УДК 681.5; 519.687; 519.7

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ДОПУСТИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЗАДАЧ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ

В.В. Малыгин

Исследовано комбинаторное пространство возможных решений задачи синтеза структуры информационно-вычислительной системы. Приведены определения точки пространства, оценки его мощности и метрических характеристик, предложена система координат комбинаторного пространства.

Одним из вопросов, встающих при синтезе структуры распределенной информационно-вычислительной системы (вычислительной сети), является поиск оптимального распределения вычислительного процесса системы по множеству сетевых компьютеров. Эта задача сводится к комбинаторной оптимизации, а любой метод ее решения в той или иной степени опирается на свойства пространства допустимых распределений - комбинаторного пространства (КП), результаты исследования которого приводятся ниже. Основное внимание уделено способу определения точки КП и ее характеристикам, расчету мощности КП, а также таких его метрических характеристик как расстояние и окрестность. В заключение рассмотрен ряд примеров КП и предложена система координат упорядочивания его точек.

Формализуем описание распределенной системы следующим образом. Перед распределенной вычислительной системой, состоящей из **N**-узловой вычислительной сети, поставлена общая задача (ОЗ), которая в силу сложности не может быть решена ни на одной из ее отдельных узловых машин. Решение ОЗ предполагается провести после декомпозиции ее на **m** менее сложных частных задач (ЧЗ) путем распределения их по **N** узлам вычислительной сети, которое минимизировало бы удельную стоимость передаваемой в системе информации, при условии, что в каждом из узлов должно и может решаться от одной до **К =**<округленно сверху до целого>**=(m/N)** ЧЗ. В качестве структуры вычислительной системы принимается *распределение* **R**, определяемое как объединение (комбинация) бинарных отношений **r**, в соответствии с которыми каждому элементу множества ЧЗ ставится в соответствие единственный узел вычислительной сети, а множество взаиморазличных распределений **R** и формирует комбинаторное пространство **Z**. Решением же задачи распределения является такое подпространство $\mathbf{z} \subseteq \mathbf{Z}$, все точки которого приводят некоторую структурную функцию в экстремум (минимум) [1].

Минимальным элементом конструируемого пространства является точка - комбинация бинарных отношений. Будем представлять эту комбинацию в виде *матрицы комбинаторной точки* (**МКТ**) размером **N**-столбцов и **К**-сторк, где столбцы символизируют вычислительные машины, ресурс которых не превышает **К**-частных задач, а порядок элементов в нем не играет роли. Если число частных задач **m** меньше произведения **К×N**, то доступная емкость вычислительных узлов используется не полностью. Будем называть неиспользованный таким образом вычислительный ресурс, достаточный для размещения еще одной ЧЗ, - *«дыркой»*. Тогда общее число дырок в системе можно определить как **L = K×N-m**, смотри рисунок 1.

Общее количество различных точек в комбинаторном пространстве [2] будем называть

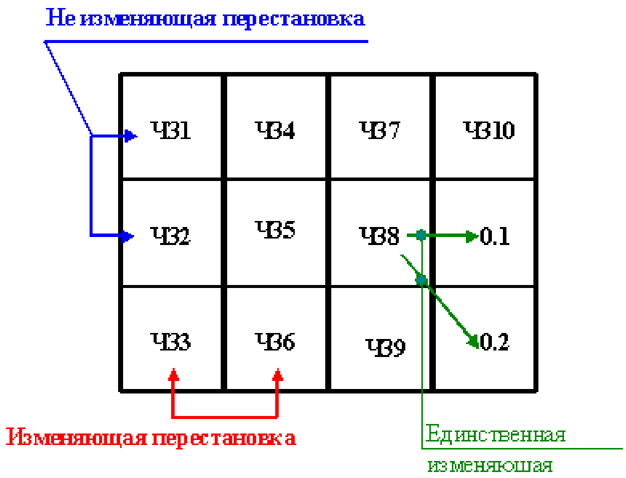


Рисунок 1.Матрица точки комбинаторного пространства

мощностью пространства. При этом очевидно, что верхней границей мощности комбинаторного пространства с габаритами его точки **(N,K)** является выражение **(N×K)!/[K!]**^{N}, которое уже при относительно малых значениях входных параметров, например N=10, K=5, дает астрономические оценки, - $(10x5)!/(5!)^{10} \approx 5x10^{43}$ точек. Точное же число различных комбинаций распределения ЧЗ по МКТ может быть определено как $\mathbf{m!/k_1!\times k_2!\times\ldots\times k_N!}$, где **m** – общее количество частных задач, $\mathbf{k_1 \ldots k_N}$ – количество ЧЗ в столбцах МКТ **1…N**, просуммированное для всех различных, в смысле определения МКТ, распределений дырок, если они имеются. Или

$$|m| = \sum_{i=1}^{C} \frac{m!}{\prod_{j=1}^{N} k_j(i)!}, \tag{1}$$

где $k_j(i)$ означает зависимость коэффициентов k_x, $x\in(1,N)$ от конкретного, i-ого, распределения дырок в МКТ.

Аппроксимация серии результатов расчетов мощности КП по (1) позволила получить аналитическое выражение для функции $|m| = f(m_{max}, L)$ в виде (2), иллюстрация использования которого представлена на рисунке 2.

$$m(L, m_{MAX}) = 10^{\left[\log m_{MAX} - L \bullet \left(1 - \frac{0.7}{m_{MAX}^{0,0026}}\right)\right]} \qquad (2)$$

Важным свойством мощности КП является его экспоненциально быстрый рост при

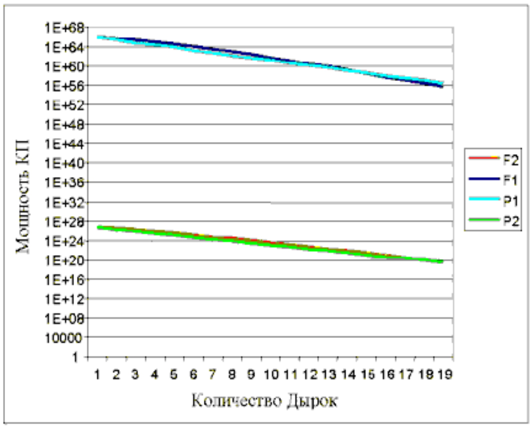


Рисунок 2. Интерполяция экспериментальных значений мощности КП.
F1,F2 – расчетные значения мощности КП.
P1, P2 – найденная (см. (2)) аппроксимация

увеличении основных размеров его МКТ – К и N. Это легко показать для выражения верхней границы КП, разложив факториалы данного выражения по формуле Стирлинга (3).

$$|\mathbf{m}| = (K * N)!/(K!)^N = \frac{\sqrt{2\pi KN}\,(KN/e)^{KN}}{(\sqrt{2\pi K}\,(K/e)^K)^N} = (2\pi K)^{\frac{1-N}{2}} \cdot N^{KN+0.5} \qquad (3)$$

Фиксируя либо К, либо N, можно получить влияние изменения оставшегося параметра на конечную оценку мощности КП:

При **K=const,** $|\mathbf{m}| \approx 2\pi \mathbf{K}^{-N} \times \mathbf{N}^{KN} = (\mathbf{N}^{C1}/\mathbf{C}_2)^N$, где $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – константы. (4)

В результате имеем экспоненциальную быстро возрастающую функцию от аргумента N. С другой стороны:

При **N=const,** $|\mathbf{m}| \approx 2\pi \mathbf{K}^{-N} \times \mathbf{N}^{KN} = \mathbf{C}_1^K/(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{K}^{C3})$, где $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ – константы. (5)

Здесь имеем отношение экспоненциально растущей функции по К - $C1^K$ к гораздо более медленно растущей полиномиальной K^{C3}, следовательно, в результате имеем экспоненциальный рост |m| как функции от К.

Минимальное изменение комбинации распределения ЧЗ по узлам ИВК – перестановка пары ЧЗ $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$, такие что $\mathbf{i \neq j}$ и $\mathbf{i,j \in (1,m)}$, между двумя узлами $\mathbf{b}_l$ и $\mathbf{b}_k$, таких, что $\mathbf{l \neq k}$ и $\mathbf{l,k \in (1,N)}$, – может рассматриваться как минимальное перемещение в комбинаторном пространстве или расстояние d(МКТ1, МКТ2), $r_{МКТ1}$: $a_i \to b_1$ и $r_{МКТ2}$: $a_j \to b_2$. Перестановку пары символов примем за единичное расстояние при перемещении в КП. Тогда расстоянием между двумя точками комбинаторного пространства является число перестановок неповторяющихся пар ЧЗ, необходимое, чтобы трансформировать МКТ первой точки в МКТ второй точки. Очевидно, что определенная подобным образом функция расстояния d удовлетворяет условиям не отрицательности, $d(x,y)>0$, и $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$; симметрии: $d(x,y) = d(y,x)$; неравенства треугольника: $d(x,z) <= d(x,y) + d(y,z)$, а, следовательно [3], является метрикой в комбинаторном пространстве, а само комбинаторное пространство является метрическим пространством.

С точки зрения проведения в КП поисковых процедур целесообразно определить максимально возможное удаление его точек друг от друга или *диаметр* комбинаторного пространства **D**. Очевидно, что наиболее удаленную точку КП можно получить из МКТ исходной точки (при **m=K×N**) следующим образом – сначала ЧЗ первого узла перестанавливаются с частными задачами второго узла, затем ЧЗ второго узла перестанавливаются с ЧЗ третьего узла и т.д, в результате чего все частные задачи перейдут в «чужие узлы», а число перестановок равное значению диаметра составит **K×(N-1)**. Наличие в МКТ дырок уменьшает как мощность, так диаметр КП, который можно оценить по (6)

$$\boldsymbol{K\cdot(N-1)-\left(\left\{\frac{L}{N}\right\}_{\text{частное}}\cdot(N-1)+\left\{\frac{L}{N}\right\}_{\text{остаток}}-1\right)} \qquad (6)$$

Другим важным элементом поисковых процедур в КП является определение окрестностей его точек. В общем случае для некоторого пространства F и $f \in F$ можно определить множество U(f) точек, которые в некотором смысле «близки» к данной точке f. При этом в общем смысле окрестность определяется *окрестностной функцией* [4] или системой окрестностей $U\colon F \to 2^F$. Учитывая физическую сущность точки комбинаторного пространства, будем понимать под ее окрестностью шаровую [3]. Шаровой *окрестностью*, или просто окрестностью точки x радиуса **C** в комбинаторном метрическом пространстве X будем называть любой замкнутый шар с центром в точке $x \in X$, соответствующий множеству точек $\mathbf{O_C}$, находящихся на расстоянии **C** от упомянутой точки.

Наибольший интерес в методах оптимизации (особенно локальной) проявляется к единичным окрестностям, мощность которых и была исследована в данной работе. Проведенные при этом расчеты показывают, что размер окрестности точки, дырки которой «ложатся» в строку МКТ – $O_1^{\text{строка}}$, больше чем окрестность, где дырки «становятся» в столбец МКТ – $O_1^{\text{столбец}}$. И более того, $O_1^{\text{строка}}$ задает верхнюю границу размера единичной окрестности, а $O_1^{\text{столбец}}$ нижнюю, см. (7) и иллюстрацию на рис. 3.

$$O_1^{столбец} = \sum_{i=2}^{N} \left\{ K \bullet [K\langle N-i \rangle + \langle K-L+1 \rangle] \right\}$$

$$O_1^{строка} = K^2 \cdot \sum_{i=1}^{N-L} (N-i) + (K^2-1) \cdot \sum_{i=N-L+1}^{N} (N-i) \quad (7)$$

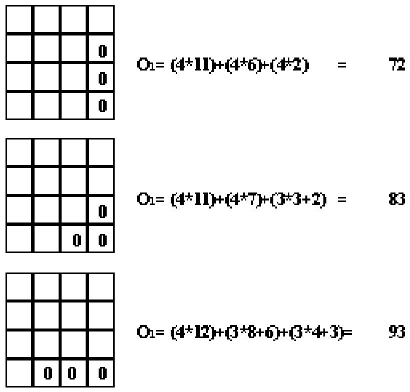
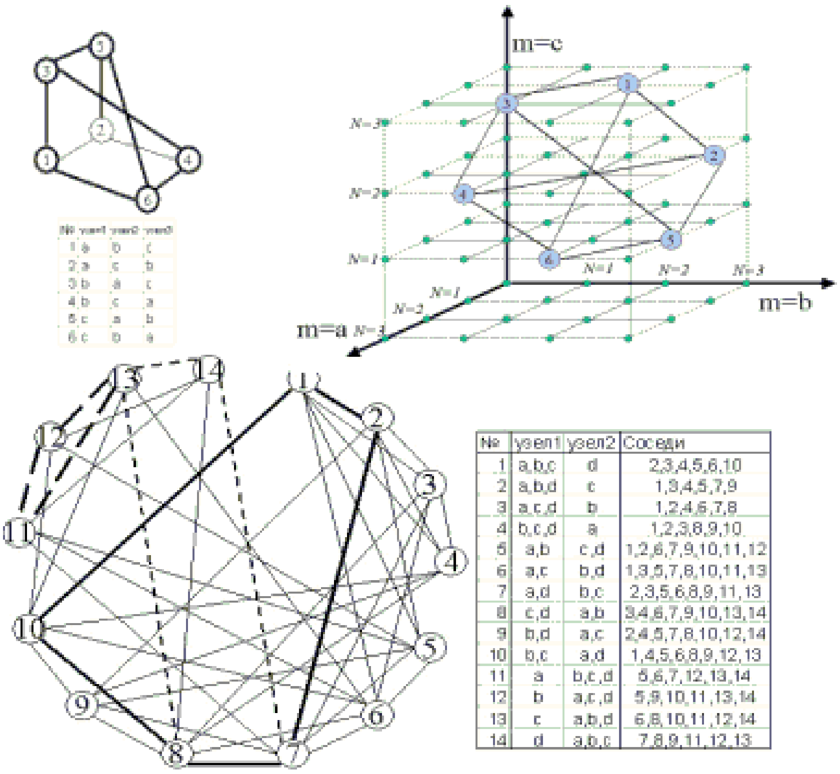


Рисунок 3. Расчет мощности единичной окрестности.

Наиболее простой системой координат для точек КП может служить использование m-мерного куба, каждая из координат которого имеет N возможных значений, смотри рисунок 4. Если назвать множество точек, которое может быть описано в данной системе, *образующим пространством* (ОП), то видно, что его объем ($=N^m$ точек) существенно больше мощности КП. Само же КП «вырезается» из ОП весьма сложным образом. В связи с этим здесь можно отметить отличительные особенности комбинаторного пространства.

Во-первых, переходы между точками КП проходят «сквозь» координатные плоскости, т.е. с изменением всех своих m координат, что снижает вероятность успешного использования данной системы в процедурах оптимизации функций на КП. Во-вторых, незначительность диаметра КП (6) по сравнению с его мощностью (1, 2) говорит о его компактности и сильносвязанности. Это создает предпосылки для сильного ветвления поисковых процедур в КП, альтернативности его промежуточных результатов и, как результат, их высокой трудоемкости. В-третьих, сравнение КП с аналогичными пространствами, см. например работу [2], обнаруживает его более высокую относительную сложность, основанную на меньшей упорядоченности – при большей связанности точек пространства между собой количество их соседей может быть непостоянным, что объясняется разницей $O_1^{СТРОКА}$ и $O_1^{СТОЛБЕЦ}$, смотри (7). В результате этого, несмотря на достаточную регулярность, которая особенно заметна на шести точечных пространствах рисунка 4, определенное КП не обладает рядом замечательных свойств, найденных, например, для пространств работы [2], в основе графа которого лежат четырех- и шестиугольники.

Таким образом, проведенная работа не претендует на полноту системы исследованных свойств КП, однако охватив такие его ключевые характеристики, как - мощность, метричность, система координат и окрестность, закладывает математический фундамент последующих исследований функций, определяемых на КП, а, следовательно, и основу решения поставленной задачи распределения.



№	узел1	узел2	Соседи
1	a,b,c	d	2,3,4,5,6,10
2	a,b,d	c	1,3,4,5,7,9
3	a,c,d	b	1,2,4,6,7,8
4	b,c,d	a	1,2,3,8,9,10
5	a,b	c,d	1,2,6,7,9,10,11,12
6	a,c	b,d	1,3,5,7,8,10,11,13
7	a,d	b,c	2,3,5,6,8,9,11,13
8	c,d	a,b	3,4,6,7,9,10,13,14
9	b,d	a,c	2,4,5,7,8,10,12,14
10	b,c	a,d	1,4,5,6,8,9,12,13
11	a	b,c,d	5,6,7,12,13,14
12	b	a,c,d	5,9,10,11,13,14
13	c	a,b,d	6,8,10,11,12,14
14	d	a,b,c	7,8,9,11,12,13

Рисунок 4. Комбинаторное пространство, примеры, система координат.

Список литературы

1. Малыгин В.В. Проектирование САПР как распределенной информационно-вычислительной системы // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, №11. – http://www.mai.ru.

2. Силин В.Б. Поиск структурных решений комбинаторными методами. - М.: МАИ, 1992. - 216 с.

3. Пугачев В.С. Функциональный анализ. - М.: МАИ, 1996. - 743 с.

4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложност: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 512 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Малыгин Владимир Вячеславович, аспирант кафедры радиоэлектроники Московского авиационного института (государственного технического университета),
e-mail: v_malygin@hotmail.com