УДК 517.927.2

Некоторые вопросы теории линейных дифференциальных операторов дробного порядка и их применение

Алероев Т.С.[1*], Хасамбиев М.В.[1], Хамзатова З.У.[2***]**

[1]*Московский государственный строительный университет, МГСУ,*

Ярославское шоссе, 26, Москва, 129337, Россия

[2]*Чеченский государственный университет, ЧГУ, ул. Шерипова, 32,*

Грозный, 364907, Россия,;

**e-mail: aleroev@mail.ru*

***e-mail: hasambiev@mail.ru*

****e-mail: zura-hamzatova2014@yandex.ru*

Аннотация

В данной статье рассматриваются некоторые аспекты применения дробного исчисления в исследовании массопереноса в средах с фрактальными свойствами и состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию краевых задач для дробных дифференциальных уравнений, а вторая – исследованию задачи типа Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Такие краевые задачи возникают при описании физических процессов стохастического переноса, при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой фрактальной среде.

Ключевые слова: оператор келдышевского типа, возмущение, дискретный спектр, дробное дифференцирование, собственные числа, резольвента, ядро, интегральный оператор.

Введение

В статье исследуются краевые задачи типа Штурма-Лиувилля для дробных дифференциальных уравнений. Такие задачи находятся в центре внимания многих авторов, это связано, в первую очередь, с тем, что они моделируют различные физические процессы: фильтрация жидкости и газа в сильно пористой, фрактальной среде; процессы теплообмена в средах с фрактальной структурой и памятью; случайные блуждания точечной частицы, которая начинает двигаться от начала координат по самоподобному фрактальному множеству; движение осциллятора под действием упругих сил, характерных для вязкоупругих сред и т.д.

Основные понятия

Пусть $f(x) \in L_1(0,1)$. Тогда функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, и функция

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(1-x)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt \in L_1(0,1)$$

называется дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ с концом в точке $x = 1$ [1]. Здесь $\Gamma(\alpha)$ является гамма-функцией Эйлера. Как известно (см. [1]), функция $g(x) = L_1(0,1)$ называется дробной производной функции $f(x) \in L_1(0,1)$ порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x).$$

Обозначив тогда

$$g(x) = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} f(x),$$

в дальнейшем под символом

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}},$$

будем подразумевать дробный оператор дробного интегрирования при $\alpha < 0$ и дробного дифференцирования при $\alpha > 0$. Дробная производная

$$\frac{d^{\alpha}}{d(1-x)^{\alpha}}$$

порядка $\alpha > 0$ функции $f(x) \in L_1(0,1)$ с концом в точке $x = 1$ определяется так же.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^n$ – некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \gamma_j \le 1$, $(0 \le j \le n)$. Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1; \quad \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \quad (0 \le k \le n),$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho}=\sum_{j=0}^{n}\gamma_j-1=\sigma_n=\mu_n-1>0\,.$$

Следуя М.М. Джрбашяну [2], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}f(x),$$

$$D^{(\sigma_1)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{(\sigma_n)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\frac{d^{\gamma_{n-1}}}{dx^{\gamma_{n-1}}}\ldots\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x).$$

Первая глава настоящей работы посвящена исследованию некоторых краевых задач для дробных дифференциальных уравнений

$$D^{(\sigma_n)}u-\lambda u=0,\quad 0<\sigma_n<\infty,$$

и им сопутствующих интегральных операторов [1]

$$A_{\gamma}^{[\alpha,\beta]}u(x)=c_\alpha\int_0^x(x-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}u(t)\,dt+c_{\beta,\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\gamma}-1}u(t)\,dt,$$

где c_α и $c_{\beta,\gamma}$ – произвольные постоянные.

Во второй главе данной работы исследуется задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах.

Отметим, что в [5], [6] методами теории возмущений исследован оператор

$$Bu = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)\,dt\right], \qquad (1)$$

сопутствующей задаче

$$u'' + \lambda\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}u = 0, \quad 0<\alpha<1, \qquad (2)$$

$$u(0)=0, \quad u(1)=0. \qquad (3)$$

(отметим, что функция Грина задачи (2)-(3) впервые была построена одним из авторов в его студенческой работе [4]. Хотя заметка [6] и не осталась незамеченной (см., например, [7]) следует подчеркнуть, что там не было результатов, позволяющих включить исследование операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ в общую схему теории возмущений. Данная работа восполняет этот пробел. Здесь проводится спектральный анализ операторов B, заданного формулой (1),

и

$$A_\rho(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt - \int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],$$

где $0<\rho<2$. Так как задача (2)-(3) находится в центре внимания многих авторов [8], то особое внимание уделено исследованию оператора B.

ЧАСТЬ I

Спектральный анализ интегрального оператора, сопутствующего краевой задаче для модельного дробного дифференциального уравнения

В пространстве $L^2(0,1)$ изучим оператор

$$A_\rho(u)=\int_0^1 G(x,t)u(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt-\int_0^1 x^{\frac{1}{\rho}-1}(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}u(t)\,dt\right],$$

который впервые был рассмотрен в [9]-[10], где $0<\rho<2$, а

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}x^{\frac{1}{\rho}-1}-(x-t)^{\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}, & 0\le t\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{(1-t)^{\frac{1}{\rho}-1}x^{\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma(\rho^{-1})}, & 0\le x\le t\le 1\end{cases}$$

– функция Грина следующей задачи S (при $\lambda=0$):

$$\frac{1}{\Gamma(n-\rho^{-1})}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (x-s)^{n-\rho^{-1}-1}u(s)\,ds+\lambda u=0,$$

($n-1\le\rho^{-1}<n$, $n=[\rho^{-1}]+1$, где $[\rho^{-1}]$ – целая часть числа ρ^{-1})

$$u(0)=0,\quad u'(0)=0,\ \ldots,\ u^{(n-2)}(0)=0,\quad u(1)=0.$$

При этом [11] если $\gamma_0=\gamma_1=...=\gamma_n=1$, то задача S примет вид

$$u^{(n)}+\lambda u=0,$$

$$u(0)=0,\quad u'(0)=0,\ \ldots,\ u^{(n-2)}(0)=0,\quad u(1)=0,$$

а ее функция Грина $G(x,t)$ (при $\lambda=0$) равна

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(1-t)^{n-1}x^{n-1}-(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, & 0\le t\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{(1-t)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}, & 0\le x\le t\le 1\end{cases}$$

Последняя функция достаточно хорошо изучена, и этим мы будем пользоваться в дальнейшем. Оператор A_ρ изучен в работах [1], [9]-[12]. Мы так тщательно не стали бы исследовать этот оператор, если бы не обнаружилось, что уравнение Майнарди [13], [14] (дробное осцилляционное уравнение) не обладает многими основными осцилляционными свойствами. Поиск уравнения дробного порядка, обладающего этими свойствами, и привел нас к исследованию оператора A_ρ. Выпишем наиболее важные свойства этого оператора, установленные нами ранее:

1. при $\rho > 1$ оператор A_ρ вполне несамосопряженный [10];
2. при $\rho \le 1$ оператор A_ρ секторальный [5];
3. при $0 < \rho < 2$ система собственных функций оператора A_ρ полна в L_2 [5].

Теперь приведем один из основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Если* $|\varepsilon| \le 1$, *то оператор*

$$A(\varepsilon)u = -\int_0^x (x-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt + \int_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt \tag{4}$$

образует голоморфное семейство типа (A) [15] [стр. 473].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$M(\varepsilon)u(x) = \int_0^x (x-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt,$$

$$N(\varepsilon)u(x) = \int_0^1 x^{1+\varepsilon}(1-t)^{1+\varepsilon} u(t)\,dt.$$

Очевидно, что

$$A(\varepsilon)u = N(\varepsilon)u(x) - M(\varepsilon)u(x).$$

Как и в работе [5] для оператора $A(\varepsilon)$ получим представление

$$A(\varepsilon)u = A(0)u + \varepsilon A_1 u + \varepsilon^2 A_2 u + \ldots + \varepsilon^n A_n u + \ldots . \tag{5}$$

Представление вида (5) для оператора $M(\varepsilon)$ получено в [5]. Точно также как и в [5] можно получить представление и для оператора $N(\varepsilon)$

$$N(\varepsilon)u = \int_0^1 K_0(x,t)u(t)\,dt + \varepsilon\int_0^1 K_1(x,t)u(t)\,dt + \varepsilon^2\int_0^1 K_2(x,t)u(t)\,dt + \ldots .$$

$$+\varepsilon^n\int_0^1 K_n(x,t)u(t)\,dt + \ldots,$$

где

$$K_n(x,t) = \frac{x(1-t)\ln^n(1-t)x}{n!}, \quad n = 0;1;2;3;\ldots . \tag{6}$$

Очевидно, что $\| N_n \|_{L_2}^2 \le \int_0^1\int_0^1 [K_n(x,t)]^2\,dt\,dx = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{x(1-t)^2\ln^n x(1-t)}{n!}\right]^2 dt\,dx$, из чего следует, что $\| N_n \|_{L_2}^2 \le 1$. Так как известны оценки [5] $\| M_n \|_{L_2} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$, то имеем

$\| A_n u \|_{L_2(0,1)} \le 2\| u \|$.

Теперь из критерия голоморфности следует, что представление (5) для $|\varepsilon| < 1$ образует голоморфное семейство типа (A). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_1(\varepsilon)$ *– первое собственное число оператора* $A(\varepsilon)$, *а* $\varphi_1(\varepsilon)$ *– соответствующая собственная функция. Тогда, при*

$$|\varepsilon| < \frac{3}{64\pi^2},$$

справедливы соотношения

$$\left|\lambda_1(\varepsilon) - \frac{1}{\pi^2}\right| \le 64\,|\,\varepsilon\,|, \tag{7}$$

$$\left|\varphi_1(\varepsilon) - \sin x\pi\right| \le \frac{32\pi^2}{3}\,|\,\varepsilon\,|. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $A(\varepsilon)$ образует голоморфное семейство типа (A), то в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)} + \ldots, \tag{9}$$

$$\varphi_1(\varepsilon) = \varphi_1(0) + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\varphi_1^{(n)} + \ldots. \tag{10}$$

Имеются различные формулы для вычисления нижней границы радиусов сходимости этих рядов и оценки собственных функций и собственных значений [15], [16], но мы решили воспользоваться формулами, приведенными у Б. В. Логинова [16]

$$|\,\lambda_1(\varepsilon) - (\lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots + \varepsilon^n\lambda_n)\,| \le \frac{d}{2}(\|\,c\,\|\,\varepsilon)^{n+1},$$

$$|\,\varphi_1(\varepsilon) - (\varphi_1(0) + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots + \varepsilon^n\varphi_n)\,| \le \frac{1}{2}(\|\,c\,\|\,\varepsilon)^{n+1},$$

здесь $|\,\varepsilon\,| \le 1/\mathrm{c}$, $\mathrm{c} = \max\left\{8\dfrac{a+mb}{d};\ 8p + 4\dfrac{a+mb}{d}\right\}$, $m = \|\,A_0\,\|$, $B = B(\varepsilon) = A(\varepsilon) - A_0$,

$\dfrac{1}{d} = \|\,R\,\|$ (R – приведенная резольвента оператора A_0 относительно собственного числа $\lambda_1(0)$, то есть оператор, обратный к $A_0 - \lambda_1(0)$ в ортогональном дополнении к $\varphi_1(0)$ и распространенным его на все пространство, считая $R\varphi_1(0) = 0$). Очевидно, что в нашем случае $b = 0$, $a = 2$, $p = 1$.

Найдем значение указанных параметров. Так как $\frac{1}{d} = \| R \|$, и оператор A_0 самосопряженный, то норма $\| R \|$ находится по формуле

$$\| R \| = \frac{1}{\min\limits_{k \neq 1} | \lambda_1 - \lambda_k |} = \frac{1}{\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2}} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Далее находим m. Так как оператор A_0 – самосопряженный, то $m = \| A_0 \| = spr\, A_0$, где $spr\, A_0$ – спектральный радиус оператора A_0, но спектральный радиус $spr\, A_0 = | \lambda_0 |$; где $\lambda(0)$ – наибольшее по модулю собственное значение оператора A_0. Наибольшее по модулю собственное значение A_0 равно $\frac{1}{\pi^2}$, поэтому $\| A_0 \| = spr\, A_0 = \frac{1}{\pi^2}$. Таким образом $m = \frac{1}{\pi^2}$.

Итак,

$$| \varepsilon | < \frac{3}{64\pi^2},$$

то

$$| \lambda_1(\varepsilon) - (\lambda_1(0) + \varepsilon \lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n \lambda_1^{(n)}) | \leq \frac{3}{8\pi^2} (| \varepsilon | c)^{n+1} = \frac{3}{8\pi^2} \left[| \varepsilon | \left(\frac{64\pi^2}{3} \right) \right]^{n+1},$$

$$| \varphi_1(\varepsilon) - (\varphi_1(0) + \varepsilon \varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n \varphi_1^{(n)}) | \leq \frac{1}{2} (| \varepsilon | c)^{n+1} = \frac{1}{2} \left[| \varepsilon | \left(\frac{64\pi^2}{3} \right) \right]^{n+1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, следует, что

$$\left| \lambda_1(\varepsilon) - \frac{1}{\pi^2} \right| \leq 64 | \varepsilon |,$$

здесь $\lambda_1(\varepsilon)$ – первое собственное число оператора $A(\varepsilon)$. Точно также

$$|\varphi_1(\varepsilon)-\sin x\pi| \le \frac{32\pi^2}{3}|\varepsilon|,$$

здесь $\varphi_1(\varepsilon)$ – первая собственная функция оператора $A(\varepsilon)$. Следствие доказано полностью.

Спектральный анализ интегрального оператора, сопутствующего краевой задаче для дробного осцилляционного уравнения

Рассмотрим оператор

$$Bu=-Bu=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\int_0^x -(x-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi+\int_0^1(1-\xi)^{1-\alpha}u(\xi)d\xi\right].$$

Проанализируем ядро этого оператора, чтобы понять, насколько правильно в качестве осцилляционного уравнения выбрано уравнение (2).

Легко проверить, что при $\alpha>0$, ядро оператора B не является знакопостоянным. Поэтому, первое собственное число оператора B необязательно должно быть вещественным.

Вышеизложенный метод в частности, доказать, что при достаточно малых α, первые собственные числа оператора B являются вещественными.

Теорема 2. *Оператор*

$$B(\varepsilon)u = -\int_0^x (x-t)^{1+\varepsilon} u(t)dt + \int_0^1 x(1-t)^{1+\varepsilon} u(t)dt$$

при $|\varepsilon| < \dfrac{3}{2}$, *также образует голоморфное семейство типа* (A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1**.**

Следствие 2. *Пусть*

$$|\varepsilon| < \frac{1}{\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}}, \tag{11}$$

тогда первое собственное число оператора $B(\varepsilon)$ *вещественное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $B(\varepsilon)$ образуют голоморфное семейство типа (A), то в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ определены функции

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1(0) + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)} + \ldots, \tag{12}$$

$$\varphi_1(\varepsilon) = \lambda_1(0) + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\varphi_1^{(n)} + \ldots. \tag{13}$$

Нижняя граница для радиуса сходимости ряда Тейлора функций $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\varphi_1(\varepsilon)$, с учетом неравенства (11), вычисляется точно также, как и в следствии 1. Очевидно, что нижняя граница этого радиуса $r_0 > \dfrac{1}{\frac{16}{3} + \frac{4}{\pi^2}}$.

Далее, коэффициенты $\lambda_1^{(n)}$ и $\varphi_1^{(n)}$ будем вычислять по формулам, указанным в работе [16]

$$\lambda_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} (A_k\,\varphi_1^{(n-k)}, \varphi_1(0)), \quad \varphi_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} R(\lambda_1^{(k)} - A_k)\varphi_1^{(n-k)}. \tag{14}$$

В нашем случае, R – приведенная резольвента оператора $B(0)$, соответствующая собственному значению $\lambda_1(0)$, а $A_k = B_k$, $\left(k = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Из (14) следует, что

$$\lambda_1^{(1)} = (B_1 \varphi_1(0), \varphi_1(0)).$$

Так как ядро оператора B_1 является вещественнозначным, то $Im\,\lambda_1^{(1)} = 0$. Далее из (14) следует, что

$$\varphi_1^{(1)} = R(\lambda_1^{(1)} - B_1)\varphi_1(0).$$

Так как ядра операторов R и B_1 вещественнозначные, то $Im\,\varphi_1^{(1)} = 0$.

Таким образом, последовательно можно установить, что $Im\,\lambda_1^{(n)} = Im\,\varphi_1^{(n)} = 0$, для всех n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Итак, если ε вещественное, то $\lambda_1(\varepsilon)$ также вещественное число, что и доказывает следствие 2.

Так как [5] Фредгольмов спектр исследованных операторов совпадает с нулями соответствующих функций типа Миттаг-Леффлера, то изложенный метод позволяет эффективно исследовать распределение нулей этих функций. В подтверждение приведем хотя бы два утверждения. Следуя [17], введем обозначения: $\lambda_n(\alpha)$ – собственные значения задачи (2)-(3), где сказано, что в "предельном случае $\alpha = 0$ задача (2)-(3) становится краевой задачей Штурма- Лиувилля с последовательностью собственных значений $\lambda_n = (\pi n)^2$. Верно ли, что $\lim\limits_{\alpha \to 0+} \lambda_n(\alpha) = (\pi n)^2$ при любом фиксированном n? Ответ "положителен".

Докажем более сильное утверждение.

Теорема 3. $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_{0+}} \lambda_n(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to \alpha_{0-}} \lambda_n(\alpha) = \lambda_n(\alpha)$ *при любом* $\alpha_0 \in [0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема 3 является простым следствием теоремы 4.2 (стр. 35 [21]) и того факта, что операторная функция $B(\varepsilon)$ сильно непрерывна когда $|\varepsilon|<1$.

И наконец, обратимся к еще одному очень важному вопросу – к вопросу о кратности собственных чисел оператора $B(\varepsilon)$ (как уже отмечалось, этот вопрос тесно связан с вопросом кратности нулей соответствующей функции типа Миттаг-Леффлера [6]).

Известно, что все достаточно большие по модулю нули функции типа Миттаг-Леффлера $E_p(z,\mu)$ (где $\rho>\frac{1}{2}$, $\rho\neq 1$, $Im\,(\mu)=0$) простые. Поэтому, основное внимание мы уделим кратности первых собственных чисел оператора $B(\varepsilon)$.

Теорема 4. *Пусть* $|\varepsilon|<\left(\frac{32\pi^2}{9}+\frac{2}{3}\right)^{-1}$, *тогда первое собственное число* $\lambda_1(\varepsilon)$ *оператора* $B(\varepsilon)$ *простое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [15] (стр. 475), что если спектр оператора $B(0)$ разбивается на две части замкнутой кривой Γ, то спектр оператора $B(\varepsilon)$ также разбивается кривой Γ для достаточно малых ε. Известна [15] (стр. 475) оценка, насколько для этого должно быть малым ε.

$$|\varepsilon|<min_{\zeta\in\Gamma}(a\|R(\zeta,B(0))\|+b\|B(0)R(\zeta,B(0)\|+c)^{-1} \qquad (15)$$

(где a, b, c – параметры, фигурирующие в неравенстве (4)). В формуле (15) в качестве контура Γ возьмем окружность $\left|\zeta - \frac{1}{\pi^2}\right| = \frac{\rho}{2}$, где ρ – расстояние от $\frac{1}{\pi^2}$ до множества остальных собственных чисел оператора $B(0)$, а параметры a, b, c – нами уже вычислены (см. 11)). Что и доказывает теорему 4.

Заметим, что точно так же можно установить простоту второго собственного числа оператора $B(\varepsilon)$. А самое главное, этот метод позволяет включить исследование несамосопряженных операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ (и не только операторов вида $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$) в общую схему теории возмущений.

ЧАСТЬ II

Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

Многие задачи математической физики [18], связанные с возмущением нормальных операторов с дискретным спектром, приводят к рассмотрению в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ оператора

$$A = (I + S)H,$$

называемого при компактном S *слабым возмущением* H или оператором *келдышевского типа.*

Рассматривается оператор A, порожденный дифференциальным выражением

$$l(u) = u'' + D_{0x}^{\alpha_0} u + D_{0x}^{\alpha_1} u$$

и краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля. Здесь, $0<\alpha_i<1$, $D_{0x}^{\alpha_i}$, – оператор дробного (в смысле Капуто) дифференцирования порядка α_i, $i=1,2$:

$$D_{0x}^{\alpha_i}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)}\int_0^x \frac{u'(t)}{(x-t)^{\alpha_i}}dt\,.$$

Отметим, что этот оператор (в связи с многочисленными приложениями) находится в центре внимания многих авторов [19], [20].

В данном разделе показано, что этот оператор является оператором келдышевского типа и изучены собственные функции и собственные значения.

Имеет место следующая

Теорема 5. Система собственных и присоединенных функций оператора A полна в L_2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подействуем на обе части уравнения

$$u''+D_{0x}^{\alpha_0}u+D_{0x}^{\alpha_1}u+\lambda u=0$$

оператором

$$Nu=\int_0^1 G(x,t)\,u(t)dt$$

где $G(x,t)=\begin{cases} t(1-x), & t\le x, \\ x(1-t), & t>x \end{cases}$ – функция Грина задачи

$$\begin{aligned} &u''=0, \\ &u(0)=0,\ u(1)=0. \end{aligned}$$

Получим следующий линейный операторный пучок

$$L(\lambda)=I-(T_1+T_2)-\lambda N\,,$$

где

$$(T_1+T_2)(u)=\int_0^1 G(x,t)(C_0D_{0x}^{\alpha_0}u+C_1D_{0x}^{\alpha_1}u)\,dt\,.$$

Покажем, что оператор $T=T_1+T_2$ – компактный. Непосредственными вычислениями (с применением формул перестановок Дирихле) можно показать, что

$$Tu=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha_i)}\left[\int_0^x (x-\xi)^{1-\alpha_i}u(\xi)\,d\xi - x\int_0^1 (1-\xi)^{1-\alpha_i}u(\xi)\,d\xi\right].$$

Очевидно, что оператор T при α_0 и α_1 меньшими единицы, является компактным.

Теперь, из теоремы Келдыша [26] следует, что система собственных и присоединённых функций оператора A полна в L_2.

В дальнейшем, задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} u''+D_{0x}^{\alpha_0}u+D_{0x}^{\alpha_1}u+\lambda u=0, & (16)\\ u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, & (17)\\ u(1)\cos\beta+u'(1)\sin\beta=0 & (18)\end{cases}$$

изучим методом конечных разностей.

Обозначим через $u(x,\lambda)$ решения уравнения (16), удовлетворяющее условиям

$$u(0)=\sin\alpha, \tag{19}$$

$$u'(0)=-\cos\alpha, \tag{20}$$

Ясно, что $u(x,\lambda)$ удовлетворяет граничному условию (17) (функция $u(x,\lambda)$ подробно изучена в работах [18], [20]). Следуя Б. М. Левитану [22], обозначим через

n произвольное натуральное число, и пусть $h=\frac{1}{n}$. Далее, положим $x_v = vh$ и пусть u_v $(v=0,2,3,...,n)$ – компоненты вектора, который будет определен ниже.

Заменим производные разностными соотношениями:

$$\begin{cases} D_{0x_0}^{\alpha_0}u \to 0, \qquad D_{0x_v}^{\alpha_0}u \to \dfrac{h^{-\alpha_0}}{\Gamma(2-\alpha_0)}\sum_{k=1}^{v}\Delta u_{k-1}\Delta S_{v-k}^{\alpha_0}, \quad (v=1,2,...,n-1), \\ D_{0x_0}^{\alpha_1}u \to 0, \qquad D_{0x_v}^{\alpha_1}u \to \dfrac{h^{-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\sum_{k=1}^{v}\Delta u_{k-1}\Delta S_{v-k}^{\alpha_1}, \quad (v=1,2,...,n-1), \\ u' \to \dfrac{u_v - u_{v-1}}{h}, \qquad (v=1,2,...,n-1), \\ u'' \to \dfrac{u_{v+1}-2u_v+u_{v-1}}{h^2}, \qquad (v=1,2,...,n-1), \end{cases} \tag{21}$$

где $S_k^{\alpha_0} = k^{1-\alpha_0}$, $S_k^{\alpha_1} = k^{1-\alpha_1}$ – степенные сеточные функции. Для u_0 из условия (19) получим

$$u_0 = \sin\alpha, \tag{22}$$

$$u_{-1} = \sin\alpha + h\cos\alpha, \tag{23}$$

В уравнении (16) производные заменим выражениями (21). Получим уравнение в конечных разностях

$$\begin{cases} \dfrac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{h^2} + \lambda u_0 = 0, \\ \dfrac{u_{v+1}-2u_v+u_{v-1}}{h^2} + \dfrac{h^{-\alpha_0}}{\Gamma(2-\alpha_0)}\sum_{k=1}^{v}\Delta u_{k-1}\Delta S_{v-k}^{\alpha_0} + \\ +\dfrac{h^{-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)}\sum_{k=1}^{v}\Delta u_{k-1}\Delta S_{v-k}^{\alpha_1} + \lambda u_v = 0, \quad (v=1,2,...,n-1). \end{cases} \tag{24}$$

Из уравнений (24) и условий (22) и (23) можно последовательно определить $u_1, u_2, ..., u_n$. Присоединим к задаче (22), (23), (24) условие

$$u_{-1}\cos\beta + \frac{u_n - u_{n-1}}{h}\sin\beta = 0\,, \qquad (25)$$

которое получается из (18) заменой производной разностными соотношением.

Как и в [22], получим алгебраическую задачу на собственные значения в n – мерном векторном пространстве. Из граничных условий (22)-(23) и (25) следует [22]

$$u_{-1} = u_0(1+\operatorname{tg}\alpha),$$
$$u_n = u_{n-1}(1-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Покажем, что матрица T_n имеет простую структуру. Пусть λ – кратное собственное число. Тогда ему должно соответствовать по крайней мере два различных собственных вектора $u = u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ и $z = z_0, z_1, ..., z_{n-1}$. Рассуждая точно также как и в [22], получим, что $u_\nu = z_\nu$ для всех $\nu = 1, 2, ..., n-1$, что и показывает, что матрица T_n имеет простую структуру.

Заключение

В заключении отметим, что полученные в данной статье результаты могут быть использованы в теории фильтрации жидкости и газа в средах с фрактальной структурой, а также при изучении движения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Библиографический список

1. Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Сибирские электронные математические известия. 2013. №10. С. 41–55.

2. Джрбашян М.М. Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка // Известия Академии наук Армянской ССР. Математика. 1970. Т. 5. №2. С. 71-96.

3. Malamud M. M., Oridoroga L. L. *The analogue of Birkhoff theorem and the completeness of eigenfunctions for differential equations of fractional order*) // *Russian Journal of Mathematical Physics.* 2001.vol. 8. no.3. pp. 287-308.

4. Алероев Т.С. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №2. С.341-342.

5. Алероев Т.С., Алероева Х.Т. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Известия Вузов. Математика. 2014. №10. С. 3-12.

6. Алероев Т.С. Об одной краевой задаче для дифференциального оператора дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. №1. С. 123.

7. Kaufmann E.R. Existence and nonexistence of positive solutions for a nonlinear fractional boundary value problem // Discrete and continuous dynamical systems. 2009, pp. 416-423.

8. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.

9. Алероев Т.С. О полноте собственных функций одного дифференциального оператора дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36. №6. С. 829-830.

10. Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: Диссертация доктора физ.-мат. наук. – М: МГУ, 2000.

11. Aleroev T.S., Aleroeva H. T., Ning-Ming Nie, and Yi-Fa Tang. Boundary Value Problems for Diferential Equations of Fractional Order // Mem. Diferential Equations Math. Phys., 49, 2010, pp. 19-82.

12. Aleroev T.S., Aleroeva H. T.A problem on the zeros of the Mittag-Lefer function and the spectrum of a fractional-order diferential operator // Electron. J. Qual. Theory Difer. Equ., №25, 2009. pp 18.

13. Mainardi F. Fractional Relaxation-Oscillation and fractional Difusion-wave Phenomena Chaos // Solutions and Fractals. Vol. 7, no.9, 1996, pp. 1461-1477.

14. Алероев Т.С. Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями дробного порядка // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46. № 6. С. 1201-1207.

15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов - М.: Мир, 1972. – 740 с.

16. Логинов Б.В. К оценке точности метода возмущений // Известия АН УзССР. Физико-математические науки. 1963. № 6. С. 14-19.

17. Попов А.Ю. О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 6. С. 137–155.

18. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Доклады АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.

19. Ingman D., Suzdalnitsky J. Iteration method for equation of viscoelastic motion with fractional differential operator of damping // Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001) 5027–5036.

20. Ларионов Е. А., Зверяев Е. М., Алероев Т. С. К теории слабого возмущения нормальных операторов. – М: 2014. – 31 с. (Препринт / Институт Прикладной Механики РАН. 2014. № 14).

21. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. - 448 с.

22. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Том 1. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960 г. – 278 с.