Труды МАИ. 2022. № 127
Trudy MAI, 2022, no. 127

Научная статья
УДК 531.36
DOI: 10.34759/trd-2022-127-03

ФРАГМЕНТ ДИНАМИКИ АЭРОДРОМНОГО ТЯГАЧА С МАССИВНЫМИ БУКСИРУЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,

Курган, Россия

ip.popow@yandex.ru

Аннотация. Отмечено, что наиболее тяжелым этапом работы аэродромного тягача с массивными буксируемыми объектами является режим трогания с места. Это связано с необходимостью преодоления силы трения покоя, которая существенно превышает силу трения движения. В качестве варианта решения этой проблемы можно рассматривать использование начальной кинетической энергии тягача, которая может развиваться при использовании упруго-деформируемых тягово-сцепных устройств. Сопоставление кинематических и динамических параметров тягача с буксируемыми объектами для вариантов с абсолютно жесткими и упруго-деформируемыми тягово-сцепными устройствами показывает, что эффективность использования последних возрастает с увеличением числа буксируемых объектов. Упруго-деформируемые тягово-сцепные устройства могут вызывать колебания

системы тягач-буксируемые объекты. Для их предотвращения тягово-сцепные устройства надлежит блокировать в момент их наибольшей деформации.

Ключевые слова: буксировка, трение, энергия, тягово-сцепное устройство, жесткость, блокировка, перемещение, скорость, ускорение

Для цитирования: Попов И.П. Фрагмент динамики аэродромного тягача с массивными буксируемыми объектами // Труды МАИ. 2022. № 127. DOI: 10.34759/trd-2022-127-03

Original article

A FRAGMENT OF THE DYNAMICS OF AN AERODROME TRACTOR WITH MASSIVE TOWED OBJECTS

Igor P. Popov
Kurgan State University,
Kurgan, Russia
ip.popow@yandex.ru

Abstract. It is noted that the most difficult stage in the operation of an airfield tractor with massive towed objects is the starting mode. This is due to the need to overcome the static friction force, which significantly exceeds the motion friction force. As a solution to this problem, we can consider the use of the initial kinetic energy of the tractor, which can develop when using limited elastically deformable traction coupling devices. To optimize the mathematical model, the following assumptions are made: traction force F on the hook of the tractor is a constant value; the inertial masses of the tractor and towed objects are the same and equal m. To evaluate the effectiveness of the use of elastically deformable traction coupling devices, the obtained results are compared with similar results corresponding to an absolutely rigid traction coupling device. The use of elastically deformable traction coupling devices makes it possible to accumulate the initial kinetic energy of an airfield tractor, which makes it possible to overcome the static friction force and ensure the starting of heavy towed objects. Comparison of the kinematic and dynamic parameters of the tractor with towed objects for options with absolutely rigid and resiliently deformable traction coupling devices shows that the efficiency of using the latter increases with an increase in the number of towed objects. Elastically deformable towing devices can cause oscillations of the tractor-towed objects system. To prevent them, the towing devices must be hard blocked at the moment they reach the greatest deformation.

Keywords: towing, friction, energy, drawbar, stiffness, blocking, movement, speed, acceleration

For citation: Popov I.P. A fragment of the dynamics of an aerodrome tractor with massive towed objects. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. DOI: 10.34759/trd-2022-127-03

Наиболее тяжелым этапом работы аэродромного тягача с массивными буксируемыми объектами является режим трогания с места [1, 2]. Это связано с необходимостью преодоления силы трения покоя, которая существенно превышает силу трения движения [3].

В качестве варианта решения этой проблемы можно рассматривать использование начальной кинетической энергии тягача, которая может развиваться при использовании ограниченно упруго-деформируемых тягово-сцепных устройств [4, 5].

Для оптимизации математической модели далее принимаются допущения: тяговое усилие F на крюке тягача – величина неизменная; инертные массы тягача и буксируемых объектов одинаковы и равны m.

Тягач и один буксируемый объект

Динамика тягача описывается выражением:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2)\,. \qquad (1)$$

здесь x_1, x_2 – пути, пройденные тягачом и буксируемым объектом, k – коэффициент упругости тягово-сцепного устройства [6, 7].

Динамика буксируемого объекта описывается выражением:

$$0 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2)\,.$$

Перемещение тягача равно

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2\,. \qquad (2)$$

Формула (1) с учетом (2) приобретает вид:

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2}\,. \qquad (3)$$

Можно ввести обозначение

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = z\,. \tag{4}$$

Соответственно этому изменяется выражение (3)

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2}\,. \tag{5}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0\,.$$

Решение характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}\,.$$

Уравнение (5) без правой части имеет хрестоматийное решение [8–10]

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t\,.$$

Хрестоматийное частное решение уравнения (5):

$$z_2 = A.$$

Это решение должно удовлетворять выражению (5)

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2},$$

$$A = \frac{F}{2m}.$$

Суперпозиция обоих решений дает общее решение [11–13]

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}\,.$$

Начальные условия: при $t=0$ $d^2x_2/dt^2 = z = 0$, поскольку тягово-сцепное устройство не деформировано и к буксируемому объекту сила не приложена.

В связи с этим последнюю формулу при $t=0$ можно записать следующим образом.

$$z(0)=0=C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0+C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0+\frac{F}{2m},$$

$$C_1=-\frac{F}{2m}.$$

В свою очередь подстановка C_1 дает

$$z=-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}, \tag{6}$$

Из выражения (4) следует

$$v_2=\int zdt=-\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$x_2=\int v_2dt=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4. \tag{7}$$

Имея в виду выражения (2), (4), (6), (7), можно записать

$$x_1=-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2k}+\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4,$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=\frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}=\frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}.$$

$$x_2(0)=0=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0+\frac{F}{4m}0^2+C_3 0+C_4,$$

$$\frac{F}{4k}+C_4=0,$$

$$C_4=-\frac{F}{4k}.$$

$$v_2(0)=0=-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3,$$

$$v_1(0)=0=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3,$$

$$\begin{cases}-C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\\ C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\end{cases},\ C_2=0,\quad C_3=0.$$

С учетом установленных коэффициентов решения для тягача и буксируемого объекта приобретают вид:

$$x_1=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+\frac{F}{4k},$$

$$x_2=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2-\frac{F}{4k},$$

$$v_1=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$v_2 = -\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}t\,,$$

$$a_1 = \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}\,,$$

$$a_2 = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t + \frac{F}{2m}\,.$$

Период τ_2, за который тягово-сцепное устройство подвергнется максимальной деформации, определяется следующим образом (индекс «2» равен числу массивных элементов – тягач и буксируемый объект).

$$a_1(\tau_2) - \frac{F}{2m} = 0 \text{ или } \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2 = 0\,,$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2 = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\,.$$

За период τ_2 тягач переместится на величину

$$x_1(\tau_2) = -\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} + \frac{F}{4k} = \frac{F\pi^2}{32k} + \frac{F}{4k}\,.$$

При этом его скорость станет равна

$$v_1(\tau_2) = \frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F}{2\sqrt{2km}} + \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}\,.$$

Для оценки эффективности применения упруго-деформируемого тягово-сцепного устройства полученные результаты следует сопоставить с аналогичными результатами, соответствующими абсолютно жесткому тягово-сцепному устройству.

$$a = \frac{F}{2m},\ v = \frac{F}{2m}t,\ x = \frac{F}{4m}t^2 .$$

$$x(\tau_2) = \frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k} = \frac{F\pi^2}{32k},\ v(\tau_2) = \frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{F\pi}{4\sqrt{2km}} .$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)} = \frac{F\pi^2/(32k) + F/(4k)}{F\pi^2/(32k)} = 1 + \frac{32}{4\pi^2} \approx 1{,}81 .$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)} = \frac{F/(2\sqrt{2km}) + F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})} = 1 + \frac{2}{\pi} \approx 1{,}64 .$$

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)} = 2{,}69 .$$

Здесь $E_1(\tau_2), E(\tau_2)$ – кинетические энергии тягача.

Сопоставление перемещений, скоростей и энергий свидетельствует о высокой эффективности применения упруго-деформируемого тягово-сцепного устройства.

Тягач и два буксируемых объекта

Динамика тягача и буксируемых объектов описывается выражениями:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2), \tag{8}$$

$$k(x_1 - x_2) = m\frac{d^2x_2}{dt^2} + k(x_2 - x_3), \tag{9}$$

$$k(x_2 - x_3) = m\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Перемещение второго буксируемого объекта равно

$$x_2 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3. \tag{10}$$

Дифференцирование этой формулы дает

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Уравнение (9) с учетом двух последних формул приобретает вид:

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2x_2 - x_3 = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + 2x_3 - x_3 =$$

$$= \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3. \tag{11}$$

Дифференцирование этой формулы дает

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Уравнение (8) с учетом полученных формул приобретает вид:

$$\frac{F}{k} = \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + \frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} + x_3 - \frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2} - x_3 =$$

$$= \frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2},$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6} + 4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4} + 3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{k^2F}{m^3}. \tag{12}$$

Можно ввести обозначение

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = z. \tag{13}$$

Соответственно этому изменяется выражение (12)

$$z'''' + 4\frac{k}{m}z'' + 3\frac{k^2}{m^2}z = \frac{k^2F}{m^3}. \qquad (14)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$r^4 + 4\frac{k}{m}r^2 + 3\frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Решение характеристического уравнения:

$$r_{1,2}^2 = -2\frac{k}{m} \pm \frac{k}{m} =,\ r_1^2 = -3\frac{k}{m},\ r_2^2 = -\frac{k}{m},$$

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{3\frac{k}{m}},\ r_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Уравнение (14) без правой части имеет хрестоматийное решение

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t + C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Хрестоматийное частное решение уравнения (14):

$$z_2 = A.$$

Это решение должно удовлетворять выражению (14)

$$3\frac{k^2}{m^2}A = \frac{k^2F}{m^3},$$

$$A = \frac{F}{3m}.$$

Суперпозиция обоих решений дает общее решение [14–18]

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}. \qquad (15)$$

Из выражения (13) следует

$$v_3=\int zdt=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \tag{16}$$

$$x_3=\int v_3dt=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$

$$-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6, \tag{17}$$

Имея в виду выражения (10), (13), (15), (17), можно записать

$$x_2=\frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}\frac{F}{3m}-$$

$$-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6=$$

$$=\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6, \tag{18}$$

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=-\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \tag{19}$$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-2C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}, \tag{20}$$

Имея в виду выражения (11), (20), (18), (17), можно записать

$$x_1=-2C_1\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}\frac{m}{k}+$$

$$+2\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+2\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2F}{3k}+\frac{2F}{6m}t^2+2C_5t+2C_6+$$

$$+C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{F}{6m}t^2-C_5t-C_6=$$

$$=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6,$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5. \tag{21}$$

$$a_1=C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}.$$

Имея в виду выражение (20), можно записать

$$a_2(0)=-2C_1+\frac{F}{3m}=0,$$

$$C_1=\frac{F}{6m}.$$

Имея в виду выражение (15), можно записать

$$z(0)=0=\frac{F}{6m}+C_3+\frac{F}{3m},$$

$$C_3=-\frac{F}{2m}.$$

Имея в виду выражение (18), можно записать

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0,$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0,$$

$$C_6 = -\frac{4F}{9k}.$$

Имея в виду выражения (21), (16), (19), можно записать

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0,$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0,$$

$$C_4 = 0,$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0,$$

$$C_2 = 0,\ C_5 = 0.$$

С учетом установленных коэффициентов решения для тягача и буксируемых объектов приобретают вид:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k},$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k},$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k},$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}} \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t\,,$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}} \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t\,,$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}} \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t\,,$$

$$a_1 = \frac{F}{6m} \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}\,,$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m} \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}\,,$$

$$a_3 = \frac{F}{6m} \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}\,.$$

Период τ_3, за который тягово-сцепное устройство подвергнется максимальной деформации, определяется следующим образом.

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0 \text{ или } \frac{F}{6m} \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0\,,$$

$$\frac{1}{3} \cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0\,.$$

Это уравнение имеет решение:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,427\pi\,,$$

$$\tau_3 = 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

За период τ_3 тягач переместится на величину

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}\left(0,427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] =$$

$$= \frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}\left(0,427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0,78\frac{F}{k}.$$

При этом его скорость станет равна

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\cdot 0,427\pi + \frac{1}{2}\sin 0,427\pi + \frac{1}{3}0,427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

Для оценки эффективности применения упруго-деформируемых тягово-сцепных устройств полученные результаты следует сопоставить с аналогичными результатами, соответствующими абсолютно жестким тягово-сцепным устройствам

$$a = \frac{F}{3m},\ v = \frac{F}{3m}t,\ x = \frac{F}{6m}t^2,$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0,3\frac{F}{k},\ v(\tau_3) = \frac{F}{3m}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,45\frac{F}{\sqrt{mk}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2,6,$$

$$\frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2,22.$$

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4,93\,.$$

Заключение

Использование упруго-деформируемых тягово-сцепных устройств дает возможность накопления начальной кинетической энергии аэродромного тягача, что позволяет преодолеть силу трения покоя и обеспечить трогание тяжелых буксируемых объектов.

Сопоставление кинематических и динамических параметров тягача с буксируемыми объектами для вариантов с абсолютно жесткими и упруго-деформируемыми тягово-сцепнымиустройствами (см. таблицу) показывает, что эффективность использования последних возрастает с увеличением числа буксируемых объектов.

Число массивных элементов	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1,81	1,64	2,69
3	2,6	2,22	4,93

Таблица: Сопоставление кинематических и динамических параметров

Упруго-деформируемые тягово-сцепные устройства могут вызывать колебания системы тягач-буксируемые объекты. Для их предотвращения тягово-сцепные устройства надлежит блокировать [19, 20] в момент их наибольшей деформации.

Список источников

1. Моисеев К.А., Панов Ю.Н., Моисеев К.К. Математические модели двухзвенного тягача, движущегося по грунту с периодическими неровностями // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=85723

2. Родченко В.В., Золотов А.А., Гусев Е.В., Галеев А.Г. Разработка математической модели надежности сложных технических систем наземной космической инфраструктуры // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=36455

3. Ковалев Н.В., Байков А.Е. О зоне залипания ящика с внутренним осциллятором на горизонтальной плоскости // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=108864

4. Нигяр Э.С. Динамика пластины с упруго присоединённой массой // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=115111. DOI: 10.34759/trd-2020-111-2

5. Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение плоского образца в условиях плоского напряженного состояния при различных полях скоростей

перемещений // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=115109. DOI: 10.34759/trd-2020-111-1

6. Иванников С.В., Родионов Г.Л., Сидоренко А.С. О построении математической модели движения автомобиля // Труды МАИ. 2005. № 18. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=34183

7. Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А. Математическое моделирование в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=77259

8. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=119888. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01

9. Попов И.П. Расчет колебаний для разветвленных механических систем в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=121007. DOI: 10.34759/trd-2021-116-01

10. Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=164101. DOI: 10.34759/trd-2022-122-03

11. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62975

12. Гришанина Т.В., Гусева Е.Е. Метод расчета упругих колебаний циклически симметричной конструкции // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=162649. DOI: 10.34759/trd-2021-121-05

13. Безгласный С.П., Батина Е.С., Пиякина Е.Е. Параметрическое управление с ограничением движениями двухмассового маятника // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=47314

14. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=76821

15. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93297

16. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80904

17. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=112820. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

18. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111349. DOI: 10.34759/trd-2019-109-4

19. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=80231

20. Ю С. Ч., Попов Ю.И. Проектный анализ конструкции стабилизации с различным типом закрепления // Труды МАИ. 2005. № 20. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=34125

References

1. Moiseev K.A., Panov Yu.N., Moiseev K.K. *Trudy MAI,* 2017, no. 96. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85723

2. Rodchenko V.V., Zolotov A.A., Gusev E.V., Galeev A.G. *Trudy MAI,* 2013, no. 64. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36455

3. Kovalev N.V., Baikov A.E. *Trudy MAI,* 2019, no. 107. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=108864

4. Nigyar E.S. *Trudy MAI,* 2020, no. 111. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115111. DOI: 10.34759/trd-2020-111-2

5. Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115109. DOI: 10.34759/trd-2020-111-1

6. Ivannikov S.V., Rodionov G.L., Sidorenko A.S. *Trudy MAI,* 2005, no. 18. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34183

7. Gainanov D.N., Rasskazova V.A. *Trudy MAI,* 2017, no. 92. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=77259

8. Popov I.P. *Trudy MAI,* 2020, no. 115. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119888. DOI: 10.34759/trd-2020-115-01

9. Popov I.P. *Trudy MAI,* 2021, no. 116. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121007. DOI: 10.34759/trd-2021-116-01

10. Popov I.P. *Trudy MAI,* 2022, no. 122. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164101. DOI: 10.34759/trd-2022-122-03

11. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI,* 2015, no. 84. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975

12. Grishanina T.V., Guseva E.E. *Trudy MAI,* 2021, no. 121. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162649. DOI: 10.34759/trd-2021-121-05

13. Bezglasnyi S.P., Batina E.S., Piyakina E.E. *Trudy MAI,* 2014, no. 72. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=47314

14. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI,* 2017, no. 92. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821

15. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI,* 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297

16. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904

17. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI,* 2020, no. 110. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820. DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

18. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349. DOI: 10.34759/trd-2019-109-4

19. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI,* 2017, no. 93. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231

20. Yu S. Ch., Popov Yu.I. *Trudy MAI,* 2005, no. 20. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34125

Статья поступила в редакцию 09.11.2022

Статья после доработки 11.11.2022

Одобрена после рецензирования 16.11.2022

Принята к публикации 26.12.2022

The article was submitted on 09.11.2022; approved after reviewing on 16.11.2022; accepted for publication on 26.12.2022