УДК 519.254

Повышение эффективности обучения студентов аэрокосмических специальностей с помощью специализированного рейтинга

С.И.Панарин

В рамках модернизации страны одной из ключевых отраслей является аэрокосмическая. В свою очередь, в аэрокосмической отрасли одной из главных задач является подготовка высокопрофессиональных кадров с высоким уровнем математической подготовки. В процессе обучения студентов аэрокосмических специальностей важное значение имеет стимулирование положительной мотивации студентов, которое можно обеспечить с помощью специализированного рейтинга обучения. В данной работе рассматривается построение такого рейтинга и алгоритм его вычисления для повышения эффективности обучения на примере системы дистанционного обучения (СДО) по математическим дисциплинам.

Ключевые слова: обучение по аэрокосмическим специальностям, системы дистанционного обучения, модель Раша, метод максимального правдоподобия, рекуррентный алгоритм, метод Ньютона

1. *Введение*

В настоящее время для решения проблемы подготовки высококвалифицированных кадров для аэрокосмической отрасли активно используются системы дистанционного обучения [1]. Для повышения мотивации и, как следствие, общей эффективности обучения студентов аэрокосмических специальностей, обучающихся в такой системе, используется специализированный рейтинг обучения. Однако при вычислении такого рейтинга возникает проблема оценки уровня подготовки студента на основе его ответов на серию тестов. Выборка оказывается неоднородной, что усложняет процедуру обработки результатов наблюдений (ответов на тесты).

Для решения этой проблемы в данной работе на основе исследований [3,4,5,6] используется модель Раша, метод максимального правдоподобия и метод Ньютона. На основе полученных результатов предлагается рекуррентный алгоритм обработки результатов тестов, позволяющий построить специализированный рейтинг обучающихся. Эффективность предложенного алгоритма демонстрируется на примере системы дистанционного обучения (СДО) CLASS.NET [2], используемой для обучения студентов аэрокосмических специальностей через интернет.

2. Описание модели наблюдений

Рассматривается группа из N студентов, отвечающих на L вопросов теста. Ответ каждого студента может быть либо правильным, либо неправильным и моделируется дискретной случайной величиной ξ_{ij} с двумя реализациями $\{0,1\}$, где i – номер студента в группе, $i=\overline{1,N}$, j – номер задания теста, $j=\overline{1,L}$. Случайные величины ξ_{ij}, $j=\overline{1,L}$, считаются независимыми так же, как и ξ_{ij}, $i=\overline{1,N}$.

Наиболее простым способом оценки общего успеха студента в тесте является первичный балл, т.е. количество правильных ответов. Обычно первичный балл делят на общее количество заданий и переводят это отношение в %. Однако получившаяся шкала первичных баллов (%) будет *неоднородна*. Например, при одинаковой разнице в 8% между первичными баллами 60% и 52% и между 90% и 82%, разница в уровне подготовки студента не будет одинаковой. Поэтому предлагается рассмотреть модель обработки результатов, основанную на работе [3], которая лишена этого недостатка.

В модели [3] постулируется, что все случайные величины имеют одинаковое распределение, которое имеет два параметра Δ и Θ – один связан с заданием (Δ), другой – со студентом (Θ). Параметры Δ и Θ являются безразмерными и могут быть любыми положительными числами, т.е. $\Delta\in(0,+\infty)$, $\Theta\in(0,+\infty)$. Вводятся обозначения для логарифмического преобразования этих параметров

$$\theta \triangleq \ln\Theta, \qquad \delta \triangleq \ln\Delta.$$

Получившиеся δ и θ могут принимать любые действительные значения, т.е. $\delta\in(-\infty,+\infty)$, $\theta\in(-\infty,+\infty)$ и называются сложностью задания (δ) и уровнем подготовки студента (θ).

Очевидно, что правильность ответа ξ_{ij} зависит как от сложности δ_j j-го задания, так и от уровня подготовки θ_i i-го студента

$$\xi_{ij} \equiv \xi(\theta_i, \delta_j).$$

Заметим, что тогда в каждой строке Таблицы 1 уровень подготовки студента определяется одним и тем же параметром θ_i, а в каждом столбце сложность задания также постоянна – δ_j. Обозначим

$$f(\theta_i, \delta_j) \equiv P\{\xi_{ij} = 1\} = 1 - P\{\xi_{ij} = 0\}, \quad i = \overline{1,N}, j = \overline{1,L}, \tag{1}$$

где функция $f(\theta_i, \delta_j)$ принимает значения от 0 до 1. Далее данная функция $f(\cdot)$ будет задана в явном виде.

Реализации случайных величин ξ_{ij}, которые наблюдаются, образуют матрицу $\| x_{ij} \|$, где $x_{ij} \in \{0,1\}$, i – номер студента в группе, $i = \overline{1,N}$, j – номер задания теста, $j = \overline{1,L}$.

Считается, что в матрице $\| x_{ij} \|$ нет строк или столбцов, целиком состоящих только из нулей или только из единиц. Подразумевается, что если такие строки или столбцы были в исходной матрице, то они были вычеркнуты и в рассматриваемой $\| x_{ij} \|$ их не осталось.

Задача обработки результатов тестов ставится следующим образом: по имеющимся наблюдениям $\| x_{ij} \|$ оценить неизвестные параметры δ_i и θ_j, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,L}$.

Рассмотрим *логистическую модель* случайных величин ξ_{ij}, которая задает функцию $f(\cdot)$ из (1) в виде

$$f(\theta_i, \delta_j) \equiv \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)}, \quad i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, L. \tag{2}$$

В работе [3] предлагается данная логистическая модель и приводятся результаты, которые подтверждают хорошую согласованность данных с моделью.

3. Совместное оценивание параметров методом максимального правдоподобия

Рассмотрим процедуру совместного оценивания неизвестных параметров, основанную на методе максимального правдоподобия, предложенную в работе [8]. Итак, пусть имеется матрица наблюдаемых ответов $\| x_{ij} \|$, $i = 1,...,N$, $j = 1,...,L$.

Используя обозначения из работ [4,6], введем понятие *первичного балла* j*-го задания* $s_j \triangleq \sum_{i=1}^{N} x_{ij}$, и *первичного балла* i*-го студента* $r_i \triangleq \sum_{j=1}^{L} x_{ij}$.

Так как в матрице $\| x_{ij} \|$ нет строк, состоящих из одних нулей или одних единиц, это означает, что первичный балл i-го студента изменяется в пределах $r_i \in \{1, 2, ..., L-1\}$, $i = \overline{1, N}$.

Через n_r обозначим количество студентов, набравших одинаковый первичный балл r. Заметим, что

$$\sum_{r=1}^{L-1} n_r = N, \qquad \sum_{i=1}^{N} f(\theta_i, \delta_j) = \sum_{r=1}^{L-1} n_r f(\theta_r, \delta_j). \tag{3}$$

Используя $f(\cdot)$ из (1) и ее явный вид из (2), можем найти вероятность

$$P\{\xi_{ij}(\theta_i, \delta_j) = 0\} = 1 - f(\theta_i, \delta_j) = 1 - \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)}$$

$$= \frac{1 + \exp(\theta_i - \delta_j) - \exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)} = \frac{1}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)}.$$

Таким образом, в общем виде вероятность реализации $x_{ij} \in \{0, 1\}$ можно записать в виде

$$P\{\xi_{ij}(\theta_i, \delta_j) = x_{ij}\} = \frac{\exp(x_{ij}(\theta_i - \delta_j))}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)},$$

т.е. когда $x_{ij} = 1$, числитель равен $\exp(\theta_i - \delta_j)$, а когда $x_{ij} = 0$, числитель равен 1.

Запишем функцию правдоподобия

$$L(x, \theta, \delta) = P\{\xi_{ij}(\theta_i, \delta_j) = x_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, L}\} = \frac{\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{L} \exp(x_{ij}(\theta_i - \delta_j))}{\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{L} 1 + \exp(\theta_i - \delta_j)},$$

где $x \triangleq \mathrm{col}(x_{11}, ..., x_{1L}, ..., x_{N1}, ..., x_{NL})$, $\theta \triangleq \mathrm{col}(\theta_1, ..., \theta_N)$, $\delta \triangleq \mathrm{col}(\delta_1, ..., \delta_L)$.

Тогда логарифмическая функция правдоподобия примет вид

$$\ln L(x, \theta, \delta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i r_i - \sum_{j=1}^{L} \delta_j s_j - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} \ln(1 + \exp(\theta_i - \delta_j)). \tag{4}$$

Оценим параметры θ и δ, найдя максимум логарифмической функции правдоподобия.

Дифференцируя (4) по θ_i, получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(x,\theta,\delta) = r_i - \sum_{j=1}^{L} \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1+\exp(\theta_i - \delta_j)} = 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) по δ_j, получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} \ln L(x,\theta,\delta) = -s_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1+\exp(\theta_i - \delta_j)} = 0, \quad j = \overline{1,L}. \tag{6}$$

Используя выражение (2) и соотношения (3), запишем уравнения (5),(6) в новом виде $r_i - \sum_{k=1}^{L} f(\theta_i, \delta_k) = 0, \ i = 1,2,\ldots,N,$ и $-s_j + \sum_{r=1}^{L-1} n_r f(\theta_r, \delta_j) = 0, \ j = 1,2,\ldots,L,$

где n_r – количество студентов, набравших первичный балл r.

Таким образом, получается система из $L+N$ нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров.

Система редуцируется до системы с $2L-1$ уравнениями, т.к. уравнения для n_r студентов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_{n_r}$, набравших одинаковый первичный балл $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_{n_r}} = r$, совпадут, т.е.

$$\begin{cases} r - \sum_{k=1}^{L} f(\theta_r, \delta_k) = 0, & r = 1,2,\ldots,L-1, \\ -s_j + \sum_{k=1}^{L-1} n_k f(\theta_k, \delta_j) = 0, & j = 1,2,\ldots,L. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) имеет бесконечное количество решений: если имеется решение системы, то прибавление или вычитание константы из всех оптимизируемых параметров снова дает решение системы (так как во все уравнения входят разности параметров $\theta_k - \delta_j$). Таким образом, для получения единственного решения, к системе нужно добавить еще одно уравнение с ограничением, задающим <<начало отсчета>>. В качестве начала отсчета выбирается 0 и система (7) дополняется следующим уравнением

$$\sum_{k=1}^{L} \delta_k = 0. \tag{8}$$

Решая систему, получаем оценки $\hat{\theta}_i$ и $\hat{\delta}_j$ параметров θ_i, δ_j.

Все студенты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_{n_r}$, набравшие одинаковый первичный балл r, получат одинаковую оценку θ_r, т.е. $\theta_{i_1} = \theta_{i_2} = \ldots = \theta_{i_{n_r}} = \theta_r$.

Таким образом, среди N студентов количество различных оценок не превышает количества возможных первичных баллов, за исключением нуля и максимального L, т.е. количество оценок будет $L-1$.

Численно систему (7)–(8) можно решить, например, с помощью метода Ньютона [9].

4. Алгоритм вычисления оценок

Рассмотрим алгоритм вычисления оценок, основанный на методе Ньютона [9], для решения системы (7).

Вначале заметим, что система (7),(8) имеет размерность $2L-1$, а количество уравнений $2L$. Искусственно добавим новую переменную $\lambda \in R^1$, используя идею множителей Лагранжа [15]. Предположим, что система (7),(8) имеет единственное решение и рассмотрим систему

$$\begin{cases} r - \sum_{k=1}^{L} \dfrac{\exp(\theta_r - \delta_k)}{1+\exp(\theta_r - \delta_k)} = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, L-1, \\ -s_j + \sum_{k=1}^{L-1} n_k \dfrac{\exp(\theta_k - \delta_j)}{1+\exp(\theta_k - \delta_j)} + \lambda = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, L, \\ \sum_{k=1}^{L} \delta_k = 0, \end{cases}$$

которая в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$f_i(\theta_1, \ldots, \theta_{L-1}, \delta_1, \ldots, \delta_L, \lambda) = 0, \quad i = \overline{1, 2L}, \tag{9}$$

или в векторном виде

$$F(\theta_1, \ldots, \theta_{L-1}, \delta_1, \ldots, \delta_L, \lambda) = F(\theta, \delta, \lambda) = F(x) = 0, \tag{10}$$

где $F : R^{2L} \to R^{2L}$, $\theta \triangleq \mathrm{col}(\theta_1, \ldots, \theta_{L-1})$, $\delta \triangleq \mathrm{col}(\delta_1, \ldots, \delta_L)$, $x \triangleq \mathrm{col}(\theta, \delta, \lambda)$.

Можно заметить, что при $\lambda = 0$ из системы (10) получается система (7),(8), которая, по предположению, имеет единственное решение. Поэтому если установить, что система (10) имеет единственное решение, то отсюда будет следовать, что $\lambda = 0$ и система (7),(8) имеет единственно решение, которое совпадает с решением системы (10) с $\lambda = 0$. Ниже будет показано, что система (10) имеет единственное решение.

С этой целью проверим условия сходимости метода Ньютона [9] для данной системы нелинейных уравнений. Покажем, что метод сходится для системы (9), используя условия из [11] и рассматривая систему (9) в обобщенном виде

$$F(x) = 0, \tag{11}$$

где $F: X \to Y$ – отображение банахова пространства X в банахово пространство Y. Полагаем, что отображение F сильно дифференцируемо (т.е. дифференцируемо по Фреше) в некотором шаре $B(x_0, \rho)$ радиуса ρ (центр которого x_0 мы примем за нулевое приближение искомого решения).

Модифицированный метод Ньютона записывается в виде

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n), \quad n = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

где $F'(x_0)$ – производная (по Фреше) нелинейного оператора $F(x)$ в точке x_0, а $[F'(x_0)]^{-1}$ – матрица, обратная к $F'(x_0)$.

Для нашей системы (9) положим $x \equiv \mathrm{col}(\theta, \delta, \lambda) \in R^{2L}$. Пространство X совпадает с R^{2L}, пространство Y совпадает с R^{2L}. В качестве центра шара B рассмотрим начало координат: $x_0 = \mathrm{col}(0, \ldots, 0) \in R^{2L}$, в качестве нормы вектора возьмем

$$\| x \| = \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{2L} | x_i |,$$

в качестве нормы матрицы возьмем

$$\| A \| = \| A \|_1 = \max_{j \in \{1,\ldots,2L\}} \sum_{i=1}^{2L} | a_{ij} | .$$

Основной результат о сходимости из [11] формулируется следующим образом:

Пусть отображение F сильно дифференцируемо на шаре $B = \{ x \,|\, \| x - x_0 \| \le \rho \}$, а производная $F'(x)$ удовлетворяет в этом шаре условию Липшица

$$\| F'(x_1) - F'(x_2) \| \le \tilde{L} \, \| x_1 - x_2 \| . \tag{13}$$

Пусть $[F'(x_0)]^{-1}$ существует и

$$M = \| [F'(x_0)]^{-1} \|, \quad k = \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \|, \quad h = M k \tilde{L}.$$

Тогда, если

$$h = M k \tilde{L} < 1/4, \tag{14}$$

то в шаре $\| x-x_0 \| \le kt_0$, где t_0 – меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, уравнение (11) имеет единственное решение x^* и последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентной формулой (12), сходится к этому решению.

Заметим, что проверка условий сходимости производится, в основном, лишь в одной точке – центре области сходимости в виде шара, что упрощает такую проверку.

Далее проверим выполнение всех условий Теоремы 1. В нашем случае, исследуемая система (10) имеет различную размерность в зависимости от числа заданий L. Функции $f_i(x)$ системы зависят от числа студентов N, так как n_r зависят от N. Учитывая это, общая схема доказательства сходимости метода Ньютона такова:

1. проверить выполнение условия сильной дифференцируемости,
2. найти зависимости M, k, $\tilde{L}$ из условия (14) от L, N и радиуса шара ρ,
3. получив явный вид зависимости $h(N, L, \rho)$, вывести выражение для ρ, при котором выполнено условие (14) $h < 1/4$,
4. убедиться, что получаемый по такому выражению радиус $\rho > 0$ для любых L и N.

Функция $F(x) = F(\theta, \delta, \lambda)$ системы (9) является бесконечно дифференцируемой на всем пространстве R^{2L}, поэтому первое условие выполнено.

Найдем константу M. Матрица $F'(x_0)$ будет иметь следующую структуру

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{L}{4} & 0 & \dots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \dots & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{L}{4} & \dots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \dots & -\frac{1}{4} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_1}{4} & \frac{n_2}{4} & \dots & -\frac{N}{4} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{n_1}{4} & \frac{n_2}{4} & \dots & 0 & -\frac{N}{4} & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n_1}{4} & \frac{n_2}{4} & \dots & 0 & 0 & \dots & -\frac{N}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что максимум каждого столбца ограничен, а значит, ограничена и норма $\| F'(x_0) \|$.

Норму $\| [F'(x_0)]^{-1} \|$ можно выразить через число обусловленности

$$\nu = \| F'(x_0) \| \cdot \| [F'(x_0)]^{-1} \|,$$

равное также $\nu = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| = \frac{\lambda_{max}(N,L)}{\lambda_{min}(N,L) \| F'(x_0) \|}$$

где $\lambda_{max}(N,L)$ – максимальное, а $\lambda_{min}(N,L)$ – минимальное собственное значение матрицы $F'(x_0)$, которые будут зависеть от N и L. Из свойств собственных значений известно [11], что $\lambda_{max}(N,L) \le \| F'(x_0) \|$.

Тогда норма $\| [F'(x_0)]^{-1} \|$ будет являться некоторой функцией N и L:

$$\| [F'(x_0)]^{-1} \| \le \frac{1}{\lambda_{min}(N,L)} M(N,L),$$

и будет ограниченной, т.к. $\lambda_{min}(N,L) \ne 0$ вследствие того, что матрица $F'(x_0)$ не содержит нулевых строк или столбцов и столбцы и строки являются линейно-независимыми (что видно из структуры этой матрицы).

Найдем константу k. Для нормы $\| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \|$ справедлива следующая оценка (неравенство следует из определения нормы оператора, см., например [11]):

$$k = \| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \| \le \| [F'(x_0)]^{-1} \| \cdot \| F(x_0) \| = M(N,L) \cdot \| F(x_0) \|.$$

Оценим норму $\| F(x_0) \|$. Вектор $F(x_0)$ имеет вид:

$$F(x_0) = \operatorname{col}\left(1 - \frac{L}{2}, 2 - \frac{L}{2}, \ldots, L - 1 - \frac{L}{2}, -s_1 + \frac{N}{2}, -s_2 + \frac{N}{2}, \ldots, -s_L + \frac{N}{2}, 0 \right).$$

Каждый из первых $L-1$ элементов $F_i(x_0)$, $i = 1, \ldots, L-1$, можно оценить следующим образом, учитывая что $L \ge 3$:

$$| F_i(x_0) | = \left| i - \frac{L}{2} \right| \le \left| \frac{L}{2} - 1 \right| = \left(\frac{L}{2} - 1 \right),$$

так как $1 \le i \le L-1$.

Следующие L элементов $F_i(x_0)$, $i = L, \ldots, 2L-1$ можно оценить следующим образом, учитывая что $N \ge 2$,

$$|F_i(x_0)| = \left|-s_{i+1-L} + \frac{N}{2}\right| \le \left|\frac{N}{2}-1\right| = \left(\frac{N}{2}-1\right),$$

так как $1 \le s_{i+1-L} \le N-1$.

Тогда для нормы $\|F(x_0)\|$ справедливо

$$\|F(x_0)\| = \sum_{i=1}^{2L}|F_i(x_0)| = \sum_{i=1}^{L-1}|F_i(x_0)| + \sum_{i=L}^{2L-1}|F_i(x_0)| \le \sum_{i=1}^{L-1}\left(\frac{L}{2}-1\right) + \sum_{i=L}^{2L-1}\left(\frac{N}{2}-1\right)$$

$$= (L-1)\left(\frac{L}{2}-1\right) + L\left(\frac{N}{2}-1\right) = \frac{L}{2}\left(L+N-5\right)+1.$$

Таким образом,

$$k = k(N,L) \le M(N,L)\left[\frac{L}{2}\left(L+N-5\right)+1\right].$$

Определим константу $\tilde{L}$. Так как выражение (13) записано для первых производных функции $F(x)$, то в качестве липшицевой константы $\tilde{L}$ можно взять абсолютный максимум нормы второй производной на рассматриваемом шаре $B(x_0,\rho)$:

$$\max_{x\in B(x_0,\rho)} \|F''(x)\| \le \tilde{L}.$$

Рассмотрим, как зависит норма $\|F''(x)\|$ от элементов матрицы $F''(x)$.

Для удобства рассмотрим $F''(x)$ как блочную матрицу $F''(x) = [B_1(x)\,|\,B_2(x)]$, состоящую из матриц $B_1(x)$ и $B_2(x)$, которые имеют вид

$$B_1(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\theta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\theta_{L-1}^2}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\theta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\theta_{L-1}^2}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f_{2L}}{\partial\theta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_{2L}}{\partial\theta_{L-1}^2}(x) \end{pmatrix}, B_2(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\delta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial\delta_L^2}(x) & 0 \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\delta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial\delta_L^2}(x) & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f_{2L}}{\partial\delta_1^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_{2L}}{\partial\delta_L^2}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Норма $\|F''(x)\|$ с использованием этих обозначений будет иметь вид

$$\|F''(x)\| = \max_q\left\{\|b_1^q(x)\|, \|b_2^q(x)\|\right\}, \tag{15}$$

где $b_m^q(x)$ – q-й столбец матрицы $B_m(x), m=1,2$.

Рассмотрим, как выражаются эти нормы через элементы матриц $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

Обозначим

$$f''(\theta_r,\delta_j) = \frac{\exp(\theta_r-\delta_j)-\left[\exp(\theta_r-\delta_j)\right]^2}{(1+\exp(\theta_r-\delta_j))^3}, \qquad (16)$$

$$\tilde{f}(y) = f(\theta_r,\delta_j), \qquad (17)$$

где $y=\theta_r-\delta_j$, $f(\cdot)$ из (1). Обозначим также вторую производную функции $\tilde{f}(y)$ следующим образом

$$\tilde{f}''(y) = \frac{\exp(y)-\left[\exp(y)\right]^2}{(1+\exp(y))^3}. \qquad (18)$$

С учетом этих обозначений

$$f''(\theta_r,\delta_j) = \tilde{f}''(\theta_r-\delta_j).$$

Приведем явный вид частных производных второго порядка по параметрам θ_r:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial\theta_r^2}(x)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{L} f''(\theta_r,\delta_j), \text{если } i=1,\dots,L-1 \text{ и } r=i;\\ 0, \text{если } i=1,\dots,L-1 \text{ и } r\neq i;\\ n_r f''(\theta_r,\delta_{i-L+1}), \text{если } i=L,\dots,2L-1;\\ 0, \text{если } i=2L\end{cases}$$

Приведем также явный вид частных производных второго порядка по параметрам δ_j:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial\delta_j^2}(x)=\begin{cases} f''(\theta_i,\delta_j), \text{если } i=1,\dots,L-1;\\ \sum_{r=1}^{L-1} n_r f''(\theta_r,\delta_{i-L+1}), \text{если } i=L,\dots,2L-1 \text{ и } j=i-L+1;\\ 0, \text{если } i=L,\dots,2L-1 \text{ и } j\neq i-L+1;\\ 0, \text{если } i=2L\end{cases}$$

Видно, что производные, которые являются элементами матриц $B_1(x)$ и $B_2(x)$ зависят явно от $f''(\theta,\delta)$. Для поиска максимума нормы (15) на шаре $B(x_0,\rho)$, исследуем свойства функции $\tilde{f}''(y)$.

Используя необходимое условие экстремума (равенства нулю производной функции $\tilde{f}''(y)$) был найден максимум функции $\tilde{f}''(y)$:

$$\left|\tilde{f}''(y)\right| = \left|\tilde{f}''(-y)\right| \le \tilde{f}''(y^*) = \tilde{f}''_{max} \approx 0.0962, \qquad \forall y\in\mathbb{R}^1$$

который достигается при $y^*=(\theta_r-\delta_j)\approx 1.34$.

На интервале $y\in(-y^*,y^*)$ функция $\tilde{f}''(y)$ будет непрерывной и монотонноубывающей, поэтому максимум $\tilde{f}^{''}(y)$ на отрезке $[a,b]: -y^* < a < b < y^*$ будет достигаться в точке a.

Рассмотрим функцию $|\tilde{f}^{''}(y)|$, которая будет четной. Максимум модуля $|\tilde{f}^{''}(y)|$ на таком же отрезке $[a,b]$ будет достигаться в точке с максимальным модулем (т.е. в точке a, если $|a| \geq |b|$ и в точке b иначе).

Определим максимум $\tilde{f}^{''}(y)$ на шаре $B(x_0,\rho)$, $\rho < y^*$. Поскольку $\rho < y^*$, то для любых θ_r, δ_j, $|y| < \rho$, из монотонности $\tilde{f}^{''}(y)$ следует, что

$$f^{''}(\theta_r,\delta_j) = \tilde{f}^{''}(y) \leq \tilde{f}^{''}(-\rho)$$

Максимум модуля будет тогда ограничен

$$\max_{x\in B(x_0,\rho)} |f''(\theta_r,\delta_j)| \leq \tilde{f}''(\rho). \tag{19}$$

Оценим максимум $\|F''(x)\|$ на шаре $B(x_o,\rho)$. Для этого рассмотрим матрицы $B_1(x)$ и $B_2(x)$ и определим максимум нормы (15) на шаре

$$\max_{x\in B(x_o,\rho)} \|F''(x)\| = \max_q \left\{ \max_{x\in B(x_o,\rho)} \|b_1^q(x)\|, \max_{x\in B(x_o,\rho)} \|b_2^q(x)\| \right\}, \tag{20}$$

где $b_m^q(x)$ – q-й столбец матрицы $B_m(x), m = 1,2$, и

$$B_1(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{L} f^{''}(\theta_1,\delta_j) & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^{L} f^{''}(\theta_2,\delta_j) \\ n_1 f^{''}(\theta_1,\delta_1) & n_2 f^{''}(\theta_2,\delta_1) \\ n_1 f^{''}(\theta_1,\delta_2) & n_2 f^{''}(\theta_2,\delta_2) \\ n_1 f^{''}(\theta_1,\delta_3) & n_2 f^{''}(\theta_2,\delta_3) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(x) = \begin{pmatrix} -f^{''}(\theta_1,\delta_1) & -f^{''}(\theta_1,\delta_2) & -f^{''}(\theta_1,\delta_3) & 0 \\ -f^{''}(\theta_2,\delta_1) & -f^{''}(\theta_2,\delta_2) & -f^{''}(\theta_2,\delta_3) & 0 \\ -\sum_{r=1}^{L-1} n_r f^{''}(\theta_r,\delta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum_{r=1}^{L-1} n_r f^{''}(\theta_r,\delta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sum_{r=1}^{L-1} n_r f^{''}(\theta_r,\delta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: $b_{mi}^q(x)$ – i-ый элемент q-го столбца матрицы $B_m(x)$, $m=1,2$.

Максимум нормы каждого столбца матрицы $B_1(x)$ есть максимум суммы модулей элементов столбца и его можно оценить сверху, учитывая что $n_q \le (N-1)$ и (19):

$$\max_{x\in B(x_o,\rho)} \| b_1^q(x) \| = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \sum_{i=1}^{2L} | b_{1i}^q(x) | = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left[\left| \sum_{j=1}^{L} f''(\theta_q,\delta_j) \right| + \sum_{i=1}^{L} | n_q f''(\theta_q,\delta_i) | \right] \le$$

$$\le \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| \sum_{j=1}^{L} f''(\theta_q,\delta_j) \right| + \max_{x\in B(x_o,\rho)} \sum_{i=1}^{L} | n_q f''(\theta_q,\delta_i) | \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{L} \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| f''(\theta_q,\delta_j) \right| + \sum_{i=1}^{L} n_q \max_{x\in B(x_o,\rho)} | f''(\theta_q,\delta_i) | \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{L} \tilde f''(\rho) + \sum_{i=1}^{L} n_q \tilde f''(\rho) \le L \tilde f''(\rho) + L(N-1)\tilde f''(\rho) = (L+L(N-1))\tilde f''(\rho).$$

Для матрицы $B_2(x)$:

$$\max_{x\in B(x_o,\rho)} \| b_2^q(x) \| = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \sum_{i=1}^{2L} | b_{2i}^q(x) | = \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left[\left| \sum_{j=1}^{L-1} f''(\theta_j,\delta_q) \right| + \left| \sum_{r=1}^{L-1} n_r f''(\theta_r,\delta_q) \right| \right] \le$$

$$\le \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| \sum_{j=1}^{L-1} f''(\theta_j,\delta_q) \right| + \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| \sum_{r=1}^{L-1} n_r f''(\theta_r,\delta_q) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{L-1} \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| f''(\theta_j,\delta_q) \right| + \sum_{r=1}^{L-1} n_r \max_{x\in B(x_o,\rho)} \left| f''(\theta_r,\delta_q) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{L-1} \tilde f''(\rho) + \sum_{r=1}^{L-1} n_r \tilde f''(\rho) \le (L-1)\tilde f''(\rho) + N\tilde f''(\rho) \le (L+N-1)\tilde f''(\rho).$$

Максимум нормы равен

$$\max_{x\in B(x_o,\rho)} \| F''(x) \| = \max\left\{ (L+L(N-1))\tilde f''(\rho), (L+N-1)\tilde f''(\rho) \right\},$$

и, учитывая что $(L+L(N-1)) \ge (L+N-1)$, получаем

$$\max_{x\in B(x_o,\rho)} \| F''(x) \| \le (L+L(N-1))\tilde f''(\rho) \tilde L(N,L,\rho).$$

Следовательно, максимум на шаре $B(x_0,\rho)$ можно сделать сколь угодно малым, уменьшая радиус ρ шара.

Значение радиуса ρ шара $B(x_0,\rho)$ для определенного значения z нормы $\| F''(x) \|$ вычисляется следующим образом

$$\rho = \left[\tilde{f}''\right]^{-1}\left(\frac{z}{L + L(N-1)}\right),$$

где $\left[\tilde{f}''\right]^{-1}(z)$ – функция, обратная к $\tilde{f}''(y)$ на интервале $(-y^*, y^*)$, которая существует вследствие непрерывности и строгой монотонности $\tilde{f}''(y)$ на этом интервале. Заметим, что $\left[\tilde{f}''\right]^{-1}(z)$ будет возрастающей функцией на этом интервале.

Таким образом,

$$h = h(N,L,\rho) = M(N,L)k(N,L)\tilde{L}(N,L,\rho).$$

Тогда $\tilde{L}(N,L,\rho)$ выражается следующим образом

$$\tilde{L}(N,L,\rho) = \frac{h}{M(N,L)k(N,L)}.$$

Из условия $h(N,L,\rho) < 1/4$ для каждых N и L можно получить радиус сходимости ρ. Так как $z = \frac{h}{M(N,L)k(N,L)}$, то

$$\rho = \left[\tilde{f}''\right]^{-1}\left(\frac{h}{M(N,L)k(N,L)\left[L + L(N-1)\right]}\right).$$

Заметим, что для $0 < h < 1/4$, всегда будет $\rho > 0$, т.к. $\rho = 0$ только в случае $h = 0$.

Таким образом, условия теоремы (12) будут выполнены и метод Ньютона сходится в шаре радиуса $\rho' = kt_0$, где t_0 – меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$ для системы (10).

Радиус сходимости ρ' может оказаться достаточно мал, но на практике сходимость обеспечивается и в гораздо более широкой области.

Система (10) решается с помощью итерационной процедуры метода Ньютона, описанной далее. По-прежнему $x = \mathrm{col}(\theta_1, \ldots, \theta_{L-1}, \delta_1, \ldots, \delta_L, \lambda)$.

Шаг 1. Выбирается начальное приближение $x^{(0)}$. $k = 1$. Выбирается точность алгоритма $\varepsilon > 0$.

Шаг k. $k > 1$. На k-ом шаге (итерации) вычисляем новые значения оценок параметров:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

где вектор изменений на k-том шаге $\Delta x^{(k)}$ вычисляется как решение системы линейных уравнений, которая получается при замене $F(x_0)-F(x)$ главной линейной частью, т.е. элементом $F'(x_0)(x_0-x)$:

$$A(x)\Delta x_r^{(k)}=\sum_{r=1}^{2L}\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_r}\Delta x_r^{(k)}=-f_i(x^{(k)}),\qquad i=1,2,\dots,2L, \tag{21}$$

где $F'(x_0)=\mathrm{col}\left(\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f_{2L}(x_0)}{\partial x_{2L}}\right)$.

Критерий останова. Алгоритм останавливается, если на k-том шаге:

$$\|\Delta x^{(k)}\|\le\varepsilon,$$

где ε – наперед заданная точность алгоритма.

Таким образом, в качестве оценки искомых параметров можно будет принять

$$(\hat\theta_1,\dots,\hat\theta_{L-1},\hat\delta_1,\dots,\hat\delta_L)=x^{(k+1)}=(\theta_1^{(k+1)},\dots,\theta_{L-1}^{(k+1)},\delta_1^{(k+1)},\dots,\delta_L^{(k+1)}).$$

Для решения линейной системы (21), необходимо вычислять частные производные.

Явный вид частных производных по параметрам θ_r:

$$\frac{\partial f_i(\theta,\delta)}{\partial\theta_r}=\begin{cases}-\sum_{j=1}^{L}\frac{\exp(\theta_r-\delta_j)}{(1+\exp(\theta_r-\delta_j))^2}, \text{если } i=1,\dots,L-1 \text{ и } r=i;\\ 0, \text{если } i=1,\dots,L-1 \text{ и } r\ne i;\\ n_r\frac{\exp(\theta_r-\delta_{i-L+1})}{(1+\exp(\theta_r-\delta_{i-L+1}))^2}, \text{если } i=L,\dots,2L-1;\\ 0, \text{если } i=2L.\end{cases}$$

Явный вид частных производных по параметрам δ_j:

$$\frac{\partial f_i(\theta,\delta)}{\partial\delta_j}=\begin{cases}\frac{\exp(\theta_i-\delta_j)}{(1+\exp(\theta_i-\delta_j))^2}, \text{если } i=1,\dots,L-1;\\ \sum_{r=1}^{L-1}n_r\frac{-\exp(\theta_r-\delta_{i-L+1})}{(1+\exp(\theta_r-\delta_{i-L+1}))^2}, \text{если } i=L,\dots,2L-1 \text{ и } j=i-L+1;\\ 0, \text{если } i=L,\dots,2L-1 \text{ и } j\ne i-L+1;\\ 1, \text{если } i=2L.\end{cases}$$

5. Рекуррентный алгоритм вычисления интегральной оценки студента

Выше в работе была рассмотрена модель, которая позволяет построить оценки параметров студентов и заданий для одного теста и алгоритм, позволяющий вычислить эти оценки. Теперь рассмотрим задачу построения интегральной оценки студента, которая является общей оценкой работы студента с системой дистанционного обучения в течение семестра.

Интегральную оценку студента будем формировать, используя результаты студента в серии из K тестов $\{T_1, T_2, ..., T_K\}$. Под интегральной оценкой будем понимать оценку, полученную по K тестам, рассматривая их как один большой тест.

Алгоритм состоит из 2 типов шагов:

- *начальный шаг:* вычисление начальной оценки уровня подготовки студента по первому тесту;

- *рекуррентный шаг:* пересчет оценок уровня подготовки студента с учетом данных об ответах студента в очередном задании очередного теста с вычислением оценки уровня сложности этого очередного задания.

Начальный шаг. Для каждого студента вычисляется оценка уровня подготовки для первого теста T_1, когда эти данные доступны. Положим, что число заданий теста T_1 равно L.

Вычисление происходит с помощью решения системы (9) с начальным приближением параметров, равным нулевому вектору (значения всех параметров принимаются равными нулю) и ограничением $\sum_{k=1}^{L} \delta_k = 0$, задающим начало отсчета для значений параметров. Получаем оценку

$$(\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_{L-1}, \hat{\delta}_1, ..., \hat{\delta}_L)^{(1)}.$$

В результате получаются оценки сложностей заданий $\hat{\delta}_1, ..., \hat{\delta}_L$ первого теста T_1, которые фиксируются при дальнейшем вычислении оценок уровней подготовки студентов по заданиям следующих тестов $T_2, ..., T_K$.

Рекуррентный шаг. На этом шаге производится рекуррентный пересчет оценок параметров. Пусть на предыдущем шаге были получены оценки параметров для теста из L заданий, тогда в расширенном тесте будет $\tilde{L} = L + 1$ заданий.

Для каждого следующего теста $T_q, q > 1$ используем оценку, полученную в предыдущих тестах как начальное приближение новой оценки при решении модифицированной системы уравнений (22), где отсутствует ограничение на $\sum_{k=1}^{L} a_k = 0$. Оценки сложности предыдущих L заданий фиксированы и вновь не вычисляются, поэтому система имеет не $2\tilde{L}$, а всего $\tilde{L}$ неизвестных

$$
\begin{cases}
r - \left(\sum\limits_{k=1}^{\tilde{L}-1} \dfrac{\exp(\theta_r - \hat{\delta}_k)}{1+\exp(\theta_r - \hat{\delta}_k)} + \dfrac{\exp(\theta_r - \delta_{\tilde{L}})}{1+\exp(\theta_r - \delta_{\tilde{L}})} \right) = 0, \quad r = 1,2,\ldots,\tilde{L}-1, \\
-s_{\tilde{L}} + \sum\limits_{k=1}^{\tilde{L}-1} n_k \dfrac{\exp(\theta_k - \delta_{\tilde{L}})}{1+\exp(\theta_k - \delta_{\tilde{L}})} = 0.
\end{cases} \tag{22}
$$

Решение системы может быть записано в общем виде как рекуррентное соотношение

$$
(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{L-1},\hat{\theta}_{\tilde{L}-1},\hat{\delta}_1,\ldots,\hat{\delta}_L,\hat{\delta}_{\tilde{L}})^{(k)} = \varphi((\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{L-1},\hat{\delta}_1,\ldots,\hat{\delta}_L)^{(k-1)}),
$$

где $\varphi(\cdot)$ – некоторая известная функция, заданная алгоритмически.

Предложенный рекуррентный алгоритм существенно уменьшает время вычислений, сокращая размерность решаемой для каждого задания системы уравнений в 2 раза.

Таким образом, предложенный алгоритм является рекуррентным, так как он использует оценки, полученные по данным предыдущих тестов $T_1,\ldots,T_{q-1}$, $q>1$, для более быстрого вычисления оценок параметров с учетом данных теста T_q.

Пример. Рассмотрим пример рекуррентного вычисления оценок по данным из СДО CLASS.NET [2]: 50 заданий и 107 студентов. Решение полной системы для $L=50$ более чем в 3 раза превосходит время пересчета оценок с $L=49$ до $L=50$.

Использование в качестве начального приближения оценок системы меньшей на единицу размерности на новой итерации основывается на предположении, что новая оценка, построенная с учетом получения новой информации, не будут существенно отличаться от предыдущей (так как новой будет информация лишь об одном задании). Поэтому даже с учетом наличия у метода Ньютона лишь локальной сходимости, в данном случае можно ожидать сходимость алгоритма.

Так как вычисленные оценки $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_N$ расположены на линейной шкале, то можно провести линейное преобразование этой шкалы и перевести эти оценки в проценты от 0 до 100. Для этого определяются минимальная и максимальная оценки – $\hat{\theta}_{min}$ и $\hat{\theta}_{max}$ соответственно. Тогда преобразование примет вид

$$
\tilde{\theta}_i = \frac{\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{min}}{\hat{\theta}_{max} - \hat{\theta}_{min}} \cdot 100\%
$$

6. Проверка соответствия модели экспериментальным данным

Анализ соответствия модели данным проводится на основе исследования остатков между ожидаемой вероятностью правильного ответа студента и его фактическим ответом. Для проведения данного анализа используется матрица наблюдений (ответов) $\| x_{ij} \|$ и оценки параметров $\hat{\theta}_i$ и $\hat{\delta}_j$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,L}$.

Обозначим

$$E_{ij} \triangleq \mathrm{M}[\xi_{ij}] = \frac{\exp(\hat{\theta}_i - \hat{\delta}_j)}{1 + \exp(\hat{\theta}_i - \hat{\delta}_j)},$$

$$y_{ij} \triangleq x_{ij} - E_{ij}, z_{ij} \triangleq \frac{x_{ij} - E_{ij}}{\sqrt{E_{ij}(1 - E_{ij})}},$$

$$E \triangleq \| E_{ij} \|_{N \times L}, \qquad Z \triangleq \| z_{ij} \|_{N \times L} .$$

Рассмотрим статистики, введенные в работе [13].

Внешней статистикой называется

$$O(Z) \triangleq \frac{1}{N \cdot L} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} z_{ij}^2.$$

Внутренней статистикой называется

$$I(Z,E) \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} z_{ij}^2 \sqrt{E_{ij}(1 - E_{ij})}}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} \sqrt{E_{ij}(1 - E_{ij})}}.$$

В соответствии с результатами работы [14], при значениях статистик $I(Z,E) < 1.3$ и $O(Z) < 1.3$ принимается гипотеза о согласованности модели и данных на уровне надежности 0.95.

Пример. Рассмотрим оценки и соответствие модели для данных из СДО CLASS.NET, в которой 10 заданий и 107 студентов.

Для этих данных значение внешней статистики $O(Z) = 1.343354$, внутренней статистики $I(Z,E) = 1.302801$, т.е. данные практически согласуются с моделью.

7. Заключение

В данной работе рассматривается проблема построения оценки уровня подготовки студентов по результатам ответов на серию тестов для повышения эффективности обучения студентов аэрокосмических специальностей. Для решения данной проблемы предлагается модель обработки результатов студентов в серии тестов и формирование интегрального рейтинга студентов с применением этой модели.

Модель для серии тестов основывается на модели Раша [3] для одного теста. Для получения статистических оценок применяется метод максимального правдоподобия [4], для получения численных оценок – метод Ньютона (показана его сходимость). Предложенный в работе *рекуррентный алгоритм* вычисления уровня подготовки студентов в серии тестов, позволяет существенно ускорить получение искомых оценок параметров. Эффективность данного рекуррентного алгоритма продемонстрирована на практических данных результатов студентов в СДО CLASS.NET за один семестр. На основании статистических критериев из работ [13,14] показана согласованность модели и данных.

Библиографический список

1. *Кибзун А.И., Каролинская С.Н., Шаюков Р.И.* Система дистанционного обучения по математическим дисциплинам в вузе // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2006, №4, С. 29-36.
2. *Кибзун А.И., Вишняков Б.В., Панарин С.И.* Оболочка системы дистанционного обучения по математическим курсам // Вестник компьютерных и информационных технологий, 2008, №10, С. 43-48.
3. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
4. *Andrich D.* Rasch models for measurement, Sage University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences, series no. 07-068, Beverly Hills: Sage Publications, 1988.
5. *Bond T.G., Fox Ch.M.* Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2007.
6. *Нейман Ю.М., Хлебников В.А.* Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов. М.: <<Прометей>>, 2000.

7. *Ван дер Варден Б.Л.* Математическая статистика. М.: Издательство Иностранной Литературы, 1960.
8. *Fisher G.* On the existence and uniqueness of maximum-likelihood estimates in the Rasch model // Psychometrika, 1981, 46. P. 59-77.
9. *Поляк Б.Т.* Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике // Труды Института системного анализа РАН, 2006, №28, С.44-62.
10. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
12. *Крянев А.В., Лукин Г.В.* Методы обработки неопределенных данных. М.: Физматлит, 2006.
13. *Wright B.D., Masters G.N.* Rating scales analysis. Chicago: MESA Press, 1982.
14. *Smith R.M., Schumacker R.E., Bush M.J.* Using item mean squares to evaluate fit to the Rasch model // Journal of Outcome Measurement, 1998, 2(1). P. 66-78.
15. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

Сведения об авторах

Панарин Сергей Игоревич, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета),
e-mail: serg-panarin@yandex.ru