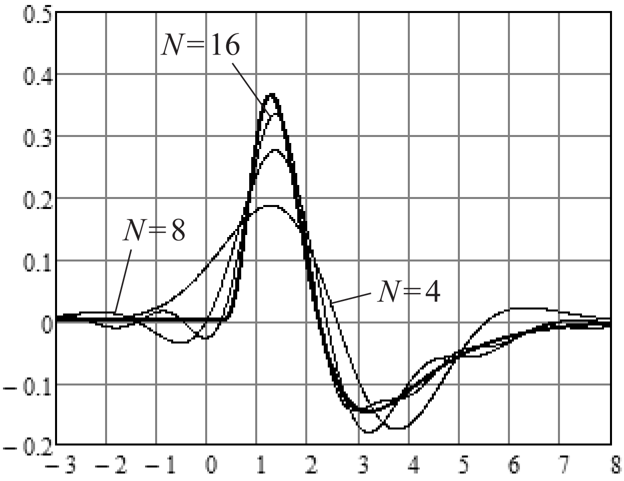

Рис. 17. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = 0$ *и различных значениях* N

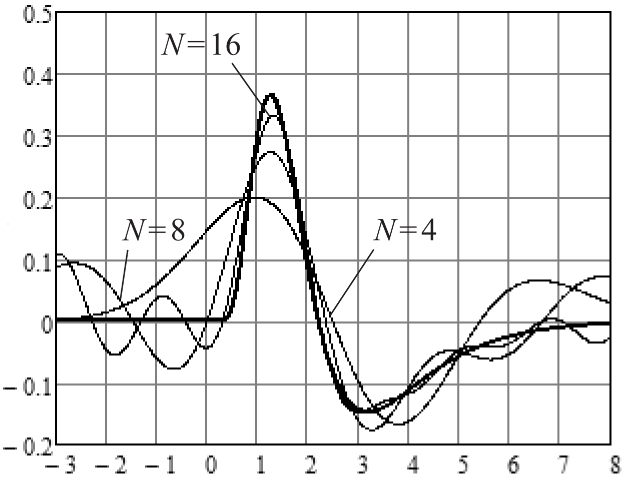

Рис. 18. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{3}$ *и различных значениях* N

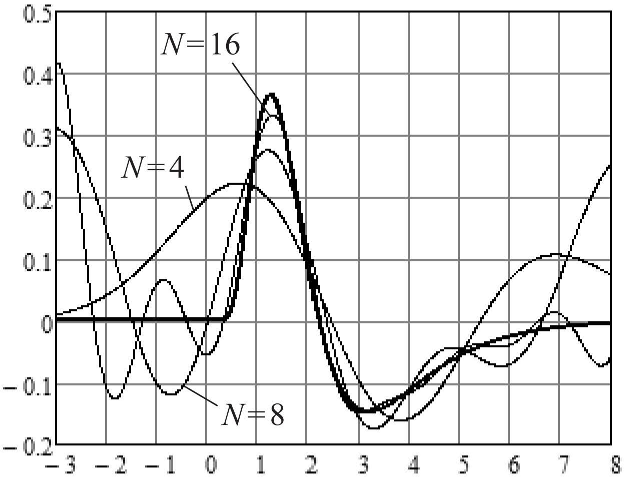

Рис. 19. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{2}$ *и различных значениях* N

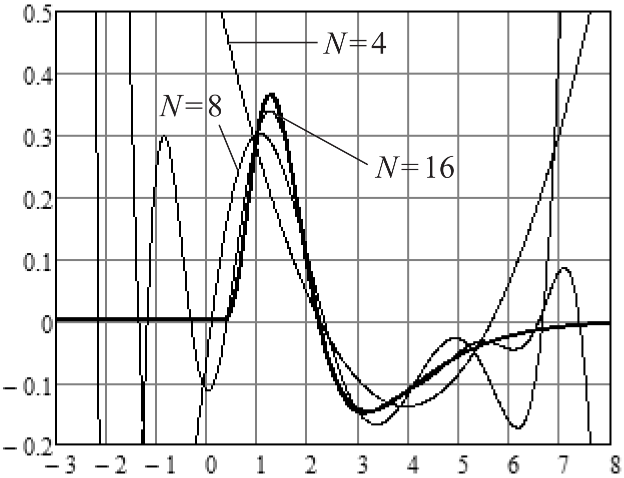

Рис. 20. Графики функций $w(x)$ *и* $w_N(x)$ *при* $\alpha = 1$ *и различных значениях* N

Таблица 4

Погрешности аппроксимации функции $w(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	0.199527/ 0.199527/ 0.177967	0.137216/ 0.255708/ 0.175831	0.115631/ 0.335094/ 0.214855	0.077894/ –/ –
$N = 8$	0.102511/ 0.102511/ 0.093201	0.072595/ 0.198334/ 0.118254	0.061041/ 0.607787/ 0.313022	0.034587/ –/ –
$N = 16$	0.047501/ 0.047501/ 0.047057	0.002947/ 1.013153/ 0.574857	0.023035/ 16.838571/ 8.455914	0.011868/ –/ –

Для получения рекуррентных соотношений, связывающих элементы $\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{2}$, продифференцируем левую и правую части равенства (18) и воспользуемся полученным результатом для преобразования (23). Тогда

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{2} = j\frac{1+\alpha}{2}\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1} - \frac{1-\alpha}{2D}\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1}. \tag{25}$$

Далее воспользуемся выражением (21) для элементов спектральной характеристики оператора дифферецирования:

$$\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{2} = j\frac{1+\alpha}{2}\left[(j-1)\frac{1+\alpha}{2}\Delta_{ij-2} - \frac{1-\alpha}{2D}\Delta_{ij}\right] - \frac{1-\alpha}{2D}\left[(j+1)\frac{1+\alpha}{2}\Delta_{ij} - \frac{1-\alpha}{2D}\Delta_{ij+2}\right] =$$

$$= j(j-1)\frac{(1+\alpha)^2}{4}\Delta_{ij-2} - j\frac{1-\alpha^2}{4D}\Delta_{ij} - (j+1)\frac{1-\alpha^2}{4D}\Delta_{ij} + \frac{(1-\alpha)^2}{4D^2}\Delta_{ij+2} =$$

$$= j(j-1)\frac{(1+\alpha)^2}{4}\Delta_{ij-2} - (2j+1)\frac{1-\alpha^2}{4D}\Delta_{ij} + \frac{(1-\alpha)^2}{4D^2}\Delta_{ij+2}.$$

Опираясь на соотношения (13) и (22), находим выражение для вычисления элементов P_{ij}^{2} спектральной характеристики P^{2} при $i = j$:

$$\mathrm{P}_{ij}^{2} = -(2j+1)\frac{1-\alpha^2}{4D}\frac{h_j}{\sqrt{h_i h_j}} = -(2j+1)\frac{1-\alpha^2}{4D}\sqrt{\frac{h_j}{h_i}} = -\frac{2j+1}{4D}(1-\alpha^2).$$

Аналогично, при $i = j-2$ получаем

$$\mathrm{P}_{ij}^{2} = j(j-1)\frac{(1+\alpha)^2}{4}\frac{h_{j-2}}{\sqrt{h_i h_j}} = j(j-1)\frac{(1+\alpha)^2}{4}\sqrt{\frac{(j-2)!D^{j-2}}{j!D^j}} =$$

$$= j(j-1)\frac{(1+\alpha)^2}{4}\sqrt{\frac{1}{j(j-1)D^2}} = \frac{\sqrt{j(j-1)}}{4D}(1+\alpha)^2,$$

а при $i = j+2$ –

$$\mathrm{P}_{ij}^{2} = \frac{(1-\alpha)^2}{4D^2}\frac{h_{j+2}}{\sqrt{h_i h_j}} = \frac{(1-\alpha)^2}{4D^2}\sqrt{\frac{(j+2)!D^{j+2}}{j!D^j}} = \frac{\sqrt{(j+1)i}}{4D}(1-\alpha)^2.$$

При любом другом соотношении между индексами i и j $\mathrm{P}_{ij}^{2} = 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$
\mathrm{P}_{ij}^{2} = \begin{cases} -\dfrac{2j+1}{4D}(1-\alpha^2), & i = j, \\ \dfrac{\sqrt{j(j-1)}}{4D}(1+\alpha)^2, & i = j-2, \\ \dfrac{\sqrt{(j+1)i}}{4D}(1-\alpha)^2, & i = j+2, \\ 0, \quad i \neq j, \quad i \neq j-2, \quad i \neq j+2. \end{cases}
$$

Например, при $D = 1$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ спектральная характеристика оператора дифференцирования второго порядка имеет вид

$$
\mathrm{P}^{2} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & 0 & \frac{4\sqrt{2}}{9} & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4\sqrt{6}}{9} & \cdots \\ \frac{\sqrt{2}}{9} & 0 & -\frac{10}{9} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{9} & 0 & -\frac{14}{9} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

Используя такую же методику, находим соотношения для *спектральной характеристики* P^{n} *оператора дифференцирования порядка* n:

$$
\mathrm{P}_{ij}^{n} = \frac{\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,
$$

где

$$
\tilde{\mathrm{P}}_{ij}^{n} = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ j\dfrac{1+\alpha}{2}\tilde{\mathrm{P}}_{ij-1}^{n-1} - \dfrac{1-\alpha}{2D}\tilde{\mathrm{P}}_{ij+1}^{n-1}, & n > 0. \end{cases}
$$

Очевидно, что выражения (19), (21) и (22), (25) являются частными случаями двух последних соотношений при $n = 1$ и $n = 2$ соответственно. Заметим также, что

$$
\mathrm{P}^{n} = \underbrace{\mathrm{P} \cdot \mathrm{P} \cdots \mathrm{P}}_{n}.
$$

Спектральные характеристики операторов интегрирования

Далее рассмотрим оператор интегрирования, ставящий в соответствие функции $f(x)$ ее первообразную $\int_0^x f(\xi)d\xi$. *Спектральной характеристикой оператора интегрирования* (*двумерной нестационарной передаточной функцией интегрирующего звена*) называется бесконечная двумерная матрица P^{-1}, элементы которой вычисляются следующим образом [6, 15]:

$$P_{ij}^{-1} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0,1,2,...,$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) \left(\int_0^x E_j(\xi) d\xi \right) dx. \tag{26}$$

Найдем вспомогательные рекуррентные соотношения для обобщенных функций Эрмита (3), проинтегрировав левую и правую части равенства (18):

$$\int_0^x E_j'(\xi) d\xi = j \frac{1+\alpha}{2} \int_0^x E_{j-1}(\xi) d\xi - \frac{1-\alpha}{2D} \int_0^x E_{j+1}(\xi) d\xi,$$

или

$$E_j(x) - E_j(0) = j \frac{1+\alpha}{2} \int_0^x E_{j-1}(\xi) d\xi - \frac{1-\alpha}{2D} \int_0^x E_{j+1}(\xi) d\xi,$$

и выразим $\int_0^x E_{j+1}(\xi) d\xi$:

$$\int_0^x E_{j+1}(\xi) d\xi = \frac{2D}{1-\alpha} \left[j \frac{1+\alpha}{2} \int_0^x E_{j-1}(\xi) d\xi + E_j(0) - E_j(x) \right], \quad \alpha \neq 1. \tag{27}$$

Получим рекуррентную формулу для расчета элементов спектральной характеристики оператора интегрирования. Для этого запишем выражение, определяющее значение $\tilde{P}_{ij+1}^{-1}$, и воспользуемся (27):

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = \frac{2D}{1-\alpha} \left[j \frac{1+\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) \int_0^x E_{j-1}(\xi) d\xi \, dx + E_j(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) E_j(x) dx \right] =$$

$$= \frac{2D}{1-\alpha} \left[j \frac{1+\alpha}{2} \tilde{P}_{ij-1}^{-1} + E_j(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) dx - \Delta_{ij} \right] = jD \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \tilde{P}_{ij-1}^{-1} + \frac{2D}{1-\alpha} \tilde{X}_i^0 E_j(0) - \frac{2D}{1-\alpha} \Delta_{ij}, \tag{28}$$

где

$$\tilde{X}_i^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) E_i(x) dx, \quad i = 0,1,2,... \tag{29}$$

Фактически $\tilde{X}_i^0$ – элементы *ненормированной спектральной характеристики функции* $f(x) = 1$, определенной относительно системы обобщенных функций Эрмита (3). Для вычисления этих элементов снова воспользуемся соотношением (18), а $\tilde{X}_0^0$ найдем непосредственно из соотношения (29). Тогда

$$\tilde{X}_i^0 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4\pi D}{1+\alpha}}(2\pi D)^{-\frac{1+\alpha}{4}}, & i = 0, \\ (i-1)D\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\hat{X}_{i-2}^0, & i > 0. \end{cases}$$

Соотношение (28) позволяет вычислять значения $\tilde{P}_{ij}^{-1}$ при $j > 0$. В случае $j = 0$ можно воспользоваться определением (26).

В частном случае при $m = 0$ формула для вычисления элементов P_{ij}^{-1} спектральной характеристики P^{-1} записывается в виде

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+\alpha}\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{k-1}\sqrt{\dfrac{D(2k-2)!!}{(2k-1)!!}}, & i = 2k-1, \quad j = 0, \\ 0, \quad i = 2k, \quad j = 0, \\ -\dfrac{2\sqrt{D}}{1-\alpha}\dfrac{\delta_{ij-1}}{\sqrt{j}} + \dfrac{2\sqrt{D}}{1-\alpha}\dfrac{\beta_{ij-1}}{\sqrt{j}} + \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}P_{ij-2}^{-1}\sqrt{\dfrac{j-1}{j}}, & j > 0, \end{cases}$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad \beta_{ij} = \begin{cases} (-1)^s\sqrt{\dfrac{(2k-1)!!\,(2s-1)!!}{(2k)!!\,(2s)!!}}\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^k\sqrt{\dfrac{2}{1+\alpha}}, & i = 2k, \quad j = 2s, \\ 0, \quad i \neq 2k \quad \text{или} \quad j \neq 2s. \end{cases}$$

Например, при $D = 1$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ имеем

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{6}}{2} - 3 & 0 & \frac{\sqrt{6}(3\sqrt{6}-6)}{3} - \frac{3}{2} & \cdots \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{9\sqrt{2}}{8} - \sqrt{3} & \cdots \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно вычислять спектральные характеристики операторов интегрирования, ставящих в соответствие функции $f(x)$ ее первообразную $\int\limits_a^x f(\xi)d\xi$, где a – произвольное число, или $\int\limits_{-\infty}^x f(\xi)d\xi$. Например, в последнем случае формула (28) при $\alpha \neq 1$ примет вид $\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = jD\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\tilde{P}_{ij-1}^{-1} - \dfrac{2D}{1-\alpha}\Delta_{ij}$.

Пример 5. Рассмотрим задачу приближенного представления функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$ в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Эрмита.

Для решения этой задачи будем использовать свойства спектрального преобразования операторов интегрирования [6, 15]. Поэтому сначала найдем спектральную характеристику F функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$F = [\, f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \ldots \,]^{\mathrm{T}},$$

где

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_j(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, dx, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Поскольку рассматривается задача приближенного представления функции, то F – матрица-столбец с конечным числом элементов ($j = 0,1,2,\ldots,N-1$); для точного представления необходимо вычислять всю совокупность коэффициентов разложения f_i, тогда F будет представлять собой матрицу-столбец с бесконечным числом элементов. Заметим, что для рассматриваемой задачи можно подобрать параметры базисной системы (m, D и α) таким образом, чтобы $f_j = 0$ при $j = 1,2,\ldots$

Спектральная характеристика функции Лапласа $\Phi(x)$ определяется выражением

$$\Phi = P^{-1} \cdot F = [\, \varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \ldots \,]^{\mathrm{T}},$$

где φ_j – коэффициенты разложения этой функции относительно системы нормированных обобщенных функций Эрмита, т.е.

$$\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j e_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} P_{ji}^{-1} f_i \right) e_j(x).$$

Здесь, как и в двух предыдущих примерах, предполагается, что спектральные характеристики Φ, P^{-1} и F определены относительно одной и той же системы функций $\{e_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и имеют одинаковые порядки усечения.

Положим $m = 0$, $D = \frac{1}{2}$ и найдем функцию $\Phi_N(x)$ при различных N и α. Погрешность аппроксимации функции $\Phi(x)$ функцией $\Phi_N(x)$ будем вычислять только по критерию J_1 (см. (10)), так как функция Лапласа не является элементом пространства $L_2\big((-\infty,+\infty)\big)$ и, следовательно, вычислять значения критерия J_2 не имеет смысла. Кроме того, нетрудно показать, что $|\,\Phi(x) - \Phi_N(x)\,| \to \frac{1}{2}$ при $x \to \infty$ и $\alpha \in [0,1)$, $|\,\Phi(x) - \Phi_N(x)\,|$ неограниченно возрастает при $x \to \infty$ и $\alpha = 1$. Результаты расчетов приведены на рис. 21–24 и в таблице 5.

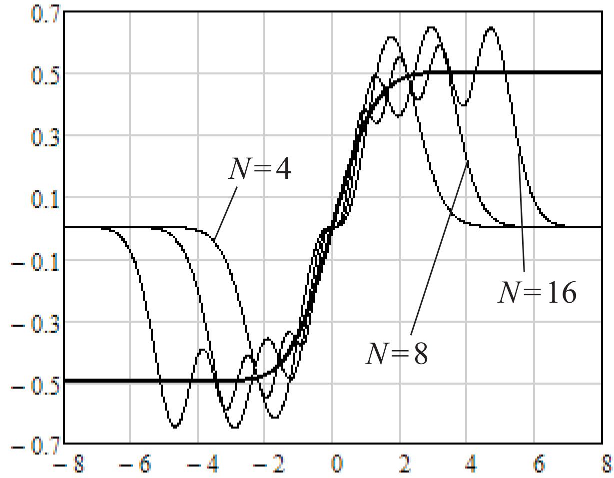

Рис. 21. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\alpha = 0$ *и различных значениях* N

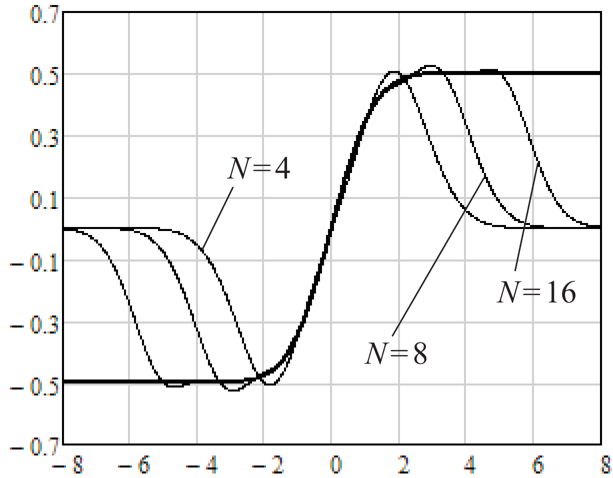

Рис. 22. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{3}$ *и различных значениях* N

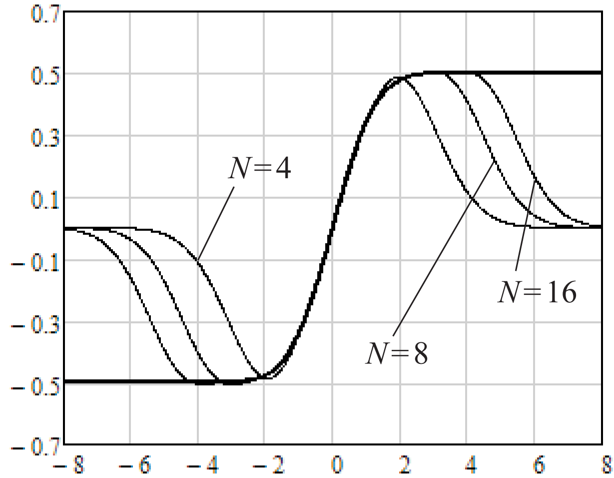

Рис. 23. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\alpha = \frac{1}{2}$ *и различных значениях* N

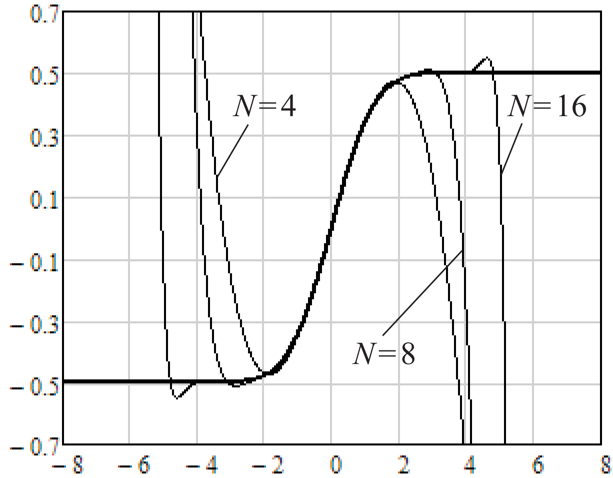

Рис. 24. Графики функций $\Phi(x)$ *и* $\Phi_N(x)$ *при* $\alpha = 1$ *и различных значениях* N

Таблица 5

Погрешности аппроксимации функции $\Phi(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	–	0.086656	0.027442	0.007257
$N = 8$	–	0.020489	0.002870	0.000499
$N = 16$	–	0.001367	0.000256	0.000004

Не давая подробного вывода, приведем соотношения для расчета элементов *спектральной характеристики* P^{-n} *оператора интегрирования порядка* n:

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{P}^{-n}_{ij+1} = \begin{cases} \Delta_{ij}, \quad n=0, \\ jD\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\tilde{P}^{-n}_{ij-1} + \dfrac{2D}{1-\alpha}\dfrac{\tilde{X}^{n-1}_i}{(n-1)!}E_j(0) - \dfrac{2D}{1-\alpha}\tilde{P}^{n-1}_{ij}, \quad n>0. \end{cases}$$

В этом выражении через $\tilde{X}^n_i$ обозначены элементы ненормированной спектральной характеристики функции $f(x)=x^n$, для вычисления которых воспользуемся соотношениями (5), (18) и разложением этой функции по степеням $(x-m)$ (аналогичный прием был использован для получения соотношения (14)):

$$\tilde{X}^n_i = \sum_{k=0}^{n} C^k_n m^{n-k}\hat{X}^k_i,$$

где

$$\hat{X}^n_i = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4\pi D}{1+\alpha}}(2\pi D)^{-\frac{1+\alpha}{4}}, \quad n=0, \quad i=0, \\ \hat{X}^{n-1}_{i+1} + iD\hat{X}^{n-1}_{i-1}, \quad n>0, \\ (i-1)D\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\hat{X}^n_{i-2}, \quad n=0, \quad i>0. \end{cases}$$

Отметим, что спектральная характеристика P^{-n} может быть вычислена по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов:

$$P^{-n} = \underbrace{P^{-1}\cdot P^{-1}\cdots P^{-1}}_{n}.$$

При $\alpha=1$ для расчета элементов спектральных характеристик операторов интегрирования необходимо использовать соотношения, полученные в [9] для полиномов Эрмита.

Применение обобщенных функций Эрмита для анализа линейных детерминированных систем управления

Пусть линейная детерминированная система управления описывается укороченным дифференциальным уравнением [4]

$$a_n(x)u^{(n)}(x)+\ldots+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u(x)=f(x). \tag{30}$$

Здесь $f(x)$ – входной сигнал, $u(x)$ – выходной сигнал, $a_n(x)$, …, $a_1(x)$, $a_0(x)$ – заданные функции, x – независимая переменная (время).

Задача анализа состоит в нахождении выходного сигнала $u(x)$ по уравнению системы, заданным входному сигналу $f(x)$ и начальным условиям

$$u(0)=\hat{u}_0, \quad u'(0)=\hat{u}'_0, \quad ..., \quad u^{(n-1)}(0)=\hat{u}^{(n-1)}_0. \tag{31}$$

Рассмотрим случай нулевых начальных условий: $\widehat{u}_0 = \widehat{u}_0' = \ldots = \widehat{u}_0^{(n-1)} = 0$. Согласно алгоритму анализа систем рассматриваемого класса с использованием спектральной формы математического описания [4, 14, 15], спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется выражением

$$U = W \cdot F = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{32}$$

в котором F – спектральная характеристика входного сигнала $f(x)$, а W называется *двумерной нестационарной передаточной функцией линейной системы* (30):

$$W = P^{-n}(A_n + \ldots + A_1 P^{-n+1} + A_0 P^{-n})^{-1}, \tag{33}$$

где P^{-1}, ..., P^{-n+1}, P^{-n} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_n, ..., A_1, A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_n(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ соответственно. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно одной и той же базисной системы.

В более общем случае при ненулевых начальных условиях и правой части уравнения (30) вида $b_m(x) f^{(m)}(x) + \ldots + b_1(x) f'(x) + b_0(x) f(x)$, где $b_m(x)$, ..., $b_1(x)$, $b_0(x)$ – заданные функции, алгоритм решения задачи анализа незначительно модифицируется [4, 14]. Кроме того, выражение (33) для матрицы W можно записать с использованием спектральных характеристик операторов дифференцирования P^{1}, P^{2}, …, P^{n}.

Выходной сигнал определяется коэффициентами разложения u_j (при усечении спектральных характеристик выходной сигнал определяется приближенно).

Пример 6. Рассмотрим задачу анализа линейной системы, которая описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$u'(x) + 2x u(x) = f(x) \tag{34}$$

при нулевом начальном условии и входном сигнале $f(x) = (1 + 2x)\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$.

Запишем выражение для спектральной характеристики входного сигнала:

$$F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{35}$$

где f_j вычисляются по формуле (7) (см. также примеры 1 и 2):

$$f_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_j(x)\,(2x+1)\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\,dx.$$

Двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (34) имеет вид $W = P^{-1}(A_1 + A_0 P^{-1})^{-1}$, где P^{-1} – спектральная характеристика оператора интегрирования, а

A_1 и A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_1(x)=1$ и $a_0(x)=2x$ соответственно (формулы для определения этих характеристик были получены в предыдущих разделах). Тогда спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется формулой (32), а приближенное решение задачи анализа – соотношением

$$u(x)\approx u_N(x)=\sum_{j=0}^{N-1}u_je_j(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1}W_{ji}f_i\right)e_j(x). \tag{36}$$

Пусть $m=0$ и $D=\frac{1}{2}$. Найдем функцию $u_N(x)$ при различных значениях N и α. Для вычисления погрешности аппроксимации точного решения $u(x)=x\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$ этой задачи функцией $u_N(x)$ снова воспользуемся критериями (10). Результаты расчетов приведены на рис. 25–28 и в таблице 6.

Пример 7. Рассмотрим задачу анализа линейной системы, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''(x)+5u'(x)+x^2u(x)=f(x) \tag{37}$$

при нулевых начальных условиях и входном сигнале

$$f(x)=(2+34x+56x^2-34x^3+5x^4)\,\mathrm{e}^{-(x-3)^2}.$$

Спектральная характеристика F входного сигнала имеет вид (35),

$$f_j=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)e_j(x)\,(2+34x+56x^2-34x^3+5x^4)\,\mathrm{e}^{-(x-3)^2}\,dx.$$

Двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (37) имеет вид $W=P^{-2}(A_2+A_1P^{-1}+A_0P^{-2})^{-1}$, где P^{-1} и P^{-2} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_2, A_1 и A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_2(x)=1$, $a_1(x)=5$ и $a_0(x)=x^2$ соответственно. Тогда спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется формулой (32), а приближенное решение задачи анализа – формулой (36).

Для численных расчетов положим $m=0$, $D=\frac{1}{2}$ и найдем функцию $u_N(x)$ при различных N и α. Как и в предыдущем примере, для сравнения точного решения $u(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-(x-3)^2}$ с приближенным $u_N(x)$ воспользуемся критериями (10). Результаты расчетов приведены на рис. 29–33 и в таблице 7.

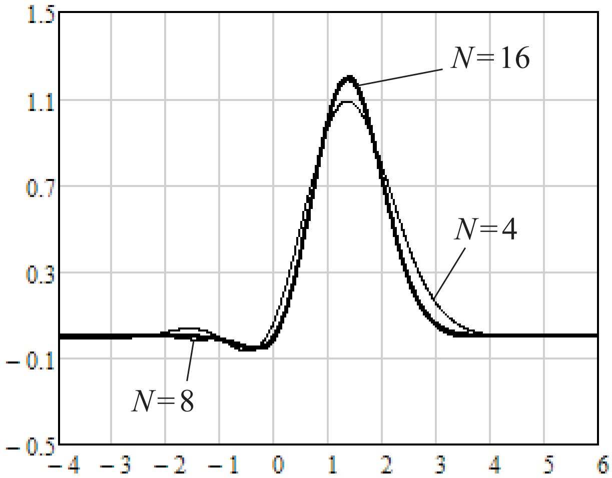

Рис. 25. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = 0$ и различных значениях N

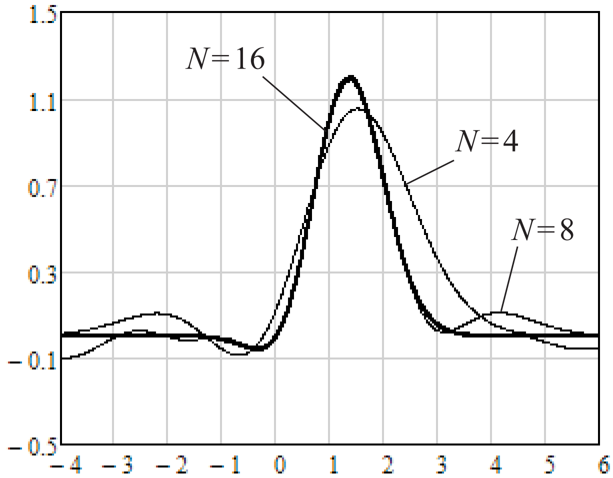

Рис. 26. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

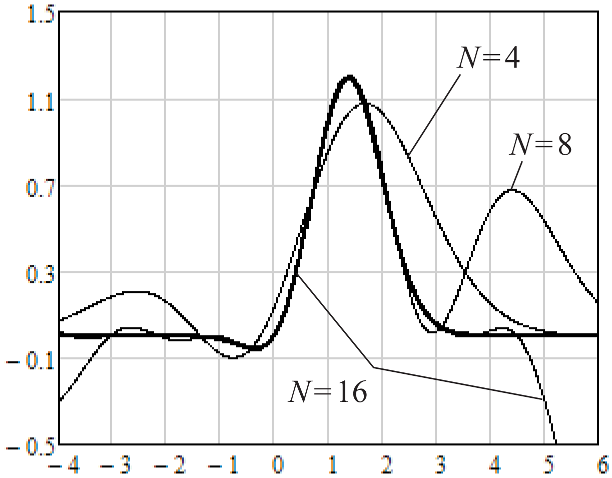

Рис. 27. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

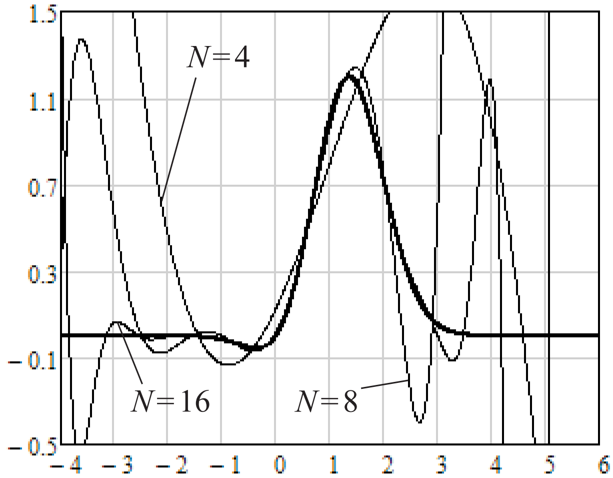

Рис. 28. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = 1$ и различных значениях N

Таблица 6

Погрешности аппроксимации функции $u(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	0.184154/ 0.184154/ 0.140936	0.185695/ 0.439261/ 0.380945	0.173356/ 0.684324/ 0.561502	0.129453/ –/ –
$N = 8$	0.024572/ 0.024572/ 0.014162	0.020586/ 0.163116/ 0.108612	0.021749/ 0.908985/ 0.674379	0.029753/ –/ –
$N = 16$	0.000201/ 0.000201/ 0.000129	0.000903/ 0.070455/ 0.058812	0.001232/ 2.012274/ 1.368706	0.001913/ –/ –

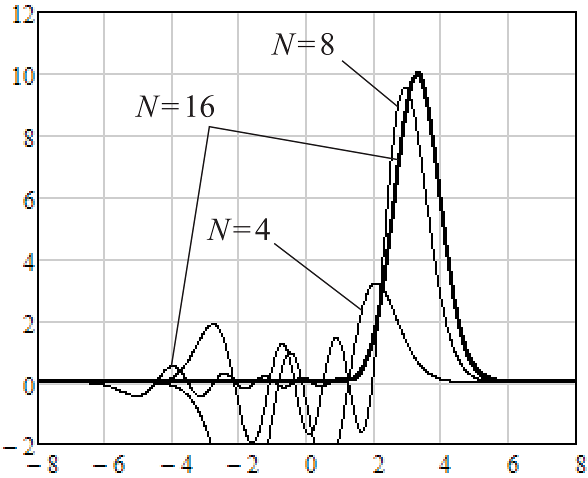

Рис. 29. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = 0$ и различных значениях N

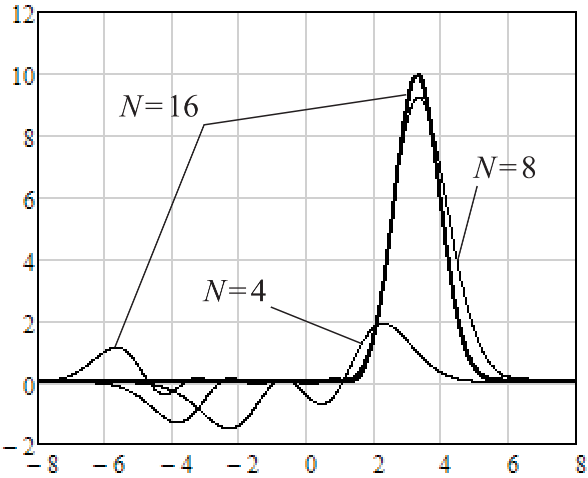

Рис. 30. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{3}$ и различных значениях N

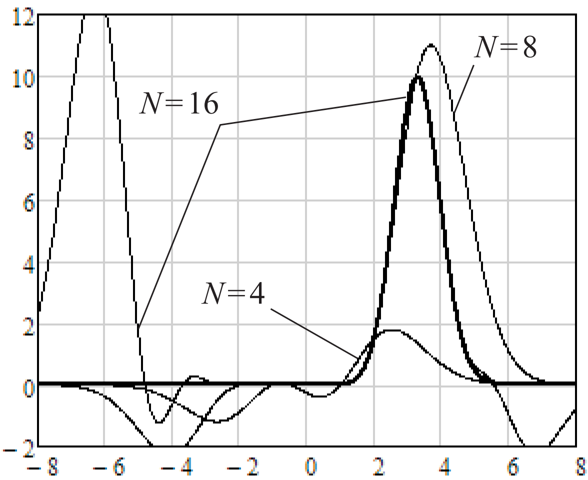

Рис. 31. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и различных значениях N

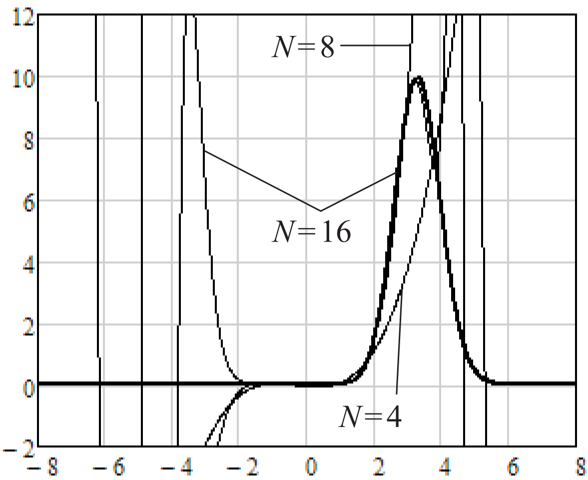

Рис. 32. Графики функций $u(x)$ и $u_N(x)$ при $\alpha = 1$ и различных значениях N

Таблица 7

Погрешности аппроксимации функции $u(x)$ при различных α и N

	$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{1}{3}$	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$
$N = 4$	11.433448/ 11.433448/ 9.335652	1.772601/ 9.719691/ 9.016805	0.800821/ 9.235354/ 8.616566	0.102026/ –/ –
$N = 8$	4.778131/ 4.778131/ 3.640763	0.214363/ 2.226259/ 1.620364	0.130685/ 7.122929/ 5.856277	0.049863/ –/ –
$N = 16$	0.679364/ 0.679364/ 0.524929	0.023754/ 1.243321/ 1.134365	0.017701/ 15.852191/ 13.071323	0.050535/ –/ –

Заключение

В результате проведенного исследования разработаны алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего) в базисе обобщенных функций Эрмита для применения к решению задач анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления в спектральной форме математического описания. Разработанные алгоритмы расчета спектральных характеристик апробированы на ряде примеров представления функций, их производных и первообразных, рассмотрены примеры анализа линейных нестационарных детерминированных систем управления первого и второго порядков.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2010 гг.; проект 2.1.1/2904». Название проекта: Перспективные методы в современных задачах управления, оценивания и классификации.

Библиографический список

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 312 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.
4. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
5. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008. – 312 с.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
7. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
8. Рыбаков К.А. Спектральный метод синтеза оптимальных систем управления со случайной структурой // Тез. докл. 2-й Всероссийской научной конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара: СамГТУ, 2005. – С. 219–221.

9. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.
10. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л., Юдин М.А. Синтез алгоритмов оптимального управления малым искусственным спутником с учетом возможного отказа управляющего устройства // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: МИРЭА, 2006. – С. 98–103.
11. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Применение спектральной формы математического описания к решению линейных интегральных уравнений // Тез. докл. 2-й Всероссийской конф. ученых, молодых специалистов и студентов «Информационные технологии в авиационной и космической технике – 2009». – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 90.
12. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.
13. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. – М.: Изд-во МАИ, 2003. – 96 с.
14. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
15. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
16. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

Сведения об авторах

Романов Владимир Андреевич; студент Московского авиационного института (государственного технического университета);
e-mail: zazou@yandex.ru

Рыбаков Константин Александрович; доцент Московского авиационного института (государственного технического университета); к.ф.-м.н.
e-mail: rkoffice@mail.ru