
УДК 532.526

Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа

До Суань Зоань

Московский физико-технический институт (государственный университет),

Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская область, 141700, Россия

e-mail: do_xuan_doanh_83@yahoo.com

Аннотация

Течение Куэтта-Тэйлора в сжимаемом газе имеет большое значение для теоретической, а также для прикладной науки. Данному течению в сжимаемом газе или жидкости посвящено большое количество статей, содержащих как теоретический анализ, так и результаты численных расчетов. Однако число исследований для сжимаемого газа ограничено, несмотря на возрастающий практический интерес. Целью данной работы является численное исследование вихревой структуры течения Куэтта-Тэйлора для сжимаемого газа в зависимости от числа Рейнольдса и температуры поверхности цилиндров с использованием программного комплекса ANSYS CFX.

С целью получения надежных результатов для неограниченных коаксиальных цилиндров в построенной физической модели предполагается, что длина цилиндров существенно превышает промежуток между ними (в 100 раз в рассматриваемой модели). В качестве сжимаемого газа взят воздух. Численные результаты

показывают, что траектории жидких частиц в соседних вихрях симметричны, что означает, что вихри являются спаренными.

Получена зависимость плотности вихрей, а также их структуры от числа Рейнольдса и поверхностной температуры цилиндров. Число Рейнольдса в данном случае определено по скорости внутреннего цилиндра и изменяется в пределах от 4.104 до 4.105, а температура отнесена к температуре торможения. Результаты расчетов показывают схожие зависимости плотности вихрей от числа Рейнольдса и от температуры поверхности. С ростом числа Рейнольдса плотность вихрей возрастает, затем достигает определенного уровня, после чего резко снижается.

Похожая картина наблюдается для соотношения плотности вихрей и температуры. В рассматриваемой модели температура поверхности внутреннего цилиндра фиксирована, а температура внешнего цилиндра изменяется в диапазоне от одной до восьми температур торможения. Вихревая плотность перестает изменяться, когда температура поверхности внешнего цилиндра превышает температуру торможения в семь раз.

Ключевые слова: течения Куэтта Тэйлора, влияние сжимаемости, структура течения.

Введение

Устойчивость течений Куэтта-Тэйлора изучалась в течение более чем 70 лет. Это течение возникает между двумя коаксиальными цилиндрами в случае, когда, оба или один цилиндр вращаются. Если параметры вращения превосходят критические значения, течение Куэтта-Тэйлора становится неустойчивым, так что появляется вторичное течение с ненулевыми радиальной и осевой компонентами

скорости; это новое течение может иметь форму противоположных тороидальных вихрей, расположенных рядом друг с другом в осевом направлении.

Как известно, первая успешная оценка устойчивости вязкого течения между вращающимися цилиндрами принадлежит Тейлору. Теоретический анализ Тэйлора предполагал, что разница радиусов двух цилиндров была небольшой по сравнению со средним радиусом. Условия, при которых течение переходит к неустойчивости, могут быть выражены через характеристическое число, известное как число Тейлора. Позже, Мексин решил проблему математическим методом, который отличается от метода Тейлора. На основе отдельных асимптотических решений ему удалось вывести условие устойчивости в замкнутой форме.

Исследованию течений несжимаемой жидкости посвящено много работ. В то же время с точки зрения технологических приложений и фундаментальной науки имеет несомненный интерес анализ течений сжимаемого газа. Наиболее распространенными являются численные методы анализа. В ряде статей были представлены результаты решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа [1].

В число безразмерных параметров, характеризующих течение, входит ряд параметров, таких как число Рейнольдса, геометрические параметры, величины температурных факторов и т.д.

На практике могут реализовываться, в частности, и течения с конечными числами Рейнольдса. Течение в таком случае описывается обычными уравнениями Навье-Стокса нелинейными или линейными в зависимости от рассматриваемых задач (описания среднего течения или исследования устойчивости). Понятно, что

для решения таких задач единственным способом является использование численных методов, основанных на использовании конечных разностей или представлениями в виде разложений в ряды.

При анализе течений с большими числами Рейнольдса возникает вопрос о сосуществовании инерционного и вязкого течений. Под вязким понимается течение, описываемое только диссипативной частью уравнений Навье-Стокса. На самом деле, даже без предположения об отсутствии инерционности только принимая условие одномерности течения, можно получить описание с диссипативными членами (как в случае несжимаемой жидкости [3-4]).

В настоящей работе приведены результаты численного решения задач, для различных величин температуры поверхностей цилиндров и скоростей, приводящих к образованию вихрей.

1. Постановка задачи

Исследуется течение между двумя концентрическими цилиндрами бесконечной длины, которые вращаются с различными угловыми скоростями. Предполагается, что поверхности цилиндров имеют различные температуры.

1.1. Система координат

Вводится цилиндрическая система координат. На рис. 1 показан эскиз системы координат для установившегося потока сжимаемой вязкой жидкости. Течение газа между двумя коаксиальными цилиндрами поддерживается за счёт постоянной угловой скоростью одного или обоих цилиндров, при этом в среднем течение в осевом направлении отсутствует [осреднённый поток в осевом направлении равен нулю]. Внутренний цилиндр имеет радиус R_1 и вращается с

угловой скоростью Ω_1 , а внешний радиус R_2 и вращается с угловой скоростью Ω_2 .

Звёздочкой обозначены размерные величины.

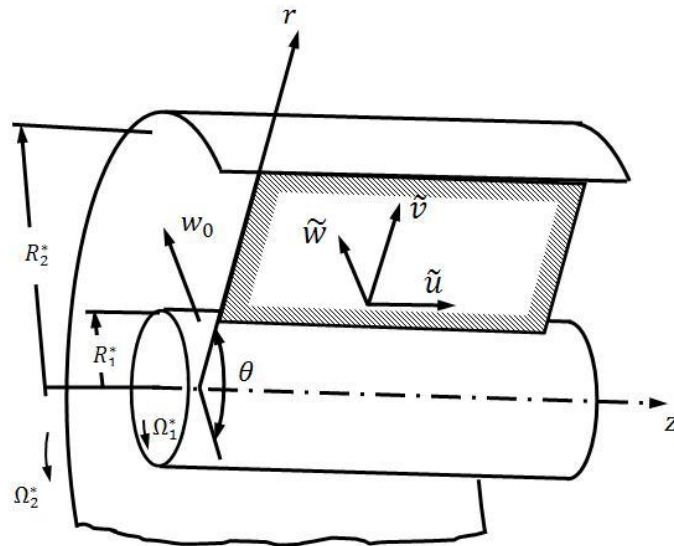


Рис. 1. Система цилиндрических координат

1.2. Определяющие уравнения в цилиндрической системе координат

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемого газа включают в себя уравнение сохранения массы, момента импульса и уравнение сохранения полной энергии. Предполагается, что пространство между цилиндрами заполнено совершенным газом с постоянным коэффициентом теплоемкости. Все функции и координаты величин обезразмерены и отнесены к некоторым характерным значениям. Радиус одного из цилиндров используется для обезразмеривания координат r и z . В уравнениях содержатся безразмерные параметры:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^* r^*}{\mu_{\infty}^*}, \quad M = \frac{u_{\infty}^*}{a_{\infty}^*}, \quad \text{Pr} = \frac{u_{\infty}^* c_p^*}{\kappa_{\infty}^*}.$$

Координаты z, r, θ измеряются вдоль оси цилиндров, вдоль радиуса и в окружном направлении соответственно. Обозначения u, v, w относятся к компонентам вектора скорости в направлениях z, r, θ . Температура отнесена к температуре торможения. Уравнения Навье-Стокса в цилиндрической системе координат можно записать в виде [5]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{1}{r} D = 0 \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{zz} \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho u H + q_z - u \tau_{zz} - v \tau_{rz} - w \tau_{\theta z} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v + p - \tau_{rr} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \tau_{rr} - w \tau_{\theta r} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho w w + p - \tau_{\theta \theta} \\ \rho w H + q_\theta - u \tau_{\theta z} - v \tau_{\theta r} - w \tau_{\theta \theta} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v - \rho w w - \tau_{rr} + \tau_{\theta \theta} \\ 2 \rho v w - 2 \tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \tau_{rr} - w \tau_{\theta r} \end{pmatrix} \quad (2)$$

где полная энергия есть $E = T / [\gamma(\gamma - 1) M^2] + 1/2 u_i u_i$ и полная энтальпия

$H = E + p / \rho$. Предполагается, что отношение удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$.

Компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (3)$$

$$\tau_{rr} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (4)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right] \quad (5)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (6)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \quad (7)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \right]. \quad (8)$$

Компоненты вектора компонент теплового потока записываются следующим образом:

$$q_z = \frac{-\mu}{\text{Pr}(\gamma-1)M^2 \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

$$q_r = \frac{-\mu}{\text{Pr}(\gamma-1)M^2 \text{Re}} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (10)$$

$$q_\theta = \frac{-\mu}{\text{Pr}(\gamma-1)M^2 \text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (11)$$

где число Прандтля предполагается постоянным: $\text{Pr} = 0.72$. Молекулярная вязкость μ вычисляется с использованием закона Сазерленда с константой равной 0.36867. Для замыкания системы уравнений, используется безразмерное уравнение состояния $p = (\rho T) / (\gamma M^2)$.

1.3. Численный метод

При численном моделировании задается длина цилиндров в предположении, что она существенно превосходит радиусы цилиндров.

Известно, что в определенном диапазоне изменения параметров течение между цилиндрами не зависит от угловой координаты φ . В расчётах рассматривался круговой сектор с заданным углом 1° (рис. 2б). При $R_1 \ll \Delta$, данный круговой сектор можно приближенно рассматривать как прямоугольный параллелепипед с размерами $0.000175\text{ м} \times 0.001\text{ м} \times 0.1\text{ м}$.

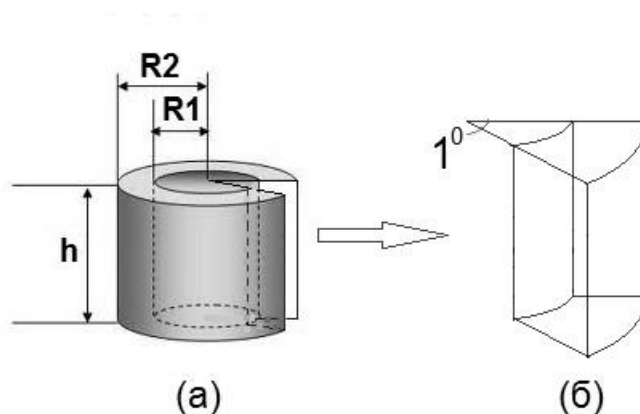


Рис. 2. Коаксиальные цилиндры (а), рассматриваемый сектор из цилиндра (б)

Характерная длина: радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 0.100\text{ м}$.

Сетка была построена с помощью программы ANSYS ICEM CFD. Сетка является структурированной, содержит более 2 миллионов ячеек (рис. 3).

В работе проведены расчеты с применением коммерческой программы ANSYS CFX (лицензия МФТИ). Рассматриваемые течения моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрических координатах. Для расчета использовалась модель турбулентности SST (Shear Stress Transport), в предположении, что газ является совершенным

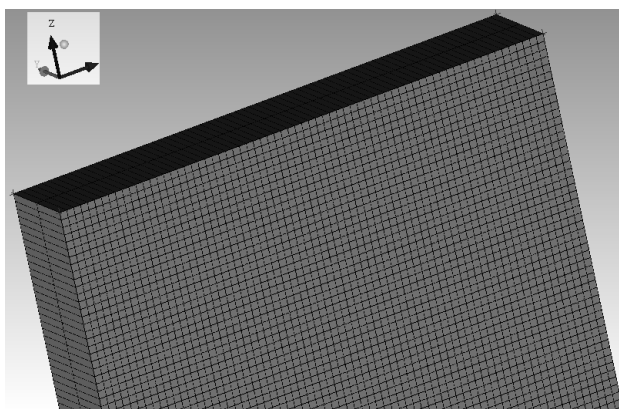


Рис. 3. Сетка в рассматриваемой зоне

2. Результаты

2.1. Случай $\Omega_2 = 0$, $\Omega_1 = 20 \text{ об./сек}$ и $T_1 = T_2 = T_{\text{газ}} = 293^\circ \text{ K}$

Результат: Появилась 61 пара одинаковых вихрей, имеющих равномерное распределение. Одна пара состоит из двух осесимметричных вихрей. В сечении Oxz размер каждого вихря = $\Delta \times d$ где $\Delta = |R_2 - R_1|$ $d = h / (61 \times 2) \approx 0.8196721 \text{ мм}$ (см. рис. 4).

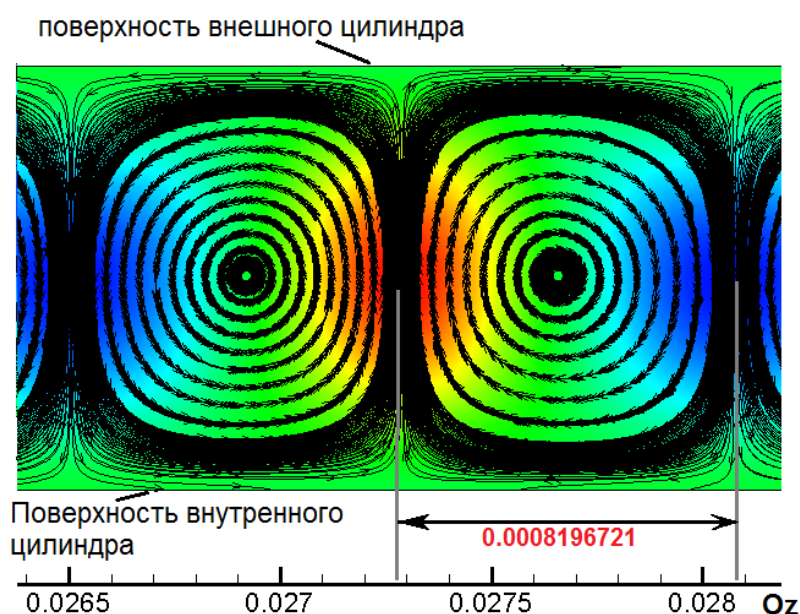


Рис. 4. Пара оси симметричного вихря

Распределения компонентов вектора скорости представлены на рис. 5.

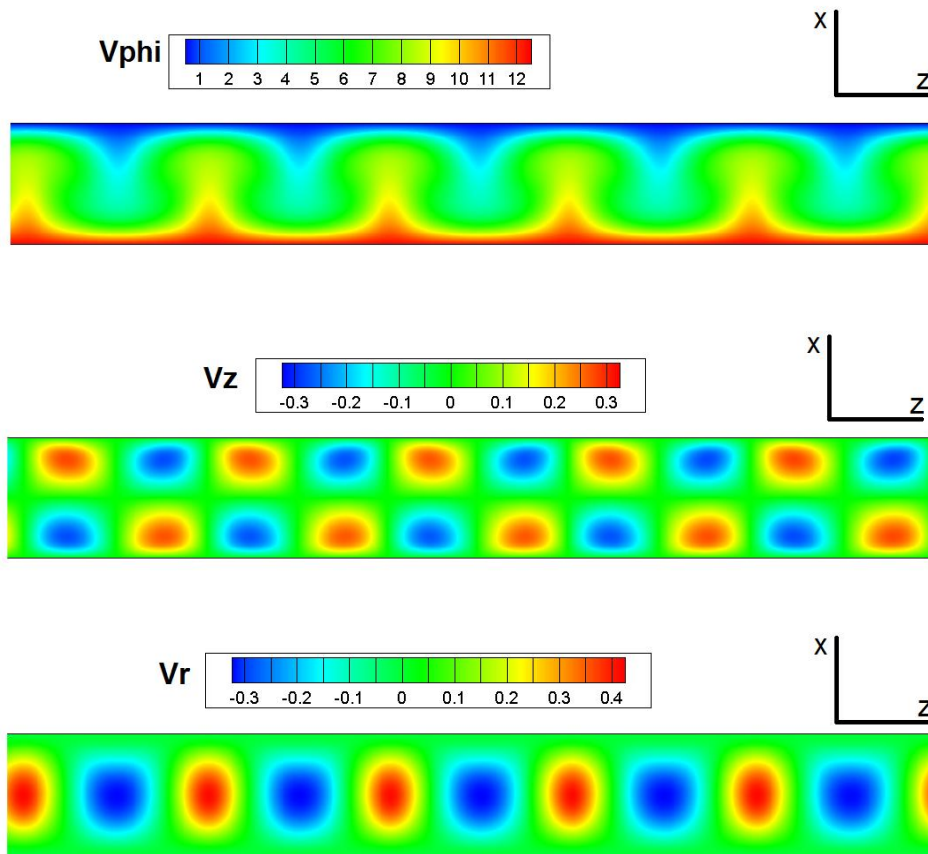


Рис. 5. Распределения поля скорости вихря

2.2. Температуры цилиндров $T_1 = T_2 = T_{zav} = 293^\circ K$ и $\Omega_2 = 0$. Изменение Re от $4 \cdot 10^4$ до $4 \cdot 10^5$ (Ω_1 от 10 об./сек до 100 об./сек)

Характерная угловая скорость: Линейная скорость внутреннего цилиндра при угловой скорости $\Omega_1^* = 20 \text{ об./с}$: $V_1^* = 2\pi\Omega_1^*R_1 = 6,2832 \text{ м/с}$.

Безразмерная скорость $\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_1^*} = \frac{2\pi\Omega_1 R_1}{2\pi\Omega_1^* R_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_1^*}$

Число Рейнольдса $Re = \frac{VD}{\eta}$, где

$D = R_1 = 0,100 \text{ м}; V = 2\pi\Omega_1 R_1; \eta = 15,11 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$, поэтому $Re = \frac{2\pi\Omega_1 R_1^2}{\eta}$.

Анализ полученных результатов показывает, что при изменении числа Рейнольдса от $4 \cdot 10^4$ до $4 \cdot 10^5$ количество пар вихрей изменяется в соответствии с кривой, показанной на рис. 6. При числе Рейнольдса $Re=41583.05$ поле является стационарным и не содержит вихрей. Из графика 4 видно, что при числе Рейнольдса $Re < 20 \cdot 10^4$ количество пар вихрей монотонно возрастает с увеличением числа Рейнольдса. В диапазоне изменения числа Рейнольдса от $20 \cdot 10^4$ до $30 \cdot 10^4$ количество вихрей быстро уменьшается. После этого оно почти остается постоянным, хотя число Рейнольдса продолжает увеличиваться. При $Re > 30 \cdot 10^4$ течение становится нестационарным. Пары вихрей изменяют свою форму и становятся несимметричным.

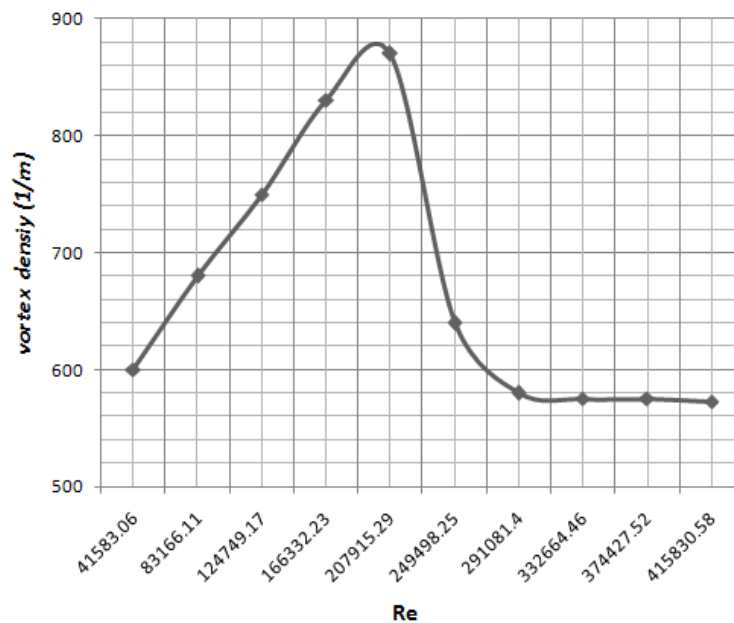


Рис. 6. Зависимость плотности пар вихрей от числа Рейнольдса

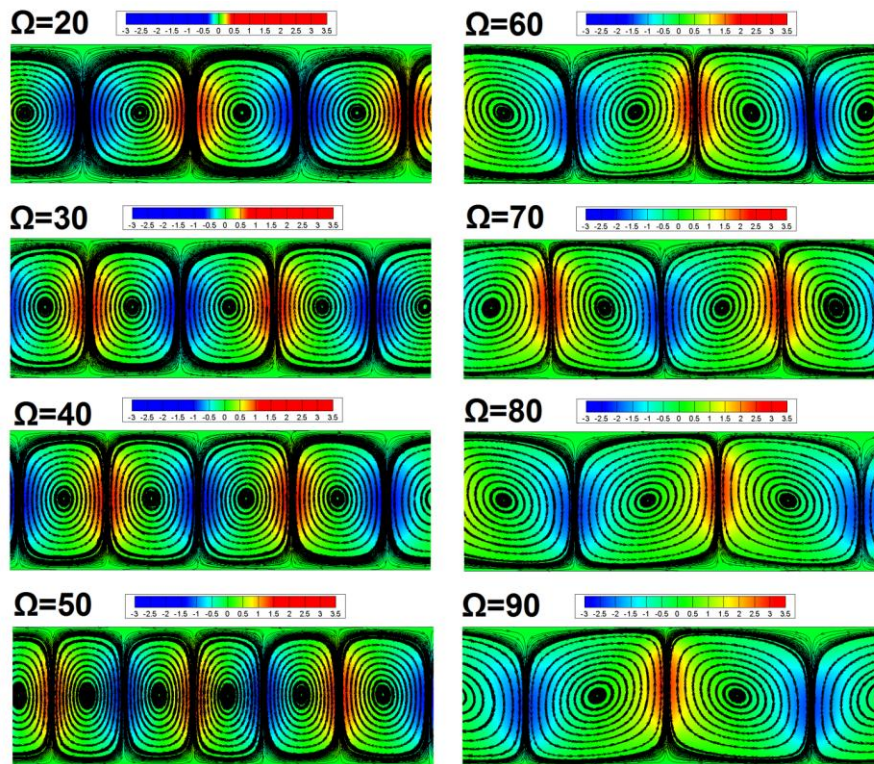


Рис. 7. Изменение поля вихрей при увеличении вращательной скорости

2.3. Влияние температуры поверхности при фиксированном числе

Рейнольдса $Re = 8 \cdot 10^4$ (скорости вращения внутреннего цилиндра) (т.е.

$\Omega_1 = 20 \text{ об./сек}$, $\Omega_2 = 0$), $T_1 = T_{\text{вз}} = 293^\circ \text{ K}$ $T_2 = 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400^\circ \text{ K}$

Температура торможения: $C_p T_0 = C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2}$, где

$V_1 = 6,2832 \text{ м/с}$; $T_1 = 293 \text{ K}$; $C_p = \frac{7}{2} R = 3,5 \cdot 287 = 1004,5 \text{ Дж / (Кг.К)}$, поэтому

$$T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2C_p} = 293 + \frac{6,2832^2}{2 \cdot 1004,5} = 293,0786(\text{K})$$

Характерная температура $\bar{T} = \frac{T_2}{T_0}$:

В результате проведенных расчетов показано, что при изменении температуры внешнего цилиндра, поле скоростей остается стационарным. Пары вихрей образуют

периодическую структуру. Плотность пар вихрей (количество пар вихрей в размере одного метра цилиндра) незначительно изменяется (см. рис. 8).

Сначала, при $\bar{T} \leq 4$ количество пар монотонно увеличивается с повышением температуры. После этого оно уменьшается и, наконец, стабилизируется при $\bar{T} \geq 7$.

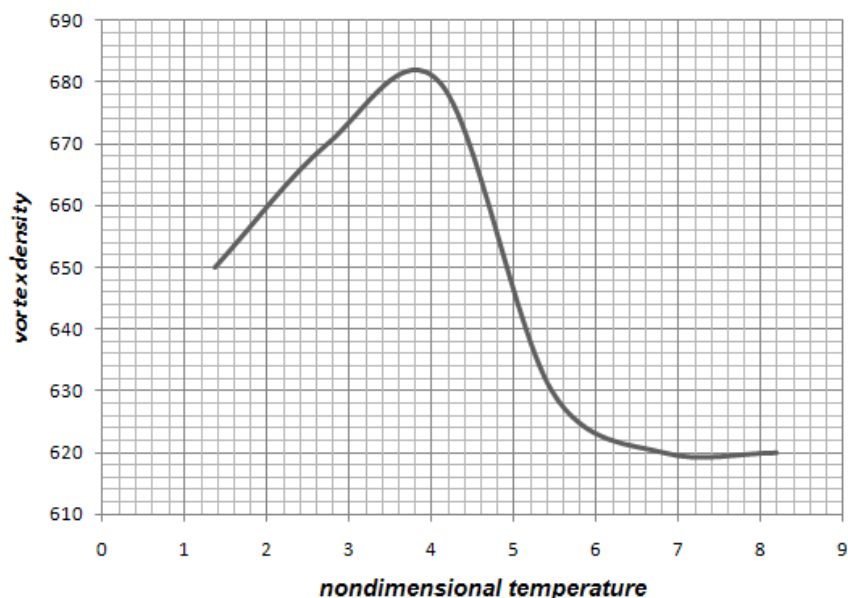


Рис. 8. Зависимость плотности пар вихрей от температуры внешнего цилиндра

Выводы

Численными методами исследовано течение Куэтта-Тейлора вязкого сжимаемого газа. На основе физической модели получены численные результаты для разных температур поверхностей и угловых скоростей цилиндров. Исследовано влияние данных параметров на плотность и структуру вихрей в течении. Выявлены немонотонные зависимости числа вихрей (или размеров вихрей в окружном направлении) от числа Рейнольдса и от температуры поверхности внешнего цилиндра.

Библиографический список

1. Као К.-Н., Chow С.-У. *Linear stability of compressible Taylor–Couette flow* // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 4, 1992, pp. 984–996.
2. Боголепов В.В., Липатов И.И. *Влияние сжимаемости на структуру вихрей Гертлера* // *Механика жидкости и газа*, Т. 1, 1997, С. 36–47.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. В 2 ч. — М.: Физматлит, 1963, с.728.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. Т. 6. Гидромеханика. — М.: Наука, 1986, 735 с.
5. Richard D. Sandberg *Governing equations for a new Navier-Stokes Solver in general cylindrical coordinates* // Report No. AFM-07/07, University of Southampton, 2007. — <http://eprints.soton.ac.uk/49523>