

УДК 539.3

## Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения

**Иванычев Д.А.**

*Липецкий государственный технический университет,*

*ул. Московская, 30, Липецк, 398055, Россия*

*e-mail: [Lsivdmal@mail.ru](mailto:Lsivdmal@mail.ru)*

**Статья поступила 30.05.2019**

### **Аннотация**

Работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся в стационарном осесимметричном поле установившихся температур. Граница тела свободна от защемления. Поставленная задача обеспечивается развитием обратного метода. Сформулировано понятие внутренних состояний и введено скалярное произведение в этом пространстве. Решение представляет собой ряды Фурье по элементам ортонормированного базиса. Задача сводится к определению коэффициентов этих рядов. Представлены строгое решение тестовой задачи термоупругости для кругового цилиндра и приближенное решение задачи для тела в виде ступенчатого цилиндра. Полученные поля характеристик напряженно-деформируемого состояния показаны в графическом виде. Проведен анализ результатов.

**Ключевые слова:** анизотропия, термоупругость, метод граничных состояний, обратный метод, осесимметричные задачи, трансверсально-изотропные тела, ряды Фурье.

Применяемые в машиностроении, авиастроении современные материалы, такие как поликристаллические металлы, керамика, а также композитные материалы, обладающие значительной анизотропией в отношении упругих свойств, часто пребывают в условиях сильных тепловых воздействий. Определение напряженно-деформированного состояния нагретых тел в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

Исследованию термомеханических процессов конечного деформирования анизотропных сред посвящена работа [1]. Для трансверсально-изотропного цилиндра решены краевые задачи теории упругости с участие массовых сил [2]. Особенность решения заключается в том, что след упругого поля одновременно удовлетворяет заданным условиям на границе и внутри области. В случае малых деформаций упругого анизотропного тела напряжения, деформации и температура чаще всего связываются с помощью уравнений Дюгамеля-Неймана, вывод которых с точки зрения термомеханики приведен в монографии Новацкого [3]. Задачи термоупругости для анизотропных тел рассматривались в книгах: Б.Е. Победри, А.С. Кравчука.

В работе [4] рассматривается осесимметричная задача статической термоупругости для трансверсально-изотропного круглого цилиндра конечной длины. С помощью специальной функции напряжения, выводится основное уравнение поставленной задачи. Доказывается, что оператор симметричный и положительно определенный, и тем самым решение исходного уравнения сводится к задаче о минимальном функционале.

Задачи по определению температурного поля по заданным на границе значениям температур, тепловых потоков для изотропных однородных и неоднородных тел исследовались методом граничных состояний в работе [5].

Исследованию полей напряжений в задачах градиентной термоупругости, возникающих в рамках градиентных моделей теплопроводности, описывающих термобарьерные свойства границ за счет более полного учета условий сопряжения на границах раздела слоев композита посвящена работа [6]. В работе [7] рассматривалась стационарная задача градиентной теории термоупругости для слоистых композитных структур. Дается решение задачи о неоднородном температурном нагреве однослойной и двухслойной структуры.

В работе [8] с помощью обобщенного метода Фурье решена осесимметричная термоупругая краевая задача для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью.

В работе [9] разработан обратный метод определения напряженно-деформированного состояния упругого изотропного тела от непрерывных объемных сил.

В работе [10] решались несвязанные краевые задачи термоупругости для пологих оболочек двоякой кривизны и постоянного кручения в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с внешней средой. Решения получены методами одинарных и двойных тригонометрических рядов с переменными коэффициентами.

В последнее время широко изучаются трехмерные несимметричные задачи термоупругости для изотропных тел [11], [12]. В работе [13] строится точное решение несимметричной краевой задачи теории упругости для цилиндрического резервуара с жидкостью, находящегося в температурном поле (термоупругая задача несвязанная).

Целью работы является разработка математической модели решения задач термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся в стационарном осесимметричном поле установившихся температур. Модель опирается на фундаментальные положения метода интегральных наложений, метода граничных состояний и обратного метода.

### 1. Постановка задачи

В стационарной задаче термоупругости тепловые краевые условия отражают воздействие окружающей среды на поверхность  $S$  тела и записываются в форме одного из следующих условий:

1) на поверхности задана температура  $T$  как функция координат

$$T = k(P), P \in S ;$$

2) на поверхности задана нормальная компонента градиента температуры как функция координат

$$\partial T / \partial n = k(P), P \in S ,$$

соответствующая потоку тепла, проходящего через поверхность  $S$ ;

3) на поверхности задана функция, описывающая свободный теплообмен:

$$(\partial/\partial n + \alpha)T = f(P), P \in S,$$

где  $\alpha$  – некоторая константа.

4) на поверхности заданы смешанные краевые тепловые условия, т.е. на разных участках  $S$  заданы различные краевые условия.

Пусть в недеформированном и ненапряженном состоянии трансверсально-изотропное тело, ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения имеет температуру  $T_1$  как функцию координат  $r, z$ . В результате воздействия каких-либо факторов (внешних нагрузок, внутренних тепловых источников, нагрева поверхности) температура тела изменилась и стала  $T_2$ , тогда приращение температуры составит  $T = \Delta T = T_2 - T_1$ . Поверхность тела свободна от заземления. Будем считать, что изменение температуры не приводит к изменению упругих и тепловых констант материала. В качестве граничных температурных условий используются предельные значения функции температуры в точках границы.

Изменению температуры сопутствует возникновение перемещений, деформаций и напряжений, которые и подлежат определению.

В силу осевой симметрии, компонента вектора перемещения  $v = 0$ , компоненты тензора напряжений  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$  и тензора деформации  $\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$ .

В цилиндрических координатах искомые осесимметричные (т.е. зависящие только от координат  $z$  и  $r$ ) температурные перемещения, деформации и напряжения должны удовлетворять следующим разрешающим уравнениям [14].

1. Дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Обобщенному закону Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_z T; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \quad \gamma_{zr} = \frac{1}{G_z} \tau_{zr}.$$

3. Соотношениям Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $u, w$  – компоненты вектора перемещения в направлении осей  $r$  и  $z$ ;  $\alpha_z, \alpha_r$  – коэффициенты температурного расширения в направлении осей  $z$  и  $r$ ;  $T$  – температура;  $E_r, E_z$  – модули упругости в направлении плоскости изотропии и нормальном к ней;  $\nu_r$  – коэффициенты Пуассона, характеризующий сжатие в плоскости изотропии, при растяжении в этой плоскости,  $\nu_z$  – то же, но при растяжении в направлении, нормальном к плоскости изотропии;  $G_r$  и  $G_z$  – модули сдвига для плоскости изотропии и любой перпендикулярной к ней.

## 2. Метод решения

Метод граничных состояний [15] и обратный метод [9] схожи по структуре; оба используют понятие пространство внутренних состояний среды

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots\}, \quad (4)$$

базис которого ортогонализируется. Искомое состояние раскладывается в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса, и задача состоит в отыскании коэффициентов этой линейной комбинации. Различие заключается в выборе ортогонализатора и в выражении для скалярных произведений.

В качестве внутреннего состояния  $\xi_k$  принимаются наборы

$$\xi_k = \left\{ \left\{ u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)} \right\}, \left\{ \varepsilon_z^{(k)}, \varepsilon_r^{(k)}, \varepsilon_\theta^{(k)}, \varepsilon_{zr}^{(k)}, \varepsilon_{z\theta}^{(k)}, \varepsilon_{r\theta}^{(k)} \right\}, \left\{ \sigma_z^{(k)}, \sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \tau_{zr}^{(k)}, \tau_{z\theta}^{(k)}, \tau_{r\theta}^{(k)} \right\}, T_0^{(k)} \right\}.$$

Основную сложность составляет построение базиса внутренних состояний, который опирается на общее, фундаментальное или частное решение для среды. Методика конструирования базиса внутренних состояний в случае температурных деформаций описана ниже.

Ортонормирование базиса осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму Грама-Шмидта [16], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (например, для 1-го и 2-го состояния):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V T_0^{(1)} T_0^{(2)} dV.$$

Искомое термоупругое состояние представляет собой ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k;$$

или в развернутом виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{u}^{(k)}; \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; T = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_0^{(k)}. \quad (5)$$

где  $\xi_k$  – элементы ортонормированного базиса внутреннего состояния  $\Xi$ ,  $c_k$  – коэффициенты Фурье, которые рассчитываются так:

$$c_k = \int_V T T_0^{(k)} dV, \quad (6)$$

где  $T_0^{(k)}$  – температура в базисном элементе  $\xi_k$ ,  $T$  – заданное поле температуры.

### 3. Построение базиса внутренних состояний

Температурное поле, дающее значение температуры в любой точке тела будем считать известным.

Установившееся температурное поле  $T_0^{pl}(z, y)$  плоского состояния с отсутствующими внутри источниками тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности [14]:

$$\left( k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_0^{pl}(z, y) = 0,$$

где  $k_z$  и  $k_r$  – коэффициенты теплопроводности в направлении осей  $z$  и  $r$ ;

$$T_0^{pl} = \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\varphi_0'(\zeta_0)], \quad \zeta_0 = z/\gamma_0 + iy, \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z/k_r}. \quad (7)$$

Перемещения и напряжения плоских состояний соответствующие температурному полю [14]:

$$u_z^{pl} = \operatorname{Re}[p_0 \varphi_0(\zeta_0)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \varphi_0(\zeta_0)]; \quad u_r^{pl} = 0; \\ \sigma_z^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \varphi_0'(\zeta_0)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\varphi_0'(\zeta_0)]; \quad (8)$$



$$\sigma_{\eta}^{pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0)\varphi_0'(\zeta_0)]; \quad \sigma_{zy}^{pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_0\varphi_0'(\zeta_0)],$$

где  $g_0, p_0, q_0, \varepsilon_0$  – константы, зависящие от упругих и термомеханических постоянных;  $\varphi_0(\zeta_0)$  – некоторая аналитическая функция переменной  $\zeta_0$ .

В работе [14] на основе метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат  $z$  и  $y$  (переменных). В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в бесконечных цилиндрах с осью  $\eta$ , имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости  $zy$ .

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta} = 0; \\ \sigma_r - \sigma_{\theta} &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_{\eta}^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_{\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_{\eta}^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad (9) \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0. \end{aligned}$$

Базис пространства (4) можно сконструировать, придавая функции  $\varphi_0$  в (7),

(8) последовательно следующие значения:  $\varphi_0 = \zeta_0^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  и по (9) осуществить

переход к пространственному осесимметричному температурному состоянию, образуя конечномерный базис.

#### 4. Тестовая задача

Апробацию метода проведем на изучении термоупругого состояния трансформного цилиндра из алевролита крупного темно-серого [18]. После процедуры обезразмеривания, аналогия которой приведена в работе [19], упругие характеристики материала:  $E_z = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_z = 2.55$ ;  $\nu_z = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$ . Тело занимает область:  $D_2 = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$ . Зададим следующие безразмерные термомеханические характеристики гипотетического трансверсально-изотропного материала:  $k_z = 1.6$ ,  $k_r = 6.5$ ,  $\alpha_z = 6.7$ ,  $\alpha_r = 8.6$ . Заданное температурное поле  $T = z + 2$ .

Ортонормированный базис функций температуры  $T^0$  в (5) представлен в таблице 1.

Таблица 1

#### Ортонормированный базисный набор функций температуры

	$T_0$
$\xi_1$	$-0.70711$
$\xi_2$	$-0.61237 z$
$\xi_3$	$0.75375 + 0.07294 r^2 - 0.59266 z^2$
$\xi_4$	$1.28853 z + 0.21475 r^2 z - 0.58163 z^3$
$\xi_5$	$-0.6645 - 0.21216 r^2 - 0.01278 r^4 + 1.7238 z^2 + 0.41552 r^2 z^2 - 0.56268 z^4$

Коэффициенты Фурье (6)  $c_k \in \{-2.82843, -1.633, 0, 0, 0, \dots\}$ .

Решение является строгим. Восстановленные компоненты температурного упругого поля (5):

$$u = -4.01471r - 2.00736rz; w = -0.95057r^2 + 30.8935z + 7.72338z^2;$$

$$\sigma_r = -143.267 - 71.6334z; \sigma_\theta = -143.267 - 71.6334z;$$

$$\sigma_z = 39.8667 + 19.9333z; \tau_{rz} = -9.96667r; \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0; T = z + 2.$$

## 5. Расчетная задача

Исследуем термоупругое равновесие трансверсально-изотропного «ступенчатого» цилиндра при тех же упругих и термомеханических характеристиках. Заданное температурное поле  $T = z^2$ . Тело занимает область

$$D = D_1 + D_2; D_1 = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}; D_2 = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}.$$

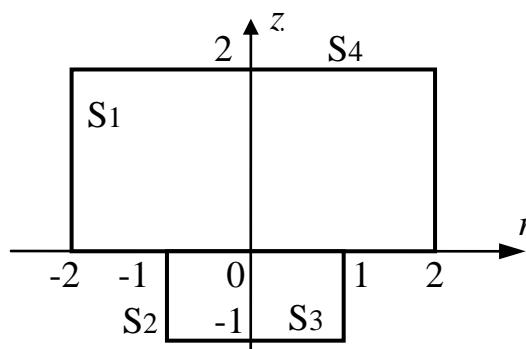


Рис. 1. Меридианное сечение тела вращения

При определении упругого поля от температуры использовался ортонормированный базис в 20 элементов. Решение, представляющее ряды (6), удовлетворяет всем уравнениям (1) – (4).

На рис. 2 изображен график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

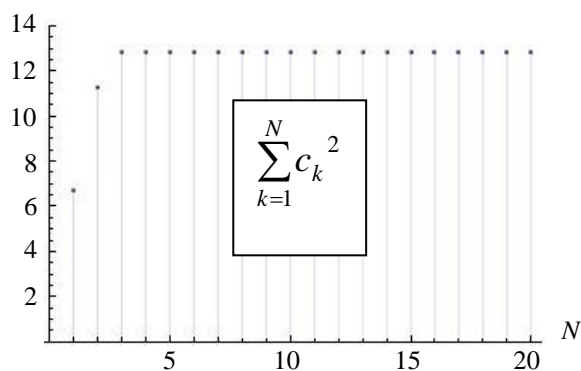


Рис. 2. Сумма Бесселя

Рис. 3 иллюстрирует сопоставление восстановленного поля температуры с заданным полем. Данное сопоставление является ключевым для оценки точности решения по всей области.

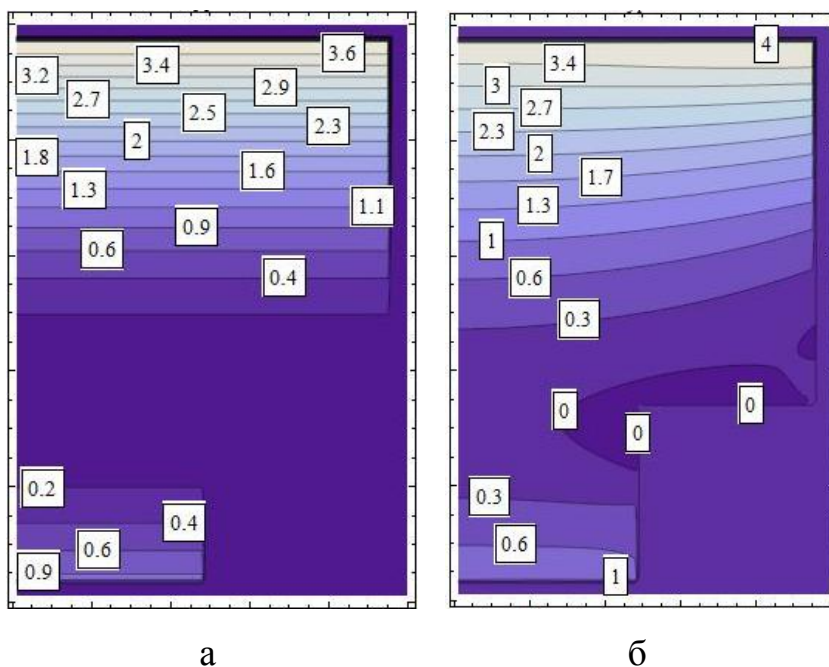


Рис. 3. Поле температуры: а – заданное; б – восстановленное

Проведем сопоставление температуры на границе  $S_1$  (рис. 4). На графике штриховая линия – заданные значения; сплошная – восстановленные значения.

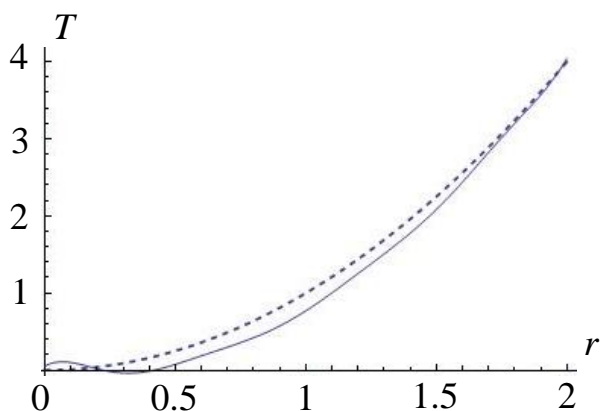
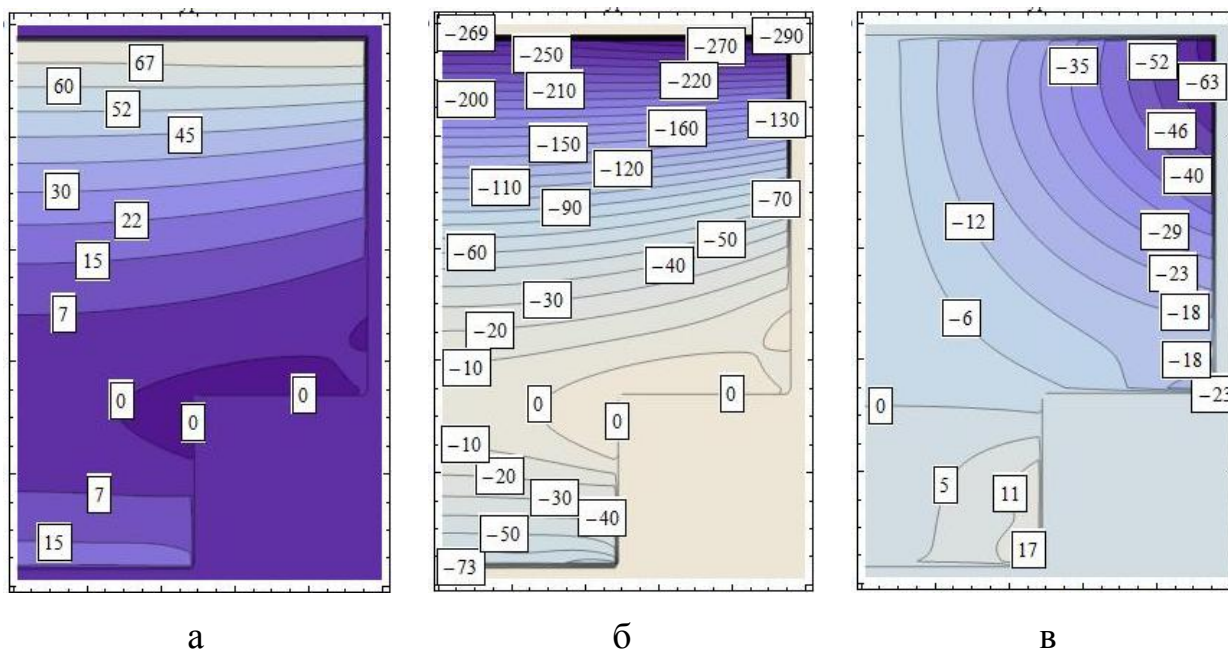


Рис. 4. Верификация температуры на границе S1

Как видно из рис. 3 – 4, восстановленное поле температуры совпадает с заданными в диапазоне определенной точности ( $\pm 10\%$  от значения заданной величины в любой точке области).

Изолинии полученных компонент напряженно-деформированного состояния представлены на рис. 5 а–д. В силу осевой симметрии, изображена область  $\{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 2, -1 \leq z \leq 2\}$ .



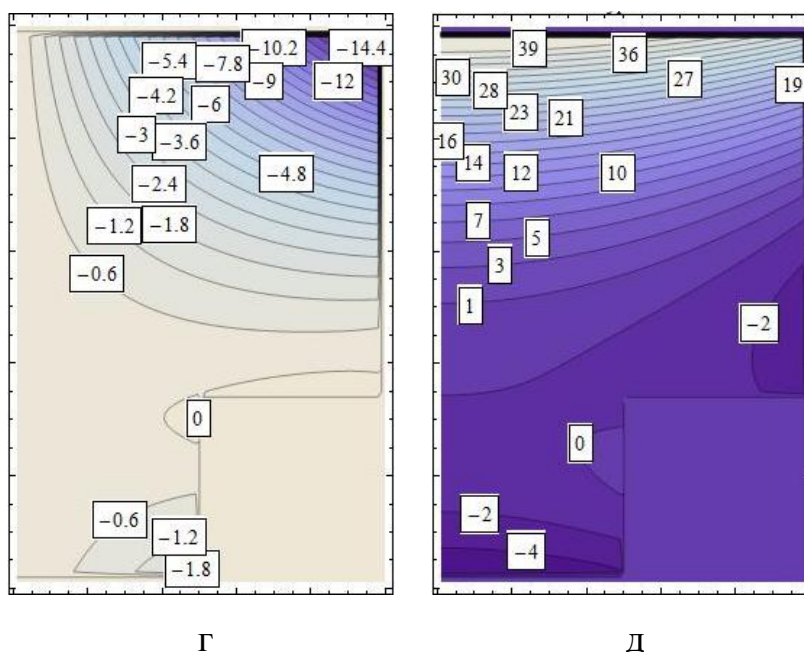


Рис. 5. Изолинии: а – напряжения  $\sigma_{zz}$ ; б – напряжения  $\sigma_{rr}$ ; в – напряжения  $\sigma_{zr}$ ; г – перемещения  $u$ ; д – перемещения  $w$

Исследовался вопрос сходимости решения при наращивании базиса. С увеличением количества используемых элементов базиса внутренних состояний наблюдалась осцилляция в окрестности сингулярной границы, которая продолжала расти и «наползать» вглубь области с увеличением числа используемых элементов базиса, при этом коэффициенты Фурье постоянно убывают. Например, найденные значения температуры на поверхности  $S_1$  при 43 удержанных элементах базиса представлены на рис. 6. Естественно, что решение в таком случае становится непригодным. Преодоление этих трудностей требует дальнейших исследований, здесь же, однако, в качестве приближенного результата выбиралось то полученное состояние, восстановленная температура которого в наибольшей мере соответствовала заданной.

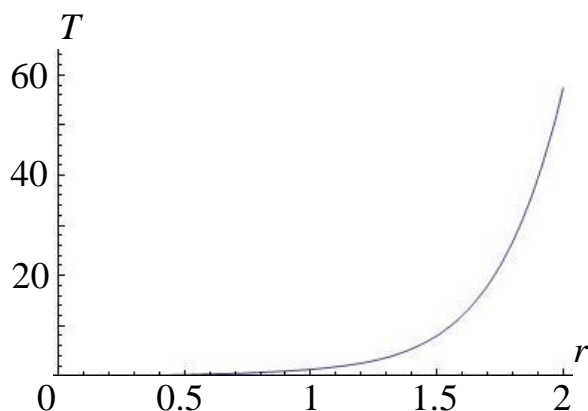


Рис. 6. Температура на границе  $S_1$  при 43 коэффициентах Фурье

Окончательно можно сказать, что сходимость решения главным образом зависит от границы тела и функции распределения температуры.

Предложенный подход, являющийся, по сути, развитием обратного метода, показал свою эффективность в плане решения термоупругих осесимметричных задач для трансверсально-изотропных тел вращения. Преимуществом представленного подхода заключается то, что наиболее трудоемкие вычисления, а именно построение ортонормированного базиса, выполняются один раз для тела определенной конфигурации. Затем этот базис может использоваться для решения различных термоупругих задач для этого тела. Основным преимуществом перед численными методами заключается в том, что в своей структуре метод оперирует квадратурами, которые берутся средствами компьютерной алгебры с абсолютной точностью. Это ликвидирует еще одну причину формирования результирующей ошибки вычислений, связанной с промежуточным характером численного счета. Так же, предложенный подход позволяет получить аналитическое решение задач.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p\_a"*

### **Библиографический список**

1. Ferrari M. Anisotropic layers with through-thickness thermal and material variations // *Journal\_of\_Thermal\_Stresses*, 1992, vol. 15, no. 3, pp. 439 – 445.
2. Иванычев Д.А. Решение краевых осесимметричных задач смешанного типа для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Труды МАИ, 2019, №105, URL: [http://mai.ru/upload/iblock/e10/Ivanychev\\_rus.pdf](http://mai.ru/upload/iblock/e10/Ivanychev_rus.pdf)
3. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Ханьжов Б.Д. Вариационное решение осесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного цилиндра конечной длины // *Известия вузов. Математика*. 1967. № 12. С. 84 – 89.
5. Пеньков В.Б., Викторов Д.В., Саталкина Л.В. Развитие метода граничных состояний на класс задач термоупругости // *Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики»* (Россия, Тула, 17-21 ноября 2008 г.). – Тула: ТулГУ, 2008. С. 274 – 277.
6. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49674>
7. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нгуен К. -, Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на



контактных границах слоистых сред // Труды МАИ, 2013, №71, URL:  
<http://mai.ru/upload/iblock/284/2846b95159abe27b5219c57d8b54294c.pdf>

8. Николаев А.Г., Орлов Е.М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью // Проблеми обчислювальної механіки міцності конструкцій. 2012. № 20. URL:  
<https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/viewFile/106/149>

9. Левина Л.В, Кузьменко Н.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). - Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. С. 2276 – 2278.

10. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL:  
<http://trudymai.ru/published.php?ID=58524>

11. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Пространственная задача термоупругости для сферического купола // XV Международная научно-практическая конференция «Теория и практика современной науки»: сборник статей. – М.: 2014. Изд-во «Спецкнига», С. 10 - 17.

12. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Точное решение несимметричной задачи теории упругости для цилиндра в температурном поле // XI Всероссийский съезд по

фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (Казань, 20-24 августа 2015 г.). – Казань: 2015. С. 1104 - 1106.

13. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевая задача несимметричной деформации цилиндрического резервуара с жидкостью в температурном поле // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 60 - 77. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.04

14. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. - 464 с.

15. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115 – 137.

16. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Научная конференция студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета: сборник тезисов докладов. - Липецк: ЛГТУ, 2007. С. 130 – 131.

17. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2014. № 1. С. 19 – 26.

18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М., Наука, 1977. - 416 с.

19. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16 – 24.