

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи  
УДК 539.3



ВЕСТЯК ВЛАДИМИР АНАТОЛЬЕВИЧ

**ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ  
В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ТЕЛАХ  
С ПЛОСКИМИ ИЛИ СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант :  
профессор, д.ф.-м.н. Тарлаковский Д.В.

Москва 2016

## Содержание

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава 1. Основные соотношения теории нестационарных волн в электромагнитоупругих телах</b> .....	13
§ 1.1. Современное состояние исследований .....	13
§ 1.2. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды .....	32
§ 1.3. Основные типы дополнительных условий для электромагнитоупругих тел .....	40
§ 1.4. Уравнения плоского движения среды в прямоугольной декартовой системе координат .....	41
§ 1.5. Уравнения осесимметричного движения среды в сферической системе координат .....	47
<b>Глава 2. Нестационарные волны в электромагнитоупругой полуплоскости</b> .....	55
§ 2.1. Электромагнитоупругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных возмущений .....	55
§ 2.2. Представление решения методом малого параметра .....	59
§ 2.3. Функции Грина для электромагнитной полуплоскости .....	63
§ 2.4. Электромагнитное поле в движущейся полуплоскости .....	64
§ 2.5. Поверхностные функции Грина для упругой полуплоскости .....	72
§ 2.6. Объемные функции Грина для упругой полуплоскости .....	83
§ 2.7. Нестационарное движение упругой полуплоскости под действием объемных сил .....	96
§ 2.8. Распространение нестационарных электрических поверхностных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости .....	98
§ 2.9. Распространение нестационарных кинематических поверхностных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости .....	103
<b>Глава 3. Нестационарные волны в электромагнитоупругой толстостенной сфере</b> .....	114
§ 3.1. Электромагнитоупругая толстостенная сфера под действием нестационарных поверхностных возмущений .....	114
§ 3.2. Представление решения методом малого параметра .....	118
§ 3.3. Функции Грина для электромагнитной толстостенной сферы .....	123
§ 3.4. Электромагнитное поле в движущейся толстостенной сфере .....	131
§ 3.5. Объемные функции Грина для упругой толстостенной сферы .....	139
§ 3.6. Оригиналы объемных функций влияния для упругой толстостенной сферы .....	145

§ 3.7. Нестационарное движение упругой толстостенной сферы под действием объемных сил .....	152
§ 3.8. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругой толстостенной сфере.....	154
§ 3.9. Распространение радиальных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругой толстостенной сфере .....	163
<b>Глава 4. Нестационарные волны в электромагнитоупругом пространстве со сферической полостью.....</b>	<b>177</b>
§ 4.1. Электромагнитоупругое пространство со сферической полостью под действием нестационарных поверхностных возмущений .....	177
§ 4.2. Функции Грина для электромагнитного пространства со сферической полостью .....	181
§ 4.3. Электромагнитное поле в движущемся пространстве со сферической полостью .....	185
§ 4.4. Объемные функции Грина для упругого пространства со сферической полостью .....	191
§ 4.5. Оригиналы объемных функций влияния для упругого пространства со сферической полостью .....	197
§ 4.6. Нестационарное движение упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил .....	201
§ 4.7. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругом пространстве со сферической полостью....	203
§ 4.8. Распространение радиальных нестационарных поверхностных возмущений в пространстве со сферической полостью .....	213
<b>Глава 5. Нестационарные волны в электромагнитоупругом шаре.....</b>	<b>219</b>
§ 5.1. Электромагнитоупругий шар под действием нестационарных поверхностных возмущений .....	219
§ 5.2. Функции Грина для электромагнитного шара .....	222
§ 5.3. Электромагнитное поле в движущемся шаре .....	226
§ 5.4. Объемные функции Грина для упругого шара .....	229
§ 5.5. Оригиналы объемных функций влияния для упругого шара .....	235
§ 5.6. Нестационарное движение упругого шара под действием объемных сил..	246
§ 5.7. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругом шаре .....	252

<b>Приложение</b> .....	265
§ П.1. Оригиналы преобразований Лапласа и Фурье для некоторых функций... .....	265
§ П.2. Общие решения уравнений теории упругости и электромагнитного поля в сферической системе координат .....	273
§ П.3. Свойства фундаментальных решений уравнений электромагнитного по- ля в сферической системе координат .....	278
§ П.4. Свойства фундаментальных решений уравнений теории упругости в сферической системе координат .....	281
§ П.5. Свойства матрицы граничных условий для уравнений теории упругости в сферической системе координат .....	289
§ П.6. Симметрия функций Грина в сферической системе координат .....	296
§ П.7. Асимптотические свойства фундаментальных решений в сферической системе координат .....	300
§ П.8. Общие решения уравнений электромагнитного поля и теории упругости в прямоугольной декартовой системе координат .....	307
<b>Заключение</b> .....	312
<b>Литература</b> .....	313

## Введение

Электромагнитоупругость возникла на стыке таких отдельных физических моделей, как теория упругости и электромагнитодинамика. В связи с развитием техники и технологий она довольно быстро стала самостоятельным разделом механики сплошных сред. Помимо граничных и начальных условий модели электромагнитоупругости включают в себя уравнения движения, физические и кинематические соотношения, а также уравнения электродинамики Максвелла, рассмотрение которых вместе, приводит к значительному усложнению даже самых простых на первый взгляд задач. Именно взаимное влияние механических и электромагнитных полей, называемое эффектом связности, приводит к упомянутому усложнению и к новым, а так же к уточняющим известные решения результатам. На сегодняшний день не выработаны общие методы аналитического исследования динамических связанных задач электромагнитоупругости.

Данная работа посвящена разработке аналитических методов исследования одного из классов нестационарных задач электромагнитоупругости, а именно одномерных и двумерных задач для тел с плоскими или сферическими границами. В качестве составляющей проблемы построены и реализованы общие алгоритмы решения нестационарных задач теории упругости и электромагнитодинамики.

Структура работы: Диссертация состоит из введения, пяти глав, приложения и списка литературы, включающего 240 наименований.

В первой главе дан аналитический обзор публикаций, посвящённых задачам электромагнитоупругости. Из обзора следует, что в основном, рассматривались несвязанные задачи, либо связанные задачи решались в статической или в стационарной постановке. При этом во многих публикациях использовались численные методы исследования. Аналитические решения нестационарных связанных задач встречаются в единичных работах. В то же время обзор свидетельствует, что постановки задач электромагнитоупругости проработаны достаточно детально и могут быть сформулированы различными способами. Далее в этой главе построены линеаризованные уравнения механической, термодинамической и электромагнитной частей модели, которые замыкаются физическими соотноше-

ниями. Дан переход от общей анизотропной модели к рассматриваемым в работе изотропным проводникам. Рассмотрены основные типы дополнительных условий для упругих электропроводных тел, а так же приведены уравнения плоского связанного движения изотропной электромагнитоупругой среды в прямоугольной системе координат и осесимметричного движения в сферической системе.

Во второй главе в рамках поставленных задач в декартовой системе координат рассматривается нестационарное движение электромагнитоупругой полуплоскости. Для решения используется экспоненциальное преобразование Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени. Показано, что даже в одномерном случае для связанной задачи при произвольном задании начального электромагнитного поля найти аналитическое обращение трансформант по Лапласу не представляется возможным. Поэтому искомые функции представляются в виде рядов по малому параметру. Их решение записывается в интегральном виде с единичными для всех составляющих рекуррентной системы ядрами – объемными и поверхностными функциями Грина. Найдены их изображения и оригиналы. Построены решения вспомогательных самостоятельных задач об определении электромагнитного поля в движущейся полуплоскости, а также о нестационарном движении упругой полуплоскости под действием заданных объемных сил. Подробно описан алгоритм исследования процесса распространения нестационарных электрических возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости. В качестве примера приведено решение для случая кинематических возмущений.

В третьей главе рассматривается процесс распространения нестационарных осесимметричных волн в электромагнитоупругой толстостенной сфере. Искомые решения раскладываются в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Используется преобразование Лапласа по времени и аналогичные главе 2 разложения в ряды по малому параметру. В результате построена разрешающая задачу рекуррентная последовательность краевых задач. Решения для нулевого приближения представляется в виде линейной комбинации правых частей граничных условий с коэффициентами в виде поверхностных функций Грина. Для последу-

ющих приближений используются интегральные представления с ядрами в виде объемных функций Грина.

Найдены явные формулы для всех функций Грина. Показано, что для соответствующих электромагнитной части этих функций оригиналы могут быть построены в явном виде, но в силу большой скорости распространения возмущений при определении их значений возникают значительные вычислительные трудности. Поэтому они заменяются квазистатическими аналогами. Для соответствующих упругой части функций Грина разработан алгоритм, позволяющий точно определять их оригиналы. Он основан на связи входящих в фундаментальную систему решений функций с элементарными, разложении в ряды по экспонентам (в пространстве оригиналов им соответствуют конечные суммы) и использовании теорем операционного исчисления.

Построены решения двух составляющих общую проблему задач: об определении электромагнитного поля по заданному полю перемещений и о движении толстостенной сферы под действием заданных объемных сил.

Аналогично главе 2 построен алгоритм решения связанной задачи для электромагнитоупругой толстостенной сферы. Он использует построенные интегральные представления для перемещений и напряженности магнитного поля. Для исключения использования численного дифференцирования к ним добавляются интегральные представления для коэффициентов рядов, соответствующих объемному расширению, ненулевой компоненты вектора вращения и скоростей среды.

С помощью общего алгоритма подробно проанализирована связанная задача о радиальных колебаниях электромагнитоупругой толстостенной сферы. Приведено сравнение этого решения с результатами, полученными с помощью численного обращения преобразования Лапласа.

В главах 4 и 5 рассматриваются геометрически частные случаи исследованной в главе 3 задачи – нестационарное осесимметричное движение электромагнитоупругих пространства со сферической полостью и шара. Принципиально решение для этих двух вариантов может быть получено предельными переходами от результатов главы 3. Однако, как оказалось, этот подход очень громоздок и в силу

этого не гарантирует достоверные результаты. Поэтому задачи для пространства с полостью и для шара рассматриваются независимо. Соответствующие предельные переходы выполняются по ходу решений для проверки правильности результатов. Подходы к решению этих двух задач подобны использованным методам для толстостенной сферы. Основное отличие заключается в условии ограниченности решений. Для его выполнения используются асимптотические свойства решений.

Построены решения тех же, как и в главе 3, задач об определении электромагнитного поля в пространстве со сферической полостью по заданному полю перемещений.

Приводятся примеры расчетов. В главе 5 дополнительно рассмотрены асимптотические свойства соответствующих упругой части функций Грина в окрестностях нулевых значений пространственных аргументов.

В приложении приводятся таблицы оригиналов некоторых, не вошедших в широко известные справочники изображений преобразований Лапласа, одномерного экспоненциального преобразования Фурье и совместного преобразования Лапласа-Фурье. Большинство формул сопровождается необходимыми выкладками. Далее выводятся общие решения уравнений электромагнитного поля и теории упругости в сферической системе координат. Решения записываются с учётом свойств модифицированных функций Бесселя и представления перемещений через их потенциалы. Исследованы свойства фундаментальных решений уравнений электромагнитного поля и фундаментальных решений уравнений теории упругости в сферической системе координат с вычислением необходимых для написания решения вронскианов и дополнительных миноров. Далее рассматриваются свойства матрицы граничных условий для уравнений теории упругости в сферической системе координат, возникающей при построении функции влияния в главе 3. Затем доказываются свойства симметрии функций Грина в сферической системе координат. Они используются при нахождении функций влияния в главах 3, 4 и 5. Далее исследуются асимптотические свойства фундаментальных решений в сферической системе координат. В приложении также строятся общие решения

уравнений электромагнитного поля и теории упругости в прямоугольной декартовой системе координат.

**Целью работы** является развитие направления механики нестационарного взаимодействия электромагнитных и механических полей в упругих проводящих телах, включающее постановки и исследование новых задач, а так же совершенствование некоторых известных методов решения нестационарных связанных задач электромагнитоупругости.

**Актуальность работы** в теоретическом плане связана с малой исследованностью проблемы. С практической точки зрения она объясняется широким распространением в различных областях авиационной, космической и других видах техники проводящих материалов и покрытий, подвергающихся воздействию как механических, так и электромагнитных полей. С целью совершенствования работы устройств, выполненных из проводящих материалов, и увеличения их долговечности возникает необходимость в уточнении имеющихся приближённых постановок и методов решения проблемы взаимодействия механических и электромагнитных полей.

**Методы исследования.** Использовался аппарат линейной теории упругости в совокупности с уравнениями электродинамики Максвелла. Для построения решений применялся метод малого параметра, преобразования Лапласа и Фурье, аппараты функций Грина и обобщённых функций. Для нахождения оригиналов преобразования Лапласа использовались методы компьютерной алгебры.

**Научная новизна работы** состоит в постановке и построении решений нового класса двумерных связанных нестационарных задач электромагнитоупругости проводящих тел канонической формы, находящихся под действием поверхностных и объёмных нагрузок. Впервые предложен и реализован основанный на использовании малого параметра метод решения этих задач.

Получены решения новых нестационарных связанных плоских и осесимметричных задач электромагнитоупругости в прямоугольной декартовой и сферической системах координат. Впервые построены нестационарные поверхностные и

объемные функции Грина для электромагнитной и упругой полуплоскостей для произвольных точек по глубине.

Доказаны новые утверждения о структуре нестационарных осесимметричных объемных функций Грина в сферической системе координат. С их помощью построены нестационарные объемные функции Грина для электромагнитных и упругих толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара. Впервые получено решение нестационарных двумерных задач для тел указанной геометрии о деформировании под действием объемных сил и об определении электромагнитного поля по заданным перемещениям.

**Достоверность и обоснованность результатов** подтверждается тем, что все результаты получены на базе модификации известных моделей механики деформируемого твёрдого тела и электродинамики с использованием апробированных методов решения начально-краевых задач и строго доказанных утверждений. Кроме того, систематически использовалась проверка результатов с помощью предельных переходов от общих случаев к частным. Для одномерных задач в сферической системе координат проведено сравнение аналитических результатов с численным решением. В совокупности с известными численными методами интегрирования это подтверждает достоверность результатов и полученных аналитических решений.

**Практическая значимость работы** состоит в возможности использовать результаты работы для уточнения функционирования различных электронных устройств, использующих в своей работе проводящие элементы, которые подвергаются экстремальным воздействиям полей различной природы, а в части объёмных сил, действующих на упругое тело - в моделировании сейсмических волн в земной коре, возникающих под действием глубинных возмущений.

Кроме того, полученные точные результаты могут служить эталонными и тестовыми решениями для дальнейших перспективных разработок в области нестационарной электромагнитоупругости.

**Апробация результатов исследования.** Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- Вторая Всероссийская научная конференция по волновой динамике машин и конструкций (Нижний Новгород, 2007);

- VII Международная научная школа – семинар «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2007);

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кремёнки, 2007 – 2016);

- Международная конференция «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (Санкт-Петербург, 2008);

- Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Львов, 2008, 2013)

- Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2009, 2011, 2013);

- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций (Ялта, Запорожье, 2009-2012);

- Международная конференция, посвящённая 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (Москва 2009);

- Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львов, 2010, 2014);

- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород 2011; Казань, 2015);

- V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела (Астрахань, 2011);

- Международная научная конференция «Математичні проблеми технічної механіки» (Днепропетровск, Днепродзержинск, 2011);

- Украинско-российский научный семинар «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2012, 2016 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, 2013);

- Международная научная конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, 2013);

- VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары 2014);

- IV Международная научно-практическая конференция «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2015);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва 2016);

- XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2016);

- Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённая 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016);

- III Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», СКТеММ'16 (Москва, 2016);

- 24-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Montreal, 2016).

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (коды проектов 09-08-00470, 10-08-90412, 12-08-00928, 12-08-90409, 15-08-00788).

**В заключении** приводятся основные результаты диссертации.

# Глава 1

## Основные соотношения теории нестационарных волн в электромагнитоупругих телах

### §1.1. Современное состояние исследований

Исследования и библиография в области электромагнитоупругости настолько разнообразны и обширны (начиная с экспериментальных, например [208,210] и заканчивая сложными численными решениями и решениями с использованием хорошо известных пакетов прикладных программ и даже суперкомпьютеров), что представляется целесообразным остановиться на работах, посвященных решению задач, которые тем или иным образом за последнее время (25-30 лет) имели отношение и повлияли на диссертационное исследование. Более ранние работы были частично рассмотрены и проанализированы в аналитических обзорах по подобной тематике, см. например [104,140,141].

Отметим, что в части механики деформируемого твёрдого тела, посвящённой изучению взаимного влияния электрических, магнитных и упругих полей гораздо меньше законченных аналитических и численно-аналитических результатов, чем, например, в таких разделах, как термоупругость или электроупругость.

Помимо фундаментальных и ставших классическими учебников и монографий далее рассмотрены работы, в которых построены точные решения некоторых задач электромагнитоупругости, публикации посвященные стационарным связанным и несвязанным задачам, а также работы, в которых исследуются некоторые нестационарные задачи электромагнитоупругости. Кроме того упомянуты некоторые наиболее важные задачи статики, для которых получены законченные результаты.

Несмотря на то, что первые формулировки динамических задач электромагнитоупругости появились в 60-х – 70-х годах прошлого века, вопросы, связанные с существованием и единственностью решения задач нестационарной связанной электромагнитоупругости, получили своё развитие в основном с середины и конца 80-х годов прошлого века. Для некоторых канонических областей (например полый пьезокерамический цилиндр конечной длины, поляризованный вдоль ра-

диуса) проблемы существования и единственности были доказаны в работах Мельника В.Н. [145-149]. Аналогичные вопросы для прямоугольной области рассмотрены в статьях Власенко В.Д. [94-96].

Численные решения нестационарной задачи о колебаниях предварительно поляризованной вдоль одной из сторон прямоугольной электроупругой пластины построены в работе Чебана В.Г., Форни Г.А. [186], аналогичные исследования для стержня проведены в их работе [185]. Более поздняя статья Шульги Н.А., Григорьевой Л.О. [232] посвящена решению нестационарной двумерной задачи о колебаниях призматического пьезокерамического тела под действием механических нагрузок. Решение строится с помощью численной дискретизации уравнений по двум пространственным переменным и по времени.

Среди зарубежных публикаций по подобной тематике обращает на себя внимание работа Iesan D. [215], где исследован вопрос о единственности решения задачи электротермоупругости и дана формулировка теоремы взаимности. Замечено, что при отсутствии электромагнитных полей соотношение взаимности принимает вид, соответствующий классической теории термоупругости. Единственность решения доказана без каких-либо предположений, касающихся тензора упругих постоянных.

Некоторые шаговые по времени схемы метода конечных элементов для задач с классическими краевыми условиями в рамках линейной теории пьезоэлектричества в квазистатическом приближении были проанализированы в статье Наседкина А.В. [154]. Более поздняя работа Степанова Г.В., Бабуцкого А.И., Мамеева И.А. [176] посвящена экспериментальному и численному исследованию задачи о нестационарном напряжённом состоянии предварительно растянутого тонкого сплошного проводящего стержня под воздействием импульса электрического тока высокой плотности. Доказано, что растягивающие статические напряжения после воздействия импульса тока снижаются, что обуславливается процессами релаксации, которые связаны, прежде всего, с нагревом проводника.

Схожую проблему, но уже для изгибных магнитоупругих колебаний тонких металлических проводов под действием переменного тока, достаточно для

индуцирования разрушающих напряжений, рассмотрели Lukianov A. и Molokov S. [217]. Решение задачи так же строилось численно.

Метод конечных элементов использовался и в более сложных моделях электромагнитоупругости. Так в [238] этот метод был применён для нахождения напряжений в задаче о воздействии стационарных и нестационарных электрических полей на ферроэлектрический полупроводник с учётом эффекта диффузии кислорода в вакансии.

Заметим, что численные методы, при всей своей несомненной эффективности, обладают и рядом недостатков. Например, они склонны к накоплению ошибок, ограниченно пригодны для прогнозирования. Для их проверки обязательно необходимо некоторое эталонное решение, в достоверности которого нет сомнений. Для получения таких решений в нестационарных задачах в различных комбинациях возможно применение следующих аналитических методов: метода характеристик, интегральных преобразований, малого параметра, метода разложения в ряды по системам ортогональных функций, метода граничных интегральных уравнений и его дискретного аналога - метода граничных элементов и некоторых других.

В последние годы, помимо традиционных курсов электродинамики и механики сплошных сред, дисциплины электроупругости стали входить в учебные программы специальных курсов некоторых классических университетов см., например [106,127,138]. В этом смысле книга Ж. Можена [150] объединила не только современные на момент издания исследования по электромагнитоупругости, но и включила в себя основы классических курсов по этому направлению для пьезоэлектриков, проводников, ферромагнетиков. Обращает на себя внимание оригинальный подход, показывающий формальную связь между линейной теорией упругости и электродинамикой, продемонстрированный в статье [207]. Показано, что соотношения классической электродинамики могут быть получены формально на основе теории упругости линейной среды.

Также общие постановки задач электромагнитоупругости в различных вариантах содержатся в фундаментальных трудах и некоторых журнальных статьях [4,26-28,97,118,127,128,130,131,155,156,166,172,184,190,211,237].

К более ранним монографиям относится работа Селезова И.Т., Селезовой Л.В. [168], в которой в основном рассматриваются несвязанные системы уравнений упругости и электромагнитодинамики, исследуются некоторые задачи на экстремальные значения электропроводности материалов, построены соответствующие асимптотические формулы.

В монографии Амбарцумяна С.А., Багдасаряна Г.Е. и Белубекяна М.В. [4] разработан общий подход к решению задач линейной магнитоупругости тонкостенных тел, в том числе, помещённых в магнитное поле. Изучаются вопросы стационарных колебаний и устойчивости оболочек и пластин, обтекаемых проводящим газом при наличии магнитного поля. Своё развитие эта монография получила в журнальных статьях [2,24,25,31,117,119,120,143,144,153,157,165,178], посвящённых изучению распространения и отражения, в основном, поверхностных и объёмных волн в полупространстве под действием внешних полей. В частности, в [2] с использованием преобразования Лапласа и Ханкеля получено замкнутое решение задачи о гармонических колебаниях упругого полупространства, вызванных точечной нагрузкой на поверхности полупространства. В [117] и [165] исследована задача о пьезоэлектрическом полупространстве, на границе которого закреплен тонкий проводящий слой. Получены асимптотики, характеризующие перемещения и электрический потенциал на бесконечности.

Более широкий подход к изучению распространения волн в проводящем немагнитном пространстве осуществляется в работе Гилева С.Д., Михайловой Т.Ю. [105], в которой предполагается, что полупространство находится под действием ударной волны. Задача решается в квазистатическом приближении. Построены асимптотические решения для малых и больших времён, а так же показано, что магнитное поле растёт линейно со временем на фронте ударной волны.

Исследованием влияния тока смещения на напряжённое состояние полупространства под действием электромагнитного поля занимался Ковальчук В.Ф.

[137]. Количественное сравнение компоненты вектора напряжённости электрического поля, входящей в волновое уравнение с малым параметром при старшей производной по времени с решением соответствующего уравнения теплопроводности в проводящем теле и с уравнением Лапласа в вакууме показало отличие решений примерно в два раза.

Широкий класс проблем, посвящённых изучению поверхностных волн в электроупругом и магнитоупругом полупространстве рассмотрен армянской школой механики и в дальнейшем. Так в работах [119,120] исследованы поверхностные волны Лява и Релея. Показано, что для произвольной упругой среды возможна единственная скорость распространения магнитоупругих волн Релея для идеального проводника. В [157] решена задача об отражении магнитоупругой нормальной волны от границы полупространства, на которой выполнены условия Навье. Оказалось, что квазипродольная и квазипоперечная волны трансформируются в силу их связанности только при достаточно сильном магнитном поле. В [119] получено дисперсионное уравнение поверхностной волны и проведен его анализ в зависимости от физико-механических свойств уже слоистой системы. Ранее Г.Е. Багдасарян и З.Н. Даноян в [25] для решения задачи типа Лэмба воспользовались только магнитной составляющей. Позже Г.Е. Багдасаряном в [24] показано, что в ферромагнитном полупространстве при распространении волны Релея возбуждается поверхностная волна сдвига при условии существования наклонного к поверхности распространения волн магнитного поля. Та же идея, которая использована в [24] получила развитие для полупространства, являющегося идеальным проводником в [144], но уже в ситуации, когда внешнее магнитное поле перпендикулярно границе полупространства. Поверхностные сдвиговые волны возникают в этом случае в результате взаимодействия возмущённого электромагнитного поля и поля упругих перемещений полупространства.

Особняком стоят задачи для ограниченных тел. Так в статье [179] Трипалина А.С. и соавторов рассмотрены трёхмерные колебания круглой толстой пьезокерамической пластины. Исследование частотного спектра показало наличие краевого резонанса, а так же малую зависимость собственных частот колебаний от радиуса

пластины. В работе [153] для поляризованного по толщине пьезокерамического слоя исследованы особенности механических и электрических полей у краёв кольцевых электродов в режиме возбуждения волн Лэмба. Доказано, что у краёв электродов радиальные и тангенциальные напряжения, а так же плотность зарядов на электроде имеют корневые особенности.

Изучению распространения волны Римана в нелинейно упругом стержне, находящемся во внешнем магнитном поле посвящена статья Ерофеева В.И., Мальханова А.О. [124]. Показано, что время опрокидывания волны Римана прямо зависит от величины внешнего магнитного поля, которое в итоге приводит к стабилизации волны.

Напряжённо-деформированное состояние бесконечной тонкой пластинки, по которой протекает ток заданной плотности исследована в [178]. Позднее Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. в статье [3], развивая идеи монографии [4], исследовали задачу о колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле. Задача решена в стационарной постановке для случая осесимметрических колебаний. В [31] внешнее магнитное поле создаётся при помощи электрического тока, протекающего по поверхности и задача сводится к ранее решённым.

Примерно к тому же периоду, что и работа [4] относится монография Подстригача Я.С., Бурака Я.И., Гачкевича А.Р., Чернявской Л.В. [160]. Она посвящена построению и анализу расчётных моделей и методикам определения термоупругого состояния деформируемых электропроводных тел, находящихся в стационарном электромагнитном поле, определению температурных полей и напряжений в однослойных и биметаллических пластинах, в круговых сплошных и полых цилиндрах и тонкостенных оболочках. Исследуется влияние периодического характера изменения во времени электромагнитного поля на распределение температуры и напряжений.

Эта монография стала основой для ряда более поздних статей и сборников львовской школы механики [34,101,102,103,151,152,174,175,177], где рассмотрен целый комплекс задач, уточняющих проблемы электромагнитотермоупругости

как для тел канонической формы, так и для слоистых тел, находящихся под действием полей различной природы. Решения строятся, как правило, численно-аналитическими методами. В [151] предложена эффективная методика исследования плоских задач для цилиндрических тел, на границе которых задано электромагнитное поле.

Схожие идеи применительно к несвязанным задачам о распространении термоэлектромагнитных волн в пьезоэлектриках прослеживаются и в зарубежных публикациях S.H. Guo [212], в статье Othman Mohamed I.A., Kumar Rajneesh [224] о распространении и отражении плоских гармонических волн в изотропной среде (здесь модули упругости линейно зависят от температуры), в [213], где рассматриваются упругие симметричные колебания полупроводников в форме сферической оболочки при воздействии температурного, механического и электромагнитного полей, в работе Zhu Lin-li, Zheng Xiao-jing [240], в которой исследуется процесс распространения температуры под воздействием внешнего электромагнитного поля в металле, в [223], где локальному нестационарному нагреву подвергается пьезоупругий кристалл, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, а также в [161], где гармоническим колебаниям подвергается слоистая структура из термоэлектроупругих слоёв, жёстко скреплённая с упругим основанием с дефектами и включениями на плоскостях контакта слоёв. В последней работе используется преобразование Фурье по пространственной координате, после чего задача сводится к системе интегральных уравнений. Решение общей задачи строится как суперпозиция решений более простых задач.

В некоторых частных случаях решение задач в подобных указанным выше постановках удаётся построить аналитически. Так Von Ende Sven, Lammering Rolf в [234] рассмотрели распространение волн Лэмба на поверхности толстой стальной пластины под действием гармонического нагружения от пьезоэлектрического актуатора конечной длины. Аналитическое решение задачи в двумерной постановке сравнивалось с численным, полученным с использованием пакета ANSYS.

Вопросам о распространении волн в слоистой пьезоупругой пластине посвящена работа Kong Yan-ping, Guo Shu-qi, Liu Jin-xi [216], где в двумерной поста-

новке авторам удалось получить точное решение гармонической задачи. Wang H.M., Zhao Z.C. в [235] для двуслойной пластины, один из слоёв которой является поляризованным пьезоэлектриком с двумя электродами на границе, а другой упругим, исследовали распространение волн Лява в приграничной области контакта при наличии дефекта на ней. Оказалось, что дефект существенным образом влияет на фазу волны и понижает её скорость, а отношение толщин слоёв существенно влияет на дисперсию волн Лява. Похожая проблема, но в несколько другой постановке рассматривалась в [231]. Здесь поверхностные гармонические волны изучались на поверхности двухслойной пластины пьезоэлектрик-полупроводник.

Majhi M.C. в [218] рассмотрел связанную задачу о распространении термоупругих волн в полубесконечном тонком пьезоэлектрическом стержне. Решение удалось построить аналитически с помощью преобразования Лапласа. В связанной задаче электроупругости в [23] для пьезокерамического клина применялось преобразование Меллина, после чего она сводилась к системе сингулярных интегральных уравнений. Разложение искомым функций по полиномам Чебышева полученной системы позволило привести задачу к системе алгебраических уравнений. В [164] так же исследовано влияние связанности электрических и механических полей на поведение напряжений и напряженности электрического поля в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного клина. He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yaping [214] рассмотрели задачу об электромагнитотермоупругих колебаниях бесконечного цилиндра, но в рамках обобщенной теории теплопроводности. Предполагалось, что имеется некоторое начальное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра. Граничные условия температурные. Полученная замкнутая система затем решалась с помощью преобразования Лапласа с использованием численного обращения.

В монографии Партон В.З., Кудрявцева Б.А. [156] с использованием общих соотношений механики деформируемых сред, взаимодействующих с электромагнитным полем исследуются задачи о гармонических колебаниях массивных пьезоэлектриков канонической формы и тонких пьезоэлектрических оболочек, ре-

шены некоторые статические задачи для пьезоэлектриков с электродами на поверхностях, обсуждаются вопросы распространения акустоэлектронных волн в пьезокристаллах, процессы их разрушения. Отдельно рассмотрены проблемы термоупругости электропроводных неферромагнитных тел под действием электрических полей.

Эта монография стала основой для последующих публикаций. В частности, в монографии Смородинского Я.Г. [172], продолжены идеи, сформулированные в [156], на прикладную область. Изложены результаты теории распространения стационарных волн в намагниченной анизотропной упругой среде. Рассмотрены процессы их отражения и преломления в магнитополяризованных неограниченных средах применительно к задачам дефектоскопии. Сформулированы методы решения задач теории упругости для пространственно неоднородного анизотропного слоя. Идеи обнаружения дефектов в упругом полупространстве были изложены и ранее в работе Premrov M. [225], где предложено использовать в стационарной задаче для упругого полупространства метод фиктивных областей. Численные результаты получены итерационным методом путём пересчёта граничных условий на фиктивных границах. Для несимметричных задач замечена достаточно высокая скорость сходимости итерационного процесса.

В [118] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. и Шульга Н.А. представили основные соотношения линейного деформирования упругих сред с сильным пьезоэффектом. Сформулированы задачи электроупругости для физически реализуемых граничных условий. Показано влияние эффекта связанности полей на процессы статического и динамического деформирования. Построена теория деформирования тонкостенных элементов из пьезоматериалов различной поляризации. Рассмотрены задачи для круглых, прямоугольных пластин, для цилиндрических и сферических оболочек. На основе трёхмерных уравнений электроупругости исследованы свойства нормальных волн в пьезокерамическом слое и толстостенном цилиндре. Решения для слоистого пьезокерамического цилиндра в осесимметричной постановке были уточнены позднее численно-аналитическими методами для

случая гармонических колебаний цилиндра в работе Григоренко А.Я., Лозы И.А. [116].

Известны публикации и зарубежных авторов, посвящённые вопросам распространения возмущений в цилиндрических телах и телах с цилиндрическими границами. Так в работе Wang X., Dong K. [236] проводящий цилиндр со специальным видом неоднородности находится под действием температурного удара. Задача в одномерной постановке с помощью разбиения искомой функции на сумму статической и динамической частей сводится к уравнению Бесселя. С использованием преобразования Ханкеля получены аналитические выражения для термомагнитных напряжений и возмущённой реакции радиального магнитного поля в цилиндре. Преобразование Лапласа для решения задачи о распространении возмущений в вязкой термоэлектромагнитоупругой среде с цилиндрическим отверстием применяли Rakshit M., Mukhopadhyay B. [227]. Его обращение проводилось численно.

Механические явления, связанные с нестационарным распространением упругих волн в неограниченной упругой среде, цилиндрических стержнях, цилиндрических оболочках и пьезоактивных средах рассмотрены в работе Жария О.Ю. и Улитко А.Ф. [127]. С помощью интегральных преобразований построена динамическая функция Грина для сосредоточенной силы в пространстве и проанализированы генерируемые ей поля излучения. Дана формулировка и предложены постановки нестационарных задач электроупругости. Изложена теория электромеханического преобразования энергии в пьезокерамических телах. Поставлена задача электрического разряда как особого класса задач электроупругих колебаний.

В дальнейших работах Жария О.Ю. [125,126] предложена общая формулировка метода разложения по собственным формам колебаний в нестационарных задачах электроупругости для пьезоэлектриков. К идее разложения по полиномам Лежандра и Лагерра в задачах электромагнитоупругости обратились позднее и Matar Olivier, Gasmi Noura, Zhou Huan, Goueygou Marc, Talbi Abdelkrim в статье [219].

Фильштинским Л.А. в работе [181] построены методы для определения особенностей сопряженных электроупругих полей в составных клиновидных областях в условиях антиплоской и плоской деформации. Для области контакта построена функция Грина, выраженная через быстро сходящиеся ряды. В статье [182] приведён метод определения сопряженных электроупругих полей уже в пьезокерамическом слое при действии сосредоточенных на линии силовых и электрических источников. Коэффициенты Фурье вектора перемещения и электрического потенциала, а также тензора напряжения выражены через цилиндрические функции Макдональда. В [183] аналогичный подход позволил свести задачу об электромагнитоупругом слое с туннельными трещинами к системе сингулярных уравнений.

Позднее результаты монографий [4,118,156] и, в частности публикаций [181,182,183] получили своё развитие в книге Бардзокаса Д.И., Зобнина А.И., Сеника Н.А. и Фильштинского М.Л. [27]. В этой работе изложены основы механики связанных полей, строится теория оболочек и пластин из пьезоэлектриков на основе механики деформируемых тел, взаимодействующих с электромагнитным полем. Решены двумерные задачи электроупругости для многосвязных тел. Методом граничных интегральных уравнений исследованы проблемы дифракции электроупругих волн на неоднородностях различных типов. Рассматриваются также некоторые обратные задачи электроупругости, в том числе, задачи оптимального управления параметрами прочности и разрушения.

Обратные задачи электроупругости также рассмотрены в статьях [38,39] Ватульяном А.О. и Домбровой О.Б.. В качестве метода решения предложено сведение задач к интегральному уравнению или системе интегральных уравнений с гладкими ядрами, для решения которых применялась регуляризация, основанная на предварительной информации об искомой функции.

В комплексе работ Бардзокаса Д.И., Сеника Н.А. [29], а так же Бардзокаса Д.И., Кудрявцева Б.А., Сеника Н.А. [28] приведены основные соотношения электродинамики и описание пьезоэлектрических и магнитоупругих эффектов. Представлены постановки основных задач о возбуждении и распространении волн в

различных средах. Изложены результаты исследований задач о распространении гармонических волн в неограниченных электромагнитоупругих средах. Объёмные волны в пьезоэлектриках и магнитоупругих средах рассмотрены с учётом электродинамических эффектов и проводимости материалов. Получено решение задач, связанных с возбуждением поверхностных волн Рэлея, сдвиговых поверхностных волн и волн Лэмба. Метод решения основан на сведении задач к системам сингулярных интегральных уравнений с последующим их решением методом Бубнова-Галёркина.

Динамические задачи электромагнитоупругости как часть более широкого круга динамических задач теории упругости рассмотрены в работе Вовк Л.П. [97]. В частности приведены постановки задач электроупругости для однородных и составных тел с усложненными свойствами.

Метод исследования динамических связанных задач электроупругости предложен Калинчуком В.В. [129]. Здесь контактные задачи электроупругости сводятся к системам интегральных уравнений с сильно осциллирующими ядрами относительно функции контактных напряжений и плотности тока через зону контакта. Последующее использование метода фиктивного поглощения позволяет свести задачу к интегральному уравнению. При этом в работе [98] показано, что учёт пьезосвязи слабо влияет на реакцию среды, но сильно сказывается на поведении заряда, сглаживая электрические характеристики задачи. В дальнейшем в [32] исследовались вопросы резонансных явлений в подобного рода задачах.

Позднее эти идеи, а также в целом теория контактного взаимодействия полуграниченных, предварительно напряжённых пьезоактивных сред, таких как слой и слоистое полупространство обобщены Калинчуком В.В. и Белянковой Т.И. в монографиях [130,131]. Основное внимание здесь уделено функционально-градиентным материалам, свойства которых непрерывно изменяются по глубине. Результаты получены на основе развитого авторами метода численного восстановления функции влияния для такого рода сред и материалов. Указаны эффективные способы решения интегральных уравнений, возникающих при изучении динамики контактного взаимодействия пьезоактивных сред, в том числе, упомя-

нутые в [129]. Подробно исследован вопрос о влиянии предварительных напряжений на класс симметрии различных типов пьезоэлектриков. Аналогичный подход в [100] позволил решить осесимметричную задачу о возбуждении волн в пьезослое, контактирующим с ним электродом. Преобразование Фурье в сочетании с методом фиктивного поглощения позволило решить задачу о сдвиговых колебаниях электромагнитоупругого слоя под действием обобщённой гармонической нагрузки в [143].

Применение аппарата функций влияния, к плоской связанной задаче электроупругости о возбуждении волн на поверхности электроупругой полосы оказалось эффективным, в частности, в статье Ворович Е.И., Пряхиной О.Д. и др. [99], где рассмотрен аналитический подход к исследованию асимптотического поведения элементов матрицы Грина, что позволило построить асимптотику для искомых величин.

Одним из методов исследования задач электроупругости является использование приближенных уравнений. В случае растяжения и изгиба электроупругих пластин использование таких соотношений позволило свести многомерную задачу к совокупности несвязанных задач меньшей размерности. Именно такой подход применил J.S. Yang в работе [239].

Достаточно обширна библиография, посвящённая решению статических задач для канонических конечных и бесконечных тел и областей, а так же посвящённая стационарным задачам электро-магнитоупругости. Для ряда канонических областей решения статики были получены аналитически. Так в работе [121] построено точное решение статической задачи магнитоупругости для ферромагнитного тела со сферической полостью, в [222] дано аналитическое решение задачи электроупругости с начальным кручением. В работе Подильчука Ю.Н. [159] исследованы задачи для таких термоэлектроупругих тел, у которых граничная поверхность соответствует координатным поверхностям в системах, допускающих разделение переменных в трехмерных уравнениях Лапласа, что позволило найти точные аналитические решения в статической постановке при различных нагрузках и граничных условиях. В статье [158] рассмотрена задача о напряжен-

ном состоянии однополосного гиперboloида вращения. Использовано представление общего решения уравнений статической электроупругости через четыре потенциальные функции, каждая из которых является гармонической в заданной системе координат. Решение получено в виде суммы четырех частных решений.

В статьях [133,135] Кирилук В.С. и Левчук О.И. рассмотрели связь между статическими задачами упругости и электроупругости. Причём результат для электроупругой задачи в случае пьезоэлектрика удалось получить без непосредственного решения, но с использованием результатов для соответствующей упругой задачи. Решение связанной задачи о перемещении жёсткого эллиптического диска в пьезоэлектрическом пространстве под действием приложенной силы вдоль оси поляризации получено в аналитическом виде в [134].

В работах [33,190] сформулированы вариационные принципы и вытекающие из них основные типы задач стационарной электроупругости. Аналитически решены некоторые задачи о вынужденных колебаниях пьезокерамических тел простой геометрии в одномерной постановке (стержни, цилиндры, полые шары). Исследованы электромеханические характеристики пьезокерамических преобразователей в зависимости от электрических краевых условий и их геометрии. В более поздней работе [195] Шульга Н.А. и Ратушняк Т.В. рассмотрели магнитоупругое движение пьезоэлектрической среды.

Изучением распределения электроупругих полей прямого пьезоэффекта в полуплоскости с эллиптическим отверстием под действием точечного электрического заряда на границе полуплоскости и механических усилий на границе полости занимались Космодамианский А.С., Кравченко А.П. [139]. Численный анализ показал, что влияние прямолинейной границы оказывается существенным для распределения электрического и упругого полей в случае, если расстояние между контуром и границей становится меньше диаметра контура. В статье Бабешко В.А. [22] развита математическая теория смешанных краевых задач для электроупругих кристаллов. Методом преобразования Фурье стационарная задача для полуограниченной области сложной формы сводится к решению систем двумерных интегральных уравнений.

Как видно из перечисленных выше работ, библиография по нестационарным связанным задачам электромагнитоупругости достаточно ограничена и в своём большинстве посвящена прежде всего температурным, магнитным и пьезоэффектам. Так же невелико среди них число работ по указанной тематике, доведённых до законченных аналитических или численно-аналитических результатов.

В комплексе работ Бабаева А.Э. и соавторов [5-21] и в работе Савина В.Г., Моргуна И.О. [163] достаточно подробно изучены вопросы нестационарного взаимодействия тонкостенных и толстостенных пьезопреобразователей цилиндрической и сферической формы с акустическими средами. Для тонкостенных элементов используется модель Кирхгофа-Лява. Основным из методов решения является использование преобразования Лапласа по времени с удовлетворением граничным условиям в области оригиналов и с последующим сведением к уравнению Вольтерра, решение которого находится в ряде задач в виде степенного ряда. В задаче о радиальных нестационарных колебаниях полой пьезоэлектрической сферы с учётом связанных электро- и термомеханических эффектов Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. [205] воспользовались методом разделения переменных и также свели задачу к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, которое решалось методом интерполяции.

В статье Селезова И. [167] рассмотрена связанная модель феррогидродинамики сплошных сред применительно к задачам, описывающим распространение возмущений в намагничиваемой среде. Она включает в себя гиперболическое уравнение для потенциала скоростей, гиперболическое уравнение для температуры и эллиптическое уравнение для потенциала магнитного поля.

В комплексе работ Шульги Н.А., Григорьевой Л.О. [191-194] и Григорьевой Л.О. [113] нестационарная задача для пьезокерамического слоя решена сначала методом характеристик. Затем для случая поперечных колебаний слоя проанализирована эволюция связанного электромеханического деформирования при однородных механических и электрических граничных условиях. Доказано, что начальные условия необходимо задавать только для механических неизвестных. Метод характеристик в сочетании с методом последовательных приближений

развивается авторами на случай, когда пьезокерамический слой подвергается двустороннему как механическому, так и электрическому воздействию. В аналогичных задачах для полого цилиндра [114,115] данный подход оказался невозможен. При этом полученные системы уравнений решались с помощью явных и неявных конечно-разностных схем и методом Рунге-Кутты с последующим их сравнением.

Статьи Ватульяна А.О. [35-37] посвящены нестационарным задачам электроупругости. В [35] на основе обобщённого преобразования Фурье строятся фундаментальные решения электроупругости, в [36] для уравнений термоэлектроупругости в квазистатической постановке для пьезоэлектрических тел исследованы свойства решений по времени. Доказано их экспоненциальное убывание. В одномерном случае построена операторная связь наведённого потенциала тока и теплового потока. В [37] исследованы некоторые закономерности нестационарного движения для уравнений термоэлектроупругости на основе асимптотического анализа квадратичной формы операторного уравнения, порождённого краевой задачей.

Работы Сеницкого Ю.Э. [169] и Шляхина Д.А. [187-189] посвящены изучению нестационарного движения толстостенного как неоднородного пьезокерамического цилиндра конечной длины, так и цилиндра с различными направлениями поляризации. Эти задачи решены схожими методами: с помощью разложения по собственным функциям в форме структурного алгоритма конечных интегральных преобразований по радиусу, а так же с помощью преобразования Фурье на отрезке по осевой координате. В работах [169] и [170] аналогичным методом исследована задача для сплошной круглой пьезокерамической пластины. Электроупругий цилиндр конечной высоты рассматривался в [136,226]. В [136] задача о распространении электромагнитоупругих волн разбивалась на несколько подзадач, каждая из которых сводилась к системе интегро-дифференциальных уравнений.

Движение неоднородного электропроводящего упругого тела из идеального проводника в магнитном поле исследуется в работе Bytner S., Gambin B. [201]. При таких условиях электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелл-

ла и модифицированным законом Ома, приведённом в книге Ильюшина А.А. [128]. При этом в уравнениях движения появляется сила Лоренца в качестве массовой силы.

К вопросу структуры решения системы дифференциальных уравнений, описывающих линейное взаимодействие электромагнитного поля с неоднородной упругой средой обратился Романов В.Г. в [162]. Основной вклад в это взаимодействие определяется силой Лоренца. В предположении, что среда является слабым проводником, изучается структура решения задачи Коши в случае, когда внешняя сила и сторонний ток, действующие на среду сосредоточены в точке. В предположении однородности среды в некоторой окрестности приложения источников выписывается отдельно сингулярная и регулярная части решения.

Одним из способов нахождения решений нестационарных задач на начальном этапе времени является метод разложения в ряды в пространстве изображений по Лапласу по величине, обратной параметру преобразования. Такой метод, применительно к связанной задаче электромагнитоупругости для сферической полости в пространстве использовал Aouadi M. в статье [198]. Choudhuri S.K. Roy и соавторы в [202,203,229] решили одномерную задачу для идеально проводящего магнитотермоупругого полупространства, под действием магнитного поля с вектором напряжённости, направленным вдоль границы полупространства, с постоянной температурой, и нормальной импульсной механической нагрузкой на границе. Задача также, как и в [198], решена с помощью обращения преобразования Лапласа для малых начальных моментов времени. Показано, что перемещения и температура непрерывны на упругом волновом фронте, а напряжение и возмущённое магнитное поле имеют скачки. Nandy Sm. Sanjukta в [221] воспользовался этим же подходом для решения задачи об одномерных возмущениях уже пьезоэлектрического полупространства. При помощи приближённого обращения преобразования Лапласа проанализированы разрывы напряжений и температуры. Так же для начальных моментов времени Sharma J. N., Chand Dayal в [230] решили задачу о распространении возмущений в проводящей плоскости, контакти-

рующей с вакуумом и находящейся под действием механической или тепловой нагрузки.

Basu Animesh в [200] в одномерной постановке рассмотрел распределение температуры и перемещений точек в бесконечном упругом теле, возникающих в результате одновременного воздействия теплового потока и магнитного поля на границе тела. После использования преобразования Лапласа и Фурье обращение трансформант искомым перемещений и температуры удалось получить явно. Их сравнение с обращением с помощью численно пакета дало удовлетворительные результаты.

Методом решения нестационарных задач электромагнито-термоупругости, применение которого приводит к точным аналитическим решениям является обращение преобразования Лапласа с помощью теории вычетов. Так в работе [197] исследуются перемещения, температура и температурные напряжения в неограниченном теле со сферической полостью, находящейся под действием температуры, и постоянного магнитного поля. Свойства материала зависят от температуры. При использовании преобразования Лапласа трансформанты искомым функций представляют из себя рациональные функции умноженные на экспоненты, что позволяет получить явно распределение напряжений, радиальных перемещений и температуры.

Достаточно мощным аппаратом решения нестационарных задач является метод граничных элементов в сочетании с преобразованием Лапласа и Фурье. К сожалению при таком подходе точные решения получить достаточно затруднительно, поэтому прибегают к численным методам вычисления интегралов. Так в монографии Баженова В.Г., Игумнова Л.А. [26] помимо постановок задач электроупругости представлен модифицированный метод граничных интегральных уравнений и приведены примеры применения данного метода для отыскания функции Грина в некоторых трёхмерных задачах электроупругости. В работе [199] Arai M., Adachi T., Matsumoto H. использован гранично-элементный подход, но уже применительно к задачам расчёта тонкостенных конструкций. Показано, что точность результатов зависит от характера численной реализации обращения

преобразования Лапласа и от численных ошибок вычисления сингулярных интегралов. К этому же периоду времени относятся работы китайской школы Ding Haojiang, Liang Jian [206] и Gao Cunfa, Cui Demi [209]. В первой из них построены фундаментальные решения в замкнутой форме для трёх случаев поведения бесконечной трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды, находящейся под действием электрических и механических нагрузок, что позволило в дальнейшем применить метод граничных элементов. Во второй работе фундаментальные решения найдены для плоской задачи в случае полубесконечной и бесконечной сред.

Особняком стоят шаговые по времени алгоритмы метода граничных элементов. Применительно к трёхмерным нестационарным задачам магнитотермоупругости в квазистатической постановке для тела, на границе которого было задано магнитное поле эти алгоритмы были развиты несколько ранее упомянутых статей в работе Турилова В.В. [180]. Для исследования волновой динамики в полубесконечной области этот метод был использован, например, в статье Rice J. M., Sadd M. H. [228].

Обзор опубликованных монографий и статей приводит к выводу, что исследования в области связанных нестационарных задач электромагнитоупругости недостаточны. Основные достижения в этой области в основном были получены с использованием численных и численно-аналитических методов. В связи с относительно большой размерностью систем дифференциальных уравнений, вытекающих из постановок задач электромагнитоупругости, точные решения и алгоритмы присутствуют лишь в единичных работах и, как правило, касаются лишь одномерных задач.

Несмотря на это, некоторые из рассмотренных выше исследований явились основой данной диссертационной работы в части использования и развития предложенных авторами методов. Физическое описание процессов распространения нестационарных возмущений при поверхностном воздействии и под действием объёмных сил, предложенное в некоторых из упомянутых работ, позволило сформулировать постановки задач, исследованных в диссертационной работе.

## § 1.2. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды

Все дальнейшие исследования опираются на линеаризованную модель термоэлектромагнитоупругой среды [44,49,68,220,204].

*Механическая часть модели* включает в себя соответствующие уравнения движения сплошной среды и геометрические соотношения [107,128,166]:

$$\rho w^i = \nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i, \quad w^i = \frac{\partial v^i}{\partial t}, \quad v^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}; \quad (1.2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1.2.2)$$

где  $\mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  и  $\rho \mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$  (по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 3) - векторы ускорения, скорости, перемещения и внешних сил;  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  - тензоры напряжений и деформаций;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  - базис некоторой криволинейной системы координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ ;  $\nabla_i$  - оператор ковариантного дифференцирования;  $t$  - время;  $\rho$  - плотность.

При этом начальное состояние предполагается недеформированным (здесь и далее ему соответствует нижний индекс «0»):

$$(\rho)_0 = \rho, \quad (u^i)_0 = 0, \quad (v^i)_0 = 0, \quad (w^i)_0 = 0, \quad (\sigma^{ij})_0 = 0, \quad (F^i)_0 = 0. \quad (1.2.3)$$

*Термодинамическая составляющая модели* при условии отсутствия рассеяния энергии (ее объемная плотность  $w^* = 0$ ) включает в себя следующие соотношения [128,166,107]:

- уравнение баланса энтропии ( $T$  - абсолютная температура;  $s$  и  $q^{(e)} dt$  - массовые плотности энтропии и притока тепла без учета теплопроводности;  $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$  - вектор теплового потока)

$$\rho T \frac{ds}{\partial t} = \rho q^{(e)} - \text{div } \mathbf{q}, \quad (1.2.4)$$

линеаризация которого имеет вид

$$T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = q^{(e)} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q}; \quad (1.2.5)$$

- записанное с точностью до членов второго порядка малости уравнение изменения свободной энергии ( $\psi$  и  $\tilde{q} dt$  - массовые плотности свободной энергии и притока энергии без учета тепловой составляющей;  $\vartheta_T = T - T_0$  - изменение температуры)

$$d\psi + sd\vartheta_T = \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} + \tilde{q} dt; \quad (1.2.6)$$

- закон Фурье ( $\lambda = \lambda^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  - тензор теплопроводности)

$$\mathbf{q} = -\lambda^{ij} \nabla_j \vartheta_T \mathbf{e}_i, \quad (1.2.7)$$

При этом считается, что в начальном состоянии термодинамические параметры определяются так:

$$\begin{aligned} (T)_0 = T_0, (s)_0 = 0, (\tilde{q})_0 = 0, (\psi)_0 = 0, \\ (q^{(e)})_0 = q_0^{(e)}, (\mathbf{q})_0 = \mathbf{q}_0 = q_0^i \mathbf{e}_i, \rho q_0^{(e)} = \operatorname{div} \mathbf{q}_0. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

В электромагнитную часть модели входят следующие соотношения:

- уравнения Максвелла ( $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{H} = H^i \mathbf{e}_i$  - векторы напряженностей электрического и магнитного полей;  $\mathbf{D} = D^i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{B} = B^i \mathbf{e}_i$  - векторы электрической и магнитной индукций;  $\mathbf{j} = j^i \mathbf{e}_i$  - плотность тока;  $c$  - скорость света;  $\rho_e$  - плотность зарядов)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e; \quad (1.2.9)$$

- обобщенный закон Ома ( $\sigma$  и  $\alpha_T$  - коэффициенты электропроводности и термоэлектрического эффекта)

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \alpha_T \mathbf{q} \right) + \rho_e \mathbf{v}, \quad (1.2.10)$$

линеаризация которого имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] + \alpha_T \mathbf{q} \right) + \rho_{e0} \mathbf{v}. \quad (1.2.11)$$

Полагается, что в начальном состоянии электромагнитные параметры таковы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E})_0 = \mathbf{E}_0 = E_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{B})_0 = \mathbf{B}_0 = B_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{H})_0 = \mathbf{H}_0 = H_0^i \mathbf{e}_i, (\rho_e)_0 = \rho_{e0}, \\ (\mathbf{D})_0 = \mathbf{D}_0 = D_0^i \mathbf{e}_i, (\mathbf{j})_0 = \mathbf{j}_0 = j_0^i \mathbf{e}_i, \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_0 = 0, \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_0 = 4\pi \mathbf{j}_{s0}, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{s0}), \text{div} \mathbf{D}_0 = 4\pi \rho_{e0}, \mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0,$$

где  $\mathbf{j}_{s0}$  - ток смещения в начальном состоянии.

Связь механических, термодинамических и электромагнитных полей задается следующими *дополнительными соотношениями*:

- выражением для объемной силы от электромагнитного поля в уравнениях движения (1.2.1) (силы Лоренца)

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}], \quad (1.2.13)$$

линеаризация которого имеет вид

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{F}_e = \rho_{e0} \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} ([\mathbf{j}_0, \mathbf{B}] + [\mathbf{j}, \mathbf{B}_0]); \quad (1.2.14)$$

- формулой для притока тепла без учета теплопроводности в (1.2.4) (джоулева тепла)

$$\rho q^{(e)} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] \right)^2, \quad (1.2.15)$$

а именно, ее линеаризованной формой

$$\rho q^{(e)} = 2\sigma \left( \mathbf{E}_0, \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}_0] \right); \quad (1.2.16)$$

- выражением для притока энергии без учета тепловой составляющей в (1.2.6)

$$\rho \tilde{q} dt = \frac{1}{4\pi} [(\mathbf{E}, d\mathbf{D}) + (\mathbf{H}, d\mathbf{B})]. \quad (1.2.17)$$

При этом в начальном состоянии имеет место равенства:

$$c \rho_{e0} \mathbf{E}_0 + [\mathbf{j}_0, \mathbf{B}_0] = \mathbf{0}, \rho q_0^{(e)} = \sigma \mathbf{E}_0^2. \quad (1.2.18)$$

Таким образом, линеаризованная модель связанной термоэлектромагнитоупругости включает в себя уравнения (1.2.1), (1.2.2), (1.2.5) -(1.2.7), (1.2.9),

(1.2.11), (1.2.14), (1.2.16) и (1.2.17). При этом соответствующее начальное состояние должно подчиняться соотношениям (1.2.3), (1.2.8), (1.2.12) и (1.2.18).

Указанная система уравнений не замкнута. Поэтому необходимо построение физических соотношений [68,204]. С этой целью полагаем, что свободная энергия является однозначной, дифференцируемой функцией деформаций, изменения температуры и компонент векторов электрической и магнитной индукций:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij}, \vartheta_T, D_i, B_i) \quad (1.2.19)$$

Вычисляя дифференциал этой функции

$$d\Psi = \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} - s d\vartheta_T + \frac{1}{4\pi\rho} (E^i dD_i + H^i dB_i) \quad (1.2.20)$$

и подставляя его в (1.2.6), с учетом (1.2.17) получаем искомые физические соотношения:

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta_T}, \quad E^i = 4\pi\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D_i}, \quad H^i = 4\pi\rho \frac{\partial \Psi}{\partial B_i}. \quad (1.2.21)$$

Для их линейризации полагаем, что свободная энергия является дважды дифференцируемой функцией, и далее ограничиваемся ее квадратичным приближением:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{2\rho} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{c}{2T_0} \vartheta_T^2 + \frac{1}{2\rho} d^{ij} D_i D_j + \frac{1}{2\rho} b^{ij} B_i B_j + \\ & + \frac{1}{\rho} f^{ij} D_i B_j - \frac{1}{2\rho} \Lambda^{ij} \varepsilon_{ij} \vartheta_T + \frac{1}{\rho} p^{ijk} \varepsilon_{ij} D_k + \frac{1}{\rho} q^{ijk} \varepsilon_{ij} B_k + r^i \vartheta_T D_i + s^i \vartheta_T B_i, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

где

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &= \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0, \quad c_T = -T_0 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \right)_0, \quad d^{ij} = \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial D_i \partial D_j} \right)_0, \\ b^{ij} &= \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial B_i \partial B_j} \right)_0, \quad f^{ij} = \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial D_i \partial B_j} \right)_0, \quad \Lambda^{ij} = -\rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0, \\ p^{ijk} &= \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial D_k} \right)_0, \quad q^{ijk} = \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial B_k} \right)_0, \\ r^i &= \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial D_i} \right)_0, \quad s^i = \rho \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial B_i} \right)_0. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

В качестве дополнительной упрощающей гипотезы считаем, что

$$f^{ij} = 0, r^i = 0, s^i = 0. \quad (1.2.24)$$

Тогда из (1.2.21) и (1.2.22) получаем следующие линейные физические соотношения:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Lambda^{ij} \vartheta_T + p^{ijk} D_k + q^{ijk} B_k, \quad (1.2.25)$$

$$s = \frac{c_T}{T_0} \vartheta_T + \frac{\Lambda^{ij}}{\rho} \varepsilon_{ij}, \quad (1.2.26)$$

$$\frac{1}{4\pi} E^i = d^{ij} D_j + p^{kei} \varepsilon_{ke}, \quad \frac{1}{4\pi} H^i = b^{ij} B_j + q^{kei} \varepsilon_{ke}. \quad (1.2.27)$$

Здесь  $C^{ijkl}$  и  $\Lambda^{ij}$  - тензоры упругих постоянных и коэффициентов температурных напряжений;  $c_T$  - коэффициент теплоемкости;  $d^{ij}$  и  $b^{ij}$  - тензоры диэлектрической и магнитной податливости;  $p^{ijk}$  и  $q^{ijk}$  - тензоры пьезоэлектрической и пьезомагнитной податливости.

Находя из равенств (1.2.27) компоненты векторов электрической и магнитной индукций

$$D^i = e^{ij} E_j + \kappa^{ijk} \varepsilon_{jk}, \quad B^i = \mu^{ij} H_j + \gamma^{ijk} \varepsilon_{jk}, \quad (1.2.28)$$

приводим первое из физических соотношений (1.2.25) к следующему виду

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Lambda^{ij} \vartheta_T - \frac{1}{4\pi} (\kappa^{ijk} E_k + \gamma^{ijk} H_k), \quad (1.2.29)$$

где  $e^{ij}$  и  $\mu^{ij}$  - тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости;  $\kappa^{ijk}$  и  $\gamma^{ijk}$  - тензоры пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных.

Дополнительно, с помощью (1.2.26) из уравнения (1.2.5) можно исключить энтропию:

$$c_T \frac{\partial \vartheta_T}{\partial t} + \frac{T_0 \Lambda^{ij}}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = q^{(e)} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.2.30)$$

Таким образом, замкнутая система линейной теории термоэлектромагнитоупругости с учетом (1.2.8), (1.2.14) и (1.2.16) состоит из 38 уравнений: (1.2.1),

(1.2.2), (1.2.9) и (1.2.11), (1.2.28) - (1.30) относительно неизвестных  $u^i, v^i, w^i, \sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}, \vartheta_T, E^i, B^i, H^i, D^i, j^i, \rho_e$ .

Далее ограничимся частной моделью - *изотропными проводниками*, под которыми будем понимать среду, обладающую следующими физическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \kappa^{ijk} = 0, \gamma^{ijk} = 0, e^{ij} = \varepsilon g^{ij}, \mu^{ij} = \mu_e g^{ij}, \Lambda^{ij} = \Lambda g^{ij}, \lambda^{ij} = \lambda_T g^{ij}, \\ C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu_e$  - коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости;  $\Lambda$  и  $\lambda_T$  - коэффициенты температурных напряжений и теплопроводности;  $\lambda$  и  $\mu$  - упругие постоянные Ламе;  $g^{ij}$  - компоненты метрического тензора.

При этом физические соотношения (1.2.28) и (1.2.29) записываются следующим образом:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H}, \quad (1.2.32)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \Lambda \vartheta_T g_{ij}, I_1 = \varepsilon_i^i = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.2.33)$$

Преобразуются также и уравнения электродинамики (1.2.9) и (1.2.11):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu_e}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_e, \quad (1.2.34)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{\mu_e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] + \beta_T \operatorname{grad} \vartheta_T) + \rho_{e0} \mathbf{v}, \beta_T = \alpha_T \lambda_T, \quad (1.2.35)$$

дополнительное соотношение (1.2.14)

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{F}_e = \rho_{e0} \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{E}_0 + \frac{\mu_e}{c} ([\mathbf{j}_0, \mathbf{H}] + [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0]), \quad (1.2.36)$$

а также уравнение (1.2.30)

$$c_T \frac{\partial \vartheta_T}{\partial t} + \frac{T_0 \Lambda}{\rho} \frac{\partial I_1}{\partial t} = \frac{2\sigma}{\rho} \left( \mathbf{E}_0, \mathbf{E} + \frac{\mu_e}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0] \right) + \frac{\lambda_T}{\rho} \Delta \vartheta_T, \quad (1.2.37)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа.

При *изотермических процессах* ( $\vartheta_T \equiv 0$ ) в *изотропных проводниках* уравнение (1.2.37) отбрасывается, а соотношения (1.2.33) и (1.2.35) упрощаются:

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.2.38)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{\mu_e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]) + \rho_{e0} \mathbf{v}. \quad (1.2.39)$$

Таким образом, в этом варианте модели электромагнитоупругой среды, которая и будет рассматриваться далее, замкнутая система уравнений состоит из уравнений (1.2.1), (1.2.34) с учетом равенств (1.2.2), (1.2.36), (1.2.38) и (1.2.39) относительно неизвестных  $u^i, v^i, w^i, \sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}, E^i, H^i, j^i, \rho_e$ . При этом компоненты  $B^i$  и  $D^i$  векторов электрической и магнитной индукций находятся с помощью равенств (1.2.32).

Количество неизвестных можно уменьшить, если из (1.2.34) и (1.2.39) исключить  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{j}$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} = c_e^2 (\Delta - \text{graddiv}) \mathbf{E} - \mathbf{f}(\mathbf{w}), \quad (1.2.40)$$

где

$$\gamma_e = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \quad c_e^2 = \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{\mu_e \sigma}{c} [\mathbf{w}, \mathbf{H}_0] + \rho_{e0} \mathbf{w} \right). \quad (1.2.41)$$

Из (1.2.34) и (1.2.40) вытекает еще одно разрешающее уравнение относительно вектора напряженности магнитного поля:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c_e^2 \Delta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{c}{\mu_e} \text{rotf}(\mathbf{w}), \quad (1.2.42)$$

Оно может быть проинтегрировано по времени. Но при этом необходимо учитывать начальные условия, что будет сделано ниже при рассмотрении двумерных процессов в конкретных системах координат.

Также стандартным образом равенства (1.2.1), (1.2.2) и (1.2.38) сводятся к уравнению Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{graddiv} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_e. \quad (1.2.43)$$

Кроме того, построим еще одно полезное представление для плотности зарядов. А именно, используя последнее равенство в (1.2.34) и уравнение (1.2.40), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_e &= \operatorname{div} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} \right] = \\ &= -\operatorname{div} \left[ c_e^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{f}(\mathbf{w}) \right] = -\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

Уравнения (1.2.40) и (1.2.43) иногда удобнее свести к эквивалентной системе независимых уравнений. С этой целью поля перемещений и напряженности электрического поля представляются в виде:

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi_e + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}_e, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_e = 0, \quad (1.2.45)$$

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (1.2.46)$$

где  $\varphi_e$  и  $\varphi$  - скалярные, а  $\boldsymbol{\psi}_e$  и  $\boldsymbol{\psi}$  векторные потенциалы.

Подставляя (1.2.45) в (1.2.40) получаем уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_e = -\Phi_e, \quad (1.2.47)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \boldsymbol{\psi}_e = c_e^2 \Delta \boldsymbol{\psi}_e - \boldsymbol{\Psi}_e, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}_e = 0. \quad (1.2.48)$$

Аналогично из (1.2.43) с помощью (1.2.46) находим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \varphi + \Phi, \quad (1.2.49)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\Psi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \quad (1.2.50)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.2.51)$$

При выводе уравнений в потенциалах использованы следующие представления:

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \operatorname{grad} \Phi_e + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}_e, \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi}_e = 0; \quad (1.2.52)$$

$$\mathbf{F}_e = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}, \operatorname{div} \boldsymbol{\Psi} = 0. \quad (1.2.53)$$

По известному вектору  $\mathbf{F}_e$  потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  могут быть найдены следующим образом. Применяем к равенству (1.2.53) операторы  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ :

$$\text{div}\mathbf{F}_e = \text{divgrad}\Phi = \Delta\Phi, \text{rot}\mathbf{F}_e = \text{rotrot}\Psi = \text{graddiv}\Psi - \Delta\Psi.$$

Следовательно, потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  должны удовлетворять таким уравнениям:

$$\Delta\Phi = \text{div}\mathbf{F}_e; \quad (1.2.54)$$

$$\Delta\Psi = -\text{rot}\mathbf{F}_e. \quad (1.2.55)$$

Из (1.2.43) также вытекают уравнения движения относительно коэффициента объемного расширения  $\chi = I_1$  и удвоенного вектора вращения  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = c_1^2\Delta\chi + \frac{1}{\rho}\text{div}\mathbf{F}_e, \chi = \text{div}\mathbf{u}; \quad (1.2.56)$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = c_2^2\Delta\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho}\text{rot}\mathbf{F}_e, \boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{u}. \quad (1.2.57)$$

### § 1.3. Основные типы дополнительных условий для электромагнитоупругих тел

Для выделения частных решений указанных систем уравнений, как правило, необходимы дополнительные условия, то есть формулировка соответствующих начально-краевых задач на пространственно-временном четырехмерном множестве  $G \times \{t \geq t_0\}$ , где  $G$  - геометрическая область с границей  $\partial G$ ,  $t_0$  - начальный момент времени. Далее везде будем полагать

$$t_0 = 0, \quad (1.3.1)$$

и ограничимся основными типами дополнительных условий для электромагнитоупругих тел [128,204], разделяя их на механическую и электромагнитную составляющие.

*Начальные условия*

- механическая часть

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_1, \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_1 \quad (M \in G); \quad (1.3.2)$$

- электромагнитная часть

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_1, \dot{\mathbf{E}}|_{t=0} = \mathbf{E}_2, \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_1, \dot{\mathbf{H}}|_{t=0} = \mathbf{H}_2 \quad (M \in G), \quad (1.3.3)$$

где  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  - заданные функции геометрической точки  $M$ .

*Граничные условия* (область  $G$  ограничена;  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$  - единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial G$  области  $G$ )

- механическая часть ( $\partial G = \Pi_u \cup \Pi_\sigma$ ; части границ  $\Pi_u$  и  $\Pi_\sigma$  могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\mathbf{u}|_{\Pi_u} = \mathbf{U}, \quad \sigma^{ij} v_j \mathbf{e}_i|_{\Pi_\sigma} = \mathbf{b} \quad (t > t_0); \quad (1.3.4)$$

- электромагнитная часть ( $\partial G = \Pi_E \cup \Pi_H$ ; части границ  $\Pi_E$  и  $\Pi_H$  могут пересекаться только по множеству меры нуль)

$$\mathbf{E}|_{\Pi_E} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{H}|_{\Pi_H} = \mathbf{h} \quad (t > t_0), \quad (1.3.5)$$

где  $\mathbf{U}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{h}$  - заданные на соответствующих поверхностях функции.

В том случае, когда граница состоит из одной части, в условиях (1.3.4) и (1.3.5) остается только одно соответствующее равенство.

Если область  $G$  неограниченна, то должны быть заданы условия на бесконечности. Таковым, далее везде будет полагаться ограниченность искомых функций.

#### § 1.4. Уравнения плоского движения среды в прямоугольной декартовой системе координат

Здесь в качестве системы координат будем использовать прямоугольную декартову систему координат:

$$\xi^1 = x, \xi^2 = y, \xi^3 = z \quad (x, y, z \in \mathbb{R}). \quad (1.4.1)$$

Полагаем, что движение происходит в плоскости  $Oxz$  (плоская задача), что соответствует нулевому перемещению в перпендикулярном направлении и независимости искомых функций от координаты  $y$ :

$$u_1 = u(x, z, t), \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = w(x, z, t). \quad (1.4.2)$$

В этом случае механическая часть (1.2.1), (1.2.2), (1.2.38) соотношений электромагнитоупругости принимает следующий вид:

- уравнения движения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + F_1, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + F_3; \quad (1.4.3)$$

- связь деформаций с перемещениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.4.4)$$

$$\varepsilon_{22} \equiv 0, \quad \varepsilon_{12} \equiv 0, \quad \varepsilon_{23} \equiv 0, \quad I_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

- связь напряжений с деформациями

$$\sigma_{11} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{33} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{33}, \quad (1.4.5)$$

$$\sigma_{13} = 2\mu \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{22} = \lambda I_1, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} \equiv 0.$$

Очевидными условиями плоского движения при этом являются следующие равенства для внешней силы (силы Лоренца, см. также (1.2.14)):

$$F_2 \equiv 0, \quad F_1 = F_1(x, z, t), \quad F_3 = F_3(x, z, t). \quad (1.4.6)$$

Аналогичные требования накладываются и на характеристики электромагнитного поля:

$$E_2 = E_{02} \equiv 0, \quad E_1 = E_1(x, z, t), \quad E_3 = E_3(x, z, t),$$

$$E_{01} = E_{01}(x, z), \quad E_{03} = E_{03}(x, z), \quad (1.4.7)$$

$$H_1 = H_{01} = H_3 = H_{03} \equiv 0, \quad H_2 = H(x, z, t), \quad H_{02} = H_0(x, z).$$

При этом электромагнитная часть (1.2.34), (1.2.36), (1.2.39) соотношений электромагнитоупругости принимает следующий вид:

- уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = -\frac{\mu_e}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_1 + \frac{\mu_e}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_3 + \frac{\mu_e}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} \rho_e, \quad (1.4.8)$$

$$j_1 = j_1(x, z, t), \quad j_3 = j_3(x, z, t), \quad j_{01} = j_{01}(x, z), \quad j_{03} = j_{03}(x, z),$$

$$\rho_e = \rho_e(x, z, t), \quad \rho_{e0} = \rho_{e0}(x, z);$$

- сила Лоренца

$$F_1 = \rho_{e0} E_1 + \rho_e E_{01} - \frac{\mu_e}{c} (j_{03} H + j_3 H_0), \quad (1.4.9)$$

$$F_3 = \rho_{e0} E_3 + \rho_e E_{03} + \frac{\mu_e}{c} (j_{01} H + j_1 H_0);$$

- закон Ома

$$j_1 = \sigma \left( E_1 - \frac{\mu_e H_0}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho_{e0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.4.10)$$

$$j_3 = \sigma \left( E_3 + \frac{\mu_e H_0}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_{e0} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad j_2 = j_{02} \equiv 0;$$

Компоненты векторов электрической и магнитной индукций, как следует из (1.2.32), связаны с компонентами напряженностей электрического и магнитного полей так:

$$D_1 = \varepsilon E_1, \quad D_3 = \varepsilon E_3, \quad D_2 \equiv 0, \quad B_1 = B_3 \equiv 0, \quad B_2 = B = \mu_e H. \quad (1.4.11)$$

Соответствующие плоской задаче уравнения (1.2.40), (1.2.42) и (1.2.43), записываются следующим образом:

- уравнения относительно координат вектора напряженности электрического поля

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) E_1 &= c_e^2 [N_{11}(E_1) + N_{12}(E_3)] - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{e0} u - \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 w \right), \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) E_3 &= c_e^2 [N_{21}(E_1) + N_{22}(E_3)] - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{e0} w + \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 u \right), \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

где

$$N_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad N_{12} = N_{21} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad (1.4.13)$$

- уравнение относительно компоненты напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial H}{\partial t} &= c_e^2 \Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{4\pi c_e^2}{c} \left[ \frac{\partial(\rho_{e0} u)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho_{e0} w)}{\partial x} \right] - \gamma_e \left[ \frac{\partial(H_0 u)}{\partial x} + \frac{\partial(H_0 w)}{\partial z} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

- уравнения Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial I_1}{\partial x} + \mu \Delta u + F_1, \quad \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial I_1}{\partial z} + \mu \Delta w + F_3, \quad (1.4.15)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.4.16)$$

Уравнения (1.2.47) и (1.2.49) относительно скалярных потенциалов сохраняют свой вид, а уравнения (1.2.48) и (1.2.50) относительно векторных потенциалов переходят в скалярные уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi_e = c_e^2 \Delta \Psi_e - \Psi_e; \quad (1.4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \Psi + \Psi. \quad (1.4.18)$$

При этом в силу равенств (1.4.2) (1.4.6) и (1.4.7) необходимо положить

$$\begin{aligned} \Psi_{e2} &= \Psi_e(x, z, t), \quad \Psi_{e1} = \Psi_{e3} \equiv 0, \quad \varphi = \varphi(x, z, t), \\ \Psi_2 &= \Psi(x, z, t), \quad \Psi_1 = \Psi_3 \equiv 0, \quad \varphi_e = \varphi_e(x, z, t), \\ \Psi_{e2} &= \Psi_e(x, z, t), \quad \Psi_{e1} = \Psi_{e3} \equiv 0, \quad \Phi_e = \Phi_e(x, z, t), \\ \Psi_2 &= \Psi(x, z, t), \quad \Psi_1 = \Psi_3 \equiv 0, \quad \Phi = \Phi(x, z, t). \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Дополнительная формула (1.2.44) для плотности зарядов при этом записывается так:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_e \right) \rho_e = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial(\rho_{e0} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{e0} w)}{\partial z} + \frac{\mu_e \sigma}{c} \left[ \frac{\partial(H_0 u)}{\partial z} - \frac{\partial(H_0 w)}{\partial x} \right] \right\}. \quad (1.4.20)$$

Скалярная форма представления (1.2.46) приобретает следующий вид:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.4.21)$$

Электромагнитные параметры начального состояния, согласно (1.2.12), (1.4.7) и (1.4.11), должны быть связаны между собой следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{01}}{\partial z} - \frac{\partial E_{03}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}(j_{03} + j_{s03}), \quad -\frac{\partial H_0}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}(j_{01} + j_{s01}), \\
\frac{\partial E_{01}}{\partial x} + \frac{\partial E_{03}}{\partial z} &= \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{0e}, \quad j_{01} = \sigma E_{01}, \quad j_{03} = \sigma E_{03}, \\
\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\right)_0 &= \frac{4\pi}{\varepsilon}j_{s01}, \quad \left(\frac{\partial E_3}{\partial t}\right)_0 = \frac{4\pi}{\varepsilon}j_{s03}.
\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

Далее везде будем использовать следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускаем):

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u' = \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \\
H' &= \frac{H\mu_e c_1}{cE_*}, \quad B' = \frac{Bc_1}{cE_*}, \quad \rho'_e = \frac{4\pi\rho_e L}{\varepsilon E_*}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{c_1^2}, \quad \Psi' = \frac{\Psi}{c_1^2}, \\
\Phi'_e &= \frac{\Phi_e L}{E_* c_1^2}, \quad \varphi'_e = \frac{\varphi_e}{E_* L}, \quad \psi'_e = \frac{\psi_e}{E_* L}, \quad \Psi'_e = \frac{\Psi_e L}{E_* c_1^2}, \\
\sigma'_{kl} &= \frac{\sigma_{kl}}{\lambda + 2\mu}, \quad E'_k = \frac{E_k}{E_*}, \quad D'_k = \frac{D_k}{\varepsilon E_*}, \quad j'_k = \frac{j_k}{\sigma E_*}, \quad F'_k = \frac{F_k L}{\lambda + 2\mu} \quad (k, l = 1, 2, 3), \\
\eta &= \frac{c_1}{c_2}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta_e = \frac{c_1}{c_e}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad \gamma = \frac{\gamma_e L}{c_1} = \frac{4\pi\sigma L}{\varepsilon c_1},
\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

где  $L$  и  $E_*$  - некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

Тогда равенства (1.4.4) и (1.4.21) сохраняют свой вид, а безразмерная форма соотношений (1.2.49), (1.4.3), (1.4.5), (1.4.8) - (1.4.12), (1.4.15), (1.4.18) и (1.4.22) записывается так (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ ):

- уравнения движения

$$\ddot{u} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + F_1, \quad \ddot{w} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + F_3; \tag{1.4.24}$$

- связь напряжений с деформациями

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \kappa I_1 + (1 - \kappa)\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{33} = \kappa I_1 + (1 - \kappa)\varepsilon_{33}, \\
\sigma_{13} &= (1 - \kappa)\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{22} = \kappa I_1;
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

- уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} &= -\dot{H}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \eta_e^2 (\gamma j_3 + \dot{E}_3), \\ -\frac{\partial H}{\partial z} &= \eta_e^2 (\gamma j_1 + \dot{E}_1), \quad \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \rho_e; \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

- сила Лоренца

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha \left[ \rho_{e0} E_1 + \rho_e E_{01} - \gamma (j_{03} H + j_3 H_0) \right], \\ F_3 &= \alpha \left[ \rho_{e0} E_3 + \rho_e E_{03} + \gamma (j_{01} H + j_1 H_0) \right]; \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

- закон Ома

$$j_1 = E_1 - H_0 \dot{w} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_3 = E_3 + H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{w} / \gamma; \quad (1.4.28)$$

- связь компонент векторов электрической и магнитной индукций с компонентами напряженностей электрического и магнитного полей

$$D_1 = E_1, \quad D_3 = E_3, \quad B = H; \quad (1.4.29)$$

- уравнения относительно координат вектора напряженности электрического поля (операторы  $N_{ij}$ , по-прежнему, определяются равенствами (1.4.13))

$$\begin{aligned} \eta_e^2 (\ddot{E}_1 + \gamma \dot{E}_1) &= N_{11}(E_1) + N_{12}(E_3) - \eta_e^2 (\rho_{e0} \ddot{u} - \gamma H_0 \dot{w}), \\ \eta_e^2 (\ddot{E}_3 + \gamma \dot{E}_3) &= N_{21}(E_1) + N_{22}(E_3) - \eta_e^2 (\gamma H_0 \ddot{u} + \rho_{e0} \dot{w}); \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

- уравнение относительно компоненты напряженности магнитного поля

$$\eta_e^2 (\ddot{H} + \gamma \dot{H}) = \Delta \dot{H} + \eta_e^2 \left[ \frac{\partial(\rho_{e0} \ddot{u})}{\partial z} - \frac{\partial(\rho_{e0} \dot{w})}{\partial x} \right] - \gamma \eta_e^2 \left[ \frac{\partial(H_0 \ddot{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H_0 \dot{w})}{\partial z} \right] \quad (1.4.31)$$

- уравнения Ламе

$$\ddot{u} = \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{1}{\eta^2} \Delta u + F_1, \quad \ddot{w} = \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial I_1}{\partial z} + \frac{1}{\eta^2} \Delta w + F_3; \quad (1.4.32)$$

- уравнения относительно потенциалов поля перемещений

$$\ddot{\phi} = \Delta \phi + \Phi, \quad (1.4.33)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{\eta^2} \Delta \psi + \Psi; \quad (1.4.34)$$

- связь электромагнитных параметров в начальном состоянии

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{01}}{\partial z} - \frac{\partial E_{03}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial x} = \eta_e^2 \gamma (j_{03} + j_{s03}), \quad -\frac{\partial H_0}{\partial z} = \eta_e^2 \gamma (j_{01} + j_{s01}), \\ \frac{\partial E_{01}}{\partial x} + \frac{\partial E_{03}}{\partial z} = \rho_{0e}, \quad j_{01} = E_{01}, \quad j_{03} = E_{03}, \quad (\dot{E}_1)_0 = \gamma j_{s01}, \quad (\dot{E}_3)_0 = \gamma j_{s03}; \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

- формула (1.4.20) для плотности зарядов

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -\frac{\partial(\rho_{e0}\dot{u})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_{e0}\dot{w})}{\partial z} - \gamma \left[ \frac{\partial(H_0\dot{u})}{\partial z} - \frac{\partial(H_0\dot{w})}{\partial x} \right]. \quad (1.4.36)$$

Кроме того, из (1.2.56) и (1.2.57) аналогично (1.2.47) и (1.4.18) можно получить следующие уравнения относительно коэффициента объемного расширения и ненулевой компоненты удвоенного вектора вращения  $2\omega = \omega_e \mathbf{e}_2$ :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \chi + \chi_e, \quad \rho \chi_e = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}; \quad (1.4.37)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \omega + \omega_e, \quad \rho \omega_e = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}. \quad (1.4.38)$$

Их безразмерные аналоги записываются так:

$$\ddot{\chi} = \Delta \chi + \chi_e, \quad \chi_e = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}; \quad (1.4.39)$$

$$\ddot{\omega} = \frac{1}{\eta^2} \Delta \omega + \omega_e, \quad \omega_e = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}. \quad (1.4.40)$$

При этом функции  $\chi$  и  $\omega$  согласно (1.2.56) и (1.2.57) связаны с перемещениями так:

$$\chi(u, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \omega(u, w) = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (1.4.41)$$

## § 1.5. Уравнения осесимметричного движения среды в сферической системе координат

Здесь в качестве системы координат будем использовать сферическую систему координат:

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \theta, \quad \xi^3 = \vartheta \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi), \quad (1.5.1)$$

Полагаем, что движение является симметричным относительно оси  $Oz$ , что соответствует следующим компонентам вектора перемещения:

$$u_r = u(r, \theta, t), u_\theta = v(r, \theta, t), u_\vartheta \equiv 0, \quad (1.5.2)$$

где  $O$  - центр сферической системы координат;  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$  - ее базис;  $z = \cos \theta$ ;  
 $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ .

В этом случае механическая часть (1.2.1), (1.2.2), (1.2.38) соотношений электромагнитоупругости принимает следующий вид:

- уравнения движения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + F_r, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) \operatorname{ctg} \theta \right] + F_\theta, \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

где  $\mathbf{F}_e = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\sigma_{kl}$  ( $k, l \in \{r, \theta, \vartheta\}$ ) - физические компоненты тензора напряжений;

- связь деформаций с перемещениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} (u + v \operatorname{ctg} \theta), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right], \quad \varepsilon_{r\vartheta} \equiv 0, \quad \varepsilon_{\theta\vartheta} \equiv 0, \\ I_1 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2u + v \operatorname{ctg} \theta \right); \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

- связь напряжений с деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\theta\vartheta} \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Очевидными условиями осесимметричного движения при этом являются следующие равенства для внешней силы (силы Лоренца, см. также (1.2.14)):

$$F_\vartheta \equiv 0, \quad F_r = F_r(r, \theta, t), \quad F_\theta = F_\theta(r, \theta, t). \quad (1.5.6)$$

Подобным требованиям должны удовлетворять и характеристики электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}
E_{\vartheta} &= E_{0\vartheta} \equiv 0, E_r = E_r(r, \theta, t), E_{\theta} = E_{\theta}(r, \theta, t), \\
E_{0r} &= E_{0r}(r, \theta), E_{0\theta} = E_{0\theta}(r, \theta), \\
H_r &= H_{0r} = H_{\theta} = H_{0\theta} \equiv 0, H_{\vartheta} = H(r, \theta, t), H_{0\vartheta} = H_0(r, \theta).
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

При этом электромагнитная часть (1.2.34), (1.2.36), (1.2.39) соотношений электромагнитоупругости принимает следующий вид:

- уравнения Максвелла

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rE_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= -\frac{\mu_e}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} j_{\theta} + \frac{\mu_e}{c} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial t}, \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H \sin \theta)}{\partial \theta} &= \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{\mu_e}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \\
\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \theta} + E_{\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2E_r \right) &= \frac{4\pi}{c} \rho_e, \quad \rho_e = \rho_e(r, \theta, t), \rho_{e0} = \rho_{e0}(r, \theta), \\
j_r &= j_r(r, \theta, t), j_{\theta} = j_{\theta}(r, \theta, t), j_{0r} = j_{0r}(r, \theta), j_{0\theta} = j_{0\theta}(r, \theta);
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

- сила Лоренца

$$\begin{aligned}
F_r &= \rho_{e0} E_r + \rho_e E_{0r} + \frac{\mu_e}{c} (j_{0\theta} H + j_{\theta} H_0), \\
F_{\theta} &= \rho_{e0} E_{\theta} + \rho_e E_{0\theta} - \frac{\mu_e}{c} (j_{0r} H + j_r H_0);
\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

- закон Ома

$$\begin{aligned}
j_r &= \sigma \left( E_r + \frac{\mu_e H_0}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho_{e0} \frac{\partial u}{\partial t}, \\
j_{\theta} &= \sigma \left( E_{\theta} - \frac{\mu_e H_0}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho_{e0} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad j_{\vartheta} = j_{0\vartheta} \equiv 0;
\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Физические компоненты векторов электрической и магнитной индукций, как следует из (1.2.32), связаны с компонентами напряженностей электрического и магнитного полей так:

$$D_r = \varepsilon E_r, D_{\theta} = \varepsilon E_{\theta}, D_{\vartheta} \equiv 0, B_r = B_{\theta} \equiv 0, B_{\vartheta} = B = \mu_e H. \tag{1.5.11}$$

Соответствующие осесимметричной задаче уравнения (1.2.40), (1.2.42) и (1.2.43), записываются следующим образом:

- уравнения относительно координат вектора напряженности электрического поля

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) E_r &= c_e^2 [N_{11}(E_r) + N_{12}(E_\theta)] - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{e0} u + \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 v \right), \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) E_\theta &= c_e^2 [N_{21}(E_r) + N_{22}(E_\theta)] - \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{e0} v - \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 u \right), \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

где

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right), \quad N_{21} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}, \\ N_{12} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right], \quad N_{22} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right); \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

- уравнение относительно компоненты напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial H}{\partial t} &= c_e^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta H - \frac{H}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \\ &+ \frac{4\pi}{\varepsilon r} \left\{ \frac{c}{\mu_e} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial(r\rho_{e0}v)}{\partial r} - \frac{\partial(\rho_{e0}u)}{\partial \theta} \right] - \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial(ruH_0)}{\partial r} + \frac{\partial(vH_0)}{\partial \theta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

- уравнения Ламе

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial I_1}{\partial r} + \mu \left\{ \Delta u - \frac{2}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + u \right] \right\} + F_r, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + \mu \left[ \Delta v + \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) \right] + F_\theta, \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \right]. \quad (1.5.16)$$

Уравнения (1.2.47) и (1.2.49) относительно скалярных потенциалов сохраняют свой вид, а уравнения (1.2.48) и (1.2.50) относительно векторных потенциалов переходят в скалярные уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi_e = c_e^2 \left( \Delta \Psi_e - \frac{\Psi_e}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \Psi_e, \quad (1.5.17)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_2^2 \left( \Delta \Psi - \frac{\Psi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{\Psi}{\rho}. \quad (1.5.18)$$

При этом в силу равенств (1.5.2), (1.5.6) и (1.5.7) необходимо положить

$$\begin{aligned}
\Psi_r = \Psi_\theta = 0, \Psi_\vartheta = \Psi(r, \theta, t), \varphi = \varphi(r, \theta, t), \\
\Psi_{er} = \Psi_{e\theta} = 0, \Psi_{e\vartheta} = \Psi_e(r, \theta, t), \varphi_e = \varphi_e(r, \theta, t), \\
\Psi_{er} = \Psi_{e\theta} = 0, \Psi_{e\vartheta} = \Psi_e(r, \theta, t), \Phi_e = \Phi_e(r, \theta, t), \\
\Psi_r = \Psi_\theta = 0, \Psi_\vartheta = \Psi(r, \theta, t), \Phi = \Phi(r, \theta, t).
\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

Дополнительная формула (1.2.44) для плотности зарядов при этом записывается так:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_e\right)\rho_e = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left[ r^2 \left( \rho_{e0} u + \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 v \right) \right] + \\
-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \theta} \left[ \left( \rho_{e0} v - \frac{\mu_e \sigma}{c} H_0 u \right) \sin \theta \right].
\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

Скалярная форма представлений (1.2.45) и (1.2.46) приобретает следующий вид:

$$E_r = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi_e \sin \theta), E_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_e) \right]; \tag{1.5.21}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi \sin \theta), v = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) \right]. \tag{1.5.22}$$

Электромагнитные параметры начального состояния, согласно (1.2.12) и (1.5.7), должны быть связаны между собой следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(rE_{0\theta})}{\partial r} - \frac{\partial E_{0r}}{\partial \theta} = 0, -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_0)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} (j_{0\theta} + j_{s0\theta}), \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H_0 \sin \theta)}{\partial \theta} = \frac{4\pi}{c} (j_{0r} + j_{s0r}), \\
\frac{\partial E_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial E_{0\theta}}{\partial \theta} + E_{0\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2E_{0r} \right) = \rho_{0e}, \\
\frac{\partial E_{0r}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\varepsilon} j_{s0r}, \frac{\partial E_{0\theta}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\varepsilon} j_{s0\theta}, j_{0r} = E_{0r}, j_{0\theta} = E_{0\theta}.
\end{aligned} \tag{1.5.23}$$

Далее в дополнение к безразмерным параметрам (1.4.23), где  $k, l \in \{r, \theta, \vartheta\}$ , полагаем

$$r' = r/L, v' = v/L. \tag{1.5.24}$$

Тогда равенства (1.5.4), (1.5.21) и (1.5.22) сохраняют свой вид, а безразмерная форма соотношений (1.5.3), (1.5.5), (1.5.8) - (1.5.12), (1.5.14) (1.5.15), (1.2.47), (1.5.17), (1.2.49), (1.5.18) и (1.5.23) записывается так:

- уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + F_r, \\ \ddot{v} &= \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta \right] + F_\theta; \end{aligned} \quad (1.5.25)$$

- связь напряжений с деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \kappa I_1 + (1 - \kappa) \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \kappa I_1 + (1 - \kappa) \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \kappa I_1 + (1 - \kappa) \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\theta} = (1 - \kappa) \varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

- уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= -\dot{H}, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} &= \eta_e^2 (\gamma j_\theta + \dot{E}_\theta), \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (H \sin \theta)}{\partial \theta} = \eta_e^2 (\gamma j_r + \dot{E}_r), \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} &= \rho_e; \end{aligned} \quad (1.5.27)$$

- сила Лоренца

$$\begin{aligned} F_{er} &= \alpha \left[ \rho_{e0} E_r + \rho_e E_{0r} + \gamma (j_{0\theta} H + j_\theta H_0) \right], \\ F_{e\theta} &= \alpha \left[ \rho_{e0} E_\theta + \rho_e E_{0\theta} - \gamma (j_{0r} H + j_r H_0) \right]; \end{aligned} \quad (1.5.28)$$

- закон Ома

$$j_r = E_r + H_0 \dot{v} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_\theta = E_\theta - H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{v} / \gamma; \quad (1.5.29)$$

- связь компонентов векторов электрической и магнитной индукций с компонентами напряженностей электрического и магнитного полей

$$D_r = E_r, \quad D_\theta = E_\theta, \quad B = H; \quad (1.5.30)$$

- уравнения относительно координат вектора напряженности электрического поля (операторы  $N_{ij}$ , по-прежнему, определяются равенствами (1.5.13))

$$\begin{aligned}\eta_e^2 (\ddot{E}_r + \gamma \dot{E}_r) &= N_{11}(E_r) + N_{12}(E_\theta) - \eta_e^2 (\rho_{e0} \ddot{u} + \gamma H_0 \ddot{v}), \\ \eta_e^2 (\ddot{E}_\theta + \gamma \dot{E}_\theta) &= N_{21}(E_r) + N_{22}(E_\theta) + \eta_e^2 (\gamma H_0 \ddot{u} - \rho_{e0} \ddot{v});\end{aligned}\quad (1.5.31)$$

- уравнение относительно компоненты напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned}\eta_e^2 (\ddot{H} + \gamma \dot{H}) &= \Delta \dot{H} - \frac{\dot{H}}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ &+ \frac{\eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r \rho_{e0} \ddot{v})}{\partial r} - \frac{\partial(\rho_{e0} \ddot{u})}{\partial \theta} \right] - \frac{\gamma \eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r \ddot{u} H_0)}{\partial r} + \frac{\partial(\ddot{v} H_0)}{\partial \theta} \right];\end{aligned}\quad (1.5.32)$$

- уравнения Ламе

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{1}{\eta^2} \left\{ \Delta u - \frac{2}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + u \right] \right\} + F_r, \\ \ddot{v} &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta^2} \left[ \Delta v + \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) \right] + F_\theta;\end{aligned}\quad (1.5.33)$$

- уравнения относительно потенциалов напряженности электрического поля и перемещений

$$\ddot{\Phi}_e + \gamma \dot{\Phi}_e = -\Phi_e, \quad (1.5.34)$$

$$\ddot{\Psi}_e + \gamma \dot{\Psi}_e = \frac{1}{\eta_e^2} \left( \Delta \Psi_e - \frac{\Psi_e}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \Psi_e, \quad (1.5.35)$$

$$\ddot{\Phi} = \Delta \Phi + \Phi, \quad (1.5.36)$$

$$\ddot{\Psi} = \frac{1}{\eta^2} \left( \Delta \Psi - \frac{\Psi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \Psi; \quad (1.5.37)$$

- связь электромагнитных параметров в начальном состоянии

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r E_{0\theta})}{\partial r} - \frac{\partial E_{0r}}{\partial \theta} &= 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial(r H_0)}{\partial r} = \eta_e^2 \gamma (j_{0\theta} + j_{s0\theta}), \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(H_0 \sin \theta)}{\partial \theta} &= \eta_e^2 \gamma (j_{0r} + j_{s0r}), \\ \frac{\partial E_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial E_{0\theta}}{\partial \theta} + E_{0\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2 E_{0r} \right) &= \rho_{0e}, \\ \dot{E}_{0r} = \gamma j_{s0r}, \quad \dot{E}_{0\theta} = \gamma j_{s0\theta}, \quad j_{0r} = E_{0r}, \quad j_{0\theta} = E_{0\theta};\end{aligned}\quad (1.5.38)$$

- формула (1.5.20) для плотности зарядов

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 (\rho_{e0} \dot{u} + \gamma H_0 \dot{v}) \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ (\rho_{e0} \dot{v} - \gamma H_0 \dot{u}) \sin \theta \right]. \quad (1.5.39)$$

Отметим также, что согласно (1.2.54) и (1.2.55) потенциалы внешних сил должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta); \quad (1.5.40)$$

$$\Delta \Psi - \frac{\Psi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right]. \quad (1.5.41)$$

Кроме того, из (1.2.56) и (1.2.57) аналогично (1.2.47) и (1.5.18) можно получить следующие уравнения относительно коэффициента объемного расширения и ненулевой компоненты удвоенного вектора вращения  $2\omega = \omega e_\theta$  (см. также (1.5.40) и (1.5.41)):

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \chi + \chi_e, \quad \rho \chi_e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta); \quad (1.5.42)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c_2^2 \left( \Delta \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \omega_e, \quad \rho \omega_e = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right]. \quad (1.5.43)$$

Их безразмерные аналоги записываются так:

$$\ddot{\chi} = \Delta \chi + \chi_e, \quad \chi_e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta); \quad (1.5.44)$$

$$\ddot{\omega} = \frac{1}{\eta^2} \left( \Delta \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \omega_e, \quad \omega_e = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right]. \quad (1.5.45)$$

При этом функции  $\chi$  и  $\omega$  согласно (1.2.56) и (1.2.57) связаны с перемещениями так:

$$\chi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta), \quad \omega = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r v)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]. \quad (1.5.46)$$

## Глава 2

### Нестационарные волны в электромагнитоупругой полуплоскости

#### § 2.1. Электромагнитоупругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных возмущений

В рамках построенной в главе 1 модели изотропных проводников в прямоугольной декартовой системе координат рассматриваем движение электромагнитоупругой полуплоскости  $z \geq 0$  [81,64,86,89,73,46]. Соответствующая замкнутая система безразмерных уравнений состоит из уравнений (1.4.31) относительно напряженности  $H$  магнитного поля (или (1.4.30) и (1.4.32) относительно координат  $E_1, E_3$  вектора напряженности электрического поля) и перемещений  $u, w$ . При этом правые части уравнений (1.4.32) задаются равенствами (1.4.27), деформации  $\varepsilon_{ij}$ , напряжения  $\sigma_{ij}$ , координаты  $j_1, j_3$  вектора плотности тока - соотношениями (1.4.4), (1.4.25), (1.4.28), а ненулевая координата  $H$  вектора напряженности магнитного поля и плотность зарядов  $\rho_e$  – первым и четвертым равенствами в (1.4.26).

Полагаем, что начальное электромагнитное поле является стационарным и удовлетворяет следующим условиям:

$$E_{01} \equiv 0, E_{03} = E_0(z), H_0 = H_{02}(z), \quad (2.1.1)$$

чему в силу (1.4.35) отвечают равенства (штрихом здесь и далее обозначена производная по координате  $z$ )

$$E'_0 = \rho_{e0}, j_{03} = -j_{s03} = E_0, j_{01} \equiv 0, \eta_e^2 j_{s01} = -H'_{02}. \quad (2.1.2)$$

В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, что согласно (1.3.2) и (1.3.3) соответствует равенствам

$$\begin{aligned} u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \\ = E_1|_{\tau=0} = \dot{E}_1|_{\tau=0} = E_3|_{\tau=0} = \dot{E}_3|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Полагаем, что все искомые функции ограничены, а на границе полуплоскости заданы нестационарные возмущения вида (1.3.4), (1.3.5). Поскольку, как будет ясно из дальнейшего изложения, алгоритмы решений начально-краевых задач для различных вариантов граничных условий идентичны, то далее ограничимся рас-

смотрением кинематических возмущений и одной из координат вектора напряженности электрического поля:

$$u|_{z=0} = U_0(x, \tau), w|_{z=0} = W_0(x, \tau), E_1|_{z=0} = e_0(x, \tau), \quad (2.1.4)$$

или

$$u|_{z=0} = U_0(x, \tau), w|_{z=0} = W_0(x, \tau), E_3|_{z=0} = e_{30}(x, \tau). \quad (2.1.5)$$

Для решения указанной задачи будем использовать экспоненциальное преобразование Фурье по координате  $x$  и преобразование Лапласа по времени (соответствующие обозначения см. в § П.1) с учетом условий (2.1.3).

В пространстве преобразований соотношения (1.4.26) – (1.4.28) с учетом предположения (2.1.1) записываются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1^{LF}}{\partial z} + iqE_3^{LF} = -sH^{LF}, \quad -iqH^{LF} = \eta_e^2(\gamma j_3^{LF} + sE_3^{LF}), \\ -\frac{\partial H^{LF}}{\partial z} = \eta_e^2(\gamma j_1^{LF} + sE_1^{LF}), \quad \frac{\partial E_3^{LF}}{\partial z} - iqE_1^{LF} = \rho_e^{LF}; \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$F_1^{LF} = \alpha \left[ \rho_{e0} E_1^{LF} - \gamma (E_0 H^{LF} + H_{02} j_3^{LF}) \right], \quad F_3^{LF} = \alpha (\rho_{e0} E_3^{LF} + E_0 \rho_e + \gamma H_{02} j_1^{LF}); \quad (2.1.7)$$

$$j_1^{LF} = E_1^{LF} - s (H_{02} w^{LF} - \rho_{e0} u^{LF} / \gamma), \quad j_3^{LF} = E_3^{LF} + s (H_{02} u^{LF} + \rho_{e0} w^{LF} / \gamma). \quad (2.1.8)$$

В качестве основных неизвестных функций принимаем перемещения и напряженность магнитного поля. При условии

$$H_0 \equiv 0. \quad (2.1.9)$$

для изображений компонент напряженности электрического поля и плотности зарядов, как следует из (2.1.6), (2.1.8) и (1.4.36), справедливы следующие равенства:

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_1^{LF} = -\frac{\partial H^{LF}}{\partial z} - s \eta_e^2 u^{LF}, \quad \eta_e^2 (s + \gamma) E_3^{LF} = -s \eta_e^2 w^{LF} - iq H^{LF}; \quad (2.1.10)$$

$$(s + \gamma) \rho_e^{LF} = -s l_-^F(w^{LF}, u^{LF}), \quad (2.1.11)$$

где

$$l_{\pm}^F(w, u) = \frac{\partial(\rho_{e0} w)}{\partial z} \pm iq \rho_{e0} u. \quad (2.1.12)$$

Соответствующие разрешающие уравнения вытекают (1.4.31) и (1.4.32) при учете (2.1.7):

$$\frac{\partial^2 H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H^{LF} = -\eta_e^2 s l_+^F(u^{LF}, w^{LF}); \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} s^2 u^{LF} &= l_{11q}(u^{LF}) + l_{12q}(w^{LF}) + \alpha g_{1q}(E_1^{LF}, H^{LF}), \\ s^2 w^{LF} &= l_{21q}(u^{LF}) + l_{22q}(w^{LF}) + \alpha g_{3q}(E_3^{LF}, \rho_e^{LF}). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Здесь приняты следующие обозначения (см. также (П.8.2)):

$$k_e(q, s) = \sqrt{s_e^2 \eta_e^2 + q^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}; \quad (2.1.15)$$

$$l_{11q}(u) = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - q^2 u, \quad l_{22q}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{q^2}{\eta^2} u, \quad (2.1.16)$$

$$l_{12q}(u) = l_{21q}(u) = -iq \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$g_{1q}(E_1, H) = \rho_{e0} E_1 - \gamma E_0 H, \quad g_{3q}(E_3, \rho_e) = \rho_{e0} E_3 + E_0 \rho_e. \quad (2.1.17)$$

При этом граничные условия (2.1.4) или (2.1.5) с учетом (2.1.10) переходят в следующие равенства:

$$u^{LF} \Big|_{z=0} = U_0^{LF}(q, s), \quad w^{LF} \Big|_{z=0} = W_0^{LF}(q, s), \quad \frac{\partial H^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\eta_e^2 h_0^{LF}(q, s), \quad (2.1.18)$$

$$h_0^{LF}(q, s) = (s + \gamma) e_0^{LF}(q, s) + s U_0^{LF}(q, s),$$

или

$$u^{LF} \Big|_{z=0} = U_0^{LF}(q, s), \quad w^{LF} \Big|_{z=0} = W_0^{LF}(q, s), \quad H^{LF} \Big|_{z=0} = \frac{i\eta_e^2}{q} h_{30}^{LF}(q, s), \quad (2.1.19)$$

$$h_{30}^{LF}(q, s) = (s + \gamma) e_{30}^{LF}(q, s) + s W_0^{LF}(q, s).$$

В последнем варианте в силу второго равенства в (2.1.10) функции  $W_0^{LF}(q, s)$  и  $e_{30}^{LF}(q, s)$  должны быть связаны между собой так:

$$(s + \gamma) E_3^{LF}(0, s) = -s w^{LF}(0, s). \quad (2.1.20)$$

Таким образом, необходимо найти ограниченное решение краевой задачи (2.1.13), (2.1.14), (2.1.18) или (2.1.19). В силу линейности уравнений и граничных условий это решение можно построить. Однако структура изображений будет

такова, что аналитическое определение оригиналов невозможно. Покажем это на примере одномерной задачи [54,55,57] (более подробно она будет рассмотрена в § 2.9). В этом случае все искомые функции не зависят от координаты  $x$  и, кроме того,

$$u \equiv 0, E_1 \equiv 0. \quad (2.1.21)$$

При этом необходимо положить  $q = 0$  (соответственно остается только преобразование Лапласа). Вытекающие из (2.1.10), (2.1.13) и (2.1.14) нетривиальные уравнения записываются так ( $E_3 = E$ ):

$$(s + \gamma)E^L = -\rho_{e0}sw^L, \quad s^2w^L = (w^L)'' + \alpha(E_0E^L)'. \quad (2.1.22)$$

Эта система сводится к одному уравнению:

$$(w^L)'' - s^2w^L - \alpha b(\rho_{e0}E_0w^L)' = 0, \quad b = s/(s + \gamma), \quad g_0 = \rho_{e0}E_0. \quad (2.1.23)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

*А. Начальное электростатическое поле однородно ( $E_0 = \text{const}$ ).* Тогда в силу соотношения (2.1.2)  $\rho_{e0} = 0$ , что приводит к несвязанности задачи.

*Б. Начальная плотность зарядов равномерно распределена по глубине полуплоскости ( $\rho_{e0} = \text{const}$ ).* Тогда, согласно (2.1.2),  $E_0 = \rho_{e0}z + C$ , где  $C$  - некоторая постоянная (полагаем, например,  $C = 0$ ), и уравнение (2.1.23) преобразуется к виду:

$$(w^L)'' - b_1(s)z(w^L)' - [s^2 + b_1(s)]w^L = 0, \quad b_1(s) = \alpha b(s)\rho_{e0}^2. \quad (2.1.24)$$

Оно с помощью введения новой функции  $v(\xi) = w^L(z, s)$ , где  $\xi = z\sqrt{b_1(s)}$ , переходит в следующее равенство:

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \left(-p + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4}\right)v = 0, \quad p = 1 + \frac{s^2}{b_1(s)} = 1 + \frac{s}{\alpha(s + \gamma)\rho_{e0}^2}.$$

Его фундаментальная система решений образуется функциями параболического цилиндра  $D_{-p}(\xi)$  и  $D_{-p}(-\xi)$  [111]. Следовательно, фундаментальная система решений уравнения (2.1.24) состоит из функций  $D_{-p}\left(z\sqrt{b_1(s)}\right)$  и

$D_{-p}(-z\sqrt{b_1(s)})$ . Поскольку индекс  $p$  и аргумент этих функций сложным образом зависит от параметра преобразования Лапласа, то найти оригинал решения уравнения в аналитическом виде не представляется возможным.

*В. Произведение  $\rho_{e_0}E_0$  не зависит от  $z$ .* Для определенности положим  $\rho_{e_0}E_0 = C^2/2$ , где  $C$  - некоторая постоянная. Тогда, используя (2.1.2), получаем, что  $E_0 = C\sqrt{z+C_1}$ ,  $2\rho_{e_0}(z) = C/\sqrt{z+C_1}$ , где  $C_1$  - некоторая постоянная. При этом уравнение (2.1.24) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 w^L}{\partial z^2} - \frac{\alpha b(s)C^2}{2} \frac{\partial w^L}{\partial z} - s^2 w^L = 0. \quad (2.1.25)$$

Функции, входящие в его фундаментальную систему решений, имеют более простой, чем в варианте *Б*, вид, а именно

$$e^{v_1(s)z}, e^{v_2(s)z}, v_{1,2}(s) = \frac{s}{4(s+\gamma)} \left[ \alpha C^2 \pm \sqrt{\alpha^2 C^4 + (s+\gamma)^2} \right].$$

Однако вид показателей экспонент опять не позволяет найти оригиналы аналитически.

Вероятно, можно подобрать такую функцию параметров начального поля, которые позволят найти оригиналы в явном виде. Однако для произвольных начальных полей необходимо применять другие подходы, один из которых и будет использован в следующем параграфе.

## § 2.2. Представление решения методом малого параметра

В качестве подхода к решению поставленной § 2.1 задачи в случае произвольных начальных полей будем использовать метод малого параметра, которым является указанный в (1.4.23) безразмерный коэффициент связи между полями  $\alpha$ . Для этого представляем искомые функции в виде степенных рядов по данному параметру:

$$\begin{aligned}
u(x, z, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, z, \tau) \alpha^m, \quad w(x, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, z, \tau) \alpha^m, \\
H(x, z, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x, z, \tau) \alpha^m, \quad \rho_e(x, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(x, z, \tau) \alpha^m, \\
E_1(x, z, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{1m}(x, z, \tau) \alpha^m, \quad E_3(x, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{3m}(x, z, \tau) \alpha^m.
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Подставляя их изображения в (2.1.13), (2.1.14), получаем уравнения для изображений коэффициентов этих рядов:

$$\frac{\partial^2 H_m^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H_m^{LF} = -\eta_e^2 s l_+^F(u_m^{LF}, w_m^{LF}) \quad (m \geq 0); \tag{2.2.2}$$

$$s^2 u_0^{LF} = l_{11q}(u_0^{LF}) + l_{12q}(w_0^{LF}), \quad s^2 w_0^{LF} = l_{21q}(u_0^{LF}) + l_{22q}(w_0^{LF}), \tag{2.2.3}$$

$$s^2 u_m^{LF} = l_{11q}(u_m^{LF}) + l_{12q}(w_m^{LF}) + g_{1q}(E_{1,m-1}^{LF}, H_{m-1}^{LF}), \tag{2.2.4}$$

$$s^2 w_m^{LF} = l_{21q}(u_m^{LF}) + l_{22q}(w_m^{LF}) + g_{3q}(E_{3,m-1}^{LF}, \rho_{e,m-1}^{LF}) \quad (m \geq 1).$$

Коэффициенты рядов (2.2.1) для остальных компонент электро-магнитного поля в соответствии с (2.1.10) и (2.1.11) определяются равенствами

$$\eta_e^2(s + \gamma) E_{1m}^{LF} = -\frac{\partial H_m^{LF}}{\partial z} - s \eta_e^2 u_m^{LF}, \quad \eta_e^2(s + \gamma) E_{3m}^{LF} = -s \eta_e^2 w_m^{LF} - i q H_m^{LF}; \tag{2.2.5}$$

$$(s + \gamma) \rho_m^{LF} = -s l_-^F(w_m^{LF}, u_m^{LF}). \tag{2.2.6}$$

Аналогичная процедура, примененная к граничным условиям (2.1.18), приводит к следующим равенствам:

$$u_0^{LF} \Big|_{z=0} = U_0^{LF}(q, s), \quad w_0^{LF} \Big|_{z=0} = W_0^{LF}(q, s); \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial H_0^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\eta_e^2 h_0^{LF}(q, s); \tag{2.2.8}$$

$$w_m^{LF} \Big|_{z=0} = u_m^{LF} \Big|_{z=0} = 0 \quad (m \geq 1); \tag{2.2.9}$$

$$\frac{\partial H_m^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (m \geq 1). \tag{2.2.10}$$

В случае граничных условий (2.1.19) соотношения (2.2.8) и (2.2.10) записываются так:

$$H_0^{LF} \Big|_{z=0} = \frac{i\eta_e^2}{q} h_{30}^{LF}(q, s); \quad (2.2.11)$$

$$H_m^{LF} \Big|_{z=0} = 0 \quad (m \geq 1). \quad (2.2.12)$$

Соотношения (2.2.2), (2.2.4), (2.2.9), (2.2.10) (или (2.2.12)) являются рекуррентной последовательностью краевых задач с начальным условием в виде краевых задач (2.2.3), (2.2.7) и (2.2.2), (2.2.8) (или (2.2.11)) при  $m=0$ . Причем их решения должны быть ограничены.

Задача (2.2.3), (2.2.7) является чисто упругой. Ее решение записываем так:

$$\begin{aligned} u_0^{LF}(q, z, s) &= G_{u01}^{LF}(q, z, s)U_0^{LF}(q, s) + G_{u02}^{LF}(q, z, s)W_0^{LF}(q, s), \\ w_0^{LF}(q, z, s) &= G_{w01}^{LF}(q, z, s)U_0^{LF}(q, s) + G_{w02}^{LF}(q, z, s)W_0^{LF}(q, s) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

где  $G_{u0k}^{LF}(q, s)$ ,  $G_{w0k}^{LF}(q, s)$  ( $k=1,2$ ) - поверхностные функции Грина, т.е. ограниченные решения следующих краевых задач:

$$s^2 G_{u01}^{LF} = l_{11q}(G_{u01}^{LF}) + l_{12q}(G_{w01}^{LF}), \quad (2.2.14)$$

$$s^2 G_{w01}^{LF} = l_{21q}(G_{u01}^{LF}) + l_{22q}(G_{w01}^{LF}), \quad G_{u01}^{LF} \Big|_{z=0} = 1, \quad G_{w01}^{LF} \Big|_{z=0} = 0;$$

$$s^2 G_{u02}^{LF} = l_{11q}(G_{u02}^{LF}) + l_{12q}(G_{w02}^{LF}), \quad (2.2.15)$$

$$s^2 G_{w02}^{LF} = l_{21q}(G_{u02}^{LF}) + l_{22q}(G_{w02}^{LF}), \quad G_{u02}^{LF} \Big|_{z=0} = 0, \quad G_{w02}^{LF} \Big|_{z=0} = 1.$$

Решение задачи (2.2.4), (2.2.9) удобно представить в интегральном виде ( $m \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} u_m^{LF}(q, z, s) &= \int_0^\infty G_{u1}^{LF}(q, z, \xi, s) f_{1,m-1}^{LF}(q, \xi, s) d\xi + \\ &+ \int_0^\infty G_{u3}^{LF}(q, z, \xi, s) f_{3,m-1}^{LF}(q, \xi, s) d\xi, \\ w_m^{LF}(q, z, s) &= \int_0^\infty G_{w1}^{LF}(q, z, \xi, s) f_{1,m-1}^{LF}(q, \xi, s) d\xi + \\ &+ \int_0^\infty G_{w3}^{LF}(q, z, \xi, s) f_{3,m-1}^{LF}(q, \xi, s) d\xi, \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1,m-1}^{LF}(q, \xi, s) &= g_{1q} \left[ E_{1,m-1}^{LF}(q, \xi, s), H_{m-1}^{LF}(q, \xi, s) \right], \\ f_{3,m-1}^{LF}(q, \xi, s) &= g_{3q} \left[ E_{3,m-1}^{LF}(q, \xi, s), \rho_{e,m-1}^{LF}(q, \xi, s) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $G_{u1}^{LF}$ ,  $G_{w1}^{LF}$  и  $G_{u3}^{LF}$ ,  $G_{w3}^{LF}$  - объемные функции Грина, т.е. ограниченные решения следующих краевых задач:

$$s^2 G_{u1}^{LF} = l_{11q}(G_{u1}^{LF}) + l_{12q}(G_{w1}^{LF}) + \delta(z - \xi), \quad (2.2.17)$$

$$s^2 G_{w1}^L = l_{21q}(G_{u1}^{LF}) + l_{22q}(G_{w1}^L), \quad G_{u1}^{LF} \Big|_{z=0} = G_{w1}^{LF} \Big|_{z=0} = 0;$$

$$s^2 G_{u3}^{LF} = l_{11q}(G_{u3}^{LF}) + l_{12q}(G_{w3}^{LF}), \quad G_{u3}^{LF} \Big|_{z=0} = G_{w3}^{LF} \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.2.18)$$

$$s^2 G_{w3}^L = l_{21q}(G_{u3}^{LF}) + l_{22q}(G_{w3}^L) + \delta(z - \xi),$$

где  $\delta(z)$  - дельта-функция Дирака.

Аналогичным образом записывается решение задачи (2.2.2), (2.2.10):

$$H_m^{LF}(q, z, s) = \int_0^\infty G_H^{LF}(q, z, \xi, s) f_{Hm}^{LF}(q, \xi, s) d\xi, \quad (2.2.19)$$

$$f_{Hm}^{LF}(q, \xi, s) = -\eta_e^2 s l_+^F [u_m^{LF}(q, \xi, s), w_m^{LF}(q, \xi, s)].$$

Здесь  $G_H^{LF}$  - объемная функция Грина, т.е. ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 G_H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 G_H^{LF} = \delta(z - \xi), \quad \frac{\partial G_H^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.2.20)$$

Решение задачи (2.2.2) при  $m = 0$  и (2.2.8) записываем так:

$$H_0^{LF}(q, z, s) = \int_0^\infty G_H^{LF}(q, z, \xi, s) f_{H0}^{LF}(q, \xi, s) d\xi - \eta_e^2 G_{H0}^{LF}(q, z, s) h_0^{LF}(q, s), \quad (2.2.21)$$

где  $G_{H0}^{LF}$  - поверхностная функция Грина, т.е. ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 G_{H0}^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 G_{H0}^{LF} = 0, \quad \frac{\partial G_{H0}^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 1. \quad (2.2.22)$$

Аналогично (2.2.19) и (2.2.21) может быть записано решение задач (2.2.2), (2.2.11) и (2.2.12). Они подробно будут рассмотрены в § 2.9.

### § 2.3. Функции Грина для электромагнитной полуплоскости

Сначала находим решение краевой задачи (2.2.20) [80,66]. Общее решение соответствующего однородного уравнения согласно (П.8.2) записывается так:

$$G_H^{LF} = C_1 e^{k_e z} + C_2 e^{-k_e z}. \quad (2.3.1)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные. Для частного решения  $G_{H*}^{LF}$  неоднородного уравнения они являются функциями координаты  $z$ , и их производные удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1'(z) e^{k_e z} + C_2'(z) e^{-k_e z} &= 0, \\ C_1'(z) k_e e^{k_e z} - C_2'(z) k_e e^{-k_e z} &= \delta(z - \xi). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Ее решение имеет вид:

$$C_1'(z) = \frac{\delta(z - \xi) e^{-k_e z}}{2k_e}, \quad C_2'(z) = -\frac{\delta(z - \xi) e^{k_e z}}{2k_e}.$$

Интегрируя эти равенства [66,69], приходим к следующему результату:

$$C_1(z) = \frac{H(z - \xi) e^{-k_e \xi}}{2k_e}, \quad C_2(z) = -\frac{H(z - \xi) e^{k_e \xi}}{2k_e}, \quad (2.3.3)$$

где  $H(z)$  - функция Хевисайда.

Таким образом, в соответствии (2.3.1) и (2.3.3) частное и общее решения уравнения в (2.2.19) записываются так:

$$G_{H*}^{LF} = \frac{1}{2k_e} \left[ e^{k_e(z-\xi)} - e^{k_e(\xi-z)} \right] H(z - \xi), \quad (2.3.4)$$

$$G_H^{LF} = C_1 e^{k_e z} + C_2 e^{-k_e z} + G_{H*}^{LF}. \quad (2.3.5)$$

Из условия ограниченности решения на бесконечности следует, что должно выполняться равенство:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G_H^{LF} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( C_1 e^{k_e z} + \frac{e^{k_e(z-\xi)}}{2k_e} \right) = 0,$$

откуда находим

$$C_1 = -\frac{e^{-k_e \xi}}{2k_e}. \quad (2.3.6)$$

Вторую постоянную определяем из граничного условия в (2.2.20), используя равенства (2.3.4) - (2.3.6):

$$C_2 = C_1 = -\frac{e^{-k_e \xi}}{2k_e}. \quad (2.3.7)$$

Подставляя (2.3.6) и (2.3.7) в (2.3.5), получаем, что функция Грина имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G_H^{LF} &= \frac{1}{2k_e} \left\{ \left[ e^{k_e(z-\xi)} - e^{k_e(\xi-z)} \right] H(z-\xi) - e^{-k_e(z+\xi)} - e^{k_e(z-\xi)} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2k_e} \left[ e^{-k_e(z+\xi)} + e^{-k_e(\xi-z)} H(\xi-z) + e^{-k_e(z-\xi)} H(z-\xi) \right] = \\ &= -f^{LF}(q, z+\xi, s) - f^{LF}(q, |z-\xi|, s), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где

$$2f^{LF}(q, z, s) = k_e^{-1} e^{-zk_e}. \quad (2.3.9)$$

Соответствующую поверхностную функция Грина [76,86] как решение задачи (2.2.22) с учетом (2.3.1) и условия ограниченности записываем так:

$$G_{H0}^{LF} = C e^{-k_e z}. \quad (2.3.10)$$

Входящую в это равенство произвольную постоянную определяем из граничного условия:  $C = -k_e^{-1}$ . Таким образом, при использовании обозначения искомая поверхностная функция Грина имеет следующий вид:

$$G_{H0}^{LF}(q, z, s) = -2f^{LF}(q, z, s). \quad (2.3.11)$$

## § 2.4. Электромагнитное поле в движущейся полуплоскости

С целью разработки алгоритма решения связанной задачи, опираясь на формулы (2.2.19) и (2.1.10) – (2.1.12), рассмотрим вспомогательную задачу об определении параметров электромагнитного поля в движущейся по заданному закону  $u(x, z, \tau)$  и  $w(x, z, \tau)$  полуплоскости  $z \geq 0$  [80,86,66,63].

При этом в соответствии с (2.1.3) считаем, что начальные условия однородные:

$$E_1|_{\tau=0} = \dot{E}_1|_{\tau=0} = E_3|_{\tau=0} = \dot{E}_3|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0. \quad (2.4.1)$$

Кроме того, полагаем, что все искомые функции ограничены, а на границе полуплоскости аналогично (2.1.4) задана первая координата вектора напряженности электрического поля:

$$E_1|_{z=0} = e_0(x, \tau). \quad (2.4.2)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции и равенствам (2.1.18), (2.2.19), (2.2.21) изображение напряженности магнитного поля определяется так (см. также (2.2.21)):

$$\begin{aligned} H^{LF}(q, z, s) = & -\eta_e^2 s \int_0^\infty G_H^{LF}(q, z, \xi, s) l_+^F [u^{LF}(q, \xi, s), w^{LF}(q, \xi, s)] d\xi - \\ & - \eta_e^2 G_{H0}^{LF}(q, z, s) [(s + \gamma) e_0^{LF}(q, s) + s u^{LF}(q, 0, s)]. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

В пространстве оригиналов эта формула с учетом свойств интегральных преобразований [108] приобретают следующий вид (здесь и далее звездочки обозначают свертки по координате  $x$  и времени):

$$\begin{aligned} H(x, z, \tau) = & -\eta_e^2 \int_0^\infty G_H(x, z, \xi, \tau) ** l_+ [\dot{u}(x, \xi, \tau), \dot{w}(x, \xi, \tau)] d\xi - \\ & - \eta_e^2 G_{H0}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau) + \dot{u}(x, 0, \tau)]. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Здесь и далее использовано вытекающее из (2.1.12) и свойств преобразования Фурье соотношение (знак « $\div$ » указывает на соответствие между оригиналами и изображениями, см. § П.1):

$$l_\pm^F [u^F, w^F] \div l_\pm(u, w) = \frac{\partial(\rho_{e0}u)}{\partial z} \mp \rho_{e0} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.4.5)$$

Ядра представления (2.4.4), как следует из (2.3.11) и (2.3.8), определяются так:

$$G_{H0}(x, z, \tau) = -2f(x, z, \tau); \quad (2.4.6)$$

$$G_H(x, z, \xi, \tau) = -f(x, z + \xi, \tau) - f(x, |z - \xi|, \tau). \quad (2.4.7)$$

Отсюда следует, что достаточно найти оригинал функции  $f^{LF}(q, z, s)$ . Его определяем с помощью таблицы П.1.3:

$$f(x, z, \tau) = \frac{e^{-\gamma\tau/2}}{2\pi} (\tau^2 - \eta_e^2 r^2)_+^{-1/2} \text{ch} \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2} \right). \quad (2.4.8)$$

В силу четности по  $z$  этой функции равенство (2.4.7) принимает следующий вид:

$$G_H(x, z, \xi, \tau) = -f(x, z + \xi, \tau) - f(x, \xi - z, \tau). \quad (2.4.9)$$

Представления изображений компонент электрического поля строятся с помощью формул (2.1.10) и (2.4.3):

$$E_1^{LF}(q, z, s) = s \int_0^\infty G_{e1}^{LF}(q, z, \xi, s) l_+^F [u^{LF}(q, \xi, s), w^{LF}(q, \xi, s)] d\xi - \\ - \frac{s}{s + \gamma} u^{LF}(q, z, s) + G_{e10}^{LF}(q, z, s) [(s + \gamma) e_0^{LF}(q, s) + s u^{LF}(q, 0, s)], \quad (2.4.10)$$

$$G_{e1}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{1}{s + \gamma} \frac{\partial G_H^{LF}(q, z, \xi, s)}{\partial z}, \quad G_{e10}^{LF}(q, z, s) = \frac{1}{s + \gamma} \frac{\partial G_{H0}^{LF}(q, z, s)}{\partial z};$$

$$E_3^{LF}(q, z, s) = s \int_0^\infty G_{e3}^{LF}(q, z, \xi, s) l_+^F [u^{LF}(q, \xi, s), w^{LF}(q, \xi, s)] d\xi - \\ - \frac{s}{s + \gamma} w^{LF}(q, z, s) + [G_{e30}^{LF}(q, z, s) (s + \gamma) e_0^{LF}(q, s) + s u^{LF}(q, 0, s)], \quad (2.4.11)$$

$$G_{e3}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{iq}{s + \gamma} G_H^{LF}(q, z, \xi, s), \quad G_{e30}^{LF}(q, z, s) = \frac{iq}{s + \gamma} G_{H0}^{LF}(q, z, s).$$

Отсюда с использованием (2.4.9), (2.4.10) и (2.4.11) получаем явный вид ядер этих представлений:

$$G_{e1}^{LF}(q, z, \xi, s) = f_1^{LF}(q, z + \xi, s) + f_1^{LF}(q, |z - \xi|, s) \text{sign}(z - \xi), \quad (2.4.12) \\ G_{e10}^{LF}(q, z, s) = 2f_1^{LF}(q, z, s) = \frac{e^{-zk_e}}{s + \gamma};$$

$$G_{e3}^{LF}(q, z, \xi, s) = f_3^{LF}(q, z + \xi, s) + f_3^{LF}(q, |z - \xi|, s), \quad (2.4.13) \\ G_{e30}^{LF}(q, z, s) = 2f_3^{LF}(q, z, s) = -\frac{iqe^{-zk_e}}{(s + \gamma)k_e}.$$

В пространстве оригиналов представления (2.4.10) и (2.4.11) аналогично (2.4.4) записываются так:

$$\begin{aligned}
E_1(x, z, \tau) &= \int_0^{\infty} G_{e1}(x, z, \xi, \tau) ** l_+ [\dot{u}(x, \xi, \tau), \dot{w}(x, \xi, \tau)] d\xi + \\
&+ \gamma u(x, z, \tau) * e^{-\gamma\tau} - u(x, z, \tau) + \\
&+ G_{e10}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau) + \dot{u}(x, 0, \tau)];
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

$$\begin{aligned}
E_3(x, z, \tau) &= \int_0^{\infty} G_{e3}(x, z, \xi, \tau) ** l_+ [\dot{u}(x, \xi, \tau), \dot{w}(x, \xi, \tau)] d\xi + \\
&+ \gamma w(x, z, \tau) * e^{-\gamma\tau} - w(x, z, \tau) + \\
&+ G_{e30}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau) + \dot{u}(x, 0, \tau)].
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Здесь учтены равенства (знак « $\doteq$ » указывает на соответствие между оригиналами и изображениями по Лапласу, см. § П.1):

$$\frac{s^2}{s_e^2} = \frac{s}{s + \gamma} = 1 - \frac{\gamma}{s + \gamma}, \quad \frac{1}{s + \gamma} \doteq e^{-\gamma\tau}. \tag{2.4.16}$$

Ядра представлений (2.4.14) и (2.4.15), как следует из (2.4.12) и (2.4.13), определяются так:

$$G_{e1}(x, z, \xi, \tau) = f_1(x, z + \xi, \tau) + f_1(x, |z - \xi|, \tau) \text{sign}(z - \xi), \tag{2.4.17}$$

$$G_{e3}(x, z, \xi, \tau) = f_3(x, z + \xi, \tau) + f_3(x, |z - \xi|, \tau);$$

$$G_{e10}(x, z, \xi, \tau) = 2f_1(x, z, \tau), \quad G_{e30}(x, z, \xi, \tau) = 2f_3(x, z, \tau). \tag{2.4.18}$$

Оригиналы функций  $f_1^{LF}(q, z, s)$  и  $f_3^{LF}(q, z, s)$  определяем с помощью таблицы П.1.3:

$$\begin{aligned}
f_1(x, z, \tau) &= \frac{ze^{-\gamma\tau/2}}{2\pi r^2} \left[ \frac{2\tau}{\sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2}} \text{ch} \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \text{sh} \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2} \right) \right] H(t - \eta_e r);
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

$$f_3(x, z, \tau) = -\frac{xe^{-\gamma\tau/2}}{\pi\gamma r^2} \text{sh} \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2} \right) H(t - \eta_e r). \tag{2.4.20}$$

Поскольку функция  $f_1(x, z, \tau)$  нечетная, а  $f_3(x, z, \tau)$  четная по  $z$ , то, как следует из (2.4.17), имеют место равенства:

$$\begin{aligned} G_{e1}(x, z, \xi, \tau) &= f_1(x, z + \xi, \tau) - f_1(x, \xi - z, \tau), \\ G_{e3}(x, z, \xi, \tau) &= f_3(x, z + \xi, \tau) + f_3(x, \xi - z, \tau). \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Таким образом, представления (2.4.14) и (2.4.15) записываются так:

$$\begin{aligned} E_1(x, z, \tau) &= \gamma u(x, z, \tau) * e^{-\gamma \tau} - u(x, z, \tau) + \\ &+ 2f_1(x, z, \tau) * * [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau) + \dot{u}(x, 0, \tau)] + \\ &+ \int_0^{\infty} [f_1(x, z + \xi, \tau) - f_1(x, \xi - z, \tau)] * * l_+ [\dot{u}(x, \xi, \tau), \dot{w}(x, \xi, \tau)] d\xi; \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

$$\begin{aligned} E_3(x, z, \tau) &= \gamma w(x, z, \tau) * e^{-\gamma \tau} - w(x, z, \tau) + \\ &+ f_3(x, z, \tau) * * [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau) + \dot{u}(x, 0, \tau)] \\ &+ \int_0^{\infty} [f_3(x, z + \xi, \tau) + f_3(x, \xi - z, \tau)] * * l_+ [\dot{u}(x, \xi, \tau), \dot{w}(x, \xi, \tau)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Оригинал плотности зарядов находится из (2.1.11) с использованием (2.4.16):

$$\rho_e(x, z, \tau) = \gamma l_- [w(x, z, \tau), u(x, z, \tau)] * e^{-\gamma \tau} - l_- [w(x, z, \tau), u(x, z, \tau)]. \quad (2.4.24)$$

Координаты вектора тока с использованием найденной с помощью (2.4.22) и (2.4.23) напряженности электрического поля вычисляются по формулам, вытекающим из (2.1.8):

$$\begin{aligned} j_1(x, z, \tau) &= E_1(x, z, \tau) - H_0(z) \dot{w}(x, z, \tau) + \rho_{e0}(z) \dot{u}(x, z, \tau) / \gamma, \\ j_3(x, z, \tau) &= E_3(x, z, \tau) + H_0(z) \dot{u}(x, z, \tau) + \rho_{e0}(z) \dot{w}(x, z, \tau) / \gamma. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

Для использования формул (2.4.22) и (2.4.23) расставляем пределы интегрирования в тройных интегралах. С учетом (2.4.8), (2.4.19) и (2.4.20) все они сводятся к двум структурам:

$$\begin{aligned} I_{\pm}(x, z, \tau) &= \int_0^{\infty} \Psi_{\pm}(x, z, \xi, \tau) * * v(x, \xi, \tau) d\xi = \\ &= \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \Psi_{\pm}(\zeta, z, \xi, t) v(x - \zeta, \xi, \tau - t) d\xi = \\ &= \int_0^{\tau} dt \iint_{\mathbb{R}^2} \Psi_{\pm}(\zeta, z, \xi, t) H(\xi) v(x - \zeta, \xi, \tau - t) d\zeta d\xi = \\ &\Psi_{\pm}(x, z, \xi, \tau) = \varphi(x, \xi \pm z, \tau) H \left[ \tau - \eta_e \sqrt{x^2 + (\xi \pm z)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Вводим полярные координаты

$$\zeta = r \cos \alpha, \xi = \mp z + r \sin \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi, r \geq 0)$$

и ввиду малости параметра  $\eta_e$  производим замену переменной

$$t_1 = t/\eta_e, \tau_1 = \tau/\eta_e.$$

Тогда интегралы (2.4.26) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{\pm}(x, z, \tau) &= \tilde{I}_{\pm}(x, z, \tau/\eta_e) \\ \tilde{I}_{-}(x, z, \tau) &= \int_0^{\tau} dt \int_0^t dr \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{-}(x, z, \tau; r, \alpha, t) d\alpha, \\ \tilde{I}_{+}(x, z, \tau) &= H(\tau - z) \int_0^{\tau} dt \int_0^t dr \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{-}(x, z, \tau; r, \alpha, t) d\alpha, \\ \chi_{\pm}(x, z, \tau; r, \alpha, t) &= \eta_e r \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha, t \eta_e) \times \\ &\quad \times v[x - r \cos \alpha, r \sin \alpha \mp z, \eta_e(\tau - t)] H(r \sin \alpha \mp z). \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Конкретно, как следует из (2.4.8), (2.4.19) и (2.4.20), первый сомножитель в функции  $\chi_{\pm}(x, z, \tau; r, \alpha, t)$  записывается так:

- при  $\psi(x, z, \tau) = f(x, z, \tau)$

$$\eta_e r \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha, t \eta_e) = \frac{r}{2\pi} e^{-\gamma t/2} (t^2 - r^2)_+^{-1/2} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma \eta_e}{2} \sqrt{t^2 - r^2}\right);$$

- при  $\psi(x, z, \tau) = f_1(x, z, \tau)$

$$\begin{aligned} \eta_e r \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha, t) &= \frac{e^{-\gamma t/2} \sin \alpha}{2\pi} \times \\ &\times \left[ \frac{2t}{\sqrt{t^2 - \eta_e^2 r^2}} \operatorname{ch}\left(\frac{\gamma \eta_e}{2} \sqrt{t^2 - r^2}\right) - \eta_e \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma \eta_e}{2} \sqrt{t^2 - r^2}\right) \right]; \end{aligned}$$

- при  $\psi(x, z, \tau) = f_3(x, z, \tau)$

$$\eta_e r \varphi(r \cos \alpha, r \sin \alpha, t) = -\frac{\eta_e e^{-\gamma t/2} \cos \alpha}{2\pi \gamma} \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma \eta_e}{2} \sqrt{t^2 - r^2}\right).$$

В качестве примера рассмотрим алюминиевую ( $\eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma = 5,06$ ) [112] полуплоскость со следующими начальным состоянием и граничным условием:  $\rho_{e0}(z) = (z + 1)^{-1}$  и  $e_0(x, \tau) = 0$ .

На рис. 2.4.1 а,б и 2.4.2 а,б приведены соответственно зависимости от времени напряженности  $H$  магнитного и координаты  $E_3$  вектора напряженности электрического поля для следующих законов движения: а)  $w=0, u = xze^{-z}\tau_+$ ; б)  $u=0, w = xze^{-z}\tau_+$ . Сплошные кривые соответствуют  $x=z=0$ ; штриховые -  $x=z=0,5$ ; штрихпунктирные -  $x=z=1$ .

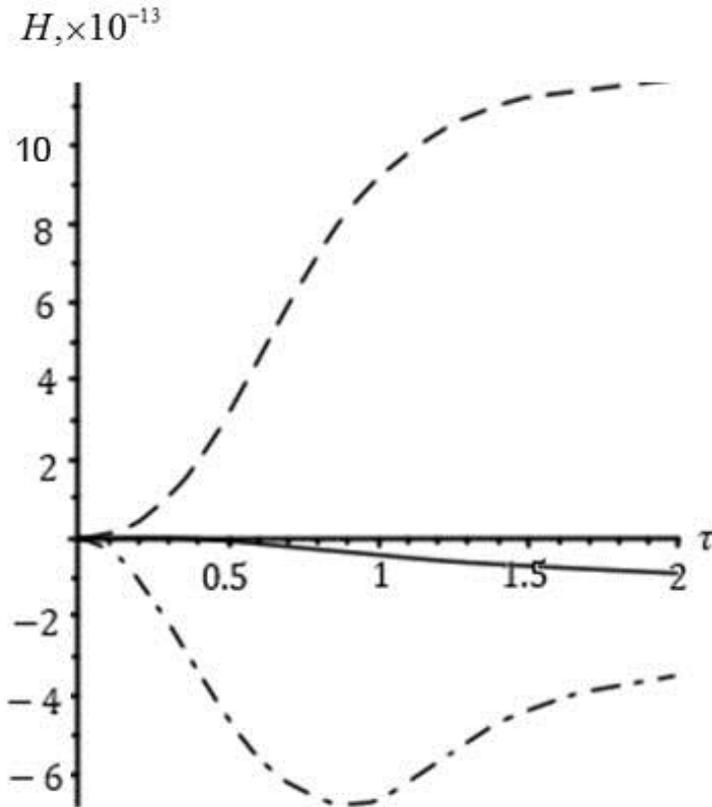


Рис. 2.4.1 а

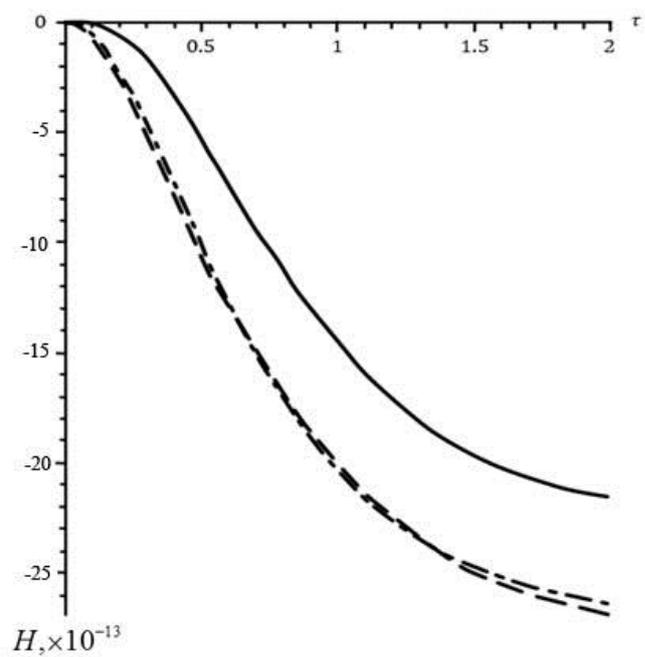


Рис. 2.4.1 б

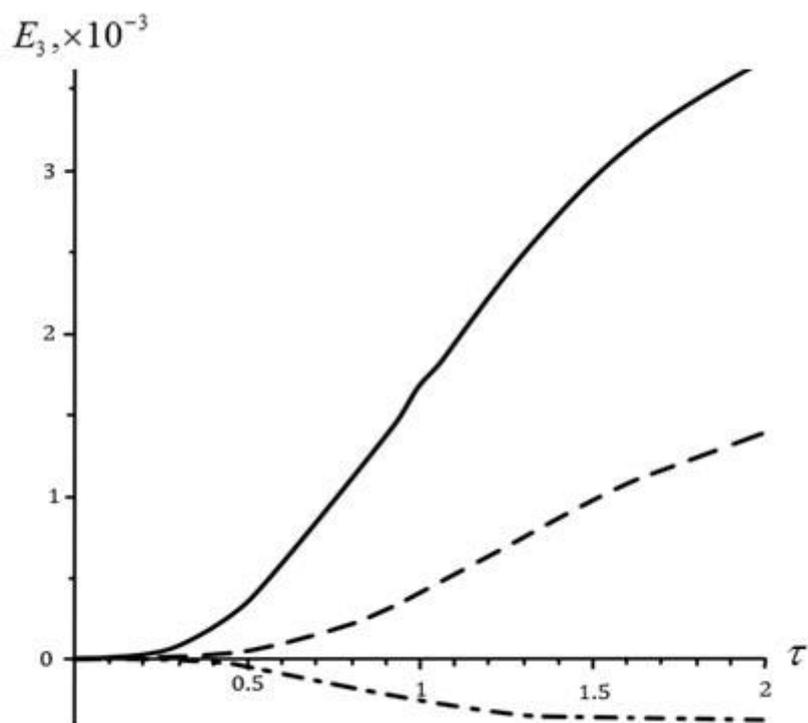


Рис. 2.4.2 а

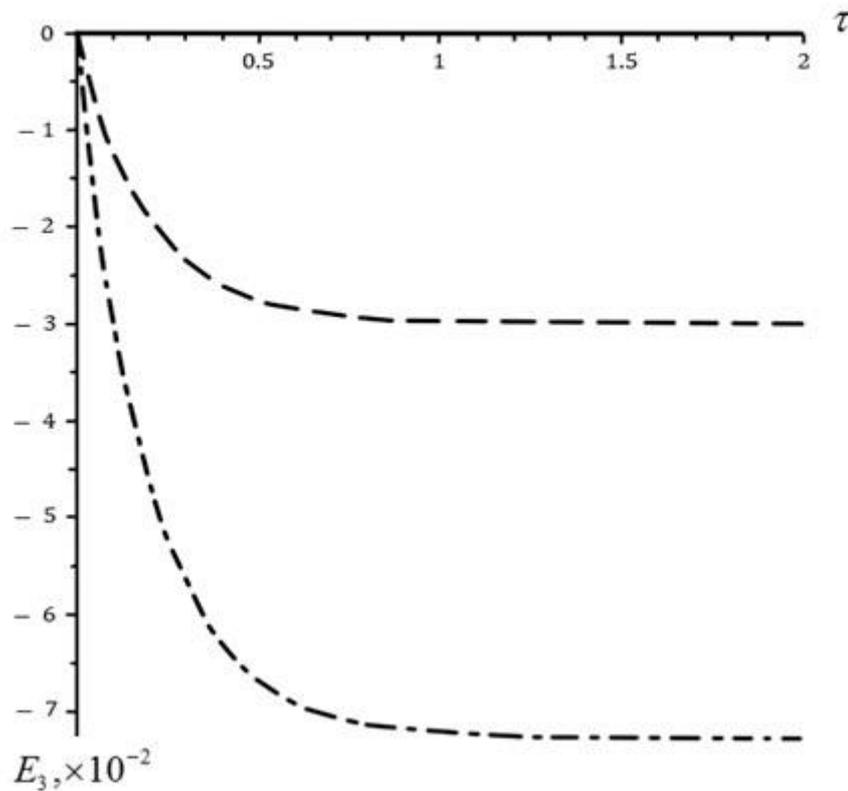


Рис. 2.4.2 б

### § 2.5. Поверхностные функции Грина для упругой полуплоскости

Задачи (2.2.14) и (2.2.15) для поверхностных функций влияния достаточно подробно исследованы (см., например, [108,109,171]). Однако обычно основное внимание уделяется значениям этих функций на границе полуплоскости. В то время при использовании интегральных соотношений (2.2.16) необходимы их значения при любых  $z \geq 0$ . Подобное решение в явном виде для задачи Лэмба построено в [142].

Поскольку методы построения этих функций схожи, то ограничимся только функциями  $G_{u02}^{LF}(q, z, s) = G_{u0}^{LF}(q, z, s)$  и  $G_{w02}^{LF}(q, z, s) = G_{w0}^{LF}(q, z, s)$  [76,48], что соответствует отсутствию касательных перемещений в граничных условиях (2.1.4) или (2.1.5):

$$U_0(x, \tau) \equiv 0. \quad (2.5.1)$$

При этом соотношения (2.2.13) записываются так:

$$u_0^{LF}(q, z, s) = G_{u0}^{LF}(q, z, s)W_0^{LF}(q, s), w_0^{LF}(q, z, s) = G_{w0}^{LF}(q, z, s)W_0^{LF}(q, s). \quad (2.5.2)$$

Общие решения систем уравнений (2.2.14) и (2.2.15) в соответствии с (П.8.10) имеют следующий вид ( $l=1,2$ ):

$$\begin{aligned} G_{u0l}^{LF} &= iq \left[ A_{1l} e^{-zk_1(q^2, s^2)} - A_{2l} e^{zk_1(q^2, s^2)} \right] + k_2(q^2, s^2) \left[ B_{1l} e^{-zk_2(q^2, s^2)} + B_{2l} e^{zk_2(q^2, s^2)} \right], \\ G_{w0l}^{LF} &= k_1(q^2, s^2) \left[ A_{1l} e^{-zk_1(q^2, s^2)} + A_{2l} e^{zk_1(q^2, s^2)} \right] - iq \left[ B_{1l} e^{-zk_2(q^2, s^2)} - B_{2l} e^{zk_2(q^2, s^2)} \right], \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

$$k_1(q, s) = \sqrt{s+q}, k_2(q, s) = \sqrt{s\eta^2 + q}, \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0,$$

где  $A_{jl} = A_{jl}(q, s)$  и  $B_{jl} = B_{jl}(q, s)$  ( $j=1,2$ ) - произвольные функции.

Удовлетворяя условиям ограниченности и граничным условиям при  $z=0$  в (2.2.14) и (2.2.15), находим необходимые поверхностные функции Грина:

$$\begin{aligned} G_{u0}^{LF}(q, z, s) &= -\frac{iqk_2(q^2, s^2)}{R(q^2, s^2)} \left[ e^{-k_1(q^2, s^2)z} - e^{-k_2(q^2, s^2)z} \right], \\ G_{w0}^{LF}(q, z, s) &= -\frac{k_1(q^2, s^2)k_2(q^2, s^2)e^{-k_1(q^2, s^2)z} - q^2 e^{-k_2(q^2, s^2)z}}{R(q^2, s^2)}, \\ R(q, s) &= q - k_1(q, s)k_2(q, s). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Для вычисления оригиналов эти изображения представляем так:

$$G_{u0}^{LF} = iqG_{130}^{LF}, G_{w0}^{LF} = sG_{331}^{LF} + iqG_{332}^{LF}, \quad (2.5.5)$$

где

$$\begin{aligned} G_{130}^{LF} &= G_{131}^{LF} + G_{132}^{LF}, G_{131}^{LF} = -\frac{k_2(q^2, s^2)}{R(q^2, s^2)} e^{-k_1(q^2, s^2)z}, G_{132}^{LF} = \frac{k_2(q^2, s^2)}{R(q^2, s^2)} e^{-k_2(q^2, s^2)z}, \\ G_{331}^{LF} &= -\frac{k_1(q^2, s^2)k_2(q^2, s^2)}{sR(q^2, s^2)} e^{-k_1(q^2, s^2)z}, G_{332}^{LF} = -\frac{iq}{R(q^2, s^2)} e^{-k_2(q^2, s^2)z}. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии со свойствами преобразований [108] аналог равенств (2.5.2) в пространстве оригиналов имеет следующий вид (звездочки обозначают свертки по координате  $x$  и времени, а штрих - производную по  $x$ ):

$$\begin{aligned} u_0(x, z, \tau) &= -G_{130}(x, z, \tau) ** W_0'(x, \tau), \\ w_0(x, z, \tau) &= G_{331}(x, z, \tau) ** \dot{W}_0(x, \tau) - G_{332}(x, z, \tau) ** W_0'(x, \tau). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Ядра интегральных представлений (2.5.6) находим, применяя алгоритм совместного обращения преобразований Лапласа и Фурье, основанный на использовании аналитического представления оригинала [108,171]. Согласно этому алгоритму с помощью замены  $q = \lambda s$  представляем, например, функцию  $G_{131}^{LF}$  так [40]:

$$\begin{aligned} G_{131}^{LF}(q, s, z) &= s^{-1} h_{13}(\lambda) e^{-s\omega_1(\lambda)}, \\ h_{13}(\lambda) &= -k_2(\lambda^2, 1) R^{-1}(\lambda^2, 1), \quad \omega_1(\lambda) = zk_1(\lambda^2, 1). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Тогда для оригинала этой функции имеет место равенство (черта сверху – знак комплексного сопряжения):

$$G_{131}(x, z, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} \left[ \hat{G}_{131}(\zeta, z, \tau) - \hat{G}_{131}(\bar{\zeta}, z, \tau) \right], \quad (2.5.8)$$

где

$$\hat{G}_{131}(\zeta, z, \tau) = -\frac{1}{2\pi} h_{13}[\mu_1(\zeta, \tau)] \dot{\mu}_1(\zeta, \tau), \quad \mu_1(\zeta, \tau) = \lambda_1(\zeta, \tau - z)$$

- аналитическое представление функции  $G_{131}(x, z, \tau)$  в комплексной плоскости  $\zeta = x + iy$ , а  $\lambda_1(\zeta, \tau)$  - неявно задаваемая уравнением

$$z\sqrt{\lambda_1^2 + 1} - z + i\lambda_1\zeta = \tau \quad (2.5.9)$$

и выделяемая с помощью условий

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \lambda} = \frac{z\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \geq 0 \quad (\lambda > 0), \quad \omega_1(-\lambda) = \omega_1(\lambda), \quad \omega_1(0) = \omega_{10} = z \geq 0 \quad (2.5.10)$$

на действительной оси  $\text{Re}\lambda_1 = 0$  плоскости  $\lambda_1$  ветвь функции.

Аналогично [142] с использованием обозначений

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} f(\zeta) = f_{\pm}(x), \quad t_{11} = \tau + z, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (2.5.11)$$

можно показать, что имеют место равенства:

$$\lambda_{1\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} i \text{sign}x(z\sqrt{r^2 - t_{11}^2} - t_{11}|x|) & \text{при } t_{11} < r, \\ \mp z\sqrt{t_{11}^2 - r^2} - it_{11}x & \text{при } t_{11} > r; \end{cases} \quad (2.5.12)$$

$$\left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_\pm = \frac{1}{r^2} \begin{cases} t_{11}z + |x|\sqrt{r^2 - t_{11}^2} & \text{при } t_{11} < r, \\ t_{11}z \pm ix\sqrt{t_{11}^2 - r^2} & \text{при } t_{11} > r; \end{cases} \quad (2.5.13)$$

$$\dot{\lambda}_{1\pm} = \left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_{1\pm} \begin{cases} -i(r^2 - t_{11}^2)^{-1/2} \operatorname{sign} x & \text{при } t_{11} < r, \\ \mp (t_{11}^2 - r^2)^{-1/2} & \text{при } t_{11} > r; \end{cases} \quad (2.5.14)$$

$$\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2}\right)_\pm = \frac{1}{r^2} \begin{cases} T_1(x, z, t_{11}) & \text{при } t_{11} < r, \\ S_{1-}(x, z, t_{11}) \pm iS_{1+}(x, z, t_{11}) \operatorname{sign} x & \text{при } t_{11} > r, \end{cases} \quad (2.5.15)$$

где

$$S_{1\pm}(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 [S_1(x, z, t) \mp \eta^2 r^2] \pm Q_1(x, z, t)},$$

$$S_1(x, z, t) = \sqrt{(t^2 - z^2)^2 - 2\eta^2 Q_1(x, z, t) + \eta^4 r^4}, \quad Q_1(x, z, t) = t^2 x^2 - z^2 (t^2 - r^2),$$

$$T_1(x, z, t) = \sqrt{-Q_1(x, z, t) + 2|x|zt\sqrt{r^2 - t^2} + \eta^2 r^4}.$$

Из (2.5.12) - (2.5.15) вытекают следующие связи предельных значений:

- при  $t_{11} < r$

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \lambda_{1-}, \lambda_{1+}^2 = \lambda_{1-}^2, \dot{\lambda}_{1+} = \dot{\lambda}_{1-}, \left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_+ = \left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_-, \\ \left(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2}\right)_+ &= \left(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2}\right)_-, h_{13}(\lambda_{1+}) = h_{13}(\lambda_{1-}); \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

- при  $t_{11} > r$

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \bar{\lambda}_{1-}, \lambda_{1+}^2 = \overline{\lambda_{1-}^2} = r^{-4} \Lambda_1(x, z, t_{11}), \dot{\lambda}_{1+} = -\dot{\bar{\lambda}}_{1-}, \\ \left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_+ &= \overline{\left(\sqrt{\lambda_1^2 + 1}\right)_-} = r^{-2} \Lambda_{11}(x, z, t_{11}), \\ \left(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2}\right)_{1+} &= \overline{\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2}\right)_{1-}} = r^{-2} \Lambda_{21}(x, z, t_{11}), \\ h_{13}(\lambda_{1+}) &= \overline{h_{13}(\lambda_{1-})} = -\frac{r^2 \Lambda_{21}(x, z, t_{11})}{\Lambda_1(x, z, t_{11}) - \Lambda_{11}(x, z, t_{11}) \Lambda_{21}(x, z, t_{11})}, \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

где

$$\Lambda_1(x, z, t) = 2ixzt\sqrt{t^2 - r^2} - Q_1(x^2, z^2, t^2),$$

$$\Lambda_{11}(x, z, t) = zt + ix\sqrt{t^2 - r^2}, \Lambda_{21}(x, z, t) = S_{1-}(x, z, t) + iS_{1+}(x, z, t)\operatorname{sign}x.$$

Окончательно из (2.5.8) с учетом (2.5.16) и (2.5.17) получаем следующий оригинал функции  $G_{131}^{LF}$ :

$$G_{131}(x, z, \tau) = V_{131}(x, z, \tau)H(\tau - r),$$

$$V_{131}(x, z, \tau) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - r^2}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\Lambda_{21}(x, z, \tau)\Lambda_{11}(x, z, \tau)}{\Lambda_1(x, z, \tau) - \Lambda_{11}(x, z, \tau)\Lambda_{21}(x, z, \tau)} \right], \quad (2.5.18)$$

где  $H(x)$  - единичная функция Хевисайда.

Для отыскания оригинала функции  $G_{132}^{LF}$  используются аналогичные рассуждения, основанные на формуле (2.5.8), в которой  $\hat{G}_{131}$  заменяется аналитическим представлением  $\hat{G}_{132}$ :

$$G_{132}^{LF}(q, s, z) = s^{-1}h_{13}(\lambda)e^{-s\omega_2(\lambda)}, \omega_2(\lambda) = zk_2(\lambda^2, 1),$$

$$\hat{G}_{132}(\zeta, z, \tau) = -\frac{1}{2\pi}h_{13}[\mu_2(\zeta, \tau)]\dot{\mu}_2(\zeta, \tau), \mu_2(\zeta, \tau) = \lambda_2(\zeta, \tau - \eta z); \quad (2.5.19)$$

$$z\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2} - \eta z + i\lambda_2\zeta = \tau, \frac{\partial\omega_2}{\partial\lambda} = \frac{z\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \geq 0 \quad (\lambda > 0), \quad (2.5.20)$$

$$\omega_2(-\lambda) = \omega_2(\lambda), \omega_2(0) = \omega_{20} = \eta z \geq 0.$$

При этом формулы (2.5.12) - (2.5.15) переходят в следующие соотношения:

$$\lambda_{2\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} i\operatorname{sign}x(z\sqrt{\eta^2 r^2 - t_{21}^2} - t_{21}|x|) & \text{при } t_{21} < \eta r, \\ \mp z\sqrt{t_{21}^2 - \eta^2 r^2} - it_{21}x & \text{при } t_{21} > \eta r; \end{cases} \quad (2.5.21)$$

$$\left(\sqrt{\lambda_{2\pm}^2 + \eta^2}\right)_{\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} t_{21}z + |x|\sqrt{\eta^2 r^2 - t_{21}^2} & \text{при } t_{21} < \eta r, \\ t_{21}z \pm ix\sqrt{t_{21}^2 - \eta^2 r^2} & \text{при } t_{21} > \eta r; \end{cases} \quad (2.5.22)$$

$$\dot{\lambda}_{2\pm} = \left(\sqrt{\lambda_{2\pm}^2 + \eta^2}\right)_{\pm} \begin{cases} -i(\eta^2 r^2 - t_{21}^2)^{-1/2} \operatorname{sign}x & \text{при } t_{21} < \eta r, \\ \mp (t_{21}^2 - \eta^2 r^2)^{-1/2} & \text{при } t_{21} > \eta r; \end{cases} \quad (2.5.23)$$

$$\left(\sqrt{\lambda_2^2 + 1}\right)_\pm = \frac{1}{r^2} \begin{cases} S_{2-}(x, z, t_{21}) \pm iS_{2+}(x, z, t_{21}) \operatorname{sign} x \text{ при } t_{21} > \eta r, \\ \pm iT_2(x, z, t_{21}) \operatorname{sign} x \text{ при } t_{21} < \eta r, (x, z) \in D_{31}(t_{21}), \\ T_2(x, z, t_{21}) \quad \text{при } t_{21} < \eta r, (x, z) \in D_{32}(t_{21}). \end{cases} \quad (2.5.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_{2\pm}(x, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 [S_2(x, z, t) \mp r^2] \pm Q_2(x, z, t)}, \\ S_2(x, z, t) &= \sqrt{(t^2 - \eta^2 z^2)^2 - 2Q_2(x, z, t) + r^4}, \\ t_{21} &= \tau + \eta z, \quad Q_2(x, z, t) = t^2 x^2 - z^2 (t^2 - \eta^2 r^2), \\ T_2(x, z, t) &= \sqrt{-Q_2(x, z, t) + 2|x|zt\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2} + r^4}; \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

$$\begin{aligned} D_{32}(t_{21}) &= D_{321}(t_{21}) \cup D_{322}(t_{21}), \quad D_{31}(t_{21}) : \begin{cases} |x| + z\sqrt{\eta^2 - 1} < t_{21} < \eta r, \\ z < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}, \end{cases} \\ D_{321}(t_{21}) : r^2 &> \max \left\{ \frac{t_{21}^2}{\eta^2}, |x|t_{21} \right\}, \quad D_{322}(t_{21}) : \begin{cases} \frac{r^2}{|x|} < t_{21} < |x| + x_2\sqrt{\eta^2 - 1}, \\ x_2 < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Равенства (2.5.21) - (2.5.24) позволяют сделать вывод, что при  $t_{21} < \eta r$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \lambda_{2+} &= \lambda_{2-}, \quad \lambda_{2+}^2 = \lambda_{2-}^2 = r^{-4} \Lambda_3(x, z, t_{21}), \quad \dot{\lambda}_{2+} = \dot{\lambda}_{2-}, \\ \left(\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2}\right)_+ &= \left(\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2}\right)_- = r^{-2} \Lambda_{32}(x, z, t_{21}), \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_3(x, z, t) &= 2|x|zt\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2} - Q_2(x^2, z^2, t^2), \\ \Lambda_{32}(x, z, t) &= zt + |x|\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2}. \end{aligned}$$

Если дополнительно  $(x, z) \in D_{32}(t_{21})$ , то

$$\left(\sqrt{\lambda_2^2 + 1}\right)_{2+} = \left(\sqrt{\lambda_2^2 + 1}\right)_{2-}, \quad h_{13}(\lambda_{2+}) = h_{13}(\lambda_{2-}). \quad (2.5.28)$$

Если же  $t_{21} < \eta r$  и  $(x, z) \in D_{31}(t_{21})$ , то

$$\left(\sqrt{\lambda_{2+}^2+1}\right)_+ = \overline{\left(\sqrt{\lambda_{2+}^2+1}\right)_-} = ir^{-2}T_2(x, z, t_{21})\text{sign}x, \quad h_{13}(\lambda_{2+}) = \overline{h_{13}(\lambda_{2-})}. \quad (2.5.29)$$

При  $t_{21} > \eta r$  из (2.5.21) - (2.5.24) вытекают такие равенства:

$$\begin{aligned} \lambda_{2+} &= -\overline{\lambda_{2-}}, \lambda_{2+}^2 = \overline{\lambda_{2-}^2} = r^{-4}\Lambda_2(x, z, t_{21}), \dot{\lambda}_{2+} = -\overline{\dot{\lambda}_{2-}}, \\ \left(\sqrt{\lambda_{2+}^2+1}\right)_+ &= \overline{\left(\sqrt{\lambda_{2+}^2+1}\right)_-} = r^{-2}\Lambda_{12}(x, z, t_{21}), h_{13}(\lambda_{2+}) = \overline{h_{13}(\lambda_{2-})}, \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x, z, t) &= 2ixzt\sqrt{t^2 - \eta^2 r^2} - Q_2(x^2, z^2, t^2), \quad \Lambda_{22}(x, z, t) = zt + ix\sqrt{t^2 - \eta^2 r^2}, \\ \Lambda_{12}(x, z, t) &= S_{2-}(x, z, t) + iS_{2+}(x, z, t)\text{sign}x. \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая (2.5.27) -(2.5.30), получаем следующий оригинал функции  $G_{132}^{LF}$ :

$$\begin{aligned} G_{132}(x, z, \tau) &= V_{132}(x, z, \tau)H(\tau - \eta r) + V_{133}(x, z, \tau) \times \\ &\times \left[ H(\tau - |x| - z\sqrt{\eta^2 - 1}) - H(\tau - \eta r) \right] H(|x|\sqrt{\eta^2 - 1} - z). \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_{132}(x, z, \tau) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2}} \text{Re} \frac{\Lambda_{22}^2(x, z, \tau)}{\Lambda_2(x, z, \tau) - \Lambda_{12}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)}, \\ V_{133}(x, z, \tau) &= \frac{\text{sign}x}{\pi\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2}} \text{Im} \frac{\Lambda_{32}^2(x, z, \tau)}{\Lambda_3(x, z, \tau) - iT_2(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau)\text{sign}x}. \end{aligned}$$

Ядро первого равенства в (2.5.6) в соответствии с формулами (2.5.5) находится суммированием функций (2.5.18) и (2.5.31):

$$G_{130}(x, z, \tau) = G_{131}(x, z, \tau) + G_{132}(x, z, \tau). \quad (2.5.32)$$

Аналогичным образом находятся оригиналы функций

$$\begin{aligned} G_{331}^{1LF}(q, s, z) &= s^{-1}h_{331}(\lambda)e^{-s\omega_1(\lambda)}, \quad h_{331}(\lambda) = -k_1(\lambda, 1)k_2(\lambda, 1)R^{-1}(\lambda, 1), \\ G_{332}^{1LF}(q, s, z) &= s^{-1}h_{332}(\lambda)e^{-s\omega_2(\lambda)}, \quad h_{332}(\lambda) = -i\lambda R^{-1}(\lambda, 1). \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Они записываются так:

$$\begin{aligned}
G_{331}(x, \tau, z) &= V_{331}(x, \tau, z)H(\tau - r), \\
G_{332}(x, z, \tau) &= V_{332}(x, z, \tau)H(\tau - \eta r) + V_{333}(x, z, \tau) \times \\
&\times \left[ H\left(\tau - |x| - z\sqrt{\eta^2 - 1}\right) - H(\tau - \eta r) \right] H\left(|x|\sqrt{\eta^2 - 1} - z\right),
\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

где

$$V_{333}(x, \tau, z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2}} \operatorname{Im} \frac{\Lambda_{33}(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau)}{\Lambda_3(x, z, \tau) - i\operatorname{sign}x T_2(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau)},$$

$$\Lambda_{33}(x, z, \tau) = z\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2} - \tau|x|;$$

$$V_{332}(x, \tau, z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2}} \operatorname{Im} \frac{\Lambda_{23}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)}{\Lambda_2(x, z, \tau) - \Lambda_{12}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)},$$

$$\Lambda_{23}(x, z, \tau) = z\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2} + i\tau x.$$

В качестве примера рассмотрим полуплоскость, материал которой характеризуется безразмерным параметром  $\eta = 1,87$ . На рис. 2.5.1 – 2.5.3 приведены графики изменения функций влияния  $G_{130}$ ,  $G_{331}$  и  $G_{332}$  соответственно по координате  $x$  при  $z = 1$  в разные моменты времени: сплошная линия соответствует  $\tau = 1.1$ , точечная -  $\tau = 1.5$ , а пунктирная -  $\tau = 2$ . Рис. 2.5.4 – 2.5.6 демонстрируют распределение этих же функций по координате  $z$  в разные моменты времени. Графики для  $G_{130}$ ,  $G_{331}$  построены при  $x = 0$ , а для  $G_{332}$  - при  $x = 1$ . На первом из них сплошная линия соответствует  $\tau = 0.3$ , точечная -  $\tau = 0.7$ , а пунктирная -  $\tau = 1$ . На рис. 2.5.5 аналогичные линии построены соответственно при  $\tau = 1.1$ ,  $\tau = 1.5$  и  $\tau = 2$ , а на рис. 2.5.6 – при  $\tau = 2$ ,  $\tau = 2.5$  и  $\tau = 3$ . Разрывы на кривых соответствуют фронтам волн растяжения-сжатия и сдвига.

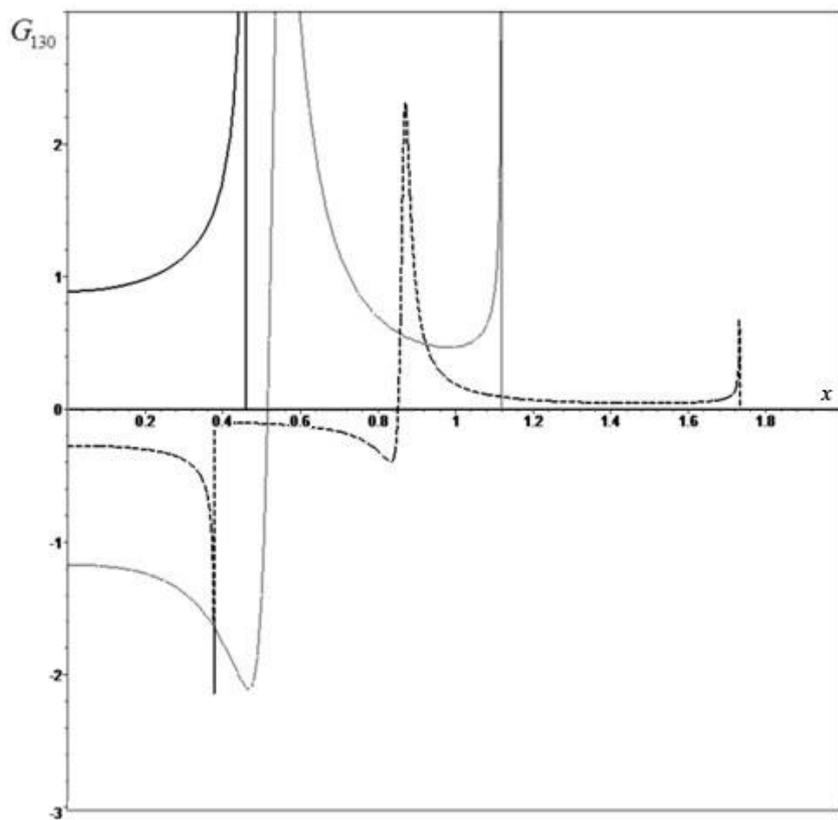


Рис. 2.5.1

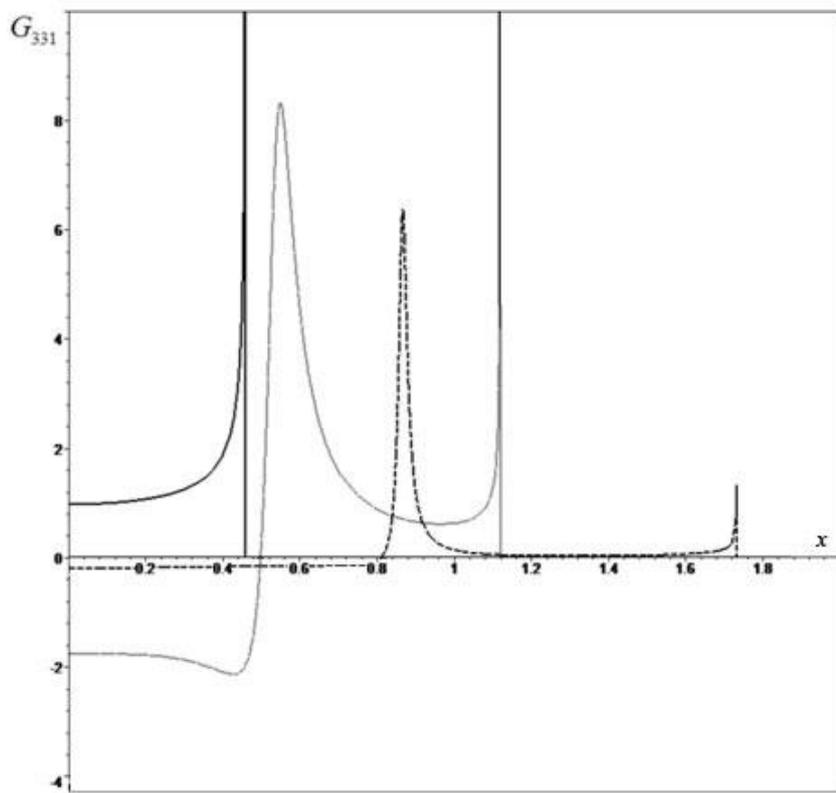


Рис. 2.5.2

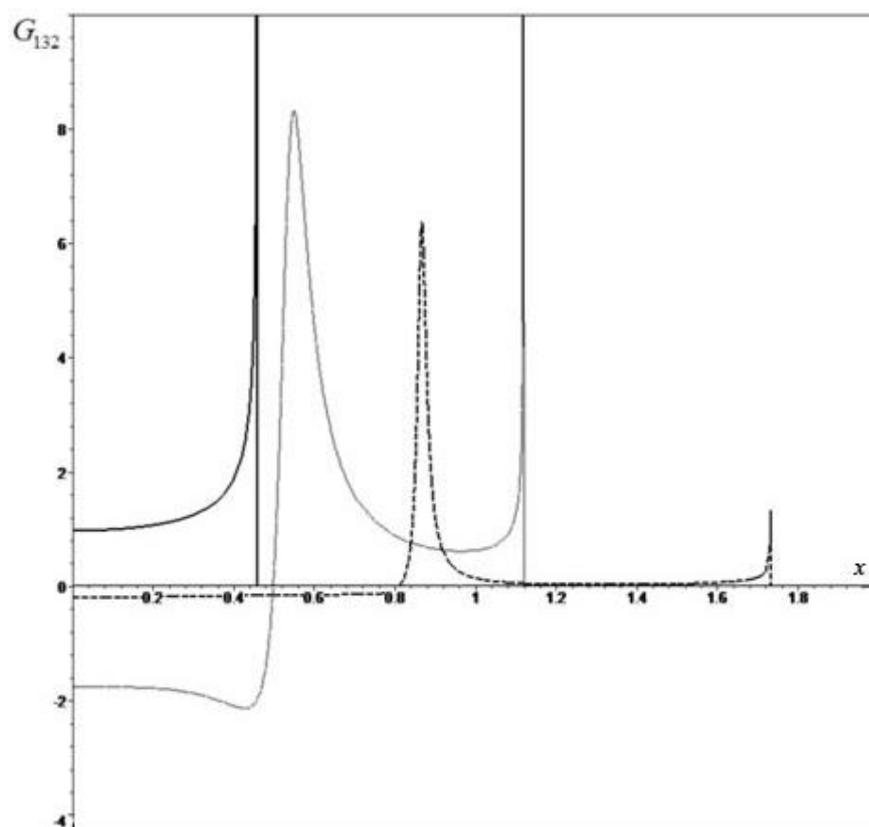


Рис. 2.5.3

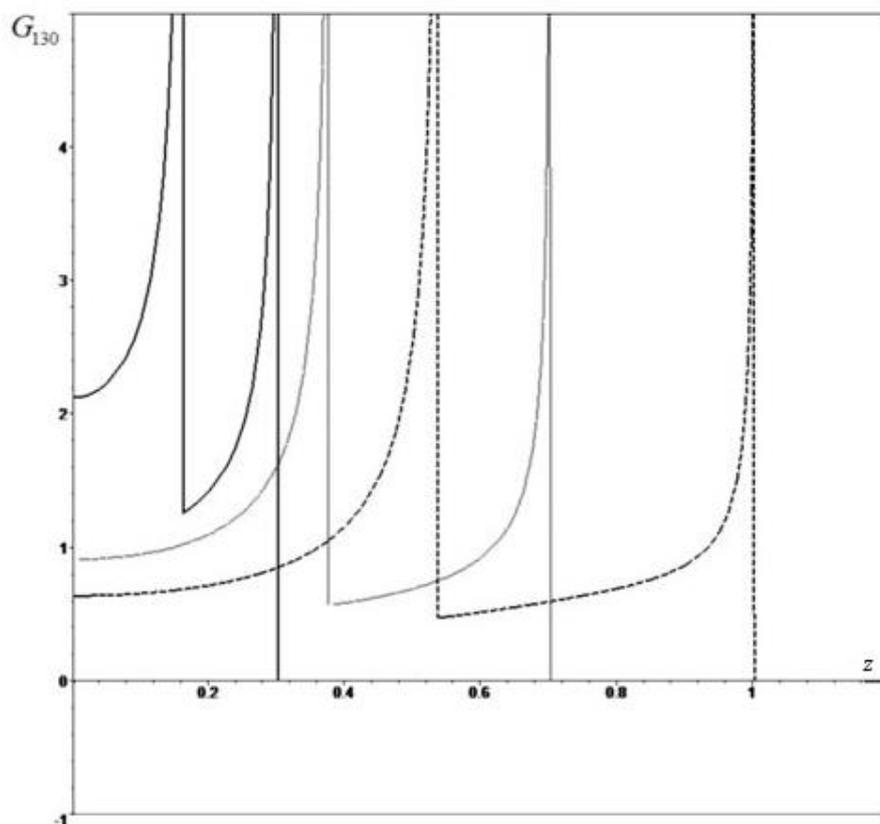


Рис. 2.5.4

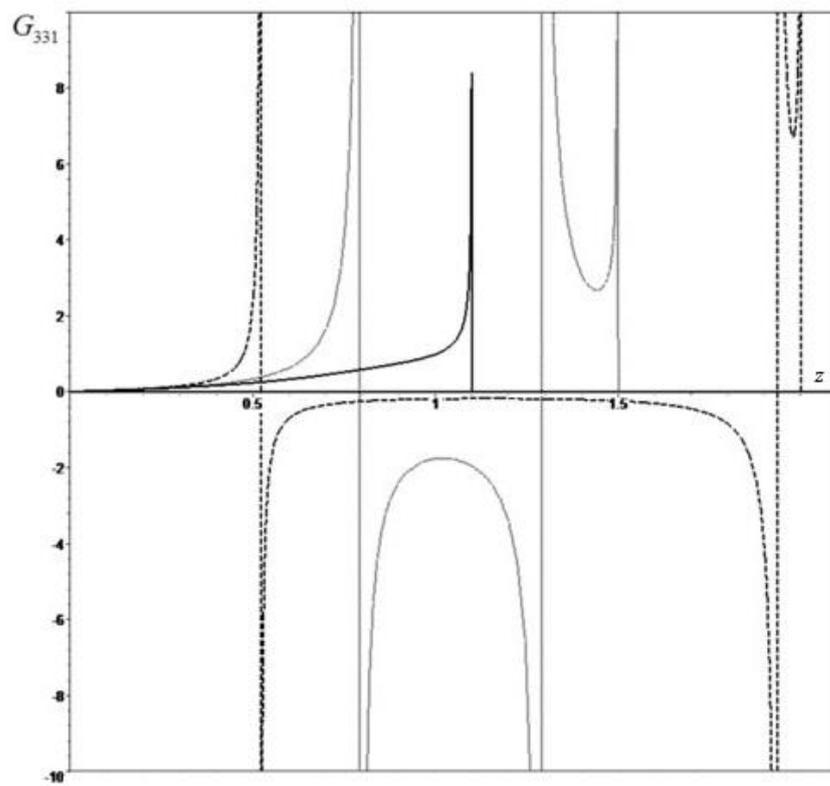


Рис. 2.5.5

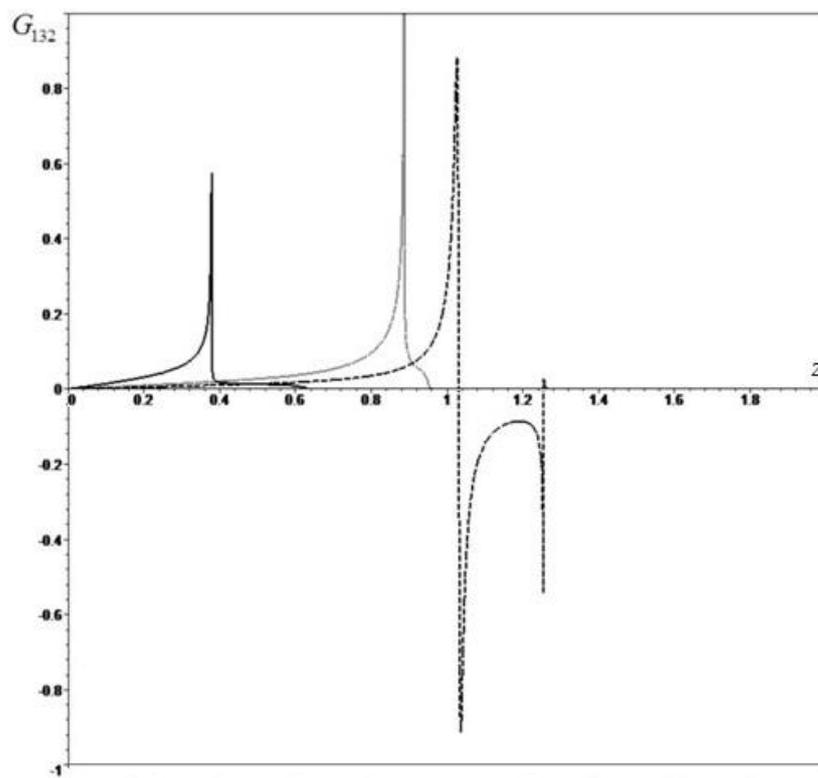


Рис. 2.5.6

## § 2.6. Объемные функции Грина для упругой полуплоскости

Аналогичными, но более сложными являются задачи (2.2.17) и (2.2.18) для объемных функций Грина [91]. Для определения функций  $G_{u1}^{LF}$  и  $G_{w1}^{LF}$  сводим уравнения в (2.2.17) к системе первого порядка и в соответствии с (П.8.11) записываем ее общее решение так:

$$\mathbf{G}_1^{LF} = \mathbf{X}\mathbf{A}_1 + \mathbf{G}_{1*}^{LF}, \quad \mathbf{G}_1^{LF} = \begin{pmatrix} G_{u1}^{LF} \\ \Gamma_{u1}^{LF} \\ G_{w1}^{LF} \\ \Gamma_{w1}^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{1*}^{LF} = \begin{pmatrix} G_{u1*}^{LF} \\ \Gamma_{u1*}^{LF} \\ G_{w1*}^{LF} \\ \Gamma_{w1*}^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}, \quad (2.6.1)$$

$$\Gamma_{ul}^{LF} = \frac{\partial G_{ul}^{LF}}{\partial z}, \quad \Gamma_{wl}^{LF} = \frac{\partial G_{wl}^{LF}}{\partial z} \quad (l=1,3).$$

Здесь

$$\mathbf{G}_{1*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \mathbf{X}\mathbf{D}_1, \quad \mathbf{D}_1 = (D_{11}, D_{21}, D_{31}, D_{41})^T \quad (2.6.2)$$

- столбец частных решений, который находим методом вариации постоянных (учитываем, что коэффициент при старшей производной в первом уравнении равен  $\eta^{-2}$ ):

$$\mathbf{X}\mathbf{D}'_1 = -\mathbf{F}_1, \quad \mathbf{D}_1 = (D_{11}, D_{21}, D_{31}, D_{41})^T, \quad \mathbf{F}_1 = (0, \eta^2 \delta(z - \xi), 0, 0)^T, \quad (2.6.3)$$

$$D_{j1}(q, z, \xi, s) = -H_{2j}(q, \xi, s)H(z - \xi), \quad H_{ij} = |\mathbf{X}|^{-1} X_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где  $X_{ij}(q, \xi, s)$  - алгебраическое дополнение элемента матрицы  $\mathbf{X}(q, \xi, s)$ , расположенного в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.

Функции  $D_{j1}(q, z, \xi, s)$  в (2.6.3) находим с помощью формул (П.8.13) и (П.8.15):

$$D_{11}(q, z, \xi, s) = \frac{iqe^{k_1\xi}}{2s^2k_1} H(z - \xi), \quad D_{21}(q, z, \xi, s) = \frac{iqe^{-k_1\xi}}{2s^2k_1} H(z - \xi), \quad (2.6.4)$$

$$D_{31}(q, z, \xi, s) = \frac{e^{k_2\xi}}{2s^2} H(z - \xi), \quad D_{41}(q, z, \xi, s) = -\frac{e^{-k_2\xi}}{2s^2} H(z - \xi).$$

Тогда в соответствии с (2.6.1) и (2.6.2) частные решения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_{u1*}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \tilde{G}_{u1*}^{LF}(q, z, \xi, s)H(z - \xi), \\
G_{w1*}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \tilde{G}_{w1*}^{LF}(q, z, \xi, s)H(z - \xi), \\
\tilde{G}_{u1*}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{q^2}{k_1} \operatorname{sh}[k_1(z - \xi)] - k_2 \operatorname{sh}[k_2(z - \xi)] \right\}, \\
\tilde{G}_{w1*}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \frac{iq}{s^2} \left\{ \operatorname{ch}[k_1(z - \xi)] - \operatorname{ch}[k_2(z - \xi)] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Для удовлетворения условиям ограниченности строим асимптотическое представление при  $z \rightarrow +\infty$  фундаментальной матрицы  $\mathbf{X}$  (здесь и далее знак эквивалентности для матриц понимается поэлементно):

$$\mathbf{X} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2 e^{k_1 z}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_4 e^{k_2 z}), \quad \mathbf{x}_2 = (-iq, -iqk_1, k_1, k_1^2)^T, \quad \mathbf{x}_4 = (k_2, k_2^2, iq, iqk_2)^T. \tag{2.6.6}$$

А уже из него при дополнительном учете (2.6.1), (2.6.2) и (2.6.4) получаем соответствующие асимптотические равенства для функций влияния:

$$\mathbf{G}_1^{LF} \sim \left( A_{21} + \frac{iqe^{-k_1 \xi}}{2s^2 k_1} \right) \mathbf{x}_2 e^{k_1 z} + \left( B_{21} - \frac{e^{-k_2 \xi}}{2s^2} \right) \mathbf{x}_4 e^{k_2 z}. \tag{2.6.7}$$

Таким образом, функции влияния будут ограниченными только при выполнении следующих равенств:

$$A_{21} = -\frac{iq}{2k_1(q^2, s^2)s^2} e^{-k_1(q^2, s^2)\xi}, \quad B_{21} = \frac{1}{2s^2} e^{-k_2(q^2, s^2)\xi}. \tag{2.6.8}$$

Далее равенство (2.6.1) перегруппировываем так:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} G_{u1}^{LF} \\ G_{w1}^{LF} \end{pmatrix} &= \mathbf{X}_{13}^{13}(q, z, s) \begin{pmatrix} A_{11} \\ B_{11} \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{24}^{13}(q, z, s) \begin{pmatrix} A_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_{u1*}^{LF} \\ \tilde{G}_{w1*}^{LF} \end{pmatrix} H(z - \xi), \\
\mathbf{X}_{13}^{13}(q, z, s) &= \begin{pmatrix} iqe^{-k_1 z} & k_2 e^{-k_2 z} \\ k_1 e^{-k_1 z} & -iqe^{-k_2 z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{24}^{13}(q, z, s) = \begin{pmatrix} -iqe^{k_1 z} & k_2 e^{k_2 z} \\ k_1 e^{k_1 z} & iqe^{k_2 z} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Отсюда и из граничных условий в (2.2.17) вытекает следующая система алгебраических уравнений:

$$\mathbf{X}_{13}^{13}(q, 0, s) \begin{pmatrix} A_{11} \\ B_{11} \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{24}^{13}(q, 0, s) \begin{pmatrix} A_{21} \\ B_{21} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.6.10}$$

Решая ее, находим остальные две постоянные:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -\frac{R_1(q^2, s^2)}{s^2 P(q^2, s^2)} \left[ R_1(q^2, s^2) A_{21} + 2iqk_2(q^2, s^2) B_{21} \right], \\
B_{11} &= \frac{R_1(q^2, s^2)}{s^2 P(q^2, s^2)} \left[ 2iqk_1(q^2, s^2) A_{21} - R_1(q^2, s^2) B_{21} \right],
\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

где

$$R_1(q, s) = q + k_1(q, s)k_2(q, s), \quad P(q, s) = (1 + \eta^2)q + \eta^2 s.$$

Окончательно из (2.6.5), (2.6.8), (2.6.9) и (2.6.11) получаем следующие равенства для функций  $G_{u1}^{LF}$  и  $G_{w1}^{LF}$ :

$$\begin{aligned}
G_{u1}^{LF}(q, z, \xi, s) &= G_{110}^{LF}(q, z, \xi, s) + G_{111}^{LF}(q, z, \xi, s)H(\xi - z) + \\
&\quad + G_{111}^{LF}(q, \xi, z, s)H(z - \xi), \\
G_{w1}^{LF}(q, z, \xi, s) &= G_{310}^{LF}(q, z, \xi, s) + G_{311}^{LF}(q, z, \xi, s)H(\xi - z) - \\
&\quad - G_{311}^{LF}(q, \xi, z, s)H(z - \xi).
\end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
G_{110}^{LF} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 G_{110j}^{LF}, \quad G_{1101}^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{q^2 P_1(q^2, s^2)}{s^2 k_1(q^2, s^2)} e^{-(z+\xi)k_1(q^2, s^2)}, \\
G_{1102}^{LF}(q, z, \xi, s) &= -s^{-2} k_2(q^2, s^2) P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_2(q^2, s^2)},
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

$$G_{1103}^{LF}(q, z, \xi, s) = s^{-2} q^2 k_2(q^2, s^2) P_3(q^2, s^2) e^{-zk_1(q^2, s^2) - \xi k_2(q^2, s^2)},$$

$$G_{1104}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{1103}^{LF}(q, \xi, z, s);$$

$$\begin{aligned}
G_{111}^{LF} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 G_{111j}^{LF}, \quad G_{1111}^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{q^2}{s^2 k_1(q^2, s^2)} e^{-(\xi-z)k_1(q^2, s^2)}, \\
G_{1112}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \frac{k_2(q^2, s^2)}{s^2} e^{-(\xi-z)k_2(q^2, s^2)};
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

$$\begin{aligned}
G_{310}^{LF} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 G_{310j}^{LF}, \quad G_{3101}^{LF}(q, z, \xi, s) = iqs^{-2} P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_1(q^2, s^2)}, \\
G_{3102}^{LF}(q, z, \xi, s) &= iqs^{-2} P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_2(q^2, s^2)},
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

$$G_{3103}^{LF}(q, z, \xi, s) = -iqs^{-2} k_1(q^2, s^2) k_2(q^2, s^2) P_3(q^2, s^2) e^{-zk_1(q^2, s^2) - \xi k_2(q^2, s^2)},$$

$$G_{3104}^{LF}(q, z, \xi, s) = -iq^3 s^{-2} P_3(q^2, s^2) e^{-\xi k_1(q^2, s^2) - zk_2(q^2, s^2)};$$

$$G_{311}^{LF} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 G_{311j}^{LF}, \quad (2.6.16)$$

$$G_{3111}^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{iq}{s^2} e^{-(\xi-z)k_1(q^2, s^2)}, \quad G_{3112}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{iq}{s^2} e^{-(\xi-z)k_2(q^2, s^2)},$$

где

$$P_1(q, s) = \frac{R_1^2(q, s)}{sP(q, s)}, \quad P_3(q, s) = \frac{2R_1(q, s)}{sP(q, s)}.$$

Для определения функций  $G_{u3}^{LF}$  и  $G_{w3}^{LF}$  также сводим уравнения в (2.2.18) к системе первого порядка и аналогично (2.6.1) записываем ее общее решение так:

$$\mathbf{G}_3^{LF} = \mathbf{X}\mathbf{A}_3 + \mathbf{G}_{3*}^{LF}, \quad \mathbf{G}_3^{LF} = \begin{pmatrix} G_{u3}^{LF} \\ \Gamma_{u3}^{LF} \\ G_{w3}^{LF} \\ \Gamma_{w3}^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{3*}^{LF} = \begin{pmatrix} G_{u3*}^{LF} \\ \Gamma_{u3*}^{LF} \\ G_{w3*}^{LF} \\ \Gamma_{w3*}^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ B_{13} \\ B_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.6.17)$$

Столбец частных решений

$$\mathbf{G}_{3*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \mathbf{X}\mathbf{D}_3, \quad \mathbf{D}_3 = (D_{13}, D_{23}, D_{33}, D_{43})^T \quad (2.6.18)$$

подобно (2.6.3) находим методом вариации постоянных:

$$\mathbf{X}\mathbf{D}'_3 = -\mathbf{F}_3, \quad \mathbf{D}_3 = (D_{13}, D_{23}, D_{33}, D_{43})^T, \quad \mathbf{F}_3 = (0, 0, 0, \delta(z - \xi))^T, \quad (2.6.19)$$

$$D_{j3}(q, z, \xi, s) = -H_{4j}(q, \xi, s)H(z - \xi).$$

Функции  $D_{j3}(q, z, \xi, s)$  находим с помощью формул (П.8.14) и (П.8.15):

$$D_{13}(q, z, \xi, s) = \frac{e^{k_1\xi}}{2s^2} H(z - \xi), \quad D_{23}(q, z, \xi, s) = -\frac{e^{-k_1\xi}}{2s^2} H(z - \xi), \quad (2.6.20)$$

$$D_{33}(q, z, \xi, s) = -\frac{iqe^{k_2\xi}}{2s^2 k_2} H(z - \xi), \quad D_{43}(q, z, \xi, s) = -\frac{iqe^{-k_2\xi}}{2s^2 k_2} H(z - \xi).$$

Тогда в соответствии с (2.6.18) и (2.6.20) частные решения принимают следующий вид:

$$G_{u3*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \tilde{G}_{u3*}^{LF}(q, z, \xi, s)H(z - \xi),$$

$$G_{w3*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \tilde{G}_{w3*}^{LF}(q, z, \xi, s)H(z - \xi), \quad \tilde{G}_{u3*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \tilde{G}_{w1*}^{LF}(q, z, \xi, s), \quad (2.6.21)$$

$$\tilde{G}_{w3*}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{1}{s^2} \left\{ -k_1 \operatorname{sh}[k_1(z - \xi)] + \frac{q^2}{k_2} \operatorname{sh}[k_2(z - \xi)] \right\}.$$

Учитывая теперь (2.6.6), (2.6.17), (2.6.18) и (2.6.20), получаем следующие асимптотические равенства для функций влияния:

$$\mathbf{G}_3^{LF} \sim \left( A_{23} - \frac{e^{-k_1 \xi}}{2s^2} \right) \mathbf{x}_2 e^{k_1 z} + \left( B_{23} - \frac{iqe^{-k_2 \xi}}{2s^2 k_2} \right) \mathbf{x}_4 e^{k_2 z}. \quad (2.6.22)$$

Таким образом, функции влияния будут ограниченными только при выполнении следующих равенств:

$$A_{23} = \frac{e^{-k_1(q^2, s^2)\xi}}{2s^2}, \quad B_{23} = \frac{iqe^{-k_2(q^2, s^2)\xi}}{2s^2 k_2(q^2, s^2)}. \quad (2.6.23)$$

Далее подобно (2.6.9) равенство (2.6.17) перегруппировываем так:

$$\begin{pmatrix} G_{u3}^{LF} \\ G_{w3}^{LF} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{13}^{13}(q, z, s) \begin{pmatrix} A_{13} \\ B_{13} \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{24}^{13}(q, z, s) \begin{pmatrix} A_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}_{u3*}^{LF} \\ \tilde{G}_{w3*}^{LF} \end{pmatrix} H(z - \xi). \quad (2.6.24)$$

Отсюда и из граничных условий в (2.2.18) вытекает аналогичная (2.6.10) система алгебраических уравнений:

$$\mathbf{X}_{13}^{13}(q, 0, s) \begin{pmatrix} A_{13} \\ B_{13} \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{24}^{13}(q, 0, s) \begin{pmatrix} A_{23} \\ B_{23} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6.25)$$

Для записи ее решения, очевидно, необходимо в (2.6.11) заменить постоянные  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ ,  $B_{11}$  и  $B_{21}$  величинами  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $B_{13}$  и  $B_{23}$ :

$$\begin{aligned} A_{13} &= -\frac{R_1(q^2, s^2)}{s^2 P(q^2, s^2)} \left[ R_1(q^2, s^2) A_{23} + 2iqk_2(q^2, s^2) B_{23} \right], \\ B_{13} &= \frac{R_1(q^2, s^2)}{s^2 P(q^2, s^2)} \left[ 2iqk_1(q^2, s^2) A_{23} - R_1(q^2, s^2) B_{23} \right]. \end{aligned} \quad (2.6.26)$$

Тогда из (2.6.23), (2.6.24), (2.6.21) и (2.6.26) получаем следующие равенства для функций  $G_{u3}^{LF}$  и  $G_{w3}^{LF}$ :

$$\begin{aligned} G_{u3}^{LF}(q, z, \xi, s) &= G_{130}^{LF}(q, z, \xi, s) + G_{131}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) - \\ &\quad - G_{131}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi), \\ G_{w3}^{LF}(q, z, \xi, s) &= G_{330}^{LF}(q, z, \xi, s) + G_{331}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) + \\ &\quad + G_{331}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi). \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

Здесь

$$G_{130}^{LF}(q, z, \xi, s) = -G_{310}^{LF}(q, \xi, z, s); \quad (2.6.28)$$

$$G_{131}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{311}^{LF}(q, z, \xi, s); \quad (2.6.29)$$

$$G_{330}^{LF} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 G_{330j}^{LF}, \quad G_{3301}^{LF}(q, z, \xi, s) = -s^{-2} k_1(q^2, s^2) P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_1(q^2, s^2)},$$

$$G_{3302}^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{q^2 P_1(q^2, s^2)}{s^2 k_2(q^2, s^2)} e^{-(z+\xi)k_2(q^2, s^2)}, \quad (2.6.30)$$

$$G_{3303}^{LF}(q, z, \xi, s) = q^2 s^{-2} k_1(q^2, s^2) P_3(q^2, s^2) e^{-zk_1(q^2, s^2) - \xi k_2(q^2, s^2)},$$

$$G_{3304}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{3303}^{LF}(q, \xi, z, s);$$

$$G_{331}^{LF} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 G_{331j}^{LF}, \quad G_{3311}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{k_1(q^2, s^2)}{s^2} e^{-(\xi-z)k_1(q^2, s^2)}, \quad (2.6.31)$$

$$G_{3312}^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{q^2}{s^2 k_2(q^2, s^2)} e^{-(\xi-z)k_2(q^2, s^2)}.$$

Отметим, что, как следует из (2.6.12) и (2.6.27), построенные функции влияния имеют симметрию следующего вида:

$$G_{u1}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{u1}^{LF}(q, \xi, z, s) = G_{u1}^{LF}(-q, z, \xi, s),$$

$$G_{w3}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{w3}^{LF}(q, \xi, z, s) = G_{w3}^{LF}(-q, z, \xi, s),$$

$$G_{u3}^{LF}(q, z, \xi, s) = -G_{w1}^{LF}(q, \xi, z, s) = G_{w1}^{LF}(-q, z, \xi, s).$$

Обращение преобразований Фурье и Лапласа для функций  $G_{1111}^{LF}$ ,  $G_{1112}^{LF}$ ,  $G_{3111}^{LF}$ ,  $G_{3112}^{LF}$ ,  $G_{3311}^{LF}$  и  $G_{3312}^{LF}$  проводится последовательно с использованием таблиц и свойств этих преобразований (см. [108] и § П.1):

$$G_{1112}(x, z, \xi, \tau) = \frac{1}{\pi r^4} \left\{ \eta^2 (\xi - z)^2 r^2 S_-(\eta r, \tau) - \left[ x^2 - (\xi - z)^2 \right] S_+(\eta r, \tau) \right\},$$

$$G_{3112}(x, z, \xi, \tau) = \frac{x(\xi - z)}{\pi r^4} \left[ \eta^2 r^2 S_-(\eta r, \tau) + 2S_+(\eta r, \tau) \right],$$

$$G_{3312}(x, z, \xi, \tau) = \frac{1}{\pi r^4} \left\{ \eta^2 x^2 r^2 S_-(\eta r, \tau) + \left[ x^2 - (\xi - z)^2 \right] S_+(\eta r, \tau) \right\}, \quad (2.6.32)$$

$$G_{1111}(x, z, \xi, \tau) = G_{3312}(x, z, \xi, \tau) \Big|_{\eta=1}, \quad G_{3111}(x, z, \xi, \tau) = -G_{3112}(x, z, \xi, \tau) \Big|_{\eta=1},$$

$$G_{3311}(x, z, \xi, \tau) = G_{1112}(x, z, \xi, \tau) \Big|_{\eta=1},$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + (\xi - z)^2}, \quad S_{\pm}(r, \tau) = (\tau^2 - r^2)_{\pm}^{\pm 1/2} x_{\pm}^{\alpha} = x^{\alpha} H(x).$$

Отсюда следует, что формулы (2.6.12) и (2.6.27) могут быть упрощены. В пространстве оригиналов они записываются так ( $l = 1, 3$ ):

$$\begin{aligned} G_{ll}(x, z, \xi, \tau) &= G_{ll0}(x, z, \xi, \tau) + G_{ll1}(x, z, \xi, \tau), \\ G_{wl}(x, z, \xi, \tau) &= G_{3l0}(x, z, \xi, \tau) + G_{3l1}(x, z, \xi, \tau). \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

Подобный подход к построению оригиналов других слагаемых в формулах (2.6.13) - (2.6.16) и (2.6.28) - (2.6.31) невозможен. Поэтому будем использовать алгоритм, примененный в § 2.5. При этом существенным является то, что упомянутые функции имеют следующую структуру [91,40]:

$$G^{LF}(q, z_1, z_2, s) = f(q, s) e^{-z_1 k_1 (q^2, s^2) - z_2 k_2 (q^2, s^2)}; \quad z_1, z_2 \geq 0, \quad (2.6.34)$$

где  $f(q, s)$  и показатель экспоненты - однородные функции соответственно степени  $(-1)$  и  $1$ , т.е. при  $q = \lambda s$  имеют место равенства:

$$\begin{aligned} f(\lambda s, s) &= s^{-1} h(\lambda), \quad z_1 k_1 (\lambda^2 s^2, s^2) + z_2 k_2 (\lambda^2 s^2, s^2) = s \omega(\lambda, z_1, z_2), \\ h(\lambda) &= F(\lambda, 1), \quad \omega(\lambda, z_1, z_2) = z_1 k_1 (\lambda^2, 1) + z_2 k_2 (\lambda^2, 1). \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

Далее будем учитывать, что функции  $f(q, s)$  и  $h(\lambda)$  для указанных выше изображений представимы в одном из двух видов:

$$\begin{aligned} f(q, s) &= f_1(q^2, s^2) \text{ или } f(q, s) = i q f_2(q^2, s^2), \\ h(\lambda) &= h_1(\lambda^2) \text{ или } h(\lambda) = i \lambda h_2(\lambda^2), \quad h_k(\lambda) = f_k(\lambda^2, 1) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

Функция  $\omega(\lambda, z_1, z_2)$  на действительной оси  $\text{Im} \lambda = 0$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = \lambda \left[ z_1 k_1^{-1} (\lambda^2, 1) + z_2 k_2^{-1} (\lambda^2, 1) \right] \geq 0 \quad (\lambda > 0), \\ \omega(-\lambda) &= \omega(\lambda), \quad \omega(0) = \omega_0 = z_1 + z_2 \eta \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

которые гарантируют существование обратных функций на левой ( $\lambda \leq 0$ ) и правой ( $\lambda \geq 0$ ) полуосях.

Из (2.6.35) следует, что функцию (2.6.34) можно представить в аналогичном (2.5.7) виде:

$$G^{LF}(q, z_1, z_2, s) = g^L(s) h(\lambda) e^{-s \omega(\lambda, z_1, z_2)}, \quad g^L(s) = s^{-1}, \quad (2.6.38)$$

а ее оригинал вычисляется по подобной (2.5.8) формуле

$$G(x, z_1, z_2, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} \left[ \hat{G}(\zeta, z_1, z_2, \tau) - \hat{G}(\bar{\zeta}, z_1, z_2, \tau) \right], \quad (2.6.39)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{G}(\zeta, z_1, z_2, \tau) &= -\frac{1}{2\pi} \dot{g}(\tau - \omega_0) * \left\{ h[\lambda(\zeta, z_1, z_2, \tau)] \dot{\lambda}(\zeta, z_1, z_2, \tau) \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} h[\mu(\zeta, z_1, z_2, \tau)] \dot{\mu}(\zeta, z_1, z_2, \tau) H(\tau - \omega_0), \quad (2.6.40) \\ \mu(\zeta, z_1, z_2, \tau) &= \lambda(\zeta, z_1, z_2, \tau - \omega_0), \quad \dot{g}(\tau) = \delta(\tau). \end{aligned}$$

где звездочка обозначает свертку по времени  $\tau$ , а  $\mu(\zeta, z_1, z_2, \tau)$  - неявно задаваемая уравнением

$$\omega(\mu, z_1, z_2) + i\mu\zeta = \tau \quad (2.6.41)$$

функция, однозначная ветвь которой выделяется с помощью условий при  $s > 0$ :

$$q, \mu = \begin{cases} > 0 & \text{при } y < 0, \\ < 0 & \text{при } y > 0. \end{cases} \quad (2.6.42)$$

Тогда из (2.6.39) с учетом (2.6.39) окончательно получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} G(x, z_1, z_2, \tau) &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ h[\mu_+(x, z_1, z_2, \tau)] \dot{\mu}_+(x, z_1, z_2, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - h[\mu_-(x, z_1, z_2, \tau)] \dot{\mu}_-(x, z_1, z_2, \tau) \right\} H(\tau - \omega_0), \quad (2.6.43) \\ \mu_{\pm}(x, z_1, z_2, \tau) &= \lim_{y \rightarrow \pm 0} \mu(\zeta, z_1, z_2, \tau). \end{aligned}$$

Эту формулу можно упростить с учетом вида функций  $\omega(\mu, z_1, z_2)$  и  $h(\mu)$ . При этом исключим подробно рассмотренный в [109] случай, соответствующий  $z_1 = z_2 = 0$ . Тогда величины  $\mu_{0\pm} = \mu_{\pm}(0, z_1, z_2, \tau)$  могут быть вычислены явно, как корни уравнения (2.6.41) при  $\zeta = 0$ :

- при  $z_1 \neq z_2$

$$\mu_{0\pm} = \mp \frac{1}{|z_1^2 - z_2^2|} \sqrt{b - 2z_1 z_2 \tau \sqrt{d} \operatorname{sign}(z_1 - z_2)}; \quad (2.6.44)$$

- при  $z_1 = z_2$

$$\mu_{0\pm} = \mp \frac{\sqrt{[\tau^2 - (\eta+1)^2 z_1^2][\tau^2 - (\eta-1)^2 z_1^2]}}{2z_1\tau}, \quad (2.6.45)$$

$$b = \tau^2 (z_1^2 + z_2^2) + (\eta^2 z_2^2 - z_1^2)(z_1^2 - z_2^2), \quad d = \tau^2 + (\eta^2 - 1)(z_1^2 - z_2^2).$$

При  $x \neq 0$ , полагая в (2.6.41)  $\zeta = x$ , сводим это уравнение к следующим эквивалентным ему начальным задачам для величин  $\mu_{\pm}$ :

$$\frac{\partial \mu_{\pm}}{\partial x} = -\frac{i\mu_{\pm}}{\omega_1(\mu_{\pm}, z_1, z_2) + ix}, \quad \mu_{\pm}|_{x=0} = \mu_{0\pm}. \quad (2.6.46)$$

Их анализ с учетом соотношений приводит к выводу, что величины  $\mu_+$  и  $\mu_-$  и их производные по времени  $\tau$  связаны между собой так:

$$\mu_- = -\bar{\mu}_+, \quad \dot{\mu}_- = -\bar{\dot{\mu}}_+. \quad (2.6.47)$$

Последние величины находятся дифференцированием уравнения (2.6.41) при  $\zeta = x$ :

$$\dot{\mu}_{\pm} = [\omega_1(\mu_{\pm}, z_1, z_2) + ix]^{-1}. \quad (2.6.48)$$

Отметим, что здесь и далее необходимо учитывать, что выделяемые с помощью условия в (2.5.3) значения корней  $k_1$  и  $k_2$  на берегах разрезов по мнимой оси плоскости  $\mu$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Re}\mu \rightarrow \pm 0} k_1(\mu^2, 1) &= \pm i\sqrt{-\mu^2 - 1} \cdot \text{sign Im } \mu \text{ при } |\text{Im } \mu| > 1, \\ \lim_{\text{Re}\mu \rightarrow \pm 0} k_2(\mu^2, 1) &= \pm i\sqrt{-\mu^2 - \eta^2} \cdot \text{sign Im } \mu \text{ при } |\text{Im } \mu| > \eta. \end{aligned} \quad (2.6.49)$$

Подставляя далее равенства (2.6.47) в формулу (2.6.43) в зависимости от указанных в (2.6.36) видов функции  $h(\mu)$  приходим к следующим двум вариантам выражений для функций влияния:

$$G(x, z_1, z_2, \tau) = -\frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ h_1(\mu_+^2) \dot{\mu}_+ \right] (x, z_1, z_2, \tau) H(\tau - \omega_0), \quad (2.6.50)$$

или

$$G(x, z_1, z_2, \tau) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mu_+ h_2(\mu_+^2) \dot{\mu}_+ \right] (x, z_1, z_2, \tau) H(\tau - \omega_0). \quad (2.6.51)$$

При  $z_2 = 0$  или  $z_1 = 0$  решение уравнения (2.6.41) и соответствующие предельные значения  $\mu_+$ ,  $\dot{\mu}_+$  и ветвей корней  $k_{1,2+} = k_{1,2}(\mu_+^2, 1)$  могут быть найдены в явном виде. В частности, при  $z_2 = 0$  имеют место следующие равенства ( $r_1^2 = x^2 + z_1^2$ ):

$$\mu_+ = \frac{1}{r_1^2} \begin{cases} i(z_1 \sqrt{r_1^2 - \tau^2} - \tau|x|) \operatorname{sign} x & \text{при } \tau < r_1, \\ -z_1 \sqrt{\tau^2 - r_1^2} - i\tau x & \text{при } \tau > r_1; \end{cases} \quad (2.6.52)$$

$$k_{1+} = \frac{1}{r_1^2} \begin{cases} \tau z_1 + |x| \sqrt{r_1^2 - \tau^2} & \text{при } \tau < r_1, \\ \tau z_1 + ix \sqrt{\tau^2 - r_1^2} & \text{при } \tau > r_1; \end{cases} \quad (2.6.53)$$

$$\dot{\mu}_+ = -\frac{k_{1+}}{\sqrt{|\tau^2 - r_1^2|}} \begin{cases} i \operatorname{sign} x & \text{при } \tau < r_1, \\ 1 & \text{при } \tau > r_1; \end{cases} \quad (2.6.54)$$

$$k_{2+} = \frac{1}{r_1^2} \begin{cases} S_{1-}(x, z_1, \tau) + iS_{1+}(x, z_1, \tau) \operatorname{sign} x & \text{при } \tau > r_1, \\ T_1(x, z_1, \tau) & \text{при } \tau < r_1, \end{cases} \quad (2.6.55)$$

где

$$S_{1\pm}(x, z_1, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 [S_1(x, z_1, \tau) \mp \eta^2 r_1^2] \pm Q_1(x, z_1, \tau)},$$

$$S_1(x, z_1, \tau) = \sqrt{(\tau^2 - z_1^2)^2 - 2\eta^2 Q_1(x, z_1, \tau) + \eta^4 r_1^4}, \quad Q_1(x, z_1, \tau) = \tau^2 x^2 - z_1^2 (\tau^2 - r_1^2),$$

$$T_1(x, z_1, \tau) = \sqrt{-Q_1(x, z_1, \tau) + 2|x|z_1\tau\sqrt{r^2 - \tau^2} + \eta^2 r_1^4}.$$

Некоторые обозначения здесь и далее могут совпадать с использованными в § 2.5. Однако, как правило, смысл их другой.

Если же  $z_1 = 0$ , то искомые предельные значения определяются так ( $r_2^2 = x^2 + z_2^2$ ):

$$\mu_+ = \frac{1}{r_2^2} \begin{cases} i(z_2 \sqrt{\eta^2 r_2^2 - \tau^2} - \tau|x|) \operatorname{sign} x & \text{при } \tau < \eta r_2, \\ -z_2 \sqrt{\tau^2 - \eta^2 r_2^2} - i\tau x & \text{при } \tau > \eta r_2; \end{cases} \quad (2.6.56)$$

$$k_{2+} = \frac{1}{r_2^2} \begin{cases} \tau z_2 + |x| \sqrt{\eta^2 r_2^2 - \tau^2} & \text{при } \tau < \eta r_2, \\ \tau z_2 + ix \sqrt{\tau^2 - \eta^2 r_2^2} & \text{при } \tau > \eta r_2; \end{cases} \quad (2.6.57)$$

$$\dot{\mu}_+ = -\frac{k_{2+}}{\sqrt{|\tau^2 - \eta^2 r_2^2|}} \begin{cases} i \operatorname{sign} x & \text{при } \tau < \eta r_2, \\ 1 & \text{при } \tau > \eta r_2; \end{cases} \quad (2.6.58)$$

$$k_{1+} = \frac{1}{r_2^2} \begin{cases} S_{2-}(x, z_2, \tau) + i S_{2+}(x, z_2, \tau) \operatorname{sign} x & \text{при } \tau > \eta r_2 \\ iT_2(x, z_2, \tau) \operatorname{sign} x & \text{при } \tau < \eta r_2, (x, z_2) \in D_{31}(\tau) \\ T_2(x, z_2, \tau) & \text{при } \tau < \eta r_2, (x, z_2) \in D_{32}(\tau) \end{cases} \quad (2.6.59)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_{2\pm}(x, z_2, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r_2^2 [S_2(x, z_2, \tau) \mp r_2^2] \pm Q_2(x, z_2, \tau)}, \\ S_2(x, z_2, \tau) &= \sqrt{(\tau^2 - \eta^2 z_2^2)^2 - 2Q_2(x, z_2, \tau) + r_2^4}, \\ Q_2(x, z_2, \tau) &= \tau^2 x^2 - z_2^2 (\tau^2 - \eta^2 r_2^2), \\ T_2(x, z_2, \tau) &= \sqrt{-Q_2(x, z_2, \tau) + 2|x|z_2\tau\sqrt{\eta^2 r_2^2 - \tau^2} + r_2^4}, \\ D_{31}(\tau) &: \begin{cases} |x| + z\sqrt{\eta^2 - 1} < \tau < \eta r, \\ z < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}, \end{cases} \quad D_{32}(\tau) = D_{321}(\tau) \cup D_{322}(\tau), \\ D_{321}(\tau) &: r^2 > \max\left\{\frac{\tau^2}{\eta^2}, |x|\tau\right\}, \quad D_{322}(\tau) : \begin{cases} r^2/|x| < \tau < |x| + x_2\sqrt{\eta^2 - 1}, \\ x_2 < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.60)$$

На рис. 2.6.1 – 2.6.4 изображены графики функций Грина при  $\eta = 1.73$ . Функции  $G_{u1}$  соответствуют сплошные кривые,  $G_{w3}$  - штриховые,  $G_{u3}$  - штрихпунктирные  $G_{w1}$  - штрихпунктирные с двойным пунктиром.

На рис. 2.6.1 приведены зависимости функций Грина от координаты  $x$  при  $\tau = 3$ ,  $z = 2$ ,  $\xi = 1$ . На них видно наличие сильных разрывов при значениях  $x = 1.42$  и  $x = 2.83$ . Они соответствуют положению фронтов волн сдвига и растяжения-сжатия. Рис. 2.6.2 иллюстрирует зависимость функций Грина от времени в точке с координатами  $x = 1$ ,  $z = 3$  и при  $\xi = 2$ . Вертикальные асимптоты на графике соот-

ветствуют моментам прихода в точку фронтов волн растяжения-сжатия в момент времени  $\tau = 1.41$  и сдвига в момент времени  $\tau = 2.44$ , что согласуется с механическим смыслом задачи.

На рис. 2.6.3 представлены зависимости функций Грина от координаты  $z$  при  $\tau = 2$ ,  $x = 1$ ,  $\xi = 2$ . Наличие разрыва второго рода при  $z = 0.26$  соответствует положению фронта волны растяжения-сжатия. Рис. 2.6.4 показывает зависимость функций Грина от переменной  $\xi$  при  $x = 1$ ,  $\tau = 3$ ,  $z = 1$ . Здесь вертикальные асимптоты соответствуют фронтам волн, отраженных от поверхности  $z = 0$ .

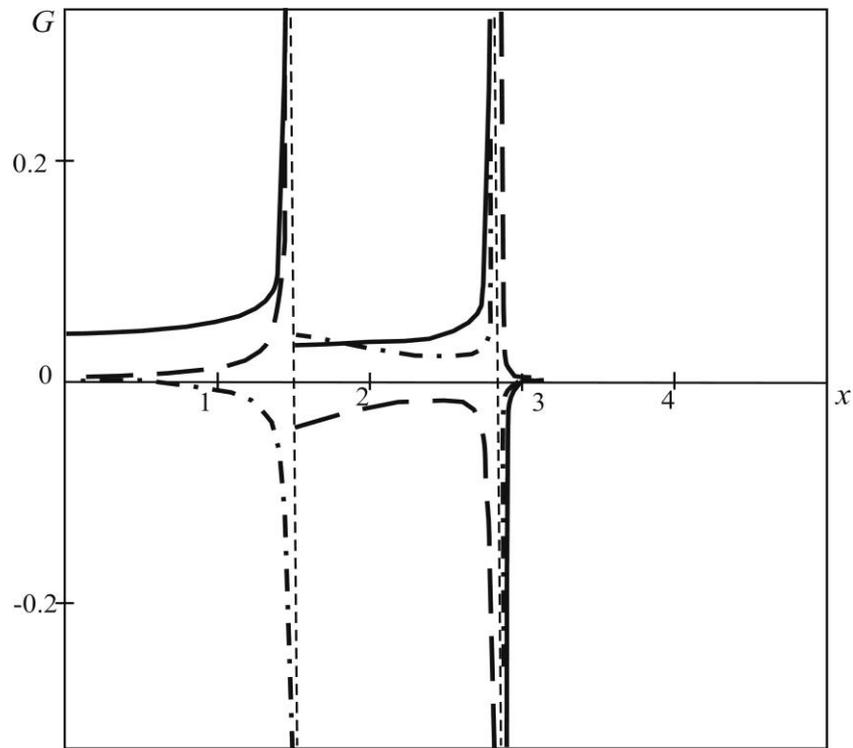


Рис. 2.6.1.

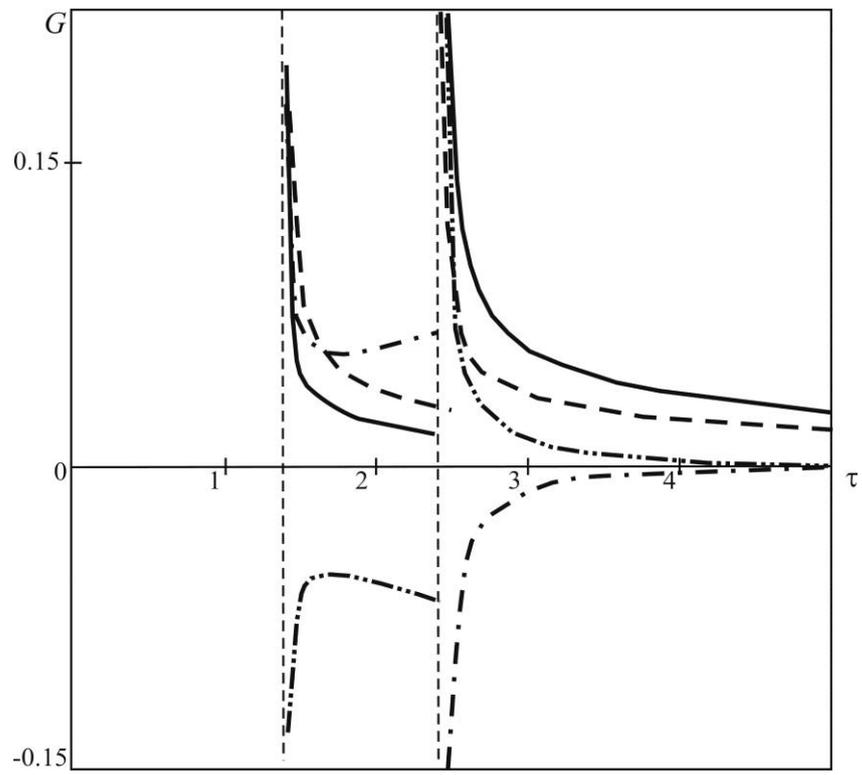


Рис. 2.6.2

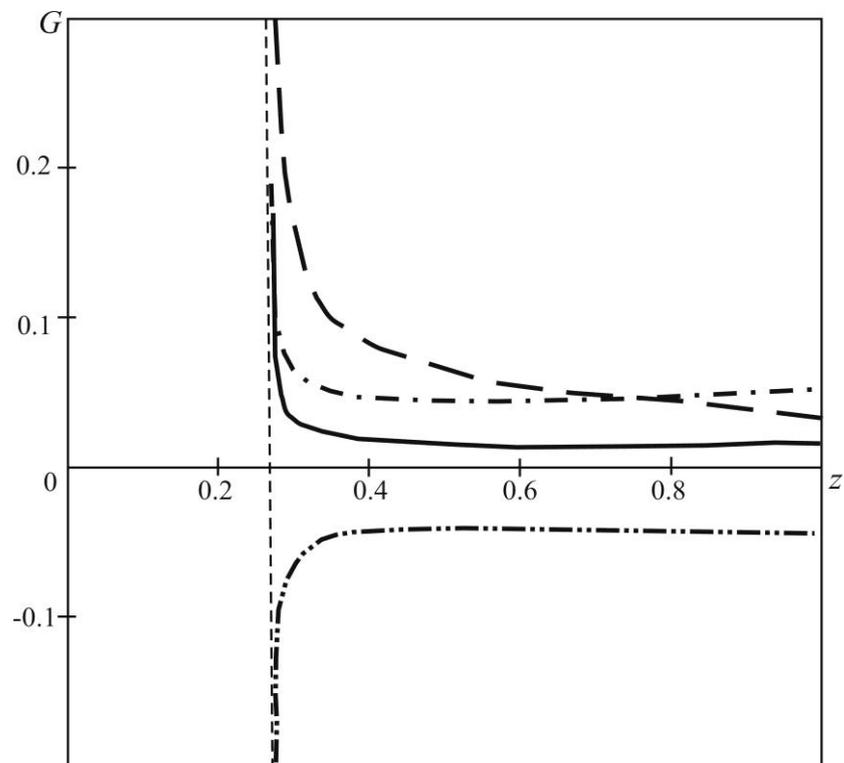


Рис. 2.6.3

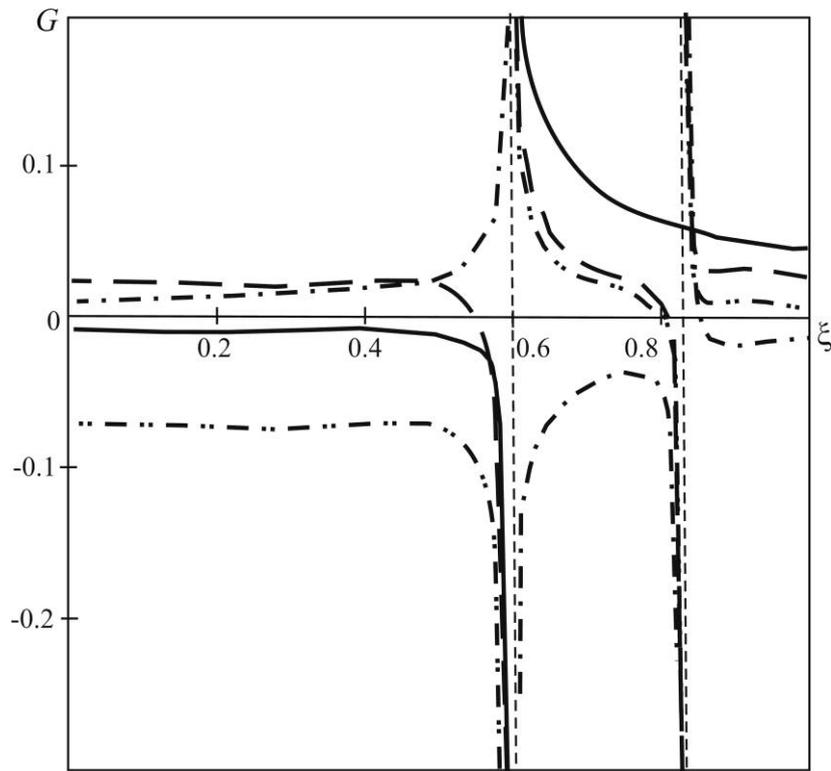


Рис. 2.6.4.

### § 2.7. Нестационарное движение упругой полуплоскости под действием объемных сил

Рассмотрим вспомогательную задачу о движении упругой полуплоскости под действием объемной силы с координатами  $F_1(x, z, \tau)$  и  $F_3(x, z, \tau)$  [91]. Она, как следует из § 2.2 (см. уравнения (2.2.4)), является составляющей для общей связанной задачи.

Полагаем, что на границе полуплоскости возмущения отсутствуют. Для определенности положим, что она абсолютно жестко закреплена (как будет ясно из дальнейшего изложения, рассмотрение других возможных вариантов однородных условий на границе полуплоскости не вносит принципиальных усложнений в метод решения):

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0. \quad (2.7.1)$$

На бесконечности возмущения отсутствуют, а начальные условия нулевые:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = 0. \quad (2.7.2)$$

Сравнение этой постановки с содержанием §§ 2.1, 2.2 показывает, что в этом случае перемещения определяются соответствующим образом откорректированными соотношениями (2.2.16):

$$\begin{aligned}
 u^{LF}(q, z, s) &= \int_0^{\infty} G_{u1}^{LF}(q, z, \xi, s) F_1^{LF}(q, \xi, s) d\xi + \\
 &+ \int_0^{\infty} G_{u3}^{LF}(q, z, \xi, s) F_3^{LF}(q, \xi, s) d\xi, \\
 w^{LF}(q, z, s) &= \int_0^{\infty} G_{w1}^{LF}(q, z, \xi, s) F_1^{LF}(q, \xi, s) d\xi + \\
 &+ \int_0^{\infty} G_{w3}^{LF}(q, z, \xi, s) F_3^{LF}(q, \xi, s) d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

В пространстве оригиналов это равенство записывается так (звездочки означают свертки по координате  $x$  и времени):

$$\begin{aligned}
 u(x, z, \tau) &= \int_0^{\infty} G_{u1}(x, z, \xi, \tau) ** F_1(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^{\infty} G_{u3}(x, z, \xi, \tau) ** F_3(x, \xi, \tau) d\xi, \\
 w(x, z, \tau) &= \int_0^{\infty} G_{w1}(x, z, \xi, \tau) ** F_1(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^{\infty} G_{w3}(x, z, \xi, \tau) ** F_3(x, \xi, \tau) d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Ядра интегралов получены в предыдущем параграфе. Эти формулы позволяют свести задачу определения поля перемещений по заданным объемным силам к вычислению квадратур.

В качестве примера рассмотрим простейший вариант объемных сил, равномерно распределенных вдоль прямой  $z = z_0$ :  $F_1 = p_1 \delta(z - z_0) \delta(\tau)$ ,  $F_3 = p_3 \delta(z - z_0) \delta(\tau)$ , где  $p_1, p_3 = \text{const}$ . При такой нагрузке формулы (2.7.4) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, z, \tau) &= p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{u1}(x, z, z_0, \tau) dx + p_3 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{u3}(x, z, z_0, \tau) dx, \\
 w(x, z, \tau) &= p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{w1}(x, z, z_0, \tau) dx + p_3 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{w3}(x, z, z_0, \tau) dx.
 \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

В соответствии с определением преобразования Фурье изображения по Лапласу интегралов в (2.7.5) достаточно просто вычисляются через трансформанты функций Грина:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{ul}^L(x, z, z_0, s) dx = G_{ul}^{LF}(0, z, z_0, s), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G_{wl}^L(x, z, z_0, s) dx = G_{wl}^{LF}(0, z, z_0, s). \quad (2.7.6)$$

Используя теперь эти формулы и (2.6.12) – (2.6.31), из (2.7.5) получаем изображение перемещений

$$\begin{aligned} u^L(x, z, s) &= \frac{p_1}{2\eta s} \left[ -e^{-\eta s(z+z_0)} + e^{-\eta s(z_0-z)} H(z_0-z) + e^{-\eta s(z-z_0)} H(z-z_0) \right], \\ w^L(x, z, s) &= \frac{p_3}{2s} \left[ -e^{-s(z+z_0)} + e^{-s(z_0-z)} H(z_0-z) + e^{-s(z-z_0)} H(z-z_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Оригиналы этих функций находятся достаточно просто:

$$\begin{aligned} u(x, z, \tau) &= \frac{p_1}{2\eta} \left\{ H[\tau - \eta(z_0 - z)] - H[\tau - \eta(z + z_0)] \right\} H(z_0 - z) + \\ &\quad + \frac{p_1}{2\eta} \left\{ H[\tau - \eta(z - z_0)] - H[\tau - \eta(z + z_0)] \right\} H(z - z_0), \\ w(x, z, \tau) &= \frac{p_3}{2} \left\{ H[\tau - (z_0 - z)] - H[\tau - (z + z_0)] \right\} H(z_0 - z) + \\ &\quad + \frac{p_3}{2} \left\{ H[\tau - (z - z_0)] - H[\tau - (z + z_0)] \right\} H(z - z_0). \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Как и следовало ожидать, перемещения не зависят от координаты  $x$ , и волны сдвига и растяжения-сжатия распространяются независимо.

Соответствующие результаты при  $p_1 = 1$  и  $p_3 = 0$  (функция Грина для одномерной задачи) приведены в [55,56].

## § 2.8. Распространение двумерных нестационарных электрических поверхностных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости

Полагаем, что на границе полуплоскости перемещения отсутствуют:

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \quad (2.8.1)$$

и задана касательная компонента напряженности электрического поля

$$E_1|_{z=0} = e_0(x, \tau), \quad (2.8.2)$$

что является частным случаем граничных условий (2.1.4).

Постановка этой задачи приведена в § 2.1, а решение представлено в виде рядов (2.2.1) по малому параметру  $\alpha$ . В силу однородности задачи (2.2.3), (2.2.7) ее решение тривиальное:

$$u_0(x, z, \tau) \equiv 0, w_0(x, z, \tau) \equiv 0. \quad (2.8.3)$$

В дополнение к (2.8.3) коэффициенты рядов (2.2.1) при  $m=0$  согласно (2.4.4) (или (2.2.21)), (2.4.14), (2.4.15) и (2.4.24) с учетом (2.4.5) определяются так:

$$\begin{aligned} H_0(x, z, \tau) &= -\eta_e^2 G_{H0}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau)], \\ E_{10}(x, z, \tau) &= G_{e10}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau)], \\ E_{30}(x, z, \tau) &= G_{e30}(x, z, \tau) ** [\gamma e_0(x, \tau) + \dot{e}_0(x, \tau)], \rho_0(x, z, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

При  $m \geq 1$  из (2.2.16), (2.2.19) (2.4.14) (2.4.15) и (2.4.24) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} u_m(x, z, \tau) &= \int_0^\infty G_{u1}(x, z, \xi, \tau) * f_{1,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \\ &\quad + \int_0^\infty G_{u3}(x, z, \xi, \tau) * f_{3,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \\ w_m(x, z, \tau) &= \int_0^\infty G_{w1}(x, z, \xi, \tau) * f_{1,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \\ &\quad + \int_0^\infty G_{w3}(x, z, \xi, \tau) * f_{3,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1,m-1}(x, \xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{1,m-1}(x, \xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{m-1}(x, \xi, \tau), \\ f_{3,m-1}(x, \xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{3,m-1}(x, \xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(x, \xi, \tau); \\ H_m(x, z, \tau) &= -\eta_e^2 \int_0^\infty G_H(x, z, \xi, \tau) * l_+ [\dot{u}_m(x, \xi, \tau), \dot{w}_m(x, \xi, \tau)] d\xi; \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

$$E_{1m}(x, z, \tau) = \int_0^\infty G_{e1}(x, z, \xi, \tau) * l_+ [\dot{u}_m(x, \xi, \tau), \dot{w}_m(x, \xi, \tau)] d\xi - u_{ms}(x, z, \tau); \quad (2.8.7)$$

$$E_{3m}(x, z, \tau) = \int_0^\infty G_{e3}(x, z, \xi, \tau) * l_+ [\dot{u}_m(x, \xi, \tau), \dot{w}_m(x, \xi, \tau)] d\xi - w_{ms}(x, z, \tau); \quad (2.8.8)$$

$$\rho_m(x, z, \tau) = -l_- [w_{ms}(x, z, \tau), u_{ms}(x, z, \tau)]; \quad (2.8.9)$$

$$\begin{aligned} u_{ms}(x, z, \tau) &= u_m(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * u_m(x, z, \tau), \\ w_{ms}(x, z, \tau) &= w_m(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * w_m(x, z, \tau). \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

Как следует из (2.4.5) в соотношения (2.8.6) - (2.8.9) входят производные по пространственным координатам. Для того чтобы избежать этого дифференцирования, операторы  $l_+(u, w)$  и  $l_-(w, u)$  можно записать так:

$$l_+(u_m, w_m) = \rho'_{e0} u_m + \rho_{e0} \omega(u_m, w_m), \quad l_-(w_m, u_m) = \rho'_{e0} w_m + \rho_{e0} \chi(u_m, w_m), \quad (2.8.11)$$

где функции  $\chi(u, w)$  и  $\omega(u, w)$  определены в (1.4.41).

Тогда необходимо дополнительно построить интегральное представление для  $\chi_m = \chi(u_m, v_m)$  и  $\omega_m = \omega(u_m, v_m)$ . Их получаем из (2.8.5):

$$\begin{aligned} \chi_m &= \int_0^\infty X_1(x, z, \xi, \tau) ** f_{1,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^\infty X_3(x, z, \xi, \tau) ** f_{3,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \\ \omega_m &= \int_0^\infty \Omega_1(x, z, \xi, \tau) ** f_{1,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^\infty \Omega_3(x, z, \xi, \tau) ** f_{3,m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

где

$$X_k(x, z, \xi, \tau) = \chi(G_{uk}, G_{wk}), \quad \Omega_k(x, z, \xi, \tau) = \omega(G_{uk}, G_{wk}), \quad k = 1, 3. \quad (2.8.13)$$

При этом соотношение (2.8.9) приобретает следующий вид:

$$\rho_m(x, z, \tau) = -\rho'_{e0}(z) w_{ms}(x, z, \tau) - \rho_{e0}(z) \chi_{ms}(x, z, \tau), \quad (2.8.14)$$

где

$$\chi_{ms}(x, z, \tau) = \chi_m(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_m(x, z, \tau). \quad (2.8.15)$$

Таким образом, преобразованная рекуррентная система уравнений включает в себя соотношения (2.8.4), (2.8.12), (2.8.14), (2.8.15) и (2.8.6) – (2.8.8). Причем в последних трех равенствах необходимо положить

$$l_+ [\dot{u}_m(x, \xi, \tau), \dot{w}_m(x, \xi, \tau)] = \rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \dot{w}_m(x, \xi, \tau). \quad (2.8.16)$$

Изображения ядер в (2.8.12) можно найти непосредственной подстановкой (2.6.12) и (2.6.27) в изображения равенств (2.8.13). Однако эта процедура достаточно громоздка. Поэтому получим эти ядра, опираясь на их связь с функциями

Грина в (2.6.12) и (2.6.27). Для этого используем формулы (П.8.16) - (П.8.18) и (П.8.20), из которых при учете (2.8.13) следуют ( $k = 1, 3$ ) такие равенства:

$$\begin{aligned} X_k^{LF}(q, z, \xi, s) &= s^2 \left[ -A_{1k}(q, s) e^{-zk_1(q^2, s^2)} + A_{2k}(q, s) e^{zk_1(q^2, s^2)} \right] + \\ &\quad + \chi^{LF}(G_{uk^*}^{LF}, G_{wk^*}^{LF}), \\ \Omega_k^{LF}(q, z, \xi, s) &= \eta^2 s^2 \left[ -B_{1k}(q, s) e^{-zk_2(q^2, s^2)} + B_{2k}(q, s) e^{zk_2(q^2, s^2)} \right] + \\ &\quad + \omega^{LF}(G_{uk^*}^{LF}, G_{wk^*}^{LF}). \end{aligned} \quad (2.8.17)$$

Для их преобразования сначала находим последние слагаемые:

$$\begin{aligned} \chi^{LF}(G_{uk^*}^{LF}, G_{wk^*}^{LF}) &= \chi_k^{LF}(q, z, \xi, s) H(z - \xi), \\ \omega^{LF}(G_{uk^*}^{LF}, G_{wk^*}^{LF}) &= \omega_k^{LF}(q, z, \xi, s) H(z - \xi), \end{aligned} \quad (2.8.18)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1^{LF}(q, z, \xi, s) &= \frac{iq}{k_1} \operatorname{sh}[k_1(z - \xi)], \quad \omega_1^{LF}(q, z, \xi, s) = -\eta^2 \operatorname{ch}[k_2(z - \xi)], \\ \chi_3^{LF}(q, z, \xi, s) &= -\operatorname{ch}[k_1(z - \xi)], \quad \omega_3^{LF}(q, z, \xi, s) = -\frac{iq\eta^2}{k_2} \operatorname{sh}[k_2(z - \xi)]. \end{aligned}$$

Подставляя теперь в (2.8.17) равенства (2.6.8), (2.6.11), (2.6.23), (2.6.26) и (2.8.18) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} X_1^{LF}(q, z, \xi, s) &= X_{10}^{LF}(q, z, \xi, s) + X_{11}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) + \\ &\quad + X_{11}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi), \\ X_3^{LF}(q, z, \xi, s) &= X_{30}^{LF}(q, z, \xi, s) + X_{31}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) - \\ &\quad - X_{31}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi), \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

где

$$\begin{aligned} X_{10}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \\ &= \frac{iq}{2} \left[ -\frac{P_1(q^2, s^2)}{k_1(q^2, s^2)} e^{-(z+\xi)k_1(q^2, s^2)} + k_2(q^2, s^2) P_3(q^2, s^2) e^{-zk_1(q^2, s^2) - k_2(q^2, s^2)\xi} \right], \\ X_{11}^{LF}(q, z, \xi, s) &= -\frac{iq}{2k_1(q^2, s^2)} e^{-k_1(q^2, s^2)(\xi - z)}, \end{aligned}$$

$$X_{30}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{1}{2} \left[ P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_1(q^2, s^2)} - q^2 P_3(q^2, s^2) e^{-zk_1(q^2, s^2) - k_2(q^2, s^2)\xi} \right],$$

$$X_{31}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{1}{2} e^{-k_1(q^2, s^2)(\xi-z)};$$

$$\begin{aligned} \Omega_1^{LF}(q, z, \xi, s) &= \Omega_{10}^{LF}(q, z, \xi, s) + \Omega_{11}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) - \\ &\quad - \Omega_{11}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi), \\ \Omega_3^{LF}(q, z, \xi, s) &= \Omega_{30}^{LF}(q, z, \xi, s) + \Omega_{31}^{LF}(q, z, \xi, s) H(\xi - z) + \\ &\quad + \Omega_{31}^{LF}(q, \xi, z, s) H(z - \xi), \end{aligned} \tag{2.8.20}$$

где

$$\Omega_{10}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{\eta^2}{2} \left[ -q^2 P_3(q^2, s^2) e^{-k_1(q^2, s^2)\xi - zk_2(q^2, s^2)} + P_1(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_2(q^2, s^2)} \right],$$

$$\Omega_{11}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{\eta^2}{2} e^{-k_2(q^2, s^2)(\xi-z)},$$

$$\begin{aligned} \Omega_{30}^{LF}(q, z, \xi, s) &= \\ &= \frac{\eta^2}{2} \left[ -iqk_1(q^2, s^2) P_3(q^2, s^2) e^{-(z+\xi)k_1} + \frac{iqP_1(q^2, s^2)}{k_2} e^{-zk_1(q^2, s^2) - k_2(q^2, s^2)\xi} \right], \end{aligned}$$

$$\Omega_{31}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{\eta^2 iq}{2k_2} e^{-k_2(q^2, s^2)(\xi-z)}.$$

Часть из оригиналов функций в (2.8.19) и (2.8.20) может быть найдена в явном виде аналогично § 2.6. Остальные имеют структуру (2.6.34). Однако в этом случае функция  $f(q, s)$  однородная нулевой степени. Следовательно, использование алгоритма § 2.6 приводит к необходимости дополнительного дифференцирования по времени. Поэтому соотношения (2.8.12) необходимо заменить следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \chi_{lm}(x, z, \xi, \tau) &= \\ &= \int_0^\infty X_{l1}(x, z, \xi, \tau) ** f_{1, m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^\infty X_{l3}(x, z, \xi, \tau) ** f_{3, m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \\ \omega_{lm}(x, z, \xi, \tau) &= \\ &= \int_0^\infty \Omega_{l1}(x, z, \xi, \tau) ** f_{1, m-1}(x, \xi, \tau) d\xi + \int_0^\infty \Omega_{l3}(x, z, \xi, \tau) ** f_{3, m-1}(x, \xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \tag{2.8.21}$$

где

$$\begin{aligned}\chi_{lm}(x, z, \xi, \tau) &= \int_0^\tau \chi_m(x, z, \xi, \tau) d\tau, \quad X_{lk}^{LF}(q, z, \xi, s) = s^{-1} X_k^{LF}(q, z, \xi, s), \\ \omega_{lm}(x, z, \xi, \tau) &= \int_0^\tau \omega_m(x, z, \xi, \tau) d\tau, \quad \Omega_{lk}^{LF}(q, z, \xi, s) = s^{-1} \Omega_k^{LF}(q, z, \xi, s).\end{aligned}\quad (2.8.22)$$

Окончательно при  $m \geq 1$  получаем рекуррентную систему уравнений, состоящую из (2.8.5), (2.8.21), а также полученных из (2.8.6) – (2.8.8) и (2.8.14) с учетом (2.8.22) следующих соотношений:

$$\begin{aligned}H_m(x, z, \tau) &= \\ &= -\eta_e^2 \int_0^\infty G_H(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \ddot{w}_{lm}(x, \xi, \tau)] d\xi;\end{aligned}\quad (2.8.23)$$

$$\begin{aligned}E_{1m}(x, z, \tau) &= -u_{ms}(x, z, \tau) + \\ &+ \int_0^\infty G_{e1}(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \ddot{w}_{lm}(x, \xi, \tau)] d\xi;\end{aligned}\quad (2.8.24)$$

$$\begin{aligned}E_{3m}(x, z, \tau) &= -w_{ms}(x, z, \tau) + \\ &+ \int_0^\infty G_{e3}(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \ddot{w}_{lm}(x, \xi, \tau)] d\xi;\end{aligned}\quad (2.8.25)$$

$$\begin{aligned}\rho_m(x, z, \tau) &= -\rho'_{e0}(z) [w_m(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * w_m(x, z, \tau)] - \\ &- \rho_{e0}(z) [\dot{\chi}_{lm}(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \dot{\chi}_{lm}(x, z, \tau)].\end{aligned}\quad (2.8.26)$$

Входящие в равенства (2.8.23) - (2.8.26) производные по времени могут быть найдены численным дифференцированием. Корректность этой операции обеспечивается достаточной гладкостью правых частей начальных условий (2.8.4) для рекуррентной системы уравнений.

## § 2.9. Распространение нестационарных кинематических поверхностных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости

Полагаем, что на границе полуплоскости задано нормальное перемещение:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = W_0(x, \tau), \quad (2.9.1)$$

и нормальная компонента напряженности электрического поля отсутствует, т.е.

$$E_3|_{z=0} = 0, \quad (2.9.2)$$

что является частным случаем граничных условий (2.1.5).

Постановка этой задачи приведена в § 2.1. Она отличается от задачи § 2.8 только граничными условиями. Поэтому для представления ее решения в виде рядов (2.2.1) по малому параметру  $\alpha$  при  $m \geq 1$  рекуррентная система уравнений (2.8.5), (2.8.21), (2.8.23) - (2.8.26) сохраняет свой вид. Но ядру  $G_H(x, z, \xi, \tau)$  в отличие от (2.2.20) отвечает ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 G_H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 G_H^{LF} = \delta(z - \xi), \quad G_H^{LF}|_{z=0} = 0. \quad (2.9.3)$$

При этом изображения ядер  $G_{e1}(x, z, \xi, \tau)$  и  $G_{e3}(x, z, \xi, \tau)$  в соответствии с (2.4.10) и (2.4.11) определяются, как и ранее:

$$G_{e1}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{1}{s + \gamma} \frac{\partial G_H^{LF}(q, z, \xi, s)}{\partial z}, \quad G_{e3}^{LF}(q, z, \xi, s) = \frac{iq}{s + \gamma} G_H^{LF}(q, z, \xi, s). \quad (2.9.4)$$

Начальные условия к этой рекуррентной системе уравнений по перемещениям имеет вид (2.5.6). Изображение функции  $H_0(x, z, \tau)$  согласно (2.2.2), (2.2.11) и (2.9.1), (2.9.2) есть ограниченное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 H_0^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H_0^{LF} = -\eta_e^2 s l_+^F(u_0^{LF}, w_0^{LF}), \quad H_0^{LF}|_{z=0} = 0. \quad (2.9.5)$$

Его оригинал, а также остальные соответствующие компоненты электромагнитного поля с учетом однородности граничных условий и формул (2.8.11) записываем аналогично (2.8.6) - (2.8.9):

$$H_0(x, z, \tau) = -\eta_e^2 \int_0^\infty G_H(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_0(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \dot{w}_0(x, \xi, \tau)] d\xi; \quad (2.9.6)$$

$$E_{10}(x, z, \tau) = \int_0^\infty G_{e1}(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_0(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \dot{w}_0(x, \xi, \tau)] d\xi - u_{0s}(x, z, \tau); \quad (2.9.7)$$

$$E_{30}(x, z, \tau) = \int_0^\infty G_{e3}(x, z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_0(x, \xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \dot{w}_0(x, \xi, \tau)] d\xi - w_{0s}(x, z, \tau); \quad (2.9.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_0(x, z, \tau) = & -\rho'_{e_0}(z) \left[ w_0(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * w_0(x, z, \tau) \right] - \\ & - \rho_{e_0}(z) \left[ \chi_0(x, z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_0(x, z, \tau) \right], \end{aligned} \quad (2.9.9)$$

где

$$\omega_0 = \omega(u_0, w_0), \chi_0 = \chi(u_0, w_0). \quad (2.9.10)$$

Формулы для входящих в последние равенства функций находим, применяя операторы (1.4.41) к равенствам в (2.5.6):

$$\begin{aligned} \chi_0 = & -G_{130}(x, z, \tau) ** W_0''(x, \tau) + \\ & + G_{\chi_1}(x, z, \tau) ** \ddot{W}_0(x, \tau) + G_{\chi_2}(x, z, \tau) ** W_0'(x, \tau), \\ \omega_0 = & G_{\omega}(x, z, \tau) ** \dot{W}_0'(x, \tau) + G_{332}(x, z, \tau) ** W_0''(x, \tau), \end{aligned} \quad (2.9.11)$$

где

$$\begin{aligned} G_{\chi_1}^{LF}(q, z, s) = & \frac{\partial G_{331}^{LF}(q, z, s)}{s \partial z}, \quad G_{\chi_2}^{LF}(q, z, s) = -\frac{\partial G_{332}^{LF}(q, z, s)}{i q \partial z}, \\ G_{\omega}^{LF}(q, z, s) = & -\frac{\partial G_{130}^{LF}(q, z, s)}{s \partial z} - G_{331}^{LF}(q, z, s). \end{aligned}$$

Явный вид изображений ядер в (2.9.11) находим с помощью (2.5.5):

$$\begin{aligned} G_{130}^{LF} = & G_{131}^{LF} + G_{132}^F, \quad G_{131}^{LF} = -\frac{k_2(q^2, s^2)}{R(q^2, s^2)} e^{-k_1(q^2, s^2)z}, \quad G_{132}^{LF} = \frac{k_2(q^2, s^2)}{R(q^2, s^2)} e^{-k_2(q^2, s^2)z}, \\ G_{332}^{LF} = & -\frac{i q}{R(q^2, s^2)} e^{-k_2(q^2, s^2)z}, \quad G_{\chi_1}^{LF}(q, z, s) = \frac{k_1^2(q^2, s^2) k_2(q^2, s^2)}{s^2 R(q^2, s^2)} e^{-k_1(q^2, s^2)z}, \\ G_{\chi_2}^{LF}(q, z, s) = & -G_{132}^{LF}(q, z, s), \quad G_{\omega}^{LF}(q, z, s) = \frac{k_2^2(q^2, s^2)}{s R(q^2, s^2)} e^{-k_2(q^2, s^2)z}. \end{aligned} \quad (2.9.12)$$

Поскольку их структура аналогична рассмотренным в § 2.5 функциям, то явный вид оригиналов может быть найден тем же методом.

Для замыкания алгоритма осталось найти ядра интегральных соотношений (2.9.6) - (2.9.8).

Сначала аналогично § 2.3 построим ограниченное решение задачи (2.9.3). Общее решение соответствующего уравнения и первая из постоянных интегрирования имеет вид (2.3.5) и (2.3.6). Вторую постоянную определяем из граничного условия в (2.9.3):

$$C_2 = -C_1 = \frac{e^{-k_e \xi}}{2k_e}. \quad (2.9.13)$$

Следовательно, искомая функция Грина имеет следующий вид:

$$G_H^{LF} = f^{LF}(q, z + \xi, s) - f^{LF}(q, |z - \xi|, s), \quad (2.9.14)$$

где функция  $f^{LF}(q, z, s)$  и ее оригинал определены равенствами (2.3.9) и (2.4.8).

Оригинал же самой функции Грина аналогично (2.4.9) записывается так:

$$G_H(x, z, \xi, \tau) = f(x, z + \xi, \tau) - f(x, \xi - z, \tau). \quad (2.9.15)$$

Функции  $G_{e1}^{LF}$  и  $G_{e3}^{LF}$  в соответствии с (2.9.4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_{e1}^{LF}(q, z, \xi, s) &= f_1^{LF}(q, z + \xi, s) - f_1^{LF}(q, |z - \xi|, s) \text{sign}(z - \xi), \\ G_{e3}^{LF}(q, z, \xi, s) &= f_3^{LF}(q, |z - \xi|, s) - f_3^{LF}(q, z + \xi, s). \end{aligned} \quad (2.9.16)$$

Входящие сюда функции  $f_1^{LF}$ ,  $f_3^{LF}$  и их оригиналы задаются равенствами в (2.4.12), (2.4.13) и (2.4.19), (2.4.20) соответственно. При этом оригиналы функций  $G_{e1}^{LF}$  и  $G_{e3}^{LF}$  подобно (2.4.21) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{e1}(x, z, \xi, \tau) &= f_1(x, z + \xi, \tau) + f_1(x, \xi - z, \tau), \\ G_{e3}(x, z, \xi, \tau) &= f_3(x, \xi - z, \tau) - f_3(x, z + \xi, \tau). \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу, полагая в (2.9.1)  $W_0(x, \tau) = W_0(\tau)$  [55,56]. В этом случае все искомые функции зависят только от времени и координаты  $z$ . Тогда начальные условия к рекуррентной системе уравнений (2.5.6) и (2.9.11) трансформируются так:

$$u_0(z, \tau) = 0, \quad w_0(z, \tau) = G_{331}(z, \tau) * \dot{W}_0(\tau); \quad (2.9.18)$$

$$\chi_0(z, \tau) = G_{\chi 1}(z, \tau) * \ddot{W}_0(\tau), \quad \omega_0(z, \tau) = 0. \quad (2.9.19)$$

И соответственно представления (2.9.6) - (2.9.8) приобретают следующий вид:

$$H_0(z, \tau) = E_{10}(z, \tau) = 0, \quad E_{30}(z, \tau) = -w_{0s}(z, \tau). \quad (2.9.20)$$

Изображения всех функций в соответствии со свойствами преобразования Фурье [108] пропорциональны дельта-функции Дирака, например:

$$w^{LF} = 2\pi w^L \delta(q). \quad (2.9.21)$$

Поэтому во всех соотношениях изображения двойного преобразования необходимо заменить трансформантами Лапласа и положить  $q = 0$ . В частности, изображения ядер  $G_{331}$  и  $G_{\chi_1}$  в (2.9.19) и (2.9.20) согласно (2.9.12) имеет такой вид:

$$G_{331}^L(z, s) = -G_{\chi_1}^L(z, s) = \frac{1}{s} e^{-sz}. \quad (2.9.22)$$

Тогда с учетом свойств преобразования Лапласа нетривиальные равенства в (2.9.18) и (2.9.19) записываются так:

$$w_0(z, \tau) = W_0(\tau - z)H(\tau - z), \quad \chi_0(z, \tau) = -\dot{W}_0(\tau - z)H(\tau - z). \quad (2.9.23)$$

Отсюда следует явная форма соотношения (2.9.9) и нетривиального равенства в (2.9.20):

$$\rho_0(z, \tau) = [\rho_{e0}(z)\dot{W}_{0s}(\tau - z) - \rho'_{e0}(z)W_{0s}(\tau - z)]H(\tau - z); \quad (2.9.24)$$

$$E_{30}(z, \tau) = -W_{0s}(\tau - z)H(\tau - z), \quad (2.9.25)$$

где

$$W_{0s}(z, \tau) = W_0(z, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * W_0(z, \tau).$$

Изображения ядер в (2.8.5) и (2.8.12), (2.8.21), (2.8.22) согласно (2.6.13) - (2.6.31) и (2.8.19), (2.8.20) для одномерной задачи принимают следующий вид:

$$G_{u1}^L(z, \xi, s) = \frac{\eta}{2s} \left[ e^{-\eta(\xi-z)s} H(\xi - z) + e^{-\eta(z-\xi)s} H(z - \xi) - e^{-\eta(z+\xi)s} \right]$$

$$G_{w1}^L(z, \xi, s) = 0, \quad G_{u3}^L(z, \xi, s) = 0, \quad (2.9.26)$$

$$G_{w3}^L(z, \xi, s) = \frac{1}{2s} \left[ e^{-(\xi-z)s} H(\xi - z) + e^{-(z-\xi)s} H(z - \xi) - e^{-(z+\xi)s} \right];$$

$$X_1^L(z, \xi, s) = 0, \quad X_{11}^L(z, \xi, s) = 0, \quad \Omega_3^L(z, \xi, s) = 0, \quad \Omega_{13}^L(z, \xi, s) = 0,$$

$$X_3^L(z, \xi, s) = \frac{1}{2} \left[ e^{-(z+\xi)s} + e^{-(\xi-z)s} H(\xi - z) - e^{-(z-\xi)s} H(z - \xi) \right],$$

$$\Omega_1^L(z, \xi, s) = \frac{\eta^2}{2} \left[ e^{-\eta(z+\xi)s} + e^{-\eta(\xi-z)s} H(\xi - z) - e^{-\eta(z-\xi)s} H(z - \xi) \right], \quad (2.9.27)$$

$$X_{13}^L(0, z, \xi, s) = \frac{1}{2s} \left[ e^{-(z+\xi)s} + e^{-(\xi-z)s} H(\xi - z) - e^{-(z-\xi)s} H(z - \xi) \right],$$

$$\Omega_{11}^L(0, z, \xi, s) = \frac{\eta^2}{2s} \left[ e^{-\eta(z+\xi)s} + e^{-\eta(\xi-z)s} H(\xi - z) - e^{-\eta(z-\xi)s} H(z - \xi) \right].$$

В результате получаем две независимые рекуррентные системы уравнений. Первая из них включает в себя вытекающие из (2.9.19) и (2.9.20) однородные начальные условия

$$u_0(z, \tau) = 0, \omega_0 = 0, H_0(z, \tau) = 0, E_{10}(z, \tau) = 0 \quad (2.9.28)$$

и следующие из (2.8.5), (2.8.21) - (2.8.24) соотношения при  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} u_m(z, \tau) &= \int_0^\infty G_{u1}(z, \xi, \tau) * f_{1,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \\ \omega_{1m}(z, \xi, \tau) &= \int_0^\infty \Omega_{I1}(z, \xi, \tau) ** f_{1,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \\ f_{1,m-1}(\xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{1,m-1}(\xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{m-1}(\xi, \tau); \\ H_m(z, \tau) &= -\eta_e^2 \int_0^\infty G_H(z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(\xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \ddot{\omega}_{1m}(\xi, \tau)] d\xi, \\ E_{1m}(z, \tau) &= -u_{ms}(x, z, \tau) + \\ &+ \int_0^\infty G_{e1}(z, \xi, \tau) ** [\rho'_{e0}(\xi) \dot{u}_m(\xi, \tau) + \rho_{e0}(\xi) \ddot{\omega}_{1m}(\xi, \tau)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.9.30)$$

Эта система является однородной и, следовательно, ее решение тривиальное:

$$u_m(z, \tau) = 0, \omega_m = 0, H_m(z, \tau) = 0, E_{1m}(z, \tau) = 0 \quad (m \geq 0). \quad (2.9.31)$$

Вторую рекуррентную систему уравнений составляем из начальных условий (2.9.23) - (2.9.25) и следующих из (2.8.5), (2.8.12), (2.8.21) - (2.8.24) соотношений при  $m \geq 1$ :

$$w_m(z, \tau) = \int_0^\infty G_{w3}(z, \xi, \tau) * f_{3,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (2.9.32)$$

$$f_{3,m-1}(\xi, \tau) = \rho_{e0}(\xi) E_{3,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau);$$

$$\begin{aligned} \chi_m(z, \xi, \tau) &= \frac{1}{2} H(\tau - z) \int_0^{\tau-z} f_{3,m-1}(\xi, \tau - z - \xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\tau+z} f_{3,m-1}(\xi, \tau - \xi + z) d\xi - H(z - \tau) \int_{z-\tau}^\infty f_{3,m-1}(\xi, \tau - z + \xi) d\xi \right]; \end{aligned} \quad (2.9.33)$$

$$E_{3m}(x, z, \tau) = -w_{ms}(x, z, \tau); \quad (2.9.34)$$

$$\rho_m(x, z, \tau) = -\rho'_{e0}(z)w_{ms}(x, z, \tau) - \rho_{e0}(z)\chi_{ms}(x, z, \tau), \quad (2.9.35)$$

Здесь учтено, что оригинал функции  $X_3^L(z, \xi, s)$  в (2.9.27) имеет вид

$$X_3(z, \xi, \tau) = \frac{1}{2}[\delta(\tau - z - \xi) + \delta(\tau - \xi + z) - \delta(\tau - z + \xi)], \quad (2.9.36)$$

и соответственно ему вместо (2.8.21) и (2.8.26) использованы соотношения (2.8.12) и (2.8.14). При этом по сравнению с двумерной задачей отпадает необходимость дифференцирования по времени.

В качестве примера рассматриваем алюминиевую полуплоскость. Электрические параметры принимаем следующими:  $\alpha = 0,0806$ ;  $\gamma = 5,06$  [112] ( $E_* = 1$  в/м). Полагаем, что правая часть граничных условий (2.9.1) задается в виде функции Хевисайда:

$$W_0(\tau) = H(\tau), \quad (2.9.37)$$

а начальные параметры электрического поля таковы:

$$\rho_{e0} = \frac{1}{2\sqrt{z}}, \quad E_0 = \sqrt{z}, \quad (2.9.38)$$

Результаты расчетов при учете четырех членов рядов по малому параметру представлены на рис. 2.9.1 – 2.9.6. Учет пятого члена приводит фактически к тем же графикам.

На рисунке 2.9.1 приведены графики изменения перемещения по координате  $z$  для различных значений  $\tau$ : сплошная линия соответствует  $\tau = 10$ , пунктирная  $\tau = 7$ , штрихпунктирная  $\tau = 4$ , штрихпунктирная с двумя точками  $\tau = 1$ . На рисунке 2.9.2 приведены графики изменения перемещения по времени  $\tau$  для различных значений  $z$ : сплошная линия соответствует  $z = 9$ , пунктирная  $z = 6$ , штрихпунктирная  $z = 3$ , штрихпунктирная с двумя точками  $z = 0.1$ . На рисунке 2.9.3 приведены графики изменения напряжённости электрического поля по координате  $z$  для различных значений  $\tau$ : сплошная линия соответствует  $\tau = 10$ , пунктирная  $\tau = 7$ , штрихпунктирная  $\tau = 3$ , штрихпунктирная с двумя точками  $\tau = 1$ . На рисунке 2.9.4 приведены графики изменения напряжённости электрического поля по времени  $\tau$  для различных значений  $z$ : сплошная линия соответ-

ствуется  $z = 3$ , пунктирная  $z = 6$ , штрихпунктирная  $z = 9$ , штрихпунктирная с двумя точками  $z = 0.1$ . На рисунке 2.9.5 приведены графики изменения плотности электрических зарядов по координате  $z$  для различных значений  $\tau$ : сплошная линия соответствует  $\tau = 10$ , пунктирная  $\tau = 7$ , штрихпунктирная  $\tau = 4$ , штрихпунктирная с двумя точками  $\tau = 1$ . На рисунке 2.9.6 приведены графики изменения плотности электрических зарядов по времени  $\tau$  для различных значений  $z$ : сплошная линия соответствует  $z = 3$ , пунктирная  $z = 6$ , штрихпунктирная  $z = 9$ , штрихпунктирная с двумя точками  $z = 1$ .

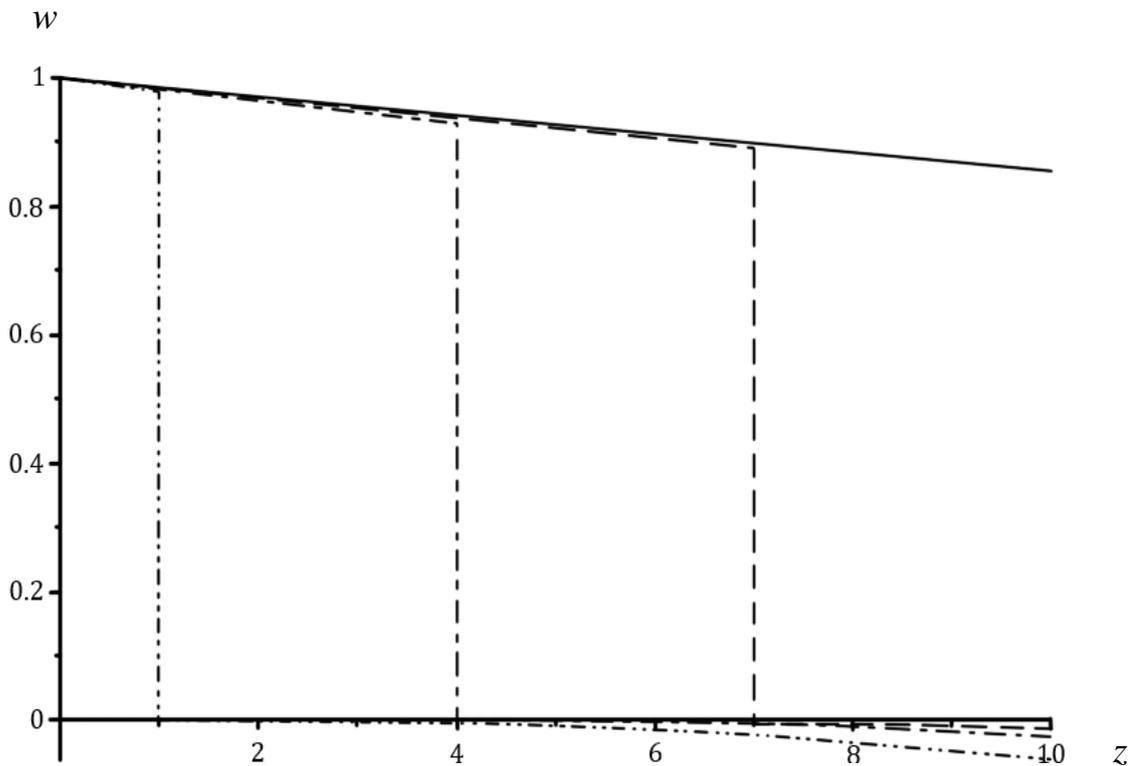


Рис. 2.9.1

w

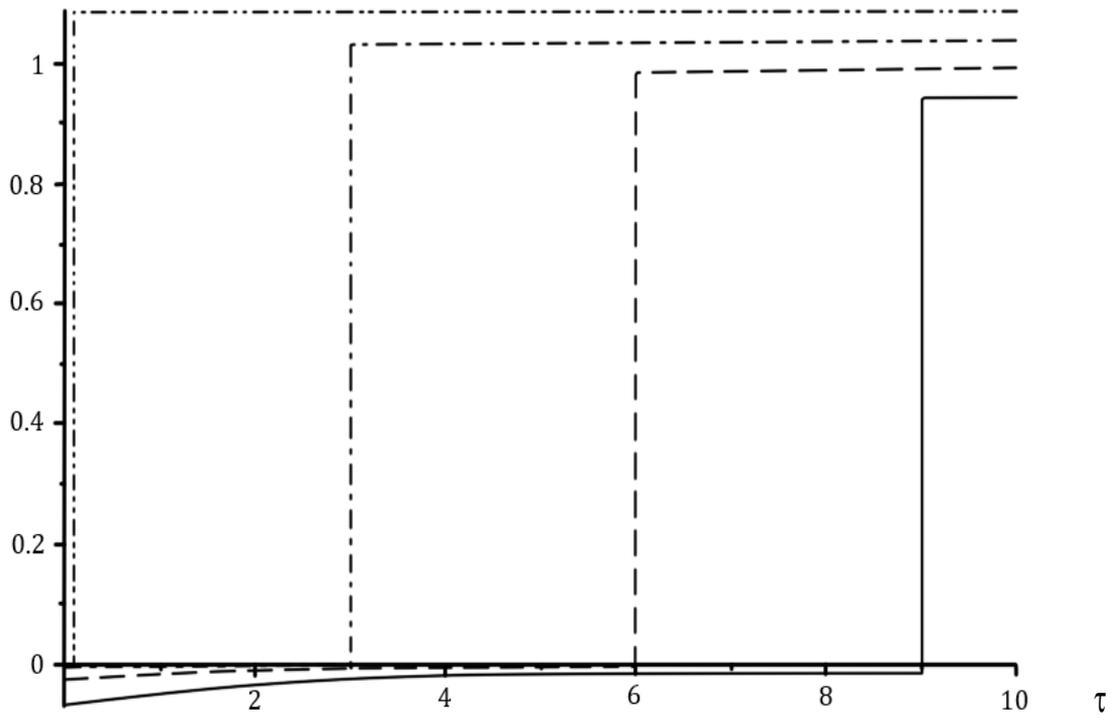


Рис. 2.9.2

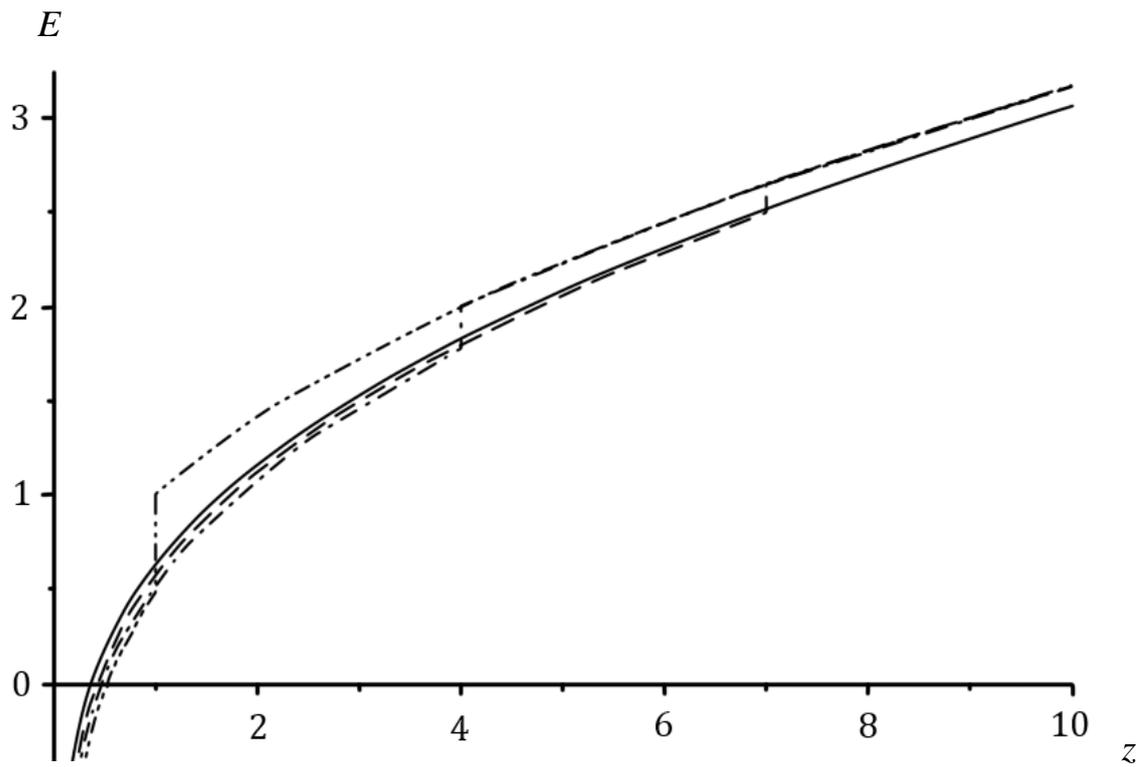


Рис. 2.9.3

 $E$

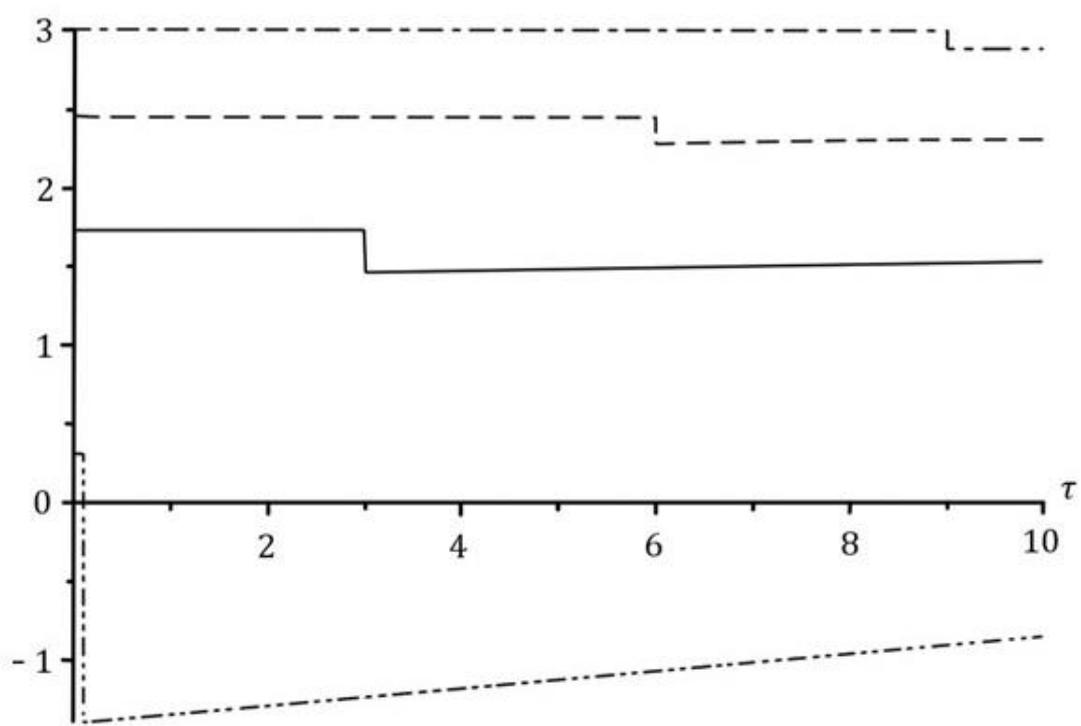


Рис. 2.9.4

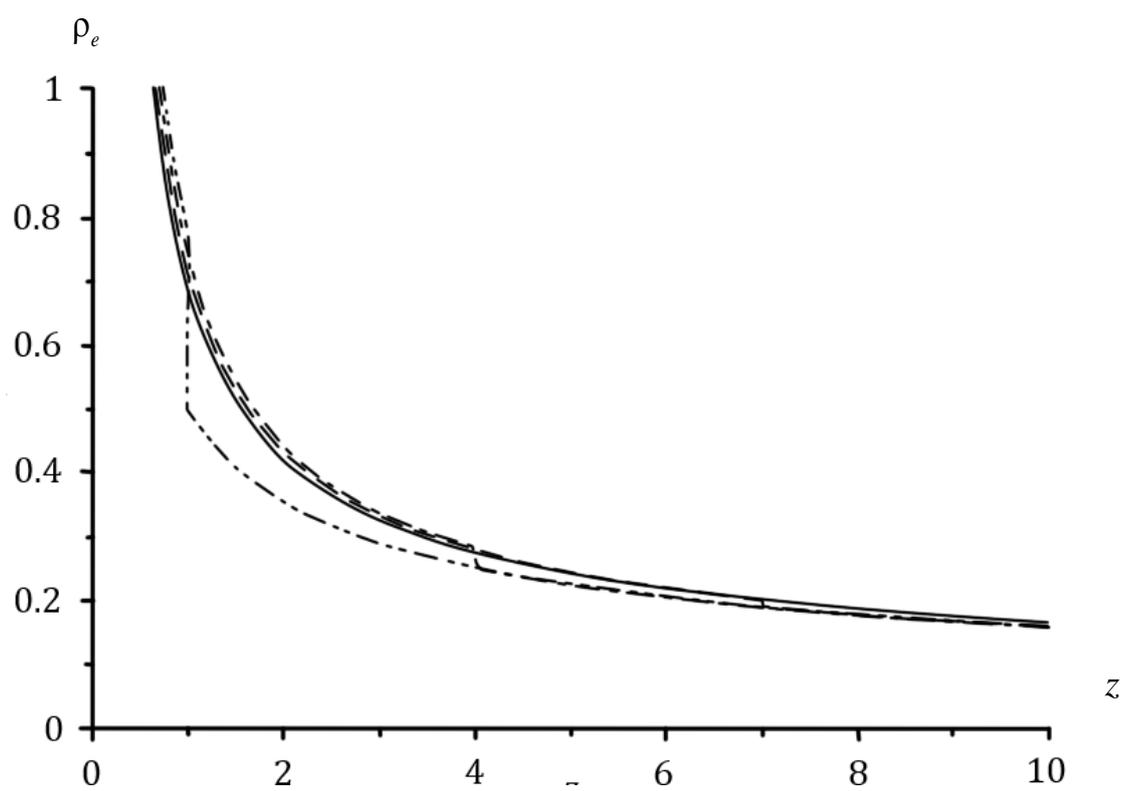


Рис. 2.9.5

 $\rho_e$

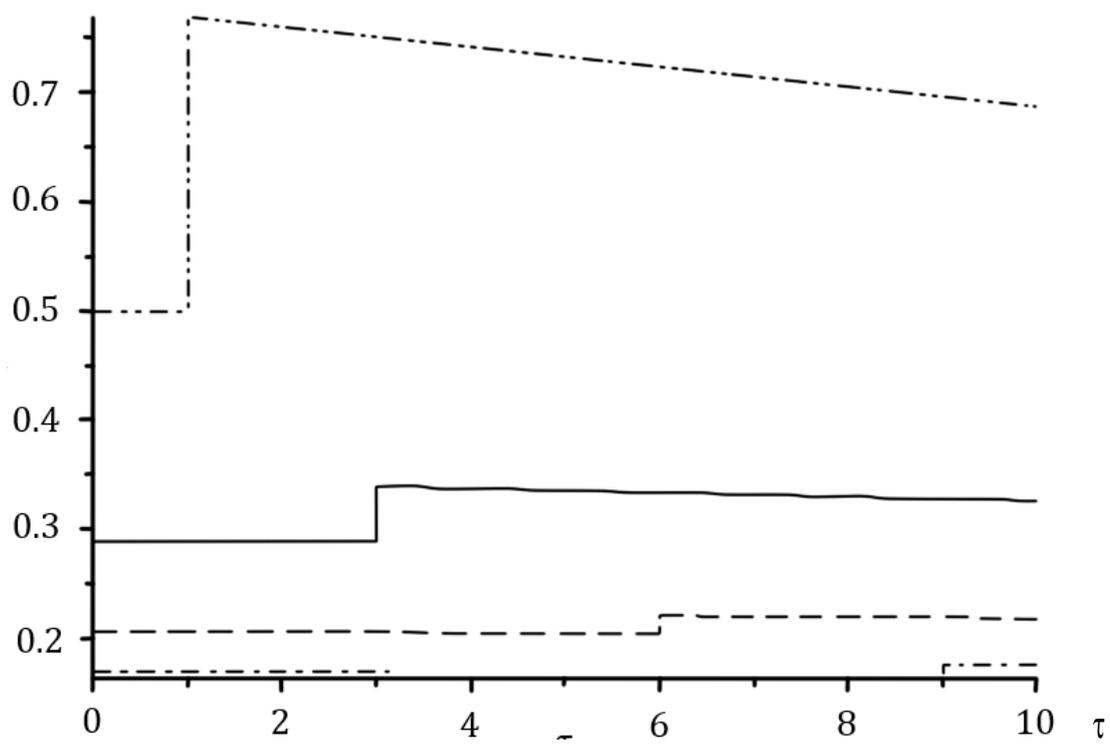


Рис. 2.9.6

## Нестационарные волны в электромагнитоупругой толстостенной сфере

### § 3.1. Электромагнитоупругая толстостенная сфера под действием нестационарных поверхностных возмущений

Аналогично главе 2 в рамках построенной в главе 1 модели изотропных проводников в сферической системе координат рассмотрим осесимметричное движение электромагнитоупругой толстостенной сферы с внутренним  $r_0$  и внешним  $r_1$  радиусами [74,82,64,89,61,83,84]. Оно описывается замкнутой системой безразмерных уравнений (1.5.32) относительно напряженности  $H$  магнитного поля (или (1.5.12) и (1.5.15) относительно координат  $E_r$  и  $E_\theta$  вектора напряженности электрического поля) и (1.5.33) относительно перемещений  $u$ ,  $v$  (или (1.5.36) и (1.5.37) относительно потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ ).

Правые части уравнений (1.5.12) задаются равенствами (1.5.31), деформации, напряжения, координаты  $j_r$ ,  $j_\theta$  вектора плотности тока - соотношениями (1.5.4), (1.5.26), (1.5.29), а ненулевая координата  $H$  вектора напряженности магнитного поля и плотность зарядов  $\rho_e$  – первым и четвертым равенствами в (1.5.27).

Считаем, что начальное электромагнитное поле является стационарным, радиальным и удовлетворяет условиям:

$$E_{0r} = E_0(r), E_{0\theta} \equiv 0, H_0 = H_0(r), \quad (3.1.1)$$

чему в силу (1.5.38) отвечают равенства

$$\frac{\partial E_0}{\partial r} + \frac{2}{r} E_0 = \rho_{0e}, j_{0r} = -j_{s0r} = E_0, j_{0\theta} \equiv 0, \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_0)}{\partial r} = -\eta_e^2 \gamma j_{s0\theta}. \quad (3.1.2)$$

В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, что согласно (1.3.2) и (1.3.3) соответствует равенствам

$$\begin{aligned} u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = \\ = E_r|_{\tau=0} = \dot{E}_r|_{\tau=0} = E_\theta|_{\tau=0} = \dot{E}_\theta|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Полагаем, что на границах сферы заданы нестационарные возмущения вида (1.3.4), (1.3.5). Из дальнейшего изложения будет ясно, что алгоритмы решений начально-краевых задач для различных вариантов граничных условий идентичны.

Поэтому далее ограничимся вариантом задания кинематических возмущений и напряженности электрического поля ( $k = 0, 1$ ):

$$u|_{r=r_k} = U_k(\tau, \theta), v|_{r=r_k} = V_k(\tau, \theta), E_\theta|_{r=r_k} = e_{0k}(\tau, \theta), \quad (3.1.4)$$

или

$$u|_{r=r_k} = U_k(\tau, \theta), v|_{r=r_k} = V_k(\tau, \theta), E_r|_{r=r_k} = e_{r0k}(\tau, \theta), \quad (3.1.5)$$

Решение сформулированной задачи представляем в виде рядов по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  и Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(x)$  [111,1]:

$$\begin{pmatrix} u \\ \sigma_{rr} \\ E_r \\ \rho_e \\ F_{er} \\ j_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_{rn} \\ E_{rn} \\ \rho_n \\ F_{ern} \\ j_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} v \\ \sigma_{r\theta} \\ E_\theta \\ H \\ F_{e\theta} \\ j_\theta \end{pmatrix} = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ \sigma_{r\theta n} \\ E_{\theta n} \\ H_n \\ F_{e\theta n} \\ j_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\theta\theta n}(r, \tau) P_n(\cos \theta) - \frac{1-\kappa}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\vartheta\vartheta n}(r, \tau) P_n(\cos \theta) + \frac{1-\kappa}{r} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Далее аналогично (2.1.9) везде положим

$$H_0 \equiv 0. \quad (3.1.8)$$

Принципиально можно рассматривать и общий случай, когда  $H_0$  отлично от нуля. Однако, как следует из (1.5.28), (1.5.29) и т.д., тогда все искомые функции необходимо представлять в виде рядов вида (3.1.7), что существенно усложняет задачу.

С учетом этого замечания и (3.1.1) соотношения (1.5.27) – (1.5.29) записываются так:

$$-r\dot{H}_n = \frac{\partial(rE_{\theta n})}{\partial r} + E_{rn}, \quad -\frac{\partial(rH_n)}{\partial r} = \eta_e^2 r(\gamma j_{\theta n} + \dot{E}_{\theta n}) \quad (n \geq 1), \quad (3.1.9)$$

$$n(n+1)H_n = \eta_e^2 r(\gamma j_{rn} + \dot{E}_{rn}), \quad \rho_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_{rn})}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} E_{\theta n};$$

$$F_{rn} = \alpha(\rho_{e0} E_{rn} + \rho_n E_0), \quad F_{e\theta n} = \alpha(\rho_{e0} E_{\theta n} - \gamma E_0 H_n); \quad (3.1.10)$$

$$j_m = E_m + \rho_{e0} \dot{u}_n / \gamma, \quad j_{\theta n} = E_{\theta n} + \rho_{e0} \dot{v}_n / \gamma; \quad (3.1.11)$$

В качестве основных неизвестных функций аналогично § 2.1 принимаем перемещения и напряженность магнитного поля. Соответствующие разрешающие уравнения вытекают (1.5.32) и (1.5.33) при учете (3.1.1):

$$\eta_e^2 (\ddot{H}_n + \gamma \dot{H}_n) = \Delta_n \dot{H}_n + \eta_e^2 l_H (\ddot{u}_n, \ddot{v}_n) \quad (n \geq 1); \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n &= l_{11n}(u_n) + l_{12n}(v_n) + F_{ern} \quad (n \geq 0), \\ \ddot{v}_n &= l_{21n}(u_n) + l_{22n}(v_n) + F_{e\theta n} \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad l_H(u, v) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r\rho_{e0}v)}{\partial r} + \rho_{e0}u \right], \\ l_{11n}(u) &= \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - [\eta^{-2}n(n+1) + 2]u \right\}, \\ l_{21n}(u) &= -\frac{1}{r^2} \left[ (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial(ru)}{\partial r} + (1 + \eta^{-2})u \right], \\ l_{12n}(v) &= -n(n+1) \left[ l_{21n}(v) + (3 + \eta^{-2}) \frac{v}{r^2} \right], \\ l_{22n}(v) &= \frac{1}{r^2} \left[ \eta^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) - n(n+1)v \right]. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Остальные коэффициенты рядов в соответствии с (1.5.4), (1.5.5), (1.5.39), (3.1.9) и (3.1.11) определяются так:

$$\begin{aligned} \sigma_{rm} &= \frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} [2u_n + n(n+1)v_n], \quad \sigma_{r\theta n} = \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{\partial v_n}{\partial r} - \frac{u_n + v_n}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta n} &= \kappa \frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{1}{r} [(1 + \kappa)u_n - n(n+1)v_n], \quad \sigma_{\vartheta\vartheta n} = \sigma_{\theta\theta n} - \frac{1 - \kappa}{r} n(n+1)v_n; \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2 (\dot{E}_{\theta n} + \gamma E_{\theta n}) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n)}{\partial r} - \eta_e^2 \rho_{e0} \dot{v}_n \quad (n \geq 1), \\ \eta_e^2 (\dot{E}_m + \gamma E_m) &= \frac{n(n+1)}{r} H_n - \eta_e^2 \rho_{e0} \dot{u}_n; \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$\dot{\rho}_n + \gamma \rho_n = -l_{np}(\dot{u}_n, \dot{v}_n), \quad (3.1.17)$$

где

$$l_{np}(u, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho_{e0} u)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} \rho_{e0} v.$$

Отметим, что при необходимости вместо (3.1.17) может быть использовано последнее равенство в (3.1.9).

Из (3.1.3) вытекают соответствующие начальные условия:

$$\begin{aligned} u_n|_{\tau=0} = \dot{u}_n|_{\tau=0} = E_{nr}|_{\tau=0} = \dot{E}_{nr}|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), \\ v_n|_{\tau=0} = \dot{v}_n|_{\tau=0} = E_{n\theta}|_{\tau=0} = \dot{E}_{n\theta}|_{\tau=0} = H_n|_{\tau=0} = \dot{H}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Граничные условия (3.1.4) или (3.1.5) при использовании разложений ( $k=0,1$ )

$$\begin{aligned} U_k = \sum_{n=0}^{\infty} U_{kn} P_n(\cos \theta), \quad e_{r0k} = \sum_{n=0}^{\infty} e_{r0kn} P_n(\cos \theta), \\ V_k = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} V_{kn} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \quad e_{0k}(\tau, \theta) = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} e_{0kn} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

и с учетом первого равенства в (3.1.16) переходят в следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v_n|_{r=r_k} = V_{kn}(\tau), \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_n)}{\partial r} \right|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_0 [V_{kn}(\tau), e_{0k}(\tau)]|_{r=r_k} \quad (n \geq 1), \\ u_n|_{r=r_k} = U_{kn}(\tau) \quad (n \geq 0), \quad h_0(v, e) = \rho_{e0} \dot{v} + \dot{e} + \gamma e, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

или

$$\begin{aligned} v_n|_{r=r_k} = V_{kn}(\tau), \quad \left. \frac{n(n+1)}{r} H_n \right|_{r=r_k} = \eta_e^2 h_{r0} [U_{kn}(\tau), e_{r0kn}(\tau)]|_{r=r_k} \quad (n \geq 1), \\ u_n|_{r=r_k} = U_{kn}(\tau) \quad (n \geq 0), \quad h_{r0}(u, e) = \rho_{e0} \dot{u} - \dot{e} - \gamma e. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

При этом в силу второго равенства в (3.1.16) функции  $U_{k0}(\tau)$  и  $e_{r0k0}(\tau)$  должны быть связаны между собой так:

$$\dot{e}_{r0k0} + \gamma e_{r0k0} = -\rho_{e0} \dot{U}_{k0}. \quad (3.1.22)$$

В пространстве преобразований Лапласа по времени  $\tau$  уравнения (3.1.12) и (3.1.13) с учетом (3.1.14) и начальных условий (3.1.18) записываются так [107]:

$$s_e^2 \eta_e^2 H_n^L = \Delta_n H_n^L + \eta_e^2 s l_H (u_n^L, v_n^L) \quad (n \geq 1), \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}; \quad (3.1.23)$$

$$\begin{aligned} s^2 u_n^L &= l_{11n} (u_n^L) + l_{12n} (v_n^L) + \alpha g_u (E_m^L, \rho_n^L) (n \geq 0), \\ s^2 v_n^L &= l_{21n} (u_n^L) + l_{22n} (v_n^L) + \alpha g_v (E_{\theta n}^L, H_n^L) (n \geq 1); \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

где

$$\begin{aligned} g_u (E, \rho) &= \rho_{e0} E + E_0 \rho (n \geq 0), \\ g_v (E, H) &= \rho_{e0} E - \gamma E_0 H, (n \geq 1). \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Изображения коэффициентов для остальных компонент электромагнитного поля и граничные условия согласно (3.1.16), (3.1.17) и (3.1.20), (3.1.21) определяются так:

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{\theta n}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_n^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_n^L (n \geq 1), \quad (3.1.26)$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_m^L = \frac{n(n+1)}{r} H_n^L - \eta_e^2 s \rho_{e0} u_n^L;$$

$$(s + \gamma) \rho_n^L = -s l_{np} (u_n^L, v_n^L); \quad (3.1.27)$$

$$v_n^L \Big|_{r=r_k} = V_{kn}^L (s), \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_n^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{kn}^L (s), e_{0kn}^L (s)] \Big|_{r=r_k} (n \geq 1), \quad (3.1.28)$$

$$u_n^L \Big|_{r=r_k} = U_{kn}^L (s) (n \geq 0), h_0^L (v, e) = s \rho_{e0} v + (s + \gamma) e;$$

$$v_n^L \Big|_{r=r_k} = V_{kn}^L (s), \frac{n(n+1)}{r} H_n^L \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_{r0}^L [U_{kn}^L (s), e_{r0kn}^L (s)] \Big|_{r=r_k} (n \geq 1), \quad (3.1.29)$$

$$u_n^L \Big|_{r=r_k} = U_{kn}^L (s) (n \geq 0), h_{r0}^L (v, e) = s \rho_{e0} u - (s + \gamma) e.$$

### § 3.2. Представление решения методом малого параметра

Как показано в § 2.1, аналитически найти оригиналы решения краевых задач (3.1.19), (3.1.20), (3.1.28) невозможно. Поэтому так же, как и для полуплоскости, будем использовать разложения искомых функций в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
u_n(r, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad v_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \\
H_n(r, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad \rho_n(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \\
E_{rn}(r, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{rnm}(r, \tau) \alpha^m, \quad E_{\theta n}(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\theta nm}(r, \tau) \alpha^m.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Подставляя изображения по Лапласу этих рядов в (3.1.23), (3.1.24), (3.1.26) и (3.1.27), приходим к следующим соотношениям:

- при  $n = 0$

$$s^2 u_{00}^L = l_{110} (u_{00}^L); \tag{3.2.2}$$

$$s^2 u_{0m}^L = l_{110} (u_{0m}^L) + g_u (E_{r0,m-1}^L, \rho_{0,m-1}^L) \quad (m \geq 1); \tag{3.2.3}$$

$$s_e^2 E_{r0m}^L = -s^2 \rho_{e0} u_{0m}^L \quad (m \geq 0); \tag{3.2.4}$$

$$(s + \gamma) \rho_{0m}^L = -\frac{s}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} u_{0m}^L)}{\partial r}, \quad (m \geq 0); \tag{3.2.5}$$

- при  $n \geq 1$

$$s^2 u_{n0}^L = l_{11n} (u_{n0}^L) + l_{12n} (v_{n0}^L), \quad s^2 v_{n0}^L = l_{21n} (u_{n0}^L) + l_{22n} (v_{n0}^L); \tag{3.2.6}$$

$$s^2 u_{nm}^L = l_{11n} (u_{nm}^L) + l_{12n} (v_{nm}^L) + g_u (E_{r,m-1}^L, \rho_{n,m-1}^L), \tag{3.2.7}$$

$$s^2 v_{nm}^L = l_{21n} (u_{nm}^L) + l_{22n} (v_{nm}^L) + g_v (E_{\theta n,m-1}^L, H_{n,m-1}^L) \quad (m \geq 1);$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_{nm}^L = \Delta_n H_{nm}^L + \eta_e^2 s l_H (u_{nm}^L, v_{nm}^L); \tag{3.2.8}$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{\theta nm}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{nm}^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_{nm}^L, \tag{3.2.9}$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{rnm}^L = \frac{n(n+1)}{r} H_{nm}^L - \eta_e^2 \rho_{e0} u_{nm}^L;$$

$$(s + \gamma) \rho_{nm}^L = -s l_{np} (u_{nm}^L, v_{nm}^L). \tag{3.2.10}$$

Соответствующие граничные условия вытекают из (3.1.28) и разложений (3.2.1) ( $k = 0, 1$ ):

$$u_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = U_{kn}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad v_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = V_{kn}^L(s) \quad (n \geq 1); \tag{3.2.11}$$

$$u_{nm}^L \Big|_{r=r_0, r_1} = v_{nm}^L \Big|_{r=r_0, r_1} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 1), \quad v_{nm}^L \Big|_{r=r_0, r_1} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1); \quad (3.2.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{n0}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{kn}^L(s), e_{0kn}^L(s)] \Big|_{r=r_k} \quad (n \geq 1); \quad (3.2.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{nm}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_k} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (3.2.14)$$

В случае граничных условий (3.1.5) последние два равенства согласно (3.1.29) записываются так:

$$\frac{n(n+1)}{r} H_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_{r0}^L [U_{kn}^L(\tau), e_{r0kn}^L(s)] \Big|_{r=r_k} \quad (n \geq 1); \quad (3.2.15)$$

$$\frac{n(n+1)}{r} H_{nm}^L \Big|_{r=r_k} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (3.2.16)$$

Соотношения (3.2.3), (3.2.7), (3.2.12), а также (3.2.8), (3.2.14) (или (3.2.16)) при  $m \geq 1$  являются рекуррентной последовательностью краевых задач с начальными условиями в виде краевой задачи (3.2.2), (3.2.6), (3.2.11) и (3.2.8), (3.2.13) (или (3.2.15)).

Отметим, что задача (3.2.2), (3.2.6), (3.2.11) является чисто упругой. Ее решение записываем так:

$$\begin{aligned} u_{00}^L(r, s) &= \sum_{k=0}^1 G_{uu0k}^L(r, s) U_{kn}^L(s), \\ u_{n0}^L(r, s) &= \sum_{k=0}^1 G_{uunk}^L(r, s) U_{kn}^L(s) + \sum_{k=0}^1 G_{uvnk}^L(r, s) V_{kn}^L(s), \\ v_{n0}^L(r, s) &= \sum_{k=0}^1 G_{vunk}^L(r, s) U_{kn}^L(s) + \sum_{k=0}^1 G_{vvnk}^L(r, s) V_{kn}^L(s) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

где  $G_{uunk}^L(r, s)$ ,  $G_{uvnk}^L(r, s)$ ,  $G_{vunk}^L(r, s)$  и  $G_{vvnk}^L(r, s)$  - поверхностные функции Грина, т.е. решения следующих краевых задач:

- при  $n = 0$

$$s^2 G_{uu0k}^L = l_{110} (G_{uu0k}^L), \quad G_{uu0k}^L \Big|_{r=r_l} = \delta_{k+1, l+1} \quad (l = 0, 1); \quad (3.2.18)$$

- при  $n \geq 1$

$$s^2 G_{uunk}^L = l_{11n} (G_{uunk}^L) + l_{12n} (G_{vunk}^L), \quad s^2 G_{vunk}^L = l_{21n} (G_{uunk}^L) + l_{22n} (G_{vunk}^L), \quad (3.2.19)$$

$$G_{uunk}^L \Big|_{r=r_1} = \delta_{k+1, l+1} \quad (l = 0, 1), \quad G_{vunk}^L \Big|_{r=r_0} = G_{vunk}^L \Big|_{r=r_1} = 0;$$

$$s^2 G_{uvnk}^L = l_{11n} (G_{uvnk}^L) + l_{12n} (G_{vvnk}^L), \quad s^2 G_{vvnk}^L = l_{21n} (G_{uvnk}^L) + l_{22n} (G_{vvnk}^L), \quad (3.2.20)$$

$$G_{uvnk}^L \Big|_{r=r_0} = G_{uvnk}^L \Big|_{r=r_1} = 0, \quad G_{vvnk}^L \Big|_{r=r_1} = \delta_{k+1, l+1} \quad (l = 0, 1),$$

где  $\delta_{kl}$  - символ Кронекера.

Поскольку эти вопросы подробно исследованы в работе [110], то далее за исключением § 3.9 в граничных условиях (3.1.4) положим, что

$$U_k(\theta, \tau) \equiv 0, \quad V_k(\theta, \tau) \equiv 0. \quad (3.2.21)$$

При этом эта задача становится однородной. Следовательно, ее решение тривиальное:

$$u_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \quad v_{n0}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 0). \quad (3.2.22)$$

Решение задачи (3.2.3), (3.2.7), (3.2.12) удобно представить в интегральном виде ( $m \geq 1$ ):

- при  $n = 0$

$$u_{0m}^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0, m-1}^L(\xi, s) d\xi; \quad (3.2.23)$$

- при  $n \geq 1$

$$u_{nm}^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \quad (3.2.24)$$

$$v_{nm}^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi,$$

где

$$f_{un, m-1}^L(\xi, s) = g_u \left[ E_{rn, m-1}^L(\xi, s), \rho_{n, m-1}^L(\xi, s) \right],$$

$$f_{vn, m-1}^L(\xi, s) = g_v \left[ E_{\theta n, m-1}^L(\xi, s), H_{n, m-1}^L(\xi, s) \right].$$

Здесь  $G_{uun}^L$ ,  $G_{vun}^L$  и  $G_{vvn}^L$ ,  $G_{uvn}^L$  - объемные функции влияния, т.е. функции Грина краевых задач, соответствующих уравнениям (3.2.3), (3.2.6) и граничным условиям (3.2.10), а именно:

- при  $n = 0$

$$s^2 G_{uu0k}^L = l_{110} (G_{uu0k}^L) + \delta(r - \xi), \quad G_{uu0}^L \Big|_{r=r_0} = G_{uu0}^L \Big|_{r=r_1} = 0; \quad (3.2.25)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uun}^L &= l_{11n} (G_{uun}^L) + l_{12n} (G_{vun}^L) + \delta(r - \xi), \\ s^2 G_{vun}^L &= l_{21n} (G_{uun}^L) + l_{22n} (G_{vun}^L), \\ G_{uun}^L \Big|_{r=r_0} &= G_{vun}^L \Big|_{r=r_0} = G_{uun}^L \Big|_{r=r_1} = G_{vun}^L \Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uvn}^L &= l_{11n} (G_{uvn}^L) + l_{12n} (G_{vvn}^L), \\ s^2 G_{vvn}^L &= l_{21n} (G_{uvn}^L) + l_{22n} (G_{vvn}^L) + \delta(r - \xi), \\ G_{uvn}^L \Big|_{r=r_0} &= G_{vvn}^L \Big|_{r=r_0} = G_{uvn}^L \Big|_{r=r_1} = G_{vvn}^L \Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Аналогичным образом при  $n \geq 1$  и  $m > 0$  записывается решение задачи (3.2.8), (3.2.14):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi. \quad (3.2.28)$$

Здесь  $G_{Hn}^L$  - соответствующая объемная функция Грина, удовлетворяющая следующей краевой задаче:

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0. \quad (3.2.29)$$

Решение задачи (3.2.8) при  $m = 0$ , (3.2.13) записываем так:

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^L(r, s) e_{0kn}^L(s), \quad (3.2.30)$$

где  $G_{Hnk}^L$  - поверхностные функции Грина, определяемые следующими краевыми задачами:

$$\Delta_n G_{Hnk}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hnk}^L = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hnk}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_l} = \delta_{k+1, l+1} \quad (l = 0, 1), \quad (3.2.31)$$

где  $\delta_{kl}$  - символ Кронекера.

Здесь учтено, что согласно (3.1.14), (3.1.20), (3.2.21) и (3.2.22) имеют место равенства:

$$l_H(u_{n0}, v_{n0}) \equiv 0, h_0^L [V_{kn}^L(s), e_{0kn}^L(s)] = (s + \gamma) e_{0kn}^L(s). \quad (3.2.32)$$

Аналогично (3.2.28) и (3.2.30) может быть записано решение задач (3.2.8), (3.2.15) и (3.2.16). Однако, поскольку методы решения в обоих случаях практически идентичны, то ограничимся только первым вариантом.

### § 3.3. Функции Грина для электромагнитной толстостенной сферы

Сначала подобно § 2.3 построим решение краевой задачи (3.2.29) [62,90]. Общее решение уравнения в соответствии с (П.2.2) записываем так:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = C_{1n} Z_{1n}(\zeta_e) + C_{2n} Z_{2n}(\zeta_e) + G_{Hn*}^L(r, \xi, s), \quad \zeta_e = \eta_e r s_e \quad (3.3.1)$$

где

$$G_{Hn*}^L(r, \xi, s) = D_{1Hn}(r, \xi, s) Z_{1n}(\eta_e r s_e) + D_{2Hn}(r, \xi, s) Z_{2n}(\eta_e r s_e) \quad (3.3.2)$$

- частное решение.

Производные функций  $D_{1Hn}$  и  $D_{2Hn}$  по  $r$  в соответствии с методом вариации постоянных должны удовлетворять системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} D'_{1Hn} Z_{1n}(\eta_e r s_e) + D'_{2Hn} Z_{2n}(\eta_e r s_e) &= 0, \\ \eta_e s_e [D'_{1Hn} Z'_{1n}(\eta_e r s_e) + D'_{2Hn} Z'_{2n}(\eta_e r s_e)] &= \delta(r - \xi). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ее решение находим с использованием равенства (П.3.1):

$$\begin{aligned} D'_{1Hn}(r, \xi, s) &= -\eta_e s_e \xi^2 Z_{2n}(\eta_e \xi s_e) \delta(r - \xi), \\ D'_{2Hn}(r, \xi, s) &= \eta_e s_e \xi^2 Z_{1n}(\eta_e \xi s_e) \delta(r - \xi). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} D_{1Hn}(r, \xi, s) &= -\eta_e s_e \xi^2 Z_{2n}(\eta_e \xi s_e) H(r - \xi), \\ D_{2Hn}(r, \xi, s) &= \eta_e s_e \xi^2 Z_{1n}(\eta_e \xi s_e) H(r - \xi) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

и по формуле (3.3.2) частное решение

$$G_{Hn*}^L(r, \xi, s) = \eta_e s_e \xi^2 P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r - \xi). \quad (3.3.5)$$

Использованная здесь функция  $P_{en}(x, y)$  определена формулой (П.3.3).

Далее принимаем во внимание, что в соответствии с (П.2.18), (П.3.4) и (П.3.7) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial [rZ_k(\zeta_e)]}{\partial r} &= \frac{\eta_e s_e}{\zeta_e} [\zeta_e Z_k(\zeta_e)]' = -\eta_e s_e Y_{k+2}(\eta_e r s_e) \quad (k=1,2), \\
\frac{1}{r} \frac{\partial (rG_{Hn}^L)}{\partial r} &= \eta_e s_e \xi^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [rP_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r-\xi)] = \\
&= \eta_e s_e \xi^2 \left\{ \frac{\eta_e s_e}{\zeta_e} \frac{\partial}{\partial \zeta_e} [\zeta_e P_{en}(\eta_e \xi s_e, \zeta_e)] + \frac{1}{r} P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) \delta(r-\xi) \right\} = \\
&= -\eta_e^2 s_e^2 \xi^2 S_{en}(\eta_e r s_e, \eta_e \xi s_e).
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Тогда с учетом (3.3.1) и граничных условий в (3.2.29) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_{1n}$  и  $C_{2n}$ :

$$\begin{aligned}
C_{1n} Y_3(\eta_e r_0 s_e) + C_{2n} Y_4(\eta_e r_0 s_e) &= 0, \\
C_{1n} Y_3(\eta_e r_1 s_e) + C_{2n} Y_4(\eta_e r_1 s_e) &= -\eta_e s_e \xi^2 S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e).
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Решение системы уравнений (3.3.7) с использованием обозначения (П.3.5) можно записать так:

$$\begin{aligned}
C_{1n} &= \eta_e s_e \xi^2 \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} Y_4(\eta_e r_0 s_e), \\
C_{2n} &= -\eta_e s_e \xi^2 \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} Y_3(\eta_e r_0 s_e).
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Подставляя эти постоянные интегрирования в (3.3.1) и учитывая (3.3.5), получаем следующее равенство для искомой функции Грина:

$$\begin{aligned}
G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \\
&= \eta_e s_e \xi^2 \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} [Z_{1n}(\eta_e r s_e) Y_4(\eta_e r_0 s_e) - Z_{2n}(\eta_e r s_e) Y_3(\eta_e r_0 s_e)] + \\
&+ \eta_e s_e \xi^2 P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r-\xi) = \\
&= \eta_e s_e \xi^2 \left[ \frac{S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e) S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} + P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r-\xi) \right].
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Далее на основании следствия П.6.1 эту функцию записываем так:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \tag{3.3.10}$$

где

$$\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) = \eta_e s_e \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e) S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}.$$

Соответствующие поверхностные функции Грина как решения задач (3.2.31) с учетом (3.3.1) записываем следующим образом:

$$G_{Hnk}^L(r, \xi, s) = C_{1nk} Z_{1n}(\eta_e r s_e) + C_{2nk} Z_{2n}(\eta_e r s_e). \quad (3.3.11)$$

Для входящих в это равенство произвольных постоянных из граничных условий аналогично (3.3.7) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_{1nk} Y_3(\eta_e r_0 s_e) + C_{2nk} Y_4(\eta_e r_0 s_e) &= -\frac{\delta_{k+1,1}}{\eta_e s_e}, \\ C_{1n} Y_3(\eta_e r_1 s_e) + C_{2n} Y_4(\eta_e r_1 s_e) &= -\frac{\delta_{k+1,2}}{\eta_e s_e}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ее решение с учетом обозначения (П.3.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{1nk} &= \frac{\delta_{k+1,2} Y_4(\eta_e r_0 s_e) - \delta_{k+1,1} Y_4(\eta_e r_1 s_e)}{\eta_e s_e Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}, \\ C_{2nk} &= \frac{\delta_{k+1,1} Y_3(\eta_e r_1 s_e) - \delta_{k+1,2} Y_3(\eta_e r_0 s_e)}{\eta_e s_e Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Подставляя этот результат в (3.3.11) с учетом (П.3.7), получаем искомые функции:

$$G_{Hn0}^L(r, s) = -\frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e r s_e)}{\eta_e s_e Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}, \quad G_{Hn1}^L(r, s) = \frac{S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e)}{\eta_e s_e Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}. \quad (3.3.14)$$

Для определения оригиналов функций в (3.3.10) и (3.3.14) с использованием (П.3.18) и (П.3.19) сначала выражаем их через элементарные функции:

$$\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) = (-1)^n \frac{E_{30n}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e) E_{30n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e)}{2 \eta_e^{2n+1} s_e^{2n+1} \xi^{n+1} r^{n+1} E_{33n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}; \quad (3.3.15)$$

$$G_{Hn0}^L(r, s) = \frac{r_0^{n+2} E_{30n}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e r s_e)}{r^{n+1} E_{33n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)}, \quad G_{Hn1}^L(r, s) = -\frac{r_1^{n+2} E_{30n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e)}{r^{n+1} E_{33n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} \quad (3.3.16)$$

Далее с учетом (П.3.16) записываем экспоненциальный многочлен в знаменателях последних формул так:

$$\begin{aligned}
& E_{33n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e) = \\
& = R_{n3}(\eta_e r_0 s_e) R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e) e^{\eta_e h s_e} \left[ 1 - B_{n3}(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}(\eta_e r_1 s_e) e^{-2\eta_e h s_e} \right], \quad (3.3.17) \\
& B_{n3}(z) = R_{n3}(z) / R_{n3}(-z), \quad h = r_1 - r_0.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что в некоторой правой полуплоскости  $\operatorname{Re} s > \alpha_*$  имеет место неравенство

$$\left| B_{n3}(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}(\eta_e r_1 s_e) e^{-2\eta_e h s_e} \right| < 1, \quad (3.3.18)$$

получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_{33n}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} &= \frac{1}{R_{n3}(\eta_e r_0 s_e) R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e)} \times \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e) e^{-(2l+1)\eta_e h s_e}. \quad (3.3.19)
\end{aligned}$$

Подставляя его в (3.3.10) и (3.3.14), приходим к таким разложениям:

$$\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \tilde{G}_{Hn}^{(lk)L}(r, \xi, s) e^{-\tau_{elk}(r, \xi) s_e}, \quad (3.3.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{Hn}^{(11)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1} R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\
\tilde{G}_{Hn}^{(12)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^{l+1}(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\
\tilde{G}_{Hn}^{(13)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n R_{n0}(-\eta_e \xi s_e) R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^{l+1}(\eta_e r_1 s_e), \\
\tilde{G}_{Hn}^{(14)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1} R_{n0}(-\eta_e \xi s_e) R_{n0}(\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^{l+1}(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^{l+1}(\eta_e r_1 s_e);
\end{aligned} \quad (3.3.21)$$

$$\begin{aligned}
G_{Hn0}^L(r, s) &= \frac{r_0^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=2}^3 G_{Hn0}^{(lk)L}(r, s) e^{-\tau_{elk}(r, r_0) s_e}, \\
G_{Hn1}^L(r, s) &= \frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=2}^3 G_{Hn1}^{(lk)L}(r, s) e^{-\tau_{elk}(r, r_1) s_e},
\end{aligned} \quad (3.3.22)$$

где

$$\begin{aligned}
G_{Hn0}^{(12)L}(r, s) &= -\frac{R_{n0}(\eta_e r s_e)}{R_{n3}(\eta_e r_0 s_e)} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\
G_{Hn0}^{(13)L}(r, s) &= \frac{R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{R_{n3}(\eta_e r_0 s_e)} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^{l+1}(\eta_e r_1 s_e), \\
G_{Hn1}^{(12)L}(r, s) &= \frac{R_{n0}(\eta_e r s_e)}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e)} B_{n3}^{l+1}(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\
G_{Hn1}^{(13)L}(r, s) &= -\frac{R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e)} B_{n3}^l(-\eta_e r_0 s_e) B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e).
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

В формулах (3.3.20) и (3.3.22) времена запаздывания  $\tau_{elk}(r, \xi)$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
\tau_{el1}(r, \xi) &= \eta_e (2lh - r + \xi), \quad \tau_{el2}(r, \xi) = \eta_e [(2l+1)h + r + \xi - r_0 - r_1], \\
\tau_{el3}(r, \xi) &= \eta_e [(2l+1)h - r - \xi + r_0 + r_1], \quad \tau_{el4}(r, \xi) = \eta_e [2(l+1)h + r - \xi].
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Все изображения в (3.3.21) и (3.3.23) имеют одинаковую структуру:

$$g^L(s) = f^L(\eta_e s_e) e^{-\alpha \eta_e s_e}, \quad f^L(s) = R(s), \quad \eta_e \alpha = \tau_{elk}(r, \xi), \tag{3.3.25}$$

где  $R(s)$  - правильная рациональная дробь,  $\alpha > 0$ .

Для вычисления оригинала функции (3.3.25) используем свойство преобразования Лапласа

$$\eta_e g(\tau) = g_1(\tau/\eta_e), \quad g_1^L(s) = f^L(\tilde{s}_e) e^{-\alpha \tilde{s}_e}, \quad \tilde{s}_e = \sqrt{s(s + \eta_e \gamma)}, \tag{3.3.26}$$

находим оригинал функции  $g_1^L(s)$  с помощью таблицы П.1.2

$$g_1(\tau) = e^{-\eta_e \gamma \tau/2} \left[ f(\tau - \alpha) + \frac{\eta_e \gamma}{2} \int_{\alpha}^{\tau} \frac{tf(t - \alpha)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} I_1\left(\frac{\eta_e \gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - t^2}\right) dt \right] H(\tau - \alpha)$$

а затем с помощью (3.3.26) и замены переменной интегрирования получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
\eta_e g(\tau) &= e^{-\gamma \tau/2} \times \\
&\times \left[ f(\tau/\eta_e - \alpha) + \frac{\eta_e^2 \gamma}{2} \int_{\alpha}^{\tau/\eta_e} \frac{tf(t - \alpha)}{\sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 t^2}} I_1\left(\frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 t^2}\right) dt \right] H(\tau - \eta_e \alpha) = \\
&= e^{-\gamma \tau/2} \left[ f(\tau/\eta_e - \alpha) + \frac{\gamma}{2} \int_{\alpha \eta_e}^{\tau} \frac{tf(t/\eta_e - \alpha)}{\sqrt{\tau^2 - t^2}} I_1\left(\frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - t^2}\right) dt \right] H(\tau - \eta_e \alpha).
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

При этом функции  $f(t)$  достаточно просто могут быть определены с использованием теоремы разложения как оригинал изображения  $R(s)$ .

Однако, для реальных сред параметр  $\eta_e \ll 1$ . И поэтому при нахождении интегралов в (3.3.27) приходится вычислять значения функции  $f(\tau)$  при больших значениях аргумента. Выясним, как ведут себя функции (3.3.21) и (3.3.23) при  $\tau \rightarrow \infty$ , используя следующее равенство [108]:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} sf^L(s). \quad (3.3.28)$$

Например, для функции  $\tilde{G}_{Hn}^{(1)L}(r, \xi, s)$  в (3.3.21) с учетом (П.2.20) имеют место такие соотношения:

$$\begin{aligned} sf^L(s) &= \frac{1}{2r\xi} (n=0), \\ sf^L(s) &= \frac{(-1)^n R_{n0}(\xi s) R_{n0}(-rs)}{2r^{n+1} \xi^{n+1} s^{2n}} B_{n3}^l(-r_0 s) B_{n3}^l(r_1 s) \sim \\ &\sim \frac{(-1)^n n A_{nn} (1 + \xi s) n A_{nn} (1 - rs)}{2r^{n+1} \xi^{n+1} s^{2n}} (1 - 2r_0 s)^l (1 + 2r_1 s)^l \sim \\ &\sim \frac{(-1)^n n^2 A_{nn}^2}{2r^{n+1} \xi^{n+1} s^{2n}} (n \geq 1), s \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Здесь использованы вытекающие из (П.2.20), (П.3.16) и (3.3.17) формулы:

$$\begin{aligned} R_{00}(z) &= 1, R_{03}(z) = z, B_{03}(z) = -1, \\ R_{n0}(z) &\sim A_{nn} + A_{n,n-1}z = A_{nn}(1+z), \\ R_{n3}(z) &\sim [(n+1)A_{nn} - A_{nn}](1+z) = nA_{nn}(1+z), \\ B_{n3}(z) &\sim \frac{nA_{nn}(1+z)}{nA_{nn}(1-z)} \sim 1+2z, A_{nn} = A_{n,n-1} = (2n-1)!! (n \geq 1), z \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Следовательно, функция  $f(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности, т.е. при определении оригиналов нестационарных функций Грина по формуле (3.3.27) возникают значительные вычислительные трудности. В связи с этим находим их приближенный квазистатический аналог при  $\eta_e = 0$ . В соответствии с (3.2.29) и (3.2.31), они являются решениями следующих краевых задач:

$$\Delta_n G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0, r_1} = 0; \quad (3.3.31)$$

$$\Delta_n G_{Hnk}^L = 0, \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hnk}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_l} = \delta_{k+1, l+1} \quad (l = 0, 1). \quad (3.3.32)$$

Общее решение уравнения (3.3.31) с использованием (П.2.5) аналогично (3.3.1) записываем так:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = C_{1n} r^{-(n+1)} + C_{2n} r^n + G_{Hn*}^L(r, \xi, s), \quad (3.3.33)$$

где

$$G_{Hn*}^L(r, \xi, s) = D_{1Hn}(r, \xi, s) r^{-(n+1)} + D_{2Hn}(r, \xi, s) r^n. \quad (3.3.34)$$

Тогда вместо (3.3.3) получаем следующую систему уравнений относительно производных функции  $D_{1Hn}$  и  $D_{2Hn}$  по  $r$ :

$$\begin{aligned} D'_{1Hn} r^{-(n+1)} + D'_{2Hn} r^n &= 0, \\ -D'_{1Hn} (n+1) r^{-(n+2)} + D'_{2Hn} n r^{n-1} &= \delta(r - \xi). \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Ее решение имеет вид:

$$D'_{1Hn} = -(2n+1)^{-1} \xi^{n+2} \delta(r - \xi), \quad D'_{2Hn} = (2n+1)^{-1} \xi^{-(n-1)} \delta(r - \xi)$$

Отсюда получаем функции  $D_{1Hn}$  и  $D_{2Hn}$ :

$$\begin{aligned} D_{1Hn}(r, \xi, s) &= -(2n+1)^{-1} \xi^{n+2} H(r - \xi), \\ D_{2Hn}(r, \xi, s) &= (2n+1)^{-1} \xi^{-(n-1)} H(r - \xi) \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

и по формуле (3.3.34) частное решение

$$G_{Hn*}^L(r, \xi, s) = \frac{\alpha_n(r, \xi)}{(2n+1) r^{n+1} \xi^{n-1}} H(r - \xi), \quad (3.3.37)$$

где

$$\alpha_n(x, y) = x^{2n+1} - y^{2n+1}.$$

Отсюда находим производную

$$\frac{\partial (r G_{Hn*}^L)}{\partial r} = \frac{\beta_n(r, \xi)}{(2n+1) r^{n+1} \xi^{n-1}} H(r - \xi), \quad (3.3.38)$$

где

$$\beta_n(x, y) = x^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_n(x, y)}{x^n} \right] = (n+1)x^{2n+1} + ny^{2n+1}.$$

Подставляя теперь (3.3.37) в (3.3.33), из граничных условий в (3.3.31) получаем систему уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} -nC_{1n}r_0^{-(n+1)} + (n+1)C_{2n}r_0^n &= 0, \\ -nC_{1n}r_1^{-(n+1)} + (n+1)C_{2n}r_1^n &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi)}{(2n+1)r_1^{n+1}\xi^{n-1}}, \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Ее решение имеет вид:

$$C_{1n} = -\frac{r_0^{2n+1}\beta_n(r_1, \xi)}{n(2n+1)\xi^{n-1}\alpha_n(r_1, r_0)}, \quad C_{2n} = -\frac{\beta_n(r_1, \xi)}{(n+1)(2n+1)\xi^{n-1}\alpha_n(r_1, r_0)}. \quad (3.3.40)$$

Подставляя эти равенства в (3.3.33), с учетом (3.3.37) и следствия П.6.1 получаем следующее представление объемной функции Грина:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= G_{Hn}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi)H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r)H(r - \xi) \right], \\ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi)\beta_n(r_0, r)}{n(n+1)(2n+1)\xi^{n+1}r^{n+1}\alpha_n(r_1, r_0)}, \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

Квазистатические поверхностные функции Грина как решения задач (3.3.32) с учетом (3.3.33) записываем так:

$$G_{Hnk}^L(r, \xi, s) = C_{1nk}r^{-(n+1)} + C_{2nk}r^n. \quad (3.3.42)$$

Для входящих в это равенство произвольных постоянных из граничных условий аналогично (3.3.39) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} -nC_{1nk}r_0^{-(n+1)} + (n+1)C_{2nk}r_0^n &= r_0\delta_{k+1,1}, \\ -nC_{1nk}r_1^{-(n+1)} + (n+1)C_{2nk}r_1^n &= r_1\delta_{k+1,2}. \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Ее решение с учетом обозначения в (3.3.37) имеет вид:

$$C_{1nk} = -r_0^{n+2}r_1^{n+2} \frac{r_1^{n-1}\delta_{k+1,1} - r_0^{n-1}\delta_{k+1,2}}{n\alpha_n(r_1, r_0)}, \quad C_{2nk} = \frac{r_1^{n+2}\delta_{k+1,2} - r_0^{n+2}\delta_{k+1,1}}{(n+1)\alpha_n(r_1, r_0)}. \quad (3.3.44)$$

Подставляя этот результат в (3.3.42) находим искомые поверхностные функции Грина:

$$G_{Hn0}^L(r, s) = G_{Hn0}^c(r) = -\frac{r_0^{n+2}\beta_n(r_1, r)}{n(n+1)r^{n+1}\alpha_n(r_1, r_0)},$$

$$G_{Hn1}^L(r, s) = G_{Hn1}^c(r) = \frac{r_1^{n+2}\beta_n(r_0, r)}{n(n+1)r^{n+1}\alpha_n(r_1, r_0)}.$$
(3.3.45)

При использовании квазистатических функций Грина упрощаются равенства (3.2.28) и (3.2.30):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi \quad (n \geq 1, m \geq 0);$$
(3.3.46)

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) e_{0kn}^L(s) \quad (n \geq 1).$$
(3.3.47)

### § 3.4. Электромагнитное поле в движущейся толстостенной сфере

Аналогично § 2.7 рассмотрим вспомогательную задачу об определении параметров электромагнитного поля в движущейся по заданному закону  $u(r, \theta, \tau)$  и  $v(r, \theta, \tau)$  толстостенной сфере [45,62]. При этом в соответствии с (3.1.3) считаем, что начальные условия однородные:

$$E_r|_{\tau=0} = \dot{E}_r|_{\tau=0} = E_\theta|_{\tau=0} = \dot{E}_\theta|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0.$$
(3.4.1)

Кроме того, полагаем, что на границах сферы аналогично (3.1.4) заданы касательные составляющие вектора напряженности электрического поля ( $k = 0, 1$ ):

$$E_\theta|_{r=r_k} = e_{0k}(\tau, \theta).$$
(3.4.2)

Тогда согласно принципу суперпозиции и равенствам (3.3.46), (3.3.47) с учетом (3.1.28) изображение коэффициентов рядов (3.2.1) координат напряженности магнитного поля определяется так:

$$H_n^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi -$$

$$-\eta_e^2 \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) [(s + \gamma) e_{0kn}^L(s) + s \rho_{e0}(r_k) v_n^L(r_k, s)].$$
(3.4.3)

Для определения изображений коэффициентов разложений компонент напряженности электрического поля сначала применим к левой и правой части равенства (3.4.3) следующий оператор:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_n^L)}{\partial r} = & -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi - \\ & -\eta_e^2 \sum_{k=0}^1 \Gamma_{Hnk}^c(r) [(s + \gamma) e_{0kn}^L(s) + s \rho_{e0}(r_k) v_n^L(r_k, s)]. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Здесь в соответствии с (3.3.10) и (3.3.14)

$$\begin{aligned} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) = & \frac{1}{r} \frac{\partial [rG_{Hn}^c(r, \xi)]}{\partial r} = \Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) H(r - \xi), \\ \Gamma_{Hnk}^c(r) = & \frac{1}{r} [rG_{Hnk}^c(r)]', \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

где

$$\Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = \frac{\xi^2}{r} \frac{\partial [r\tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi)]}{\partial r}, \quad \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = \frac{\xi^2}{r} \frac{\partial [r\tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r)]}{\partial r}.$$

Функции  $\Gamma_{1Hn}^c$ ,  $\Gamma_{2Hn}^c$  и  $\Gamma_{Hnk}^c$  находим, используя (3.3.41) и (3.3.45):

$$\begin{aligned} \Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = & -\frac{\beta_n(r_1, \xi) \alpha_n(r, r_0)}{(2n+1) \xi^{n-1} r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}, \\ \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = & \frac{\beta_n(r_0, \xi) \alpha_n(r_1, r)}{(2n+1) \xi^{n-1} r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}; \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\Gamma_{Hn0}^c(r) = \frac{r_0^{n+2} \alpha_n(r_1, r)}{r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}, \quad \Gamma_{Hn1}^c(r) = \frac{r_1^{n+2} \alpha_n(r, r_0)}{r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}. \quad (3.4.7)$$

При построении этих формул использованы следующие свойства функций, введенных в (3.3.37) и (3.3.38):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\beta_n(x, y)}{y^n} \right] = -\frac{n(n+1)}{y^{n+1}} \alpha_n(x, y), \quad \alpha_n(y, x) = -\alpha_n(x, y). \quad (3.4.8)$$

Подставляя теперь представления (3.4.3) и (3.4.4) в формулы (3.2.9), находим изображения коэффициентов разложений компонент напряженности электрического поля:

$$E_m^L(r, s) = -\frac{n(n+1)}{r} \left\{ \frac{s}{s+\gamma} \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) \left[ e_{0kn}^L(s) + \rho_{e0}(r_k) \frac{s}{s+\gamma} v_n^L(r_k, s) \right] \right\} - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) u_n^L(r, s); \quad (3.4.9)$$

$$E_{\theta n}^L(r, s) = \frac{s}{s+\gamma} \int_{r_0}^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi + \\ + \sum_{k=0}^1 \Gamma_{Hnk}^c(r) \left[ e_{0kn}^L(s) + \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r_k) v_n^L(r_k, s) \right] - \\ - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) v_n^L(r, s) \quad (n \geq 1). \quad (3.4.10)$$

Оригиналы формул (3.4.3), (3.4.9) и (3.4.10) с учетом свойств преобразования Лапласа имеют следующий вид:

$$H_n(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [\dot{u}_n(\xi, \tau), \dot{v}_n(\xi, \tau)] d\xi - \\ - \eta_e^2 \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) [\gamma e_{0kn}(\tau) + \dot{e}_{0kn}(\tau) + \rho_{e0}(r_k) \dot{v}_n(r_k, \tau)]; \quad (3.4.11)$$

$$E_m(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \left\langle \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) L_s \{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \} d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) \{ e_{0kn}(\tau) + \rho_{e0}(r_k) L_s [v_n(r_k, \tau)] \} \right\rangle - \rho_{e0}(r) L_s [u_n(r, \tau)]; \quad (3.4.12)$$

$$E_{\theta n}(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) L_s \{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \} d\xi + \\ + \sum_{k=0}^1 \Gamma_{Hnk}^c(r) \{ e_{0kn}(\tau) + \rho_{e0}(r_k) L_s [v_n(r_k, \tau)] \} - \rho_{e0}(r) L_s [v_n(r, \tau)] \quad (n \geq 1). \quad (3.4.13)$$

При построении двух последних формул использовано соответствие (2.4.16), а также следующее обозначение (звездочка соответствует свертке по времени):

$$L_s(v) = v - \gamma e^{-\gamma\tau} * v. \quad (3.4.14)$$

Формула для оригиналов коэффициентов разложения поверхностных зарядов вытекает из (3.1.27) при учете последнего обозначения:

$$\rho_n(r, \tau) = -L_s \left\{ l_{np} [u_n(r, \tau), v_n(r, \tau)] \right\}. \quad (3.4.15)$$

Координаты вектора тока определяются по известным компонентам напряженности электрического поля из частного случая закона Ома (1.5.29), полученного с учетом предположения (3.1.1):

$$j_r = E_r + \rho_{e0} \dot{u}/\gamma, \quad j_\theta = E_\theta + \rho_{e0} \dot{v}/\gamma. \quad (3.4.16)$$

В качестве примера рассмотрим три закона движения толстостенной сферы. При этом будем использовать следующие равенства для полиномов Лежандра и Гегенбауэра [111,1]:

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad C_0^{3/2}(\cos \theta) = 1. \quad (3.4.17)$$

1. *Сфера неподвижна:*

$$u = v \equiv 0. \quad (3.4.18)$$

В этом случае согласно (3.1.14), (3.1.17) и (3.4.15) имеют место равенства:

$$l_H(u, v) \equiv 0, \quad l_{np}(u, v) \equiv 0, \quad L_s(u) \equiv 0, \quad L_s(v) \equiv 0; \quad (3.4.19)$$

$$\rho_n(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 2). \quad (3.4.20)$$

а). *Напряженность электрического поля задана только на внутренней границе сферы и имеет вид:*

$$e_{00} = -\tau_+ \sin \theta, \quad e_{01} \equiv 0, \quad (3.4.21)$$

где  $\tau_+^\alpha = \tau^\alpha H(\tau)$ .

Из (3.1.6) и (3.4.17) следуют, что коэффициенты соответствующих рядов определяются так:

$$e_{001} = -\tau_+, \quad e_{00n} \equiv 0 \quad (n \geq 2), \quad e_{01n} \equiv 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.4.22)$$

Тогда из формул (3.4.11) - (3.4.13) с учетом (3.3.41), (3.3.45) и (3.4.7) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} H_1(r, \tau) &= \eta_e^2 G_{H10}^c(r) (\gamma\tau + 1) H(\tau), \\ E_{r1}(r, \tau) &= \frac{2}{r} G_{H10}^c(r) \tau_+, \quad E_{\theta 1}(r, \tau) = -\Gamma_{H10}^c(r) \tau_+, \\ H_n = E_{\theta n}(r, \tau) &= E_{r0}(r, \tau) = E_{rn}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Здесь

$$G_{H10}^c(r) = -\frac{r_0^3(2r_1^3 + r^3)}{2r^2(r_1^3 - r_0^3)}, \Gamma_{H10}^c(r) = \frac{r_0^3(r_1^3 - r^3)}{r^3(r_1^3 - r_0^3)}. \quad (3.4.24)$$

Подставляя полученные коэффициенты в (3.1.6) и дополнительно учитывая (3.4.16), (3.4.17) окончательно приходим к таким выражениям для компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \tau) &= \eta_e^2 G_{H10}^c(r) (\gamma\tau + 1) \sin \theta H(\tau), \rho_e \equiv 0, \\ E_r(r, \theta, \tau) &= j_r(r, \theta, \tau) = \frac{2}{r} G_{H10}^c(r) \tau_+ \cos \theta, \\ E_\theta(r, \theta, \tau) &= j_\theta(r, \theta, \tau) = -\Gamma_{H10}^c(r) \tau_+ \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

б). Напряженность электрического поля задана только на внешней границе сферы и имеет вид:

$$e_{00}, \equiv 0 \quad e_{01} = -\tau_+ \sin \theta. \quad (3.4.26)$$

В этом случае абсолютно аналогично предыдущему пункту получаем такие равенства:

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \tau) &= \eta_e^2 G_{H11}^c(r) (\gamma\tau + 1) \sin \theta H(\tau), \rho_e \equiv 0, \\ E_r(r, \theta, \tau) &= j_r(r, \theta, \tau) = \frac{2}{r} G_{H11}^c(r) \tau_+ \cos \theta, \\ E_\theta(r, \theta, \tau) &= j_\theta(r, \theta, \tau) = -\Gamma_{H11}^c(r) \tau_+ \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

где

$$G_{H11}^c(r) = \frac{r_1^3(2r_0^3 + r^3)}{2r^2(r_1^3 - r_0^3)}, \Gamma_{H11}^c(r) = \frac{r_1^3(r^3 - r_0^3)}{r^3(r_1^3 - r_0^3)}. \quad (3.4.28)$$

2. Напряженность электрического поля на границах сферы отсутствует:

$$e_{00} = e_{01} \equiv 0, \quad (3.4.29)$$

а перемещения имеют вид:

$$u = -\tau_+, \quad v \equiv 0, \quad (3.4.30)$$

что согласно (3.1.6) и (3.4.17) соответствует следующим коэффициентам рядов:

$$u_0 = -\tau_+, \quad u_n = v_n \equiv 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.4.31)$$

При этом для операторов в (3.1.14), (3.1.17) и (3.4.14) имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
l_H(u_0, v_0) &= -\frac{\tau_+}{r} \rho_{e0}, \quad l_{0p}(u_0, v_0) = -\frac{\tau_+}{r^2} (r^2 \rho_{e0})', \quad L_s(u_0) = \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\
L_s \{l_{0p}[u_0(r, \tau), v_0(r, \tau)]\} &= \frac{1}{\gamma r^2} (r^2 \rho_{e0})' (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\
l_H(u_n, v_n) &= l_{np}(u_n, v_n) = L_s[u_n(r, \tau)] = \\
&= L_s \{l_{np}[u_n(r, \tau), v_n(r, \tau)]\} \equiv 0 \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Тогда из формул (3.4.11) - (3.4.13) и (3.4.15) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}
E_{r0}(r, \tau) &= -\frac{\rho_{e0}(r)}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \quad \rho_0(r, \tau) = \frac{1}{r^2} (r^2 \rho_{e0})' E_{r0}(r, \tau), \\
H_n(r, \tau) &= E_{rn}(r, \tau) = E_{\theta n}(r, \tau) = \rho_n(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{3.4.33}$$

Подставляя полученные коэффициенты в (3.1.6) и дополнительно учитывая (3.4.16), (3.4.17) окончательно получаем выражения для компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}
E_r(r, \theta, \tau) &= -\frac{\rho_{e0}(r)}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \quad \rho_e(r, \theta, \tau) = \frac{1}{r^2} (r^2 \rho_{e0})' E_r(r, \theta, \tau), \\
j_r(r, \theta, \tau) &= -\frac{\rho_{e0}(r)}{\gamma} e^{-\gamma\tau} H(\tau), \quad H(r, \theta, \tau) = E_\theta(r, \theta, \tau) = j_\theta(r, \theta, \tau) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

3. Напряженность электрического поля на границах сферы отсутствует (см. (3.4.29)), а плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид:

$$\rho_{e0}(r) = \rho_* r^{-1}, \quad \rho'_{e0}(r) = -\rho_* r^{-2}. \tag{3.4.35}$$

Сфера движется поступательно с изменяющимися во времени по закону  $\tau_+$  перемещениями:

$$u = \tau_+ \cos \theta, \quad v = -\tau_+ \sin \theta, \tag{3.4.36}$$

что согласно (3.1.6) и (3.4.17) соответствует следующим коэффициентам рядов:

$$u_1 = \tau_+, \quad v_1 = -\tau_+, \quad u_0 = u_n = v_n \equiv 0 \quad (n \geq 2). \tag{3.4.37}$$

При этом для операторов в (3.1.14), (3.1.17) и (3.4.14) имеют место равенства:

$$\begin{aligned}
l_{1p}(u_1, v_1) &= -l_H(u_1, v_1) = \tau_+ \rho'_{e0}, \quad l_H(\dot{u}_1, \dot{v}_1) = -\rho'_{e0} H(\tau), \\
L_s(v_1) &= -L_s(u_1) = \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \quad L_s[l_H(\dot{u}_1, \dot{v}_1)] = -\rho'_{e0} e^{-\gamma\tau} H(\tau), \\
L_s[l_H(u_1, v_1)] &= -L_s[l_{1p}(u_1, v_1)] = \frac{\rho'_{e0}}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\
l_{0p}(u_0, v_0) &= L_s(u_0) = L_s[l_H(u_0, v_0)] = L_s[l_{1p}(u_0, v_0)] \equiv 0, \\
l_H(u_n, v_n) &= l_{np}(u_n, v_n) = L_s[u_n(r, \tau)] = L_s[v_n(r, \tau)] = \\
&= L_s[l_H(u_n, v_n)] = L_s[l_{1p}(u_n, v_n)] = L_s[l_H(\dot{u}_n, \dot{v}_n)] \equiv 0 \quad (n \geq 2).
\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

Тогда из формул (3.4.11) - (3.4.13) и (3.4.15) получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned}
H_1(r, \tau) &= \eta_e^2 H(\tau) \left[ \sum_{k=0}^1 \rho_{e0}(r_k) G_{H1k}^c(r) + J_1(r) \right], \\
E_{r1}(r, \tau) &= \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau) \left\{ \rho_{e0}(r) - \frac{2}{r} \left[ J_1(r) + \sum_{k=0}^1 \rho_{e0}(r_k) G_{H1k}^c(r) \right] \right\}, \\
E_{\theta1}(r, \tau) &= \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau) \left[ \sum_{k=0}^1 \rho_{e0}(r_k) \Gamma_{H1k}^c(r) - \rho_{e0}(r) + J_2(r) \right], \\
\rho_1(r, \tau) &= \frac{\rho'_{e0}(r)}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\
E_{r0}(r, \tau) &= \rho_0(r, \tau) = H_n(r, \tau) = E_m(r, \tau) = E_{\theta n}(r, \tau) = \rho_n(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 2),
\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

где

$$J_1(r) = \int_{r_0}^{r_1} G_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi, \quad J_2(r) = \int_{r_0}^{r_1} \Gamma_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi. \tag{3.4.40}$$

Входящие в эти формулы суммы находим с помощью равенств (3.4.24) и (3.4.28):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^1 \rho_{e0}(r_k) G_{H1k}^c(r) &= \rho_* \frac{(r_0 + r_1) r^3 - 2r_0^2 r_1^2}{2r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}, \\
\sum_{k=0}^1 \rho_{e0}(r_k) \Gamma_{H1k}^c(r) &= \rho_* \frac{(r_1 + r_0) r^3 + r_0^2 r_1^2}{r^3 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}.
\end{aligned} \tag{3.4.41}$$

Ядра интегралов в (3.4.40) в соответствии с (3.3.41) и (3.4.5) имеют вид:

$$\begin{aligned}
G_{H1}^c(r, \xi) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{H1}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \\
\Gamma_{H1}^c(r, \xi) &= \Gamma_{1H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{2H1}^c(r, \xi) H(r - \xi), \\
\tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) &= -\frac{(2r_1^3 + \xi^3)(2r_0^3 + r^3)}{6\xi^2 r^2 (r_1^3 - r_0^3)}, \\
\Gamma_{1H1}^c(r, \xi) &= -\frac{(2r_1^3 + \xi^3)(r^3 - r_0^3)}{3r^3 (r_1^3 - r_0^3)}, \quad \Gamma_{2H1}^c(r, \xi) = \frac{(2r_0^3 + \xi^3)(r_1^3 - r^3)}{3r^3 (r_1^3 - r_0^3)}.
\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

Подставляя (3.4.35) и (3.4.42) в (3.4.40), вычисляем интегралы  $J_1(r)$  и  $J_2(r)$ :

$$\begin{aligned}
J_1(r) &= \rho_* \frac{2r_0^2 r_1^2 + 2r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2) - r^3 (r_1 + r_0)}{4r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}, \\
J_2(r) &= \rho_* \frac{r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2) - r^3 (r_1 + r_0) - r_0^2 r_1^2}{2r^3 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}.
\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

Отсюда с учетом (3.4.39) и (3.4.41) приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
H_1(r, \tau) &= \rho_* \eta_e^2 A_H(r) H(\tau), \quad E_{r1}(r, \tau) = \frac{\rho_*}{\gamma r} (e^{-\gamma \tau} - 1) A_{Er}(r) H(\tau), \\
E_{01}(r, \tau) &= \frac{\rho_*}{\gamma r} (e^{-\gamma \tau} - 1) A_{E0}(r) H(\tau),
\end{aligned} \tag{3.4.44}$$

где

$$\begin{aligned}
A_H(r) &= \frac{(r_0 + r_1)r^3 + 2(r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)r^2 - 2r_0^2 r_1^2}{4r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}, \quad A_{Er}(r) = \frac{2r_0^2 r_1^2 - (r_0 + r_1)r^3}{2r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}, \\
A_{E0}(r) &= \frac{(r_1 + r_0)r^3 - r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2) + r_0^2 r_1^2}{2r^2 (r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2)}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные коэффициенты в (3.1.6) и дополнительно учитывая (3.4.16), (3.4.17) и (3.4.39), находим компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned}
H(r, \theta, \tau) &= \rho_* \eta_e^2 A_H(r) H(\tau) \sin \theta, \quad \rho_e(r, \theta, \tau) = -\frac{e^{-\gamma\tau} - 1}{\gamma r^2} \rho_* H(\tau) \cos \theta, \\
E_r(r, \theta, \tau) &= \frac{\rho_*}{\gamma r} (e^{-\gamma\tau} - 1) A_{Er}(r) H(\tau) \cos \theta, \\
E_\theta(r, \theta, \tau) &= \frac{\rho_*}{\gamma r} (e^{-\gamma\tau} - 1) A_{E\theta}(r) H(\tau) \sin \theta, \\
j_r &= \frac{\rho_*}{\gamma r} [(e^{-\gamma\tau} - 1) A_{Er}(r) + 1] H(\tau) \cos \theta, \\
j_\theta &= \frac{\rho_*}{\gamma r} [(e^{-\gamma\tau} - 1) A_{E\theta}(r) - 1] H(\tau) \sin \theta.
\end{aligned} \tag{3.4.46}$$

### § 3.5. Объемные функции влияния для упругой толстостенной сферы

Сначала построим функции  $G_{uu}^L$  и  $G_{vuv}^L$ , которые являются решениями краевых задач (3.2.25) - (3.2.27) [47,77,79,82].

Для первой из этих задач в соответствии с (П.2.15) общее решение соответствующего уравнения записывается так:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = A_{10}(s) X_{10}(rs) + A_{20}(s) X_{20}(rs) + G_{uu0*}^L(r, \xi, s). \tag{3.5.1}$$

Здесь  $G_{uu0*}^L(r, \xi, s)$  - частное решение, которое находим методом вариации постоянных:

$$G_{uu0*}^L(r, \xi, s) = D_{10}(r, \xi, s) X_{10}(rs) + D_{20}(r, \xi, s) X_{20}(rs), \tag{3.5.2}$$

где функции  $D_{10}(r, \xi, s)$  и  $D_{20}(r, \xi, s)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
X_{10}(rs) \frac{\partial D_{10}}{\partial r} + X_{20}(rs) \frac{\partial D_{20}}{\partial r} &= 0, \\
sX'_{10}(rs) \frac{\partial D_{10}}{\partial r} + sX'_{20}(rs) \frac{\partial D_{20}}{\partial r} &= -\delta(r - \xi).
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Отсюда с учетом (П.4.6) получаем  $D_{10}(r, \xi, s)$  и  $D_{20}(r, \xi, s)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_{10}}{\partial r} &= -\xi^2 s X_{20}(\xi s) \delta(r - \xi), \quad D_{10} = -\xi^2 s X_{20}(\xi s) H(r - \xi), \\
\frac{\partial D_{20}}{\partial r} &= \xi^2 s X_{10}(\xi s) \delta(r - \xi), \quad D_{20} = \xi^2 s X_{10}(\xi s) H(r - \xi).
\end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.5.2) с учетом (П.4.13) и (П.4.14) приобретает такой вид:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = -\xi^2 s P_{u0}(rs, \xi s) H(r - \xi). \quad (3.5.4)$$

Подставляя теперь (3.5.1) с учетом последнего равенства в граничные условия в (3.2.25), получаем систему уравнений относительно  $A_{10}(s)$  и  $A_{20}(s)$ :

$$\begin{aligned} A_{10}(s) X_{10}(r_0 s) + A_{20}(s) X_{20}(r_0 s) &= 0, \\ A_{10}(s) X_{10}(r_1 s) + A_{20}(s) X_{20}(r_1 s) &= \xi^2 s P_{u0}(r_1 s, \xi s). \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Ее решение записывается так:

$$A_{10}(s) = -\xi^2 s \frac{P_{u0}(r_1 s, \xi s)}{P_{u0}(r_0 s, r_1 s)} X_{20}(r_0 s), \quad A_{20}(s) = \xi^2 s \frac{P_{u0}(r_1 s, \xi s)}{P_{u0}(r_0 s, r_1 s)} X_{10}(r_0 s). \quad (3.5.6)$$

Но, согласно следствию П.6.2, функция влияния  $G_{uu0}^L(r, \xi, s)$  имеет следующий вид:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uu0}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right]. \quad (3.5.7)$$

При этом из формул (3.5.1) и (3.5.4) с учетом (П.4.13) имеет место равенство:

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{s P_{u0}(r_1 s, \xi s) P_{u0}(r_0 s, rs)}{P_{u0}(r_0 s, r_1 s)}. \quad (3.5.8)$$

Для определения функций  $G_{uun}^L$  и  $G_{vun}^L$  при  $n \geq 1$  сводим систему уравнений в (3.2.26) к системе первого порядка, и в соответствии с (П.2.16) и обозначением (П.4.1) записываем ее общее решение так:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{un}^L(r, \xi, s) &= \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{A}_{un} + \mathbf{G}_{un*}^L(r, \xi, s), \\ \mathbf{G}_{un}^L &= \begin{pmatrix} G_{uun}^L \\ \Gamma_{uun}^L \\ G_{vun}^L \\ \Gamma_{vun}^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{un} = \begin{pmatrix} A_{1un} \\ A_{2un} \\ B_{1un} \\ B_{2un} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{uun}^L = \frac{\partial G_{uun}^L}{\partial r}, \quad \Gamma_{vun}^L = \frac{\partial G_{vun}^L}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Здесь  $\mathbf{G}_{un*}^L$  - столбец частных решений, который находим методом вариации постоянных (штрих обозначает производную по  $r$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{un*}^L(r, \xi, s) &= \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{D}_{un}, \quad \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{D}'_{un} = -\mathbf{F}_u, \\ \mathbf{D}_{un} &= (D_{1un}, D_{2un}, D_{3un}, D_{4un})^T, \quad \mathbf{F}_u = (0, \delta(r - \xi), 0, 0)^T. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Решение системы уравнений с использованием (П.4.9) и (П.4.11) записывается так:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'_{un} &= W_U^{-1} (M_{21}, -M_{22}, M_{23}, -M_{24})^T \Big|_{r=\xi} \delta(r-\xi), \\ \mathbf{D}_{un} &= \xi \tilde{\mathbf{D}}_{un}(\xi s) H(r-\xi), \\ \tilde{\mathbf{D}}_{un}(\xi) &= (-\xi X_{2n}(\xi), \xi X_{1n}(\xi), -\eta^2 Z_{2n}(\eta\xi), \eta^2 Z_{1n}(\eta\xi))^T.\end{aligned}\quad (3.5.11)$$

Следовательно, с учетом (П.3.7), (П.4.13), (П.4.28) и (П.4.29) частное решение имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{un*}^L(r, \xi, s) &= \tilde{\mathbf{G}}_{un*}^L(r, \xi, s) H(r-\xi), \\ \tilde{\mathbf{G}}_{un*}^L(r, \xi, s) &= \xi \mathbf{X}_n(r, s) \tilde{\mathbf{D}}_{un}(\xi s) = \\ &= \left( G_{uun*}^L(r, \xi, s), \Gamma_{uun*}^L(r, \xi, s), G_{vun*}^L(r, \xi, s), \Gamma_{vun*}^L(r, \xi, s) \right)^T, \\ G_{uun*}^L(r, \xi, s) &= -\xi R_{uun*}(rs, \xi s), \Gamma_{uun*}^L(r, \xi, s) = -\xi s T_{uun*}(rs, \xi s), \\ G_{vun*}^L(r, \xi, s) &= -\xi R_{vun*}(rs, \xi s), \Gamma_{vun*}^L(r, \xi, s) = \xi s T_{vun*}(rs, \xi s),\end{aligned}\quad (3.5.12)$$

где

$$\begin{aligned}R_{uun*}(x, y) &= y P_{un}(x, y) + \frac{n(n+1)\eta}{x} P_{en}(\eta x, \eta y), \\ R_{vun*}(x, y) &= \frac{y}{x} S_{un}(y, x) - \eta^2 S_{en}(\eta x, \eta y).\end{aligned}$$

Тогда из формул (3.5.9) - (3.5.12) получаем следующий результат для искомых функций влияния:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{un}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \tilde{\mathbf{G}}_{un}^L(r, \xi, s) + \tilde{\mathbf{G}}_{un*}^L(r, \xi, s) H(r-\xi), \\ \tilde{\mathbf{G}}_{un}^L(r, \xi, s) &= \xi^{-2} \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{A}_{un}(\xi, s) = \\ &= \left( \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s), \Gamma_{uun}^L(r, \xi, s), \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s), \Gamma_{vun}^L(r, \xi, s) \right)^T.\end{aligned}\quad (3.5.13)$$

При этом столбец произвольных постоянных должен удовлетворять вытекающей из (3.5.9) и граничных условий в (3.2.26) системе уравнений:

$$\mathbf{Z}_n(s) \mathbf{A}_{un}(\xi, s) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{uun*}^L(r_1, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r_1, \xi, s) \end{pmatrix}, \quad (3.5.14)$$

где

$$\mathbf{Z}_n(s) = \begin{pmatrix} X_{1n}(r_0s) & X_{2n}(r_0s) & X_{3n}(\eta r_0s) & X_{4n}(\eta r_0s) \\ Y_{1n}(r_0s) & Y_{2n}(r_0s) & Y_{3n}(\eta r_0s) & Y_{4n}(\eta r_0s) \\ X_{1n}(r_1s) & X_{2n}(r_1s) & X_{3n}(\eta r_1s) & X_{4n}(\eta r_1s) \\ Y_{1n}(r_1s) & Y_{2n}(r_1s) & Y_{3n}(\eta r_1s) & Y_{4n}(\eta r_1s) \end{pmatrix}.$$

Ее решение с использованием (П.5.2) записываем так:

$$\mathbf{A}_{un}(\xi, s) = -\frac{1}{|\mathbf{Z}_n(s)|} \left[ \begin{pmatrix} N_{31}(s) \\ -N_{32}(s) \\ N_{33}(s) \\ -N_{34}(s) \end{pmatrix} G_{uun^*}^L(r_1, \xi, s) + \begin{pmatrix} -N_{41}(s) \\ N_{42}(s) \\ -N_{43}(s) \\ N_{44}(s) \end{pmatrix} G_{vun^*}^L(r_1, \xi, s) \right]. \quad (3.5.15)$$

Подставляя (3.5.15) в (3.5.13), с учетом (П.5.6) приходим к следующему результату (формулы для функций  $\Gamma_{uun^*}^L$  и  $\Gamma_{vun^*}^L$  не выписываются, поскольку они далее не используются):

$$\begin{aligned} |\mathbf{Z}_n(s)| \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) &= -\xi^{-1} \left[ R_{un1}(rs, r_0s, r_1s) R_{uun^*}(r_1s, \xi s) + \right. \\ &\quad \left. + n(n+1) R_{un2}(rs, r_0s, r_1s) R_{vun^*}(r_1s, \xi s) \right], \\ |\mathbf{Z}_n(s)| \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= -\xi^{-1} \left[ R_{vn1}(rs, r_0s, r_1s) R_{uun^*}(r_1s, \xi s) + \right. \\ &\quad \left. + R_{un1}(r_1s, r_0s, rs) R_{vun^*}(r_1s, \xi s) \right], \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

где стоящие в правых частях функции определены равенствами (3.5.12) и (П.5.17), (П.5.18).

Для определения функций  $G_{uvn}^L$  и  $G_{vvn}^L$  ( $n \geq 1$ ) сводим систему уравнений в (3.2.27) к системе первого порядка, и в соответствии с (П.2.16) и обозначением (П.4.1) аналогично (3.5.9) записываем ее общее решение так:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{A}_{vn} + \mathbf{G}_{vn^*}^L(r, \xi, s), \\ \mathbf{G}_{vn}^L &= \begin{pmatrix} G_{uvn}^L \\ \Gamma_{uvn}^L \\ G_{vvn}^L \\ \Gamma_{vvn}^L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{vn} = \begin{pmatrix} A_{1vn} \\ A_{2vn} \\ B_{1vn} \\ B_{2vn} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{uvn}^L = \frac{\partial G_{uvn}^L}{\partial r}, \quad \Gamma_{vvn}^L = \frac{\partial G_{vvn}^L}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Здесь  $\mathbf{G}_{vn}^L$  - столбец частных решений, который подобно (3.5.10), (3.5.11) находим методом вариации постоянных (учитываем, что во втором уравнении в (3.2.27) коэффициент при старшей производной равен  $\eta^{-2}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{D}_{vn}, \quad \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{D}'_{vn} = -\mathbf{F}_v, \\ \mathbf{D}_{vn} &= (D_{1vn}, D_{2vn}, D_{3vn}, D_{4vn})^T, \quad \mathbf{F}_v = (0, 0, 0, \eta^2 \delta(r - \xi))^T. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Решение этой системы уравнений с использованием (П.4.9) и (П.4.12) записывается так:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{vn} &= W_U^{-1} (M_{41}, -M_{42}, M_{43}, -M_{44})^T \Big|_{r=\xi} \eta^2 \delta(r - \xi), \\ \mathbf{D}_{vn} &= \xi \tilde{\mathbf{D}}_{vn}(\xi s) H(r - \xi), \\ \tilde{\mathbf{D}}_{vn}(\xi) &= \\ &= (n(n+1)Z_{2n}(\xi), -n(n+1)Z_{1n}(\xi), -\eta^3 \xi Y_{4n}(\eta \xi), \eta^3 \xi Y_{3n}(\eta \xi))^T. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Следовательно, с учетом (П.3.5), (П.4.29) и (П.4.13) частное решение имеет вид (формулы для функций  $\Gamma_{uvn}^L$  и  $\Gamma_{vvn}^L$  не выписываются, поскольку они далее не используются):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \tilde{\mathbf{G}}_{vn}^L(r, \xi, s) H(r - \xi), \\ \tilde{\mathbf{G}}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \xi \mathbf{X}_n(r, s) \tilde{\mathbf{D}}_{vn}(\xi s) = \\ &= (G_{uvn}^L(r, \xi, s), \Gamma_{uvn}^L(r, \xi, s), G_{vvn}^L(r, \xi, s), \Gamma_{vvn}^L(r, \xi, s))^T, \\ G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= -n(n+1) \xi R_{uvn}^L(rs, \xi s), \quad G_{vvn}^L(r, \xi, s) = -\xi R_{vvn}^L(rs, \xi s), \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

где

$$\begin{aligned} R_{uvn}^L(x, y) &= \eta^2 \frac{y}{x} S_{en}(\eta y, \eta x) - S_{un}(x, y) = -\frac{y}{x} R_{vun}^L(y, x), \\ R_{vvn}^L(x, y) &= \eta^3 y Q_{en}(\eta x, \eta y) + \frac{n(n+1)}{x} P_{en}(x, y). \end{aligned}$$

Тогда из формул (3.5.17) - (3.5.20) получаем следующий результат для искомых функций влияния:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \tilde{\mathbf{G}}_{vn}^L(r, \xi, s) + \tilde{\mathbf{G}}_{vn*}^L(r, \xi, s) H(r - \xi), \\
\tilde{\mathbf{G}}_{vn}^L(r, \xi, s) &= \xi^{-2} \mathbf{X}_n(r, s) \mathbf{A}_{vn}(\xi, s) = \\
&= \left( n(n+1) \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s), \Gamma_{uvn}^L(r, \xi, s), \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s), \Gamma_{vvn}^L(r, \xi, s) \right)^T.
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

При этом столбец произвольных постоянных должен удовлетворять вытекающей из (3.5.21) и граничных условий в (3.2.27) аналогичной (3.5.14) системе уравнений:

$$\mathbf{Z}_n(s) \mathbf{A}_{vn}(\xi, s) = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{uvn*}^L(r_1, \xi, s) \\ G_{vvn*}^L(r_1, \xi, s) \end{pmatrix}, \tag{3.5.22}$$

Сравнивая теперь (3.5.21) и (3.5.22) с равенствами (3.5.13) и (3.5.14), приходим к аналогичным (3.5.16) равенствам (формулы для функций  $\Gamma_{uvn}^L$  и  $\Gamma_{vvn}^L$  не выписываются, поскольку они далее не используются):

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Z}_n(s)| \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= -\xi^{-1} \left[ R_{un1}(rs, r_0s, r_1s) R_{uvn*}(r_1s, \xi s) + \right. \\
&\quad \left. + R_{un2}(rs, r_0s, r_1s) R_{vvn*}(r_1s, \xi s) \right], \\
|\mathbf{Z}_n(s)| \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= -\xi^{-1} \left[ n(n+1) R_{vn1}(rs, r_0s, r_1s) R_{uvn*}(r_1s, \xi s) + \right. \\
&\quad \left. + R_{un1}(r_1s, r_0s, rs) R_{vvn*}(r_1s, \xi s) \right].
\end{aligned} \tag{3.5.23}$$

Окончательно в соответствии со следствием П.6.3 функции  $G_{uun}^L$ ,  $G_{vun}^L$ ,  $G_{uvn}^L$  и  $G_{vvn}^L$  записываем так:

$$\begin{aligned}
G_{uun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\
G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right];
\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

$$\begin{aligned}
G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 n(n+1) \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\
G_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],
\end{aligned} \tag{3.5.25}$$

где функции  $\tilde{G}_{uun}^L$ ,  $\tilde{G}_{vun}^L$ ,  $\tilde{G}_{uvn}^L$  и  $\tilde{G}_{vvn}^L$  определяются равенствами (3.5.16) и (3.5.23).

Для проверки рассмотрим частный случай при  $n=0$ . Из формул (П.2.17), (П.4.2), (П.4.4), (3.5.12) и (П.5.17) получаем следующие равенства:

$$X_{30}(z) = 0, X_{40}(z) = 0; \quad (3.5.26)$$

$$b_0(z) = 1, c_0(z) = 1 - \frac{1}{z^2}; \quad (3.5.27)$$

$$R_{uu0*}(x, y) = yP_{u0}(x, y), R_{u01}(x, y, z) = P_{u0}(y, x)Q_{e0}(\eta y, \eta z). \quad (3.5.28)$$

Подставляя последние равенства в (П.5.5) и (3.5.16) приходим к таким результатам:

$$|Z_0(s)| = R_{z0}(r_0s, r_1s), R_{00}(x, y) = -P_{z0}(x, y)Q_{e0}(\eta x, \eta y); \quad (3.5.29)$$

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{sP_{u0}(r_1s, \xi s)P_{u0}(r_0s, rs)Q_{e0}(\eta r_0s, \eta r_1s)}{P_{u0}(r_0s, r_1s)Q_{e0}(\eta r_0s, \eta r_1s)} = s \frac{P_{u0}(r_1s, \xi s)P_{u0}(r_0s, rs)}{P_{u0}(r_0s, r_1s)},$$

что полностью соответствует формуле (3.5.8).

### § 3.6. Оригиналы объемных функций влияния для упругой толстостенной сферы

Для вычисления оригиналов функций влияния в (3.5.24) и (3.5.25) используем формулы (П.5.19) – (П.5.21) и аналогично преобразованные выражения в (3.5.12) и (3.5.20):

$$\begin{aligned} R_{uum*}(x, y) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}} L_{uum*}(x, y), \\ R_{vum*}(x, y) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}} L_{vum*}(x, y), \\ R_{uvm*}(x, y) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}} L_{uvm*}(y, x), \\ R_{vvm*}(x, y) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}x^{n+2}y^{n+1}} L_{vvm*}(x, y). \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

где

$$\begin{aligned} L_{uum*}(x, y) &= \eta^{2n+1}E_{11n}(x, y) + n(n+1)E_{00n}(\eta x, \eta y), \\ L_{vum*}(x, y) &= E_{30n}(\eta x, \eta y) - \eta^{2n+1}E_{10n}(y, x), \\ L_{uvm*}(x, y) &= E_{33n}(\eta x, \eta y) + n(n+1)\eta^{2n+1}E_{00n}(x, y). \end{aligned}$$

Далее, используя (П.3.20), записываем экспоненциальные многочлены в (3.6.1)

в явном виде:

$$\begin{aligned}
L_{uum^*}(x, y) &= -P_{uum^*}^{(1)}(x, y)e^{x-y} - P_{uum^*}^{(2)}(x, y)e^{\eta(x-y)} + \\
&\quad + P_{uum^*}^{(1)}(-x, -y)e^{y-x} + P_{uum^*}^{(2)}(-x, -y)e^{\eta(y-x)}, \\
L_{vum^*}(x, y) &= -P_{vum^*}^{(1)}(x, y)e^{x-y} - P_{vum^*}^{(2)}(x, y)e^{\eta(x-y)} + \\
&\quad + P_{vum^*}^{(1)}(-x, -y)e^{y-x} + P_{vum^*}^{(2)}(-x, -y)e^{\eta(y-x)}, \\
L_{vvn^*}(x, y) &= -P_{vvn^*}^{(1)}(x, y)e^{x-y} - P_{vvn^*}^{(2)}(x, y)e^{\eta(x-y)} + \\
&\quad + P_{vvn^*}^{(1)}(-x, -y)e^{y-x} + P_{vvn^*}^{(2)}(-x, -y)e^{\eta(y-x)},
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{uum^*}^{(1)}(x, y) &= \eta^{2n+1}R_{n1}(-x)R_{n1}(y), \quad P_{uum^*}^{(2)}(x, y) = n(n+1)R_{n0}(-\eta x)R_{n0}(\eta y), \\
P_{vum^*}^{(1)}(x, y) &= \eta^{2n+1}R_{n1}(y)R_{n0}(-x), \quad P_{vum^*}^{(2)}(x, y) = R_{n3}(-\eta x)R_{n0}(\eta y), \\
P_{vvn^*}^{(1)}(x, y) &= n(n+1)\eta^{2n+1}R_{n0}(-x)R_{n0}(y), \quad P_{vvn^*}^{(2)}(x, y) = R_{n3}(-\eta x)R_{n3}(\eta y).
\end{aligned}$$

Подставляя теперь в (3.5.16) и (3.5.23) равенства (3.6.1), (3.6.2) и (П.5.19) – (П.5.21), приходим к следующим представлениям функций влияния  $\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{vum}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s)$  и  $\tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s)$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}} \frac{F_{uum}(s)}{L_{zn}(r_0s, r_1s)}, \\
\tilde{G}_{vum}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}} \frac{F_{vum}(s)}{L_{zn}(r_0s, r_1s)}, \\
\tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}} \frac{F_{uvn}(s)}{L_{zn}(r_0s, r_1s)}, \\
\tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1}r^{n+2}\xi^{n+2}s^{2n+3}} \frac{F_{vvn}(s)}{L_{zn}(r_0s, r_1s)},
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{uum}(s) &= L_{uum^*}(r_1s, \xi s)L_{um1}(rs, r_0s, r_1s) + n(n+1)L_{vum^*}(r_1s, \xi s)L_{um2}(rs, r_0s, r_1s), \\
F_{vum}(s) &= L_{uum^*}(r_1s, \xi s)L_{vm1}(rs, r_0s, r_1s) + L_{vum^*}(r_1s, \xi s)L_{um1}(r_1s, r_0s, rs), \\
F_{uvn}(s) &= -L_{vum^*}(\xi s, r_1s)L_{um1}(rs, r_0s, r_1s) + L_{vvn^*}(r_1s, \xi s)L_{um2}(rs, r_0s, r_1s), \\
F_{vvn}(s) &= -n(n+1)L_{vum^*}(\xi s, r_1s)L_{vm1}(rs, r_0s, r_1s) + L_{vvn^*}(r_1s, \xi s)L_{um1}(r_1s, r_0s, rs).
\end{aligned}$$

Входящие в последние равенства функции  $L_{un1}$ ,  $L_{un2}$  и  $L_{vn1}$  определяются формулами (П.5.20) и (П.5.21).

Функции  $F_{uum}(s)$ ,  $F_{vum}(s)$ ,  $F_{uvn}(s)$  и  $F_{vvn}(s)$  в формулах (3.6.3) согласно (3.6.2) и (3.6.3) имеют структуры экспоненциальных многочленов

$$\begin{aligned} F_{uum}(s) &= \sum_{\alpha_1} P_{uum}^{(\alpha_1)}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_1}(r, \xi)s}, & F_{vum}(s) &= \sum_{\alpha_2} P_{vum}^{(\alpha_2)}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_2}(r, \xi)s}, \\ F_{uvn}(s) &= \sum_{\alpha_3} P_{uvn}^{(\alpha_3)}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_3}(r, \xi)s}, & F_{vvn}(s) &= \sum_{\alpha_4} P_{vvn}^{(\alpha_4)}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_4}(r, \xi)s}, \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

конкретный вид которых находится методами компьютерной алгебры в процессе вычисления оригиналов функций  $\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{vum}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s)$  и  $\tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s)$ .

Для замыкания алгоритма определения оригиналов этих функций, используя (П.5.22), представляем экспоненциальный многочлен в знаменателе так:

$$L_{zn}(r_0s, r_1s) = -D_n(r_0s, r_0s)D_n(-r_1s, -r_1s) \left[ 1 + \sum_{k=1}^4 B_{kn}(r_0s, r_1s) e^{-\tau_{zk}s} \right] e^{\eta_+hs} \quad (3.6.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{z1} &= 2h, \quad \tau_{z2} = \eta_+h, \quad \tau_{z3} = 2\eta h, \quad \tau_{z4} = 2\eta_+h = \tau_{z1} + \tau_{z3}, \\ B_{1n}(x, y) &= -\frac{D_n(-x, x)D_n(y, -y)}{D_n(x, x)D_n(-y, -y)}, \quad B_{2n}(x, y) = \frac{8n(n+1)\eta^{2n+1}x^{2n+1}y^{2n+1}}{D_n(x, x)D_n(-y, -y)}, \\ B_{3n}(x, y) &= -\frac{D_n(x, -x)D_n(-y, y)}{D_n(x, x)D_n(-y, -y)}, \quad B_{4n}(x, y) = \frac{D_n(-x, -x)D_n(y, y)}{D_n(x, x)D_n(-y, -y)}. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $n=0$  с учетом (П.5.24) выражение (3.6.5) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} L_{z0}(r_0s, r_1s) &= -D_0(r_0s, r_0s)D_0(-r_1s, -r_1s) \times \\ &\times \left[ 1 + B_{10}(r_0s, r_1s) e^{-\tau_{z1}s} \right] \left[ 1 + B_{30}(r_0s, r_1s) e^{-\tau_{z3}s} \right] e^{\eta_+hs}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Далее аналогично (3.4.25), (3.4.26), принимая во внимание, что в некоторой правой полуплоскости  $\operatorname{Re} s > \alpha_*$  имеет место неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^4 B_{kn}(r_0s, r_1s) e^{-\tau_{zk}s} \right| < 1, \quad (3.6.7)$$

получаем следующий ряд [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{zn}(r_0s, r_1s)} &= \\ &= -\frac{1}{D_n(r_0s, r_0s)D_n(-r_1s, -r_1s)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{|\beta|=l} (l; \beta) e^{-\sigma_\beta s} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{l_k}(r_0s, r_1s), \quad (3.6.8) \\ \beta = (l_1, l_2, l_3, l_4), |\beta| &= \sum_{k=1}^4 l_k, (l; \beta) = \frac{l!}{l_1! l_2! l_3! l_4!}, \sigma_\beta = \tau_{z2} + \sum_{k=1}^4 \tau_{zk} l_k, \end{aligned}$$

где  $\beta$  - мультииндекс;  $|\beta|$  - его модуль;  $(l; \beta)$  - мультиномиальный коэффициент.

Окончательно изображения (3.6.3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_1} \sum_{|\beta|=l} Q_{uun}^{(\alpha_1 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_1}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_2} \sum_{|\beta|=l} Q_{vun}^{(\alpha_2 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_2}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_3} \sum_{|\beta|=l} Q_{uvn}^{(\alpha_3 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_3}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_4} \sum_{|\beta|=l} Q_{vvn}^{(\alpha_4 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{\alpha_4}(r, \xi)]s}, \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{uun}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{uun}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{l_k}(r_0s, r_1s), \\ Q_{vun}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vun}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{l_k}(r_0s, r_1s), \\ Q_{uvn}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{uvn}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{l_k}(r_0s, r_1s), \\ Q_{vvn}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vvn}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{l_k}(r_0s, r_1s). \end{aligned}$$

Очевидно, функции  $Q_{uun}^{(\alpha \beta l)}(s)$ ,  $Q_{vun}^{(\alpha \beta l)}(s)$ ,  $Q_{uvn}^{(\alpha \beta l)}(s)$ ,  $Q_{vvn}^{(\alpha \beta l)}(s)$  являются рациональными дробями. Покажем, что они являются правильными. Из (П.2.20) и (П.3.16) следует, что степени указанных там многочленов таковы:

$$\deg R_{n_0}(z) = n, \deg R_{n_1}(z) = \deg R_{n_3}(z) = n + 1. \quad (3.6.10)$$

Учитывая эти равенства, последовательно находим степени экспоненциальных многочленов аргумента  $s$  в (П.3.20)

$$\begin{aligned} \deg E_{00n}(\alpha s, \beta s) &= 2n, \deg E_{11n}(\alpha s, \beta s) = \deg E_{33n}(\alpha s, \beta s) = 2(n+1), \\ \deg E_{10n}(\alpha s, \beta s) &= \deg E_{30n}(\alpha s, \beta s) = 2n+1; \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

и в (3.6.1) и (П.5.19) - (П.5.21):

$$\deg L_{unn^*}(\alpha s, \beta s) = \deg L_{vvn^*}(\alpha s, \beta s) = 2(n+1), \deg L_{vvn^*}(\alpha s, \beta s) = 2n+1; \quad (3.6.12)$$

$$\deg L_{zn}(\alpha s, \beta s) = \deg L_{un1}(\alpha s, \beta s, \gamma s) = 4(n+1), \quad (3.6.13)$$

$$\deg L_{un2}(\alpha s, \beta s, \gamma s) = \deg L_{vn1}(\alpha s, \beta s, \gamma s) = 4n+3.$$

Отсюда получаем, что степень знаменателя в (3.6.3) равна  $6n+7$ , а степени числителей определяются следующим образом:

$$\deg F_{unn}(s) = \deg F_{vvn}(s) = 6(n+1), \deg F_{vun}(s) = \deg F_{uvn}(s) = 6n+5. \quad (3.6.14)$$

Таким образом, оригиналы каждого из слагаемых в (3.6.9) могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления.

Окончательно для оригиналов искомым функций влияния при  $n \geq 1$  в соответствии с (3.5.24) и (3.5.25) получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} G_{unn}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{unn}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{G}_{unn}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ G_{vun}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ G_{uvn}(r, \xi, \tau) &= n(n+1) \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uvn}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ G_{vvn}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Как показано в (3.5.17) – (3.5.20) функцию влияния  $G_{uu0}(r, \xi, \tau)$  можно найти, используя первое равенство в (3.6.15) при  $n=0$ . Однако удобнее ее вычислять непосредственно как оригинал изображения (3.5.8):

$$G_{uu0}(r, \xi, \tau) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uu0}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uu0}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right]. \quad (3.6.16)$$

С этой целью аналогично проделанному ранее, используя (П.3.20) и (П.4.36), выразим входящую в (3.5.8) функцию  $\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s)$  через экспоненциальные многочлены:

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{E_{110}(r_1s, \xi s) E_{110}(r_0s, rs)}{2s^3 r^2 \xi^2 E_{110}(r_0s, r_1s)}, \quad (3.6.17)$$

$$E_{110}(x, y) = R_{01}(x)R_{01}(-y)e^{y-x} - R_{01}(-x)R_{01}(y)e^{x-y}.$$

Далее преобразовывая знаменатель подобно (3.6.5)

$$E_{110}(r_0s, r_1s) = R_{01}(r_0s)R_{01}(-r_1s)e^{hs} \left[ 1 + X_{10}(r_0s, r_1s)e^{-2hs} \right], \quad (3.6.18)$$

$$X_{10}(x, y) = -B_{10}(x, y) = \frac{R_{01}(-x)R_{01}(y)}{R_{01}(x)R_{01}(-y)},$$

окончательно аналогично (3.6.9) записываем функцию  $\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s)$  так:

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{1}{2r^2 \xi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^4 Q_{uu0}^{(\alpha l)}(s) e^{-[\tau_{hl} - \tau_{\alpha}(r, \xi)]s}, \quad (3.6.19)$$

где

$$Q_{uu0}^{(1l)}(s) = \frac{R_{01}(r_1s)R_{01}(-\xi s)R_{01}(-rs)}{s^3 R_{01}(-r_1s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s),$$

$$Q_{uu0}^{(2l)}(s) = -\frac{R_{01}(-\xi s)R_{01}(rs)}{s^3} X_{10}^{l+1}(r_0s, r_1s),$$

$$Q_{uu0}^{(3l)}(s) = -\frac{R_{01}(\xi s)R_{01}(-rs)}{s^3} X_{10}^l(r_0s, r_1s),$$

$$Q_{uu0}^{(4l)}(s) = \frac{R_{01}(\xi s)R_{01}(-r_0s)R_{01}(rs)}{s^3 R_{01}(r_0s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s),$$

$$\tau_1(r, \xi) = \xi + r - r_1 - r_0, \quad \tau_2(r, \xi) = \xi - r - h, \quad \tau_3(r, \xi) = r - \xi + h,$$

$$\tau_4(r, \xi) = r_1 + r_0 - \xi - r, \quad \tau_{hl} = (2l + 1)h.$$

Поскольку функции  $Q_{uu0}^{(\alpha l)}(s)$  являются правильными рациональными дробями, то оригинал каждого слагаемого в (3.6.19) находится с помощью соответствующих теорем операционного исчисления.

В качестве примера рассмотрим сферу с радиусами  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 2$ , материал которой является алюминием, что соответствует параметру  $\eta = 2,04$  [112].

На рис. 3.6.1-3.6.4 [50] приведены построенные при  $\xi = 0.5$  и  $\tau = 1.5$  графики распределения функций влияния  $G_{uum}$ ,  $G_{vum}$ ,  $G_{uvm}$  и  $G_{vvm}$  по радиусу: сплошные кривые соответствуют  $n = 1$ , а штриховые -  $n = 2$ .

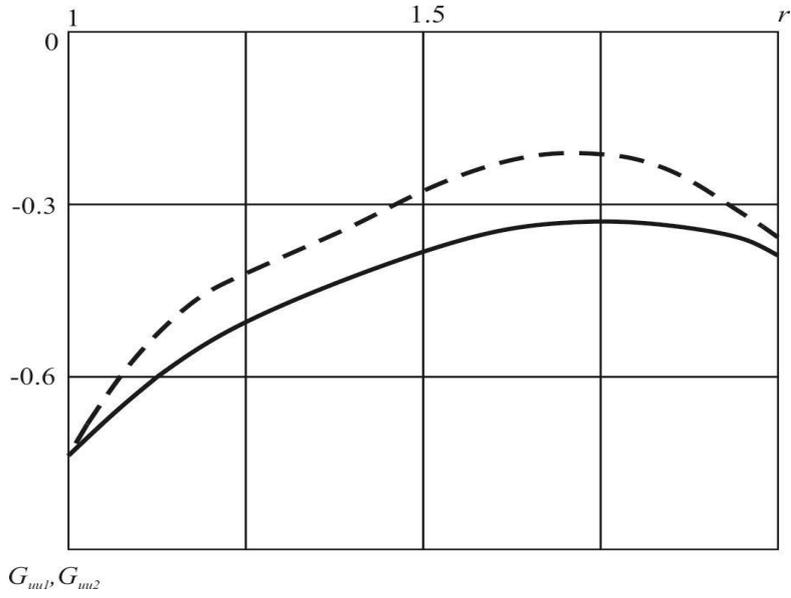


Рис. 3.6.1.

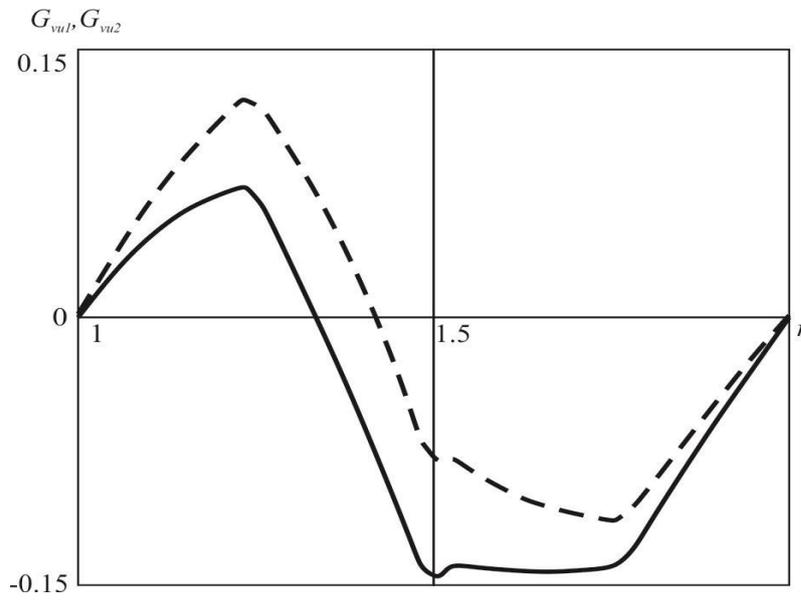


Рис. 3.6.2.

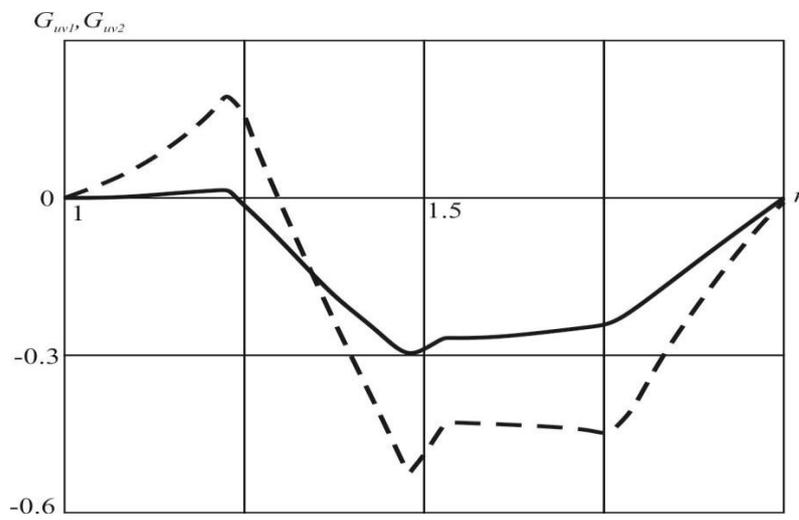


Рис. 3.6.3.

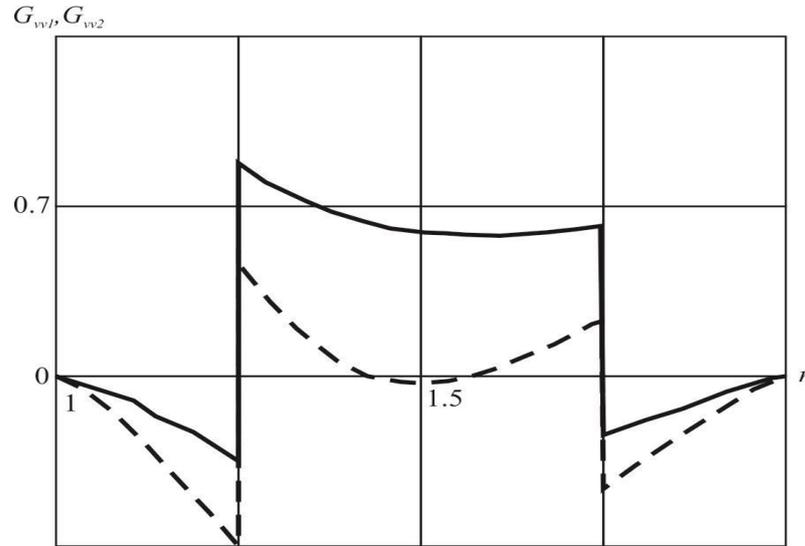


Рис. 3.6.4.

### § 3.7. Нестационарное движение упругой толстостенной сферы под действием объемных сил

Рассмотрим вспомогательную задачу об осесимметричном движении упругой толстостенной сферы под действием объемных сил с радиальной  $F_r(r, \theta, \tau)$  и тангенциальной компонентами  $F_\theta(r, \theta, \tau)$  [50]. Ее движение описывается уравнениями (1.5.25). Аналогично (3.1.3) полагаем, что в начальный момент возмущения отсутствуют:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = 0. \quad (3.7.1)$$

С учетом замечания (3.2.21) полагаем, что соответствующие граничные условия в (3.1.4) однородные ( $k = 0, 1$ ):

$$u|_{r=r_k} = v|_{r=r_k} = 0. \quad (3.7.2)$$

Тогда с использованием разложений (3.1.6) из (3.2.23) и (3.2.24) получаем следующие интегральные представления для изображений коэффициентов рядов для перемещений:

- при  $n = 0$

$$u_0^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) F_{r0}^L(\xi, s) d\xi; \quad (3.7.3)$$

- при  $n \geq 1$

$$u_n^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uum}^L(r, \xi, s) F_m^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvm}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi, \quad (3.7.4)$$

$$v_n^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vum}^L(r, \xi, s) F_m^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi.$$

В пространстве оригиналов эти формулы преобразовываются так:

- при  $n = 0$

$$u_0(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * F_{r0}(\xi, \tau) d\xi; \quad (3.7.5)$$

- при  $n \geq 1$

$$u_n(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uum}(r, \xi, \tau) * F_m(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvm}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.7.6)$$

$$v_n(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vum}(r, \xi, \tau) * F_m(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi.$$

Ядра этих представлений определяются формулами (3.6.15) и (3.6.16).

В качестве примера движения сферы с указанными в предыдущем параграфе характеристиками рассмотрим действие на нее объемной силы, направленной по оси  $Oz$  (см. §§ 1.4, 1.5):  $F_1 = F_2 = 0$ ,  $F_3 = H(\tau)$ . Тогда ненулевые координаты вектора объемной силы в сферической системе координат определяются так:  $F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau) \cos \theta$ ,  $F_\theta(r, \theta, \tau) = -H(\tau) \sin \theta$ , что соответствует следующим коэффициентам рядов [1, 111]:

$$F_{r1}(r, \tau) = H(\tau), \quad F_{\theta 1}(r, \tau) = -H(\tau),$$

$$F_{r0}(r, \tau) = F_m(r, \tau) = F_{\theta n}(r, \tau) = 0, \quad n \geq 2.$$

При этом, согласно (3.7.5) и (3.7.6), имеет место поступательное движение сферы:  $u(r, \theta, \tau) = u_1(r, \tau) \cos \theta$ ,  $v(r, \theta, \tau) = v_1(r, \tau) \sin \theta$ . Графики распределения функций  $u_1(r, \tau)$  и  $v_1(r, \tau)$  по радиусу представлены на рис. 3.7.1 и 3.7.2. Номера кривых отвечают следующим моментам времени: 1 -  $\tau = 0.5$ ; 2 -  $\tau = 1$ ; 3 -  $\tau = 1.5$ ; 4 -  $\tau = 2$ .

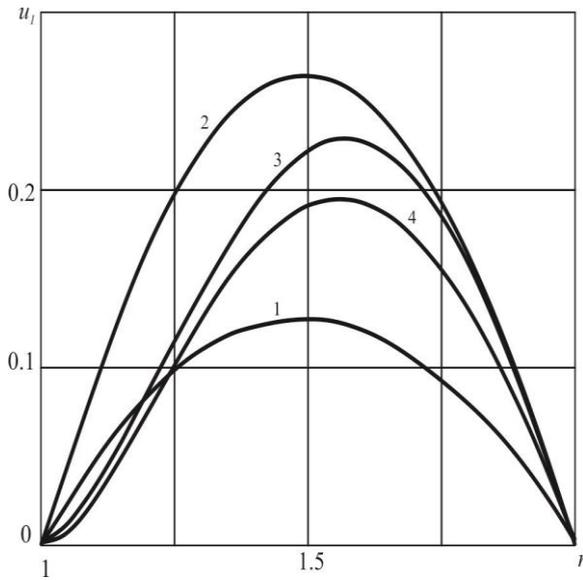


Рис. 3.7.1.

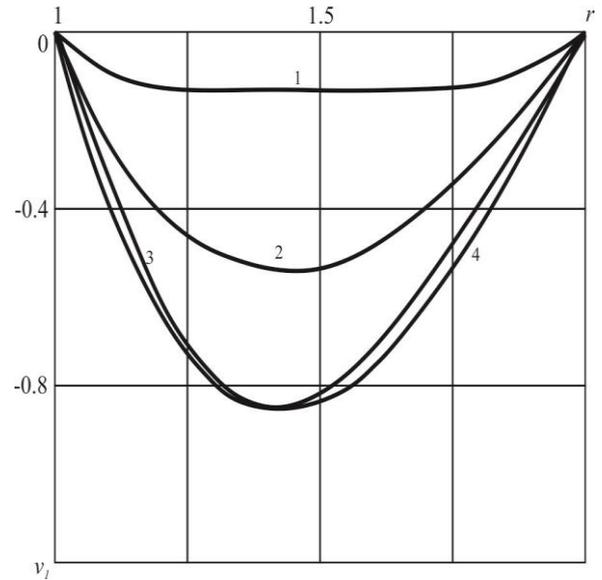


Рис. 3.7.2.

### § 3.8. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругой толстостенной сфере

Постановка этой задачи приведена в § 3.1. Ее решение представлено в виде рядов (3.1.6) по углу  $\theta$  и (3.2.1) по малому параметру  $\alpha$ . Как показано в §§ 3.2 – 3.7, коэффициенты этих рядов при каждом  $n$  определяются независимыми рекуррентными системами интегральных соотношений. Для нулевых коэффициентов рядов (3.1.6) ( $n = 0$ ) при выполнении условий (3.2.21) из (3.2.22), (3.4.12), (3.4.13) и (3.7.5) с учетом (3.1.17) получаем следующие соотношения:

$$u_{00}(r, \tau) \equiv 0,$$

$$\rho_{0m}(r, \tau) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \rho_{e0} L_s [u_{0m}(r, \tau)] \right\}, \quad E_{r0m}(r, \tau) = -L_s [u_{0m}(r, \tau)]; \quad (3.8.1)$$

$$u_{0m}(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * E_0(\xi) \rho_{0,m-1}^L(\xi, s) d\xi \quad (m \geq 1),$$

которые приводят к тривиальным равенствам при любом  $m \geq 0$ :

$$u_{0m}(r, \tau) = \rho_{0m}(r, \tau) = E_{r0m}(r, \tau) \equiv 0. \quad (3.8.2)$$

Поэтому далее рассматриваем только  $n \geq 1$ . Из (3.4.11) - (3.4.13), (3.4.15) и (3.7.6) с учетом (3.1.25), (3.2.21) и (3.2.24) получаем следующую рекуррентную систему:

- при  $m = 0$

$$u_{n0}(r, \tau) \equiv 0, v_{n0}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 0),$$

$$H_{n0}(r, \tau) = -\eta_e^2 \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) [\gamma e_{0kn}(\tau) + \dot{e}_{0kn}(\tau)],$$

$$E_{rn0}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^c(r) e_{0kn}(\tau), \rho_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \quad (3.8.3)$$

$$E_{\theta n0}(r, \tau) = \sum_{k=0}^1 \Gamma_{Hnk}^c(r) e_{0kn}(\tau) \quad (n \geq 1);$$

- при  $m \geq 1$

$$u_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{uvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.8.4)$$

$$v_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi,$$

где

$$f_{un,m-1}(\xi, \tau) = \rho_{e0}(\xi) E_{rn,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{n,m-1}(\xi, \tau),$$

$$f_{vn,m-1}(\xi, \tau) = \rho_{e0}(\xi) E_{\theta n,m-1}(\xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{n,m-1}(\xi, \tau);$$

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [\dot{u}_{nm}(\xi, \tau), \dot{v}_{nm}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.8.5)$$

$$E_{rnm}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nms}(\xi, \tau), v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.8.6)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nms}(\xi, \tau), v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi + \rho_{e0}(\xi) v_{nms}(r, \tau); \quad (3.8.7)$$

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -l_{np} [u_{nms}(r, \tau), v_{nms}(r, \tau)]; \quad (3.8.8)$$

$$u_{nms}(r, \tau) = u_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * u_{nm}(r, \tau), v_{nms}(r, \tau) = v_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * v_{nm}(r, \tau). \quad (3.8.9)$$

Как следует из (3.1.14) и (3.1.17), в соотношения (3.8.5) - (3.8.8) входят производные по радиусу. Для того чтобы избежать этого дифференцирования, в формулах (3.8.5) - (3.8.7) преобразовываем их с помощью интегрирования по частям. Для этого, учитывая вид оператора  $l_H$  и граничные условия (3.2.12), рассматриваем следующие интегралы:

$$\int_{r_0}^{r_1} \xi^{-1} G_{Hn}^c(r, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau)] d\xi = v_{nm}(\xi, \tau) \rho_{e0}(\xi) G_{Hn}^c(r, \xi) \Big|_{r_0}^{r_1} -$$

$$- \int_{r_0}^{r_1} \xi \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} G_{Hn}^c(r, \xi)] d\xi = \quad (3.8.10)$$

$$= - \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} G_{Hn}^c(r, \xi)] d\xi;$$

$$\int_{r_0}^{r_1} \xi^{-1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau)] d\xi = \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau) \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) \Big|_{r_0}^{r_1} -$$

$$- \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi)] d\xi = \quad (3.8.11)$$

$$= - \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) v_{nm}(\xi, \tau) \xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi)] d\xi.$$

Тогда представления (3.8.5) – (3.8.7) можно записать так:

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) [G_{Hun}^c(r, \xi) \dot{u}_{nm}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) \dot{v}_{nm}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.8.12)$$

$$E_{rnm}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \times$$

$$\times \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) [G_{Hun}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.8.13)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \rho_{e0}(r) v_{nms}(r, \tau) +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) [\Gamma_{Hun}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + \Gamma_{Hvn}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.8.14)$$

где

$$G_{Hun}^c(r, \xi) = \frac{1}{\xi} G_{Hn}^c(r, \xi), \quad G_{Hvn}^c(r, \xi) = -\xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} G_{Hn}^c(r, \xi)],$$

$$\Gamma_{Hun}^c(r, \xi) = \frac{1}{\xi} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi), \quad \Gamma_{Hvn}^c(r, \xi) = -\xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{-1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi)]. \quad (3.8.15)$$

Явный вид этих ядер находим, используя формулы (3.3.41), (3.4.5) и (3.4.8):

$$\begin{aligned} G_{Hun}^c(r, \xi) &= \xi \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \\ G_{Hvn}^c(r, \xi) &= \xi \left[ G_{Hvn1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + G_{Hvn2}^c(r, \xi) H(r - \xi) \right], \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

где

$$\begin{aligned} G_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_0, r) \alpha_n(r_1, \xi)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}\alpha_n(r_1, r_0)}, \quad G_{Hvn2}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_1, r) \alpha_n(r_0, \xi)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}\alpha_n(r_1, r_0)}; \\ \Gamma_{Hun}^c(r, \xi) &= \Gamma_{Hun1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{Hun2}^c(r, \xi) H(r - \xi), \\ \Gamma_{Hvn}^c(r, \xi) &= \Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi) + \delta(\xi - r), \\ \Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi) &= \Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) H(r - \xi), \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{Hun1}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi) \alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}, \quad \Gamma_{Hun2}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_0, \xi) \alpha_n(r_1, r)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0)}, \\ \Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{n(n+1) \alpha_n(r_1, \xi) \alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0) \xi^n}, \quad \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) = -\frac{n(n+1) \alpha_n(r_0, \xi) \alpha_n(r, r_1)}{(2n+1)r^{n+2} \alpha_n(r_1, r_0) \xi^n}. \end{aligned}$$

При этом соотношение (3.8.14) записывается так:

$$\begin{aligned} E_{\theta nm}(r, \tau) &= \sum_{k=0}^1 \Gamma_{Hnk}^c(r) e_{0kn}(\tau) + \\ &+ \int_{r_0}^{r_1} \rho_{e0}(\xi) \left\{ \Gamma_{Hun}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + \Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

Для устранения производной в формуле (3.8.8) отметим, что имеет место следующее равенство:

$$l_{np}(u, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} u)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} \rho_{e0} v = \rho'_{e0} u + \rho_{e0} \chi_n(u, v), \quad (3.8.19)$$

где функция  $\chi_n(u, v)$  определена в (П.2.24).

Тогда необходимо дополнительно построить интегральное представление для  $\chi_{nm} = \chi_n(u_{nm}, v_{nm})$ . Его получаем из (3.8.4):

$$\chi_{nm} = \int_{r_0}^{r_1} X_{un}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} X_{vn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.8.20)$$

где

$$X_{un}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uun}, G_{vun}), X_{vn}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uvn}, G_{vvn}).$$

При этом соотношение (3.8.8) приобретает следующий вид:

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r)u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0}\chi_{nms}(r, \tau), \quad (3.8.21)$$

где

$$\chi_{nms}(r, \tau) = \chi_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_{nm}(r, \tau). \quad (3.8.22)$$

Таким образом, преобразованная рекуррентная система уравнений включает в себя соотношения (3.8.4), (3.8.9), (3.8.11) – (3.8.14) и (3.8.20) – (3.8.22).

Изображения ядер в (3.8.20) можно найти непосредственной подстановкой (3.5.24) и (3.5.25) в последние равенства. Однако эта процедура достаточно громоздка. Поэтому используем равенства (П.2.35).

Сначала построим изображения функции  $X_{un}(r, \xi, \tau)$ . Для нее с учетом (3.5.9) получаем следующее равенство:

$$X_{un}^L(r, \xi, s) = s \sum_{k=1}^2 A_{kun} Z_{kn}(rs) + \chi_n [G_{uun}^L H(r - \xi), G_{vun}^L H(r - \xi)], \quad (3.8.23)$$

где функции  $G_{uun}^L, G_{vun}^L$  и постоянные  $A_{kun}$  определяются равенствами (3.5.12) и (3.5.15) соответственно.

Для построения функции  $\chi_n [G_{uun}^L H(r - \xi), G_{vun}^L H(r - \xi)]$  сначала с использованием (3.5.12), (П.3.4), (П.3.11), (П.3.12), (П.4.14), (П.4.16), (П.4.17), (П.4.19) и (П.4.20) получаем следующие вспомогательные равенства:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial [x^2 R_{uun}^*(x, y)]}{\partial x} = -b_n(x) y S_{un}(y, x) + \frac{m\eta^2}{x} S_{en}(\eta x, \eta y); \quad (3.8.24)$$

$$R_{uun}^*(x, x) = 0. \quad (3.8.25)$$

В последних равенствах также учтены, вытекающие из (П.2.18), (П.3.7) и (П.4.15) соотношения:

$$S_{en}(x, x) = S_{un}(x, x) = -\frac{1}{x^2}. \quad (3.8.26)$$

Учитывая теперь (3.8.24) и (3.8.25), приходим к такой формуле:

$$\chi_n [G_{uun}^L H(r - \xi), G_{vun}^L H(r - \xi)] = \xi^2 s^2 S_{un}(\xi s, rs) H(r - \xi), \quad (3.8.27)$$

Изображения функции  $X_{vn}(r, \xi, \tau)$  имеют аналогичный (3.8.23) вид:

$$X_{vn}^L(r, \xi, s) = s \sum_{k=1}^2 A_{kvn} Z_{kn}(rs) + \chi_n \left[ G_{uvn*}^L H(r - \xi), G_{vvn*}^L H(r - \xi) \right], \quad (3.8.28)$$

где функции  $G_{uvn*}^L, G_{vvn*}^L$  и постоянные  $A_{kvn}$  определяются равенствами (3.5.20) и (3.5.22) соответственно.

Для построения функции  $\chi_n \left[ G_{uvn*}^L H(r - \xi), G_{vvn*}^L H(r - \xi) \right]$  аналогично (3.8.24), (3.8.25) получаем вспомогательные равенства

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial \left[ x^2 R_{uvn*}(x, y) \right]}{\partial x} = \frac{\eta^3 y}{x} Q_{en}(\eta y, \eta x) - b_n(x) P_{en}(x, y); \quad (3.8.29)$$

$$R_{uvn*}(x, x) = 0. \quad (3.8.30)$$

Учитывая их, приходим к требуемой формуле:

$$\chi_n \left[ G_{uvn*}^L H(r - \xi), G_{vvn*}^L H(r - \xi) \right] = n(n+1) \xi s P_{en}(rs, \xi s) H(r - \xi), \quad (3.8.31)$$

Входящие в (3.8.23) и (3.8.28) постоянные находим из (3.5.15) и (3.5.22):

$$\begin{aligned} -|Z_n(s)| A_{un1}(\xi, s) &= N_{31}(s) G_{uun*}^L(r_1, \xi, s) - N_{41}(s) G_{vun*}^L(r_1, \xi, s), \\ -|Z_n(s)| A_{un2}(\xi, s) &= -N_{32}(s) G_{uun*}^L(r_1, \xi, s) + N_{42}(s) G_{vun*}^L(r_1, \xi, s), \\ -|Z_n(s)| A_{vn1}(\xi, s) &= N_{31}(s) G_{uvn*}^L(r_1, \xi, s) - N_{41}(s) G_{vvn*}^L(r_1, \xi, s), \\ -|Z_n(s)| A_{vn2}(\xi, s) &= -N_{32}(s) G_{uvn*}^L(r_1, \xi, s) + N_{42}(s) G_{vvn*}^L(r_1, \xi, s). \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

Учитывая теперь (3.8.27), (3.8.31), (3.8.32) и (3.5.12), (3.5.20), (П.5.3), (П.5.4) и дополнительно (П.4.13), (П.4.29), приходим к следующим результатам для функций  $X_{un}^L$  и  $X_{vn}^L$ :

$$\begin{aligned} X_{un}^L(r, \xi, s) &= X_{un1}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + X_{un2}^L(r, \xi, s) H(r - \xi), \\ X_{vn}^L(r, \xi, s) &= X_{vn1}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + X_{vn2}^L(r, \xi, s) H(r - \xi). \end{aligned} \quad (3.8.33)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
X_{unj}^L(r, \xi, s) &= \frac{\tilde{X}_{unj}^L(r, \xi, s)}{|\mathbf{Z}_n(s)|}, \quad X_{vnj}^L(r, \xi, s) = n(n+1) \frac{\tilde{X}_{vnj}^L(r, \xi, s)}{|\mathbf{Z}_n(s)|} \quad (j=1, 2) \\
\tilde{X}_{un1}^L(r, \xi, s) &= \\
&= -\xi s \left[ T_{un}(rs, r_0s, r_1s) R_{uum^*}(r_1s, \xi s) + n(n+1) T_{vn}(rs, r_0s, r_1s) R_{vun^*}(r_1s, \xi s) \right], \\
\tilde{X}_{vn1}^L(r, \xi, s) &= \\
&= -\xi s \left[ T_{un}(rs, r_0s, r_1s) R_{uvn^*}(r_1s, \xi s) + T_{vn}(rs, r_0s, r_1s) R_{vvn^*}(r_1s, \xi s) \right], \\
\tilde{X}_{un2}^L(r, \xi, s) &= \tilde{X}_{un1}^L(r, \xi, s) + \xi^2 s^2 S_{un}(\xi s, rs) |\mathbf{Z}_n(s)|, \\
\tilde{X}_{vn2}^L(r, \xi, s) &= \tilde{X}_{vn1}^L(r, \xi, s) + \xi s P_{en}(rs, \xi s) |\mathbf{Z}_n(s)|,
\end{aligned} \tag{3.8.34}$$

где

$$\begin{aligned}
T_{un}(x, y, z) &= \\
&= S_{un}(y, x) Q_{en}(\eta y, \eta z) + \frac{n(n+1)}{\eta y^2} \left[ P_{en}(y, x) S_{en}(\eta z, \eta y) + \frac{1}{\eta^2 y z} P_{en}(z, x) \right], \\
T_{vn}(x, y, z) &= \\
&= \frac{1}{\eta} \left[ \frac{S_{un}(y, x)}{z} S_{en}(\eta y, \eta z) + \frac{n(n+1) P_{en}(\eta y, \eta z)}{\eta y^2 z} P_{en}(x, y) + \frac{S_{un}(z, x)}{\eta^2 y^3} \right],
\end{aligned}$$

а функция  $|\mathbf{Z}_n(s)|$  определяется формулой (П.5.5).

Для вычисления оригиналов ядер в (3.8.33) аналогично (П.5.19) - (П.5.30) с учетом (3.6.1) преобразовываем выражения в (3.8.34):

$$\begin{aligned}
T_{un}(x, y, z) &= \frac{T_{un}(x, y, z)}{4\eta^{2(n+2)} x^{n+1} y^{2(n+2)} z^{n+2}}, \quad T_{vn}(x, y, z) = \frac{T_{vn}(x, y, z)}{4\eta^{2(n+2)} x^{n+1} y^{2(n+2)} z^{n+2}}, \\
T_{un}(x, y, z) &= n(n+1) \left[ (-1)^n 2\eta^{2n+1} y^{2n+1} E_{00n}(z, x) - E_{00n}(y, x) E_{30n}(\eta z, \eta y) \right] - \\
&\quad - E_{10n}(y, x) E_{33n}(\eta y, \eta z), \\
T_{vn}(x, y, z) &= E_{10n}(y, x) E_{30n}(\eta z, \eta y) + n(n+1) E_{00n}(\eta y, \eta z) E_{00n}(x, y) - \\
&\quad - 2(-1)^n \eta^{2n+1} y^{2n+1} E_{10n}(z, x);
\end{aligned} \tag{3.8.35}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{unj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n N_{unj}(s)}{8\eta^{4n+5} r^{n+1} r_0^{2(n+2)} r_1^{2(n+2)} \xi^n}, \\
\tilde{X}_{vnj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n N_{vnj}(s)}{8\eta^{4n+5} r^{n+1} r_0^{2(n+2)} r_1^{2(n+2)} \xi^n},
\end{aligned} \tag{3.8.36}$$

где

$$\begin{aligned}
N_{un1}(s) &= T_{un}(rs, r_0s, r_1s)L_{uun*}(r_1s, \xi s) + n(n+1)T_{vn}(rs, r_0s, r_1s)L_{vun*}(r_1s, \xi s), \\
N_{vn1}(s) &= T_{un}(rs, r_0s, r_1s)L_{vun*}(\xi s, r_1s) + T_{vn}(rs, r_0s, r_1s)L_{vvn*}(r_1s, \xi s), \\
N_{un2}(s) &= N_{un1}(s) + \eta E_{10n}(\xi s, rs)L_{zn}(r_0s, r_1s), \\
N_{vn2}(s) &= N_{vn1}(s) - \eta E_{00n}(rs, \xi s)L_{zn}(r_0s, r_1s).
\end{aligned}$$

Подставляя теперь (3.8.36) и (П.5.19) в (3.8.33), окончательно получаем такие представления:

$$\begin{aligned}
X_{unj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n N_{unj}(s)}{2\eta^{2n+1} r^{n+1} \xi^n s^{2n+1} L_{zn}(r_0s, r_1s)}, \\
X_{vnj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n n(n+1) N_{vnj}(s)}{2\eta^{2n+1} r^{n+1} \xi^n s^{2n+1} L_{zn}(r_0s, r_1s)}.
\end{aligned} \tag{3.8.37}$$

Структура этих функций аналогична (3.6.3). Их числители методами компьютерной алгебры подобно (3.6.4) приводятся к явному виду (показатели экспонент, несмотря на одинаковые обозначения, могут отличаться):

$$N_{unj}(s) = \sum_{\alpha_j} P_{unj}^{(\alpha_j)}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_j}(r, \xi)s}, \quad N_{vnj}(s) = \sum_{\alpha_{j+2}} P_{vn1}^{(\alpha_{j+2})}(rs, \xi s) e^{\tau_{\alpha_{j+2}}(r, \xi)s}. \tag{3.8.38}$$

Поэтому функции в (3.8.37) аналогично (3.6.9) можно представить так:

$$\begin{aligned}
X_{unj}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\eta^{2n+1} r^{n+1} \xi^n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_j} \sum_{|\beta|=l} Q_{unj}^{(\alpha_j \beta l)}(s) e^{-[\sigma_{\beta} - \tau_{\alpha_k}(r, \xi)]s}, \\
X_{vnj}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2\eta^{2n+1} r^{n+1} \xi^n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_{j+2}} \sum_{|\beta|=l} Q_{vnj}^{(\alpha_{j+2} \beta l)}(s) e^{-[\sigma_{\beta} - \tau_{\alpha_{j+2}}(r, \xi)]s},
\end{aligned} \tag{3.8.39}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{unj}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{unj}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+1} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{lk}(r_0s, r_1s), \\
Q_{vnj}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vnj}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+1} D_n(r_0s, r_0s) D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^4 B_{kn}^{lk}(r_0s, r_1s).
\end{aligned}$$

Степени знаменателей в последних дробях согласно (3.6.13) равны  $bn + 5$ . Для определения степеней числителей сначала, используя (3.6.11), выясним этот вопрос для многочленов в (3.8.35):

$$\deg T_{un}(\alpha s, \beta s, \gamma s) = 4n + 3, \quad \deg T_{vn}(\alpha s, \beta s, \gamma s) = 2(2n + 1). \tag{3.8.40}$$

Теперь, учитывая эти равенства, а также дополнительно (3.6.12), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \deg N_{un1}(s) &= \deg N_{un2}(s) = 6n + 5, \\ \deg N_{vn1}(s) &= \deg N_{vn2}(s) = 2(3n + 2). \end{aligned} \quad (3.8.41)$$

Следовательно, рациональные функции  $Q_{vnj}^{(\alpha\beta l)}(s)$  являются правильными дробями, а у функций  $Q_{vnj}^{(\alpha\beta l)}(s)$  степени числителей и знаменателей совпадают. Поэтому ядра  $X_{unj}(r, \xi, \tau)$  могут содержать слагаемые

$$\frac{(-1)^{n+1} C_{unj}^{(\alpha_j \beta l)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+1} \xi^n} \delta[\tau - \sigma_\beta + \tau_{\alpha_j}(r, \xi)], \quad (3.8.42)$$

которые в соответствии со свойствами дельта-функции учитываются в свертках в (3.8.11). При этом коэффициенты  $C_{unj}^{(\alpha_j \beta l)}(r, \xi)$  находятся методами компьютерной алгебры.

Для того чтобы избежать численного дифференцирования в формулах (3.8.12), добавляем вытекающие из (3.8.4) равенства:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{nm}(r, \tau) &= \int_{r_0}^{r_1} \Pi_{unm}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) * f_{vm, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \\ \dot{v}_{nm}(r, \tau) &= \int_{r_0}^{r_1} \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{r_1} \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (3.8.43)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{unm}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{unm}(r, \xi, \tau), \quad \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) = \dot{G}_{uvm}(r, \xi, \tau), \\ \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{vun}(r, \xi, \tau), \quad \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) = \dot{G}_{vvn}(r, \xi, \tau), \end{aligned} \quad (3.8.44)$$

Явный вид этих ядер следует из (3.6.15):

$$\begin{aligned} \Pi_{unm}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{\Pi}_{unm}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{unm}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{\Pi}_{vun}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{vun}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) &= n(n+1)\xi^2 \left[ \tilde{\Pi}_{uvm}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{uvm}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right], \\ \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) &= \xi^2 \left[ \tilde{\Pi}_{vvn}(r, \xi, \tau) H(\xi - r) + \tilde{\Pi}_{vvn}(\xi, r, \tau) H(r - \xi) \right]; \end{aligned} \quad (3.8.45)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{uum}(r, \xi, \tau) &= \dot{\tilde{G}}_{uum}(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{uvm}(r, \xi, \tau) = \dot{\tilde{G}}_{uvm}(r, \xi, \tau), \\ \tilde{\Pi}_{vum}(r, \xi, \tau) &= \dot{\tilde{G}}_{vum}(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{vmv}(r, \xi, \tau) = \dot{\tilde{G}}_{vmv}(r, \xi, \tau);\end{aligned}\quad (3.8.46)$$

Изображения функций в (3.8.46)

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{uum}^L(r, \xi, s) &= s\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{uvm}^L(r, \xi, \tau) = s\tilde{G}_{uvm}^L(r, \xi, \tau), \\ \tilde{\Pi}_{vum}^L(r, \xi, \tau) &= s\tilde{G}_{vum}^L(r, \xi, \tau), \quad \tilde{\Pi}_{vmv}^L(r, \xi, \tau) = s\tilde{G}_{vmv}^L(r, \xi, \tau)\end{aligned}\quad (3.8.47)$$

имеют структуру (3.6.9) с заменой функций  $Q_{uum}^{(\alpha_1\beta l)}(s)$ ,  $Q_{vum}^{(\alpha_2\beta l)}(s)$ ,  $Q_{vmv}^{(\alpha_3\beta l)}(s)$  и  $Q_{vvn}^{(\alpha_4\beta l)}(s)$  функциями  $sQ_{uum}^{(\alpha_1\beta l)}(s)$ ,  $sQ_{vum}^{(\alpha_2\beta l)}(s)$ ,  $sQ_{vmv}^{(\alpha_3\beta l)}(s)$  и  $sQ_{vvn}^{(\alpha_4\beta l)}(s)$  соответственно. Поэтому согласно проведенному в § 3.6 анализу степеней числителей и знаменателей функции  $\Pi_{uum}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvn}(r, \xi, \tau)$  могут содержать слагаемые

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n A_{uum}^{(\alpha_1\beta l)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \sigma_\beta + \tau_{\alpha_1}(r, \xi)], \\ \frac{(-1)^n A_{vvn}^{(\alpha_4\beta l)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \sigma_\beta + \tau_{\alpha_4}(r, \xi)],\end{aligned}\quad (3.8.48)$$

которые должны быть учтены в свертках в (3.8.43) в соответствии со свойствами дельта-функции. При этом коэффициенты  $A_{uum}^{(\alpha_1\beta l)}(r, \xi)$  и  $A_{vvn}^{(\alpha_4\beta l)}$  так же, как и структура (3.6.4), находятся методами компьютерной алгебры.

Окончательно получаем, что рекуррентная система ( $m \geq 1$ ) включает в себя (3.8.4), (3.8.9), (3.8.12), (3.8.13), (3.8.18), (3.8.20) – (3.8.22) и (3.8.43). Начальными условиями для нее являются соотношения (3.8.3). Входящие в эту систему функции  $G_{Hnk}^c(r)$  и  $\Gamma_{Hnk}^c(r)$  задаются равенствами (3.3.14) и (3.4.7).

### § 3.9. Распространение радиальных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругой толстостенной сфере

Как показано выше, радиальные колебания возможны только при выполнении граничных условий вида (3.1.5). При этом в силу замечания (3.1.22) на границах могут быть заданы только перемещения [87,51,52], [56,78]:

$$u|_{r=r_k} = U_k(\tau). \quad (3.9.1)$$

Рекуррентная система уравнений относительно изображений при  $m \geq 1$  вытекает из (3.8.4), (3.8.9), (3.4.12) и (3.8.20) - (3.8.22) (здесь и далее индекс  $n=0$  у искоемых функций опущен):

$$u_m(r, \tau) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.9.2)$$

$$\chi_m = \int_{r_0}^{r_1} X_{u0}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (3.9.3)$$

$$E_{rm}(r, \tau) = -\rho_{e0}(r) u_{ms}(r, \tau); \quad (3.9.4)$$

$$\rho_m(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r) u_{ms}(r, \tau) - \rho_{e0} \chi_{ms}(r, \tau); \quad (3.9.5)$$

$$u_{ms}(r, \tau) = u_m(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * u_m(r, \tau), \quad \chi_{ms}(r, \tau) = \chi_m(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_m(r, \tau). \quad (3.9.6)$$

Начальные условия для перемещения к этой системе следуют из (3.2.17):

$$u_0(r, \tau) = \sum_{k=0}^1 G_{uu0k}(r, \tau) * U_k(\tau). \quad (3.9.7)$$

Для остальных функций с учетом этого равенства используем (3.9.4) и (3.9.5), а также (П.2.24):

$$\begin{aligned} E_{r0}(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) \sum_{k=0}^1 G_{uu0k}(r, \tau) * U_{ks}(\tau), \\ \rho_0(r, \tau) &= -\sum_{k=0}^1 [\rho_{e0}(r) \Gamma_{uu0k}(r, \tau) * \dot{U}_{ks}(\tau) + \rho'_{e0}(r) G_{uu0k}(r, \tau) * U_{ks}(\tau)], \\ \Gamma_{uu0k}^L(r, s) &= \frac{1}{s} \chi_0 [G_{uu0k}^L(r, s), \nu] = \frac{1}{sr^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 G_{uu0k}^L(r, s)]. \end{aligned} \quad (3.9.8)$$

Здесь

$$U_{ks}(\tau) = U_k(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * U_k(\tau), \quad \dot{U}_{ks}(\tau) = \dot{U}_k(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \dot{U}_k(\tau). \quad (3.9.9)$$

Принципиальное отличие от рассмотренных выше задач заключается в необходимости дополнительного построения поверхностных функций влияния  $G_{uu0k}(r, \tau)$  и  $\Gamma_{uu0k}(r, \tau)$ .

Явный вид изображения ядра  $G_{uu0}(r, \xi, \tau)$  в (3.9.2) указан в (3.6.19). Там же изложен алгоритм определения оригинала. Изображение ядра в (3.9.3) определяется соответствующим равенством в (3.8.33):

$$X_{u0}^L(r, \xi, s) = X_{u01}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{u02}^L(r, \xi, s)H(r - \xi). \quad (3.9.10)$$

Составляющие этой формулы находим, полагая  $n=0$  в формулах (3.8.36) и используя (3.6.1), (3.8.35), (П.3.17), (П.4.37), (П.4.39) и (П.5.19):

$$\begin{aligned} X_{u01}^L(r, \xi, s) &= -\frac{E_{100}(r_0s, rs)E_{110}(r_1s, \xi s)}{2rsE_{110}(r_0s, r_1s)}, \\ X_{u02}^L(r, \xi, s) &= -\frac{E_{110}(r_0s, \xi s)E_{100}(r_1s, rs)}{2rsE_{110}(r_0s, r_1s)}. \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

Эти функции подобно (3.8.39) записываем в аналогичной (3.6.19) форме (здесь использованы также формулы (П.2.20), (П.3.16) и (П.3.20)):

$$\begin{aligned} X_{u01}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^4 Q_{u01}^{(\alpha l)}(s) e^{-[\tau_{nl} - \tau_{\alpha}(r, \xi)]s}, \\ Q_{u01}^{(1l)}(s) &= -\frac{R_{01}(r_1s)R_{01}(-\xi s)}{sR_{01}(-r_1s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s), \\ Q_{u01}^{(2l)}(s) &= \frac{R_{01}(-\xi s)}{s} X_{10}^{l+1}(r_0s, r_1s), \quad Q_{u01}^{(3l)}(s) = \frac{R_{01}(\xi s)}{s} X_{10}^l(r_0s, r_1s), \\ Q_{u01}^{(4l)}(s) &= -\frac{R_{01}(-r_0s)R_{01}(\xi s)}{sR_{01}(r_0s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s), \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

$$\begin{aligned} E_{100}(x, y) &= R_{01}(x)R_{00}(-y)e^{y-x} - R_{01}(-x)R_{00}(y)e^{x-y}, \\ E_{110}(x, y) &= R_{01}(x)R_{01}(-y)e^{y-x} - R_{01}(-x)R_{01}(y)e^{x-y}, \\ R_{00}(z) &= 1, \quad R_{01}(z) = R_{10}(z) = z + 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{u02}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^4 Q_{u02}^{(\alpha l)}(s) e^{-[\tau_{nl} - \tau_{\alpha}(\xi, r)]s}, \\ Q_{u02}^{(1l)}(s) &= Q_{u01}^{(1l)}(s), \quad Q_{u02}^{(4l)}(s) = Q_{u01}^{(4l)}(s), \\ Q_{u02}^{(2l)}(s) &= \frac{R_{01}(\xi s)}{s} X_{10}^{l+1}(r_0s, r_1s), \quad Q_{u02}^{(3l)}(s) = \frac{R_{01}(-\xi s)}{s} X_{10}^l(r_0s, r_1s). \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

В рациональных функциях  $Q_{u01}^{(\alpha l)}(s)$  с учетом (П.2.20) и (П.3.16) выделяем целые части:

$$\begin{aligned}
Q_{u01}^{(\alpha l)}(s) &= -\xi + Q_{u01r}^{(\alpha l)}(s), \quad Q_{u01r}^{(\alpha l)}(s) = Q_{u01}^{(\alpha l)}(s) + \xi \quad (\alpha = 1, 2), \\
Q_{u01}^{(\alpha l)}(s) &= \xi + Q_{u01r}^{(\alpha l)}(s), \quad Q_{u01r}^{(\alpha l)}(s) = Q_{uu01}^{(\alpha l)}(s) - \xi \quad (\alpha = 3, 4), \\
Q_{u02r}^{(1l)}(s) &= Q_{u01r}^{(1l)}(s), \quad Q_{u02r}^{(4l)}(s) = Q_{u01r}^{(4l)}(s), \quad Q_{u02}^{(2l)}(s) = \xi + Q_{u02r}^{(2l)}(s), \\
Q_{u02r}^{(2l)}(s) &= Q_{u02}^{(2l)}(s) - \xi, \quad Q_{u02}^{(3l)}(s) = -\xi + Q_{u02r}^{(3l)}(s), \quad Q_{u02r}^{(3l)}(s) = Q_{u02}^{(3l)}(s) + \xi,
\end{aligned} \tag{3.9.14}$$

Тогда ядро в (3.9.10) можно представить в виде суммы регулярной и сингулярной частей:

$$X_{u0}(r, \xi, \tau) = X_{u0r}(r, \xi, \tau) + X_{u0b}(r, \xi, \tau), \tag{3.9.15}$$

где

$$\begin{aligned}
X_{u0r}(r, \xi, \tau) &= X_{u01r}(r, \xi, \tau)H(\xi - r) + X_{u02r}(r, \xi, \tau)H(r - \xi), \\
X_{u0jr}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^4 Q_{u0jr}^{(\alpha l)}(s) e^{-[\tau_{hl} - \tau_{\alpha}(r, \xi)]s} \quad (j = 1, 2), \\
X_{u0b}(r, \xi, \tau) &= \frac{\xi}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \delta[\tau - \tau_{hl} + \tau_4(r, \xi)] - \delta[\tau - \tau_{hl} + \tau_1(r, \xi)] \right\} + \\
&+ \frac{\xi}{2r} \text{sign}(\xi - r) \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \delta[\tau - \tau_{hl} + \tau_3(r, \xi)] - \delta[\tau - \tau_{hl} + \tau_2(r, \xi)] \right\}.
\end{aligned}$$

И формула (3.9.3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\chi_m &= \int_{r_0}^{r_1} X_{u0r}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r, m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi + \\
&+ \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} [J_{l4m}(r_0, r_1, \tau) - J_{l1m}(r_0, r_1, \tau) + J_{l3m}(r, r_1, \tau) - \\
&- J_{l2m}(r, r_1, \tau) - J_{l3m}(r_0, r, \tau) + J_{l2m}(r_0, r, \tau)], \tag{3.9.16} \\
J_{l\alpha m}(x, y, \tau) &= \int_x^y \xi [\rho_{e0}(\xi) E_{r, m-1}(\xi, t) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, t)]_{t=\tau - \tau_{hl} + \tau_{\alpha}(r, \xi)} \times \\
&\times H[\tau - \tau_{hl} + \tau_{\alpha}(r, \xi)] d\xi.
\end{aligned}$$

Для построения функций  $G_{uu0k}(r, \tau)$  и  $\Gamma_{uu0k}(r, \tau)$  сначала находим решение краевой задачи (3.2.18). Общее решение уравнения согласно (3.5.1) имеет следующий вид:

$$G_{uu0k}^L(r, s) = A_{10}(s) X_{10}(rs) + A_{20}(s) X_{20}(rs). \tag{3.9.17}$$

Подставляя его в граничные условия, получаем систему уравнений относительно  $A_{10}(s)$  и  $A_{20}(s)$ :

$$\begin{aligned} A_{10}(s)X_{10}(r_0s) + A_{20}(s)X_{20}(r_0s) &= \delta_{k+1,1}, \\ A_{10}(s)X_{10}(r_1s) + A_{20}(s)X_{20}(r_1s) &= \delta_{k+1,2}. \end{aligned} \quad (3.9.18)$$

Ее решение записывается так (см. (3.5.6)):

$$\begin{aligned} A_{10}(s) &= \frac{\delta_{k+1,1}X_{20}(r_1s) - \delta_{k+1,2}X_{20}(r_0s)}{P_{u0}(r_0s, r_1s)}, \\ A_{20}(s) &= \frac{\delta_{k+1,2}X_{10}(r_0s) - \delta_{k+1,1}X_{10}(r_1s)}{P_{u0}(r_0s, r_1s)}. \end{aligned} \quad (3.9.19)$$

Учитывая его в (3.9.17), приходим к следующему результату:

$$G_{uu0k}^L(r, s) = \frac{P_{u0}(rs, r_1s)\delta_{k+1,1} + P_{u0}(r_0s, rs)\delta_{k+1,2}}{P_{u0}(r_0s, r_1s)}. \quad (3.9.20)$$

Отсюда находим изображение функции  $\Gamma_{uu0k}(r, \tau)$ , используя ее определение в (3.9.8) и (П.4.16):

$$\Gamma_{uu0k}^L(r, s) = \frac{S_{un}(r_0s, rs)\delta_{k+1,2} - S_{un}(r_1s, rs)\delta_{k+1,1}}{P_{u0}(r_0s, r_1s)}. \quad (3.9.21)$$

Далее подробно рассмотрим только случай  $k=0$  (второй вариант исследуется аналогично). Явные выражения функций в (3.9.20) и (3.9.21) через экспоненциальные многочлены получаем с помощью формул (П.4.2), (П.4.36) и (П.4.37):

$$G_{uu00}^L(r, s) = \frac{r_0^2 E_{110}(rs, r_1s)}{r^2 E_{110}(r_0s, r_1s)}; \quad (3.9.22)$$

$$\Gamma_{uu00}^L(r, s) = \frac{r_0^2 s E_{100}(r_1s, rs)}{r E_{110}(r_0s, r_1s)}. \quad (3.9.23)$$

Для вычисления их оригиналов используем аналогичные (3.6.19), (3.9.12) и (3.9.13) ряды:

$$G_{uu00}^L(r, s) = \frac{r_0^2}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ Q_{uu00}^{(1l)}(s) e^{(r_1-r)s} + Q_{uu00}^{(2l)}(s) e^{-(r_1-r)s} \right] e^{-\tau_l s}, \quad (3.9.24)$$

$$Q_{uu00}^{(1l)}(s) = \frac{R_{01}(rs)}{R_{01}(r_0s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s), \quad Q_{uu00}^{(2l)}(s) = -\frac{R_{01}(-rs)R_{01}(r_1s)}{R_{01}(r_0s)R_{01}(-r_1s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s);$$

$$\Gamma_{uu00}^L(r, s) = \frac{r_0^2}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ R_{uu00}^{(1l)}(s) e^{(r_1-r)s} + R_{uu00}^{(2l)}(s) e^{-(r_1-r)s} \right] e^{-\tau_{hl}s},$$

$$R_{uu00}^{(1l)}(s) = \frac{sR_{01}(rs)}{R_{01}(r_0s)R_{01}(-r_1s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s), \quad (3.9.25)$$

$$R_{uu00}^{(2l)}(s) = \frac{sR_{01}(-rs)}{R_{01}(r_0s)R_{01}(-r_1s)} X_{10}^l(r_0s, r_1s).$$

В присутствующих в этих формулах рациональных функциях выделяем целые части:

$$Q_{uu00}^{(1l)}(s) = \frac{r}{r_0} + Q_{uu00r}^{(1l)}(s), \quad Q_{uu00r}^{(1l)}(s) = Q_{uu00}^{(1l)}(s) - \frac{r}{r_0},$$

$$Q_{uu00}^{(2l)}(s) = -\frac{r}{r_0} + Q_{uu00r}^{(2l)}(s), \quad Q_{uu00r}^{(2l)}(s) = Q_{uu00}^{(2l)}(s) + \frac{r}{r_0}, \quad (3.9.26)$$

$$R_{uu00}^{(1l)}(s) = -\frac{r}{r_1r_0} + R_{uu00r}^{(1l)}(s), \quad R_{uu00r}^{(1l)}(s) = R_{uu00}^{(1l)}(s) + \frac{r}{r_1r_0},$$

$$R_{uu00}^{(2l)}(s) = \frac{r}{r_1r_0} + R_{uu00r}^{(2l)}(s), \quad R_{uu00r}^{(2l)}(s) = R_{uu00}^{(2l)}(s) - \frac{r}{r_1r_0}.$$

Тогда ядро функции  $G_{uu00}(r, \tau)$  и  $\Gamma_{uu00}(r, \tau)$  можно представить в виде суммы регулярной и сингулярной частей:

$$G_{uu00}(r, \tau) = G_{uu00r}(r, \tau) + \frac{r_0}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \delta(\tau - \tau_{hl} - r_1 + r) - \delta(\tau - \tau_{hl} + r_1 - r) \right], \quad (3.9.27)$$

$$\Gamma_{uu00}(r, \tau) = \Gamma_{uu00r}(r, \tau) - \frac{r_0}{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \delta(\tau - \tau_{hl} - r_1 + r) - \delta(\tau - \tau_{hl} + r_1 - r) \right],$$

где

$$G_{uu00r}^L(r, s) = \frac{r_0^2}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ Q_{uu00r}^{(1l)}(s) e^{(r_1-r)s} + Q_{uu00r}^{(2l)}(s) e^{-(r_1-r)s} \right] e^{-\tau_{hl}s},$$

$$\Gamma_{uu00r}^L(r, s) = \frac{r_0^2}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ R_{uu00r}^{(1l)}(s) e^{(r_1-r)s} + R_{uu00r}^{(2l)}(s) e^{-(r_1-r)s} \right] e^{-\tau_{hl}s}.$$

Тогда при

$$U_1(\tau) \equiv 0. \quad (3.9.28)$$

начальные условия (3.9.7), (3.9.8) к рекуррентной системе уравнений записываются так:

$$\begin{aligned}
u_0(r, \tau) &= G_{uu00r}(r, \tau) * U_0(\tau) + \frac{r_0}{r} \sum_{l=0}^{\infty} U_{0l}(\tau), \\
E_{r0}(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) G_{uu00r}(r, \tau) * U_{0s}(\tau) - \frac{r_0 \rho_{e0}(r)}{r} \sum_{l=0}^{\infty} U_{0ls}(\tau), \\
\rho_0(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) \Gamma_{uu00r}(r, \tau) * \dot{U}_{0s}(\tau) - \rho'_{e0}(r) G_{uu00r}(r, \tau) * U_{0s}(\tau) + \\
&\quad + \frac{r_0 \rho_{e0}(r)}{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \dot{U}_{0ls}(\tau) - \frac{r_0 \rho'_{e0}(r)}{r} \sum_{l=0}^{\infty} U_{0ls}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.9.29}$$

где

$$\begin{aligned}
U_{0l}(\tau) &= U_0(\tau - \tau_{hl} - r_1 + r) - U_0(\tau - \tau_{hl} + r_1 - r), \\
U_{0ls}(\tau) &= U_{0l}(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * U_{0l}(\tau).
\end{aligned}$$

Если

$$U_0(\tau) = H(\tau), \tag{3.9.30}$$

то

$$U_{0s}(\tau) = e^{-\gamma\tau} H(\tau), \quad \dot{U}_{0s}(\tau) = \delta(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau}. \tag{3.9.31}$$

И, следовательно, нулевое приближение для поверхностных зарядов содержит сингулярное слагаемое:

$$\begin{aligned}
\rho_0(r, \tau) &= \rho_{0r}(r, \tau) + \rho_{0b}(r, \tau), \\
\rho_{0b}(r, \tau) &= \frac{r_0 \rho_{e0}(r)}{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} [\delta(\tau - \tau_{hl} - r_1 + r) - \delta(\tau - \tau_{hl} + r_1 - r)] \\
\rho_{0r}(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) \Gamma_{uu00r}(r, \tau) - r_0 \left[ \frac{\gamma \rho_{e0}(r)}{r_1} + \frac{r_0 \rho'_{e0}(r)}{r} \right] \sum_{l=0}^{\infty} U_{0ls}(\tau) + \\
&\quad + [\gamma \rho_{e0}(r) \Gamma_{uu00r}(r, \tau) - \rho'_{e0}(r) G_{uu00r}(r, \tau)] * U_{0s}(\tau).
\end{aligned} \tag{3.9.32}$$

Для устранения этой сложности с использованием (3.1.2), (3.1.9) и интегрирования по частям преобразуем соотношение (3.9.2) следующим образом:

$$\begin{aligned}
u_m(r, \tau) &= \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * \left[ \frac{4}{\xi} E_0 E_{r,m-1} + \frac{\partial(E_0 E_{r,m-1})}{\partial \xi} \right] d\xi = \\
&= \int_{r_0}^{r_1} E_0(\xi) G_1(r, \xi, \tau) * E_{r,m-1}(\xi, \tau) d\xi,
\end{aligned} \tag{3.9.33}$$

где

$$G_1(r, \xi, \tau) = \frac{4}{\xi} G_{uu0}(r, \xi, \tau) - \frac{\partial G_{uu0}(r, \xi, \tau)}{\partial \xi}.$$

Это равенство вместе с (3.9.4) образует рекуррентную систему уравнений при  $m \geq 1$ . Начальным условием для нее являются первые два равенства в (3.9.29). Для использования этой системы уравнений дополнительно нужно построить ядро  $G_1(r, \xi, \tau)$ . Во-первых, учитывая, что в соответствии с (3.8.20) и (П.2.24)

$$X_{u0}(r, \xi, \tau) = \chi_0(G_{uu0}, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 G_{uu0})}{\partial r} = \frac{\partial G_{uu0}}{\partial r} + \frac{2}{r} G_{uu0}, \quad (3.9.34)$$

получаем следующий результат:

$$G_1(r, \xi, \tau) = \frac{8}{\xi} G_{uu0}(r, \xi, \tau) - X_{u0}(r, \xi, \tau). \quad (3.9.35)$$

Затем, учитывая (3.9.15), приходим к явной формуле для ядра  $G_1(r, \xi, \tau)$ :

$$G_1(r, \xi, \tau) = G_{1r}(r, \xi, \tau) - X_{u0b}(r, \xi, \tau). \quad (3.9.36)$$

где

$$G_{1r}(r, \xi, \tau) = \frac{8}{\xi} G_{uu0}(r, \xi, \tau) - X_{u0r}(r, \xi, \tau).$$

Тогда рекуррентное соотношение (3.9.33) приобретает такой вид:

$$\begin{aligned} u_m(r, \tau) = & \int_{r_0}^{r_1} E_0(\xi) G_{sr}(r, \xi, \tau) * E_{r, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \\ & + \frac{1}{2r} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \int_{r_0}^r \xi E_0(\xi) E_{r, m-1}[\xi, \tau - \tau_{hl} + \tau_{\alpha}(\xi, r)] d\xi - \right. \\ & \left. - \sum_{\alpha=3}^4 \int_{r_0}^r \xi E_0(\xi) E_{r, m-1}[\xi, \tau - \tau_{hl} + \tau_{\alpha}(\xi, r)] d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (3.9.37)$$

В качестве примера рассмотрим толстостенную сферу с такими же, как и в § 3.7 геометрическими характеристиками. Электрические параметры принимаем такими же, как и в § 2.9, а начальные значения электромагнитного поля таковыми:

$$\rho_{e0}(r) = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad E_0 = \sqrt{r}. \quad (3.9.38)$$

Возмущение на внутренней поверхности имеет вид (3.9.30).

При вычислении интегралов использовалась квадратурная формула прямоугольников с числом шагов по пространственной переменной  $n_r = 25$  и по времени  $n_\tau = 50$ .

На рис. 3.9.1 и 3.9.2 [92] представлены распределения перемещений и напряженности  $E = E_r$  электрического поля по координате  $r$  в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют учету шести первых членов ряда разложений (3.2.1), а штриховые – нулевым членам  $u_0(r, \tau)$  и  $e_0 = E_{r0}$ . Отметим, что результаты, полученные с учетом только нулевых членов рядов, соответствуют несвязанной задаче электромагнитоупругости. При этом на рис. 3.9.2 в момент времени  $\tau = 0.7$  наблюдается следующий эффект: в случае несвязанной задачи перемещения перед фронтом волны, находящимся в этот момент в точке  $r = 1.7$ , отсутствуют, в то время как в случае связанной задачи они не равны нулю. Это объясняется индуцированием их электромагнитным полем. Кроме того, следует отметить существенное количественное различие результатов для связанной и несвязанной задач.

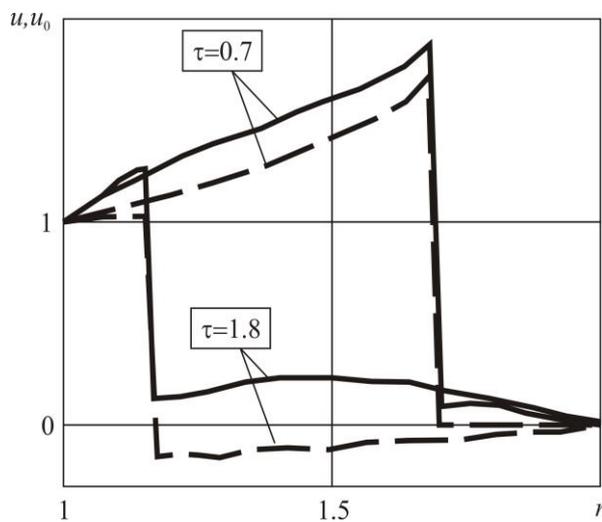


Рис. 3.9.1

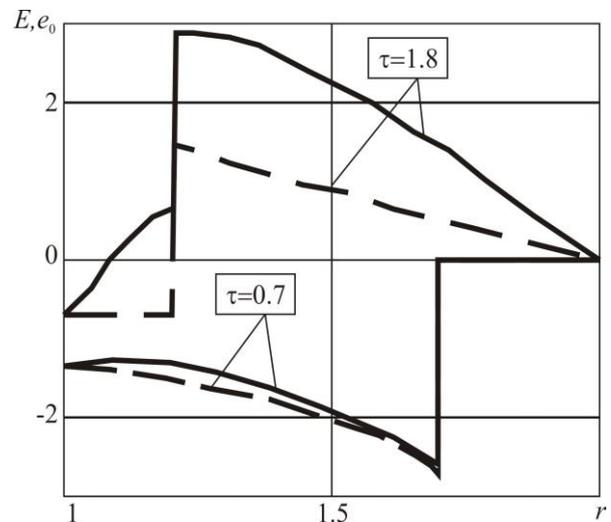


Рис. 3.9.2

На рисунках 3.9.3 и 3.9.4 представлены зависимости перемещений и напряженности электрического поля от времени в точке с координатой  $r = 1.5$ . Здесь сплошные и штриховые линии имеют тот же смысл, что и на предыдущих

двух рисунках.

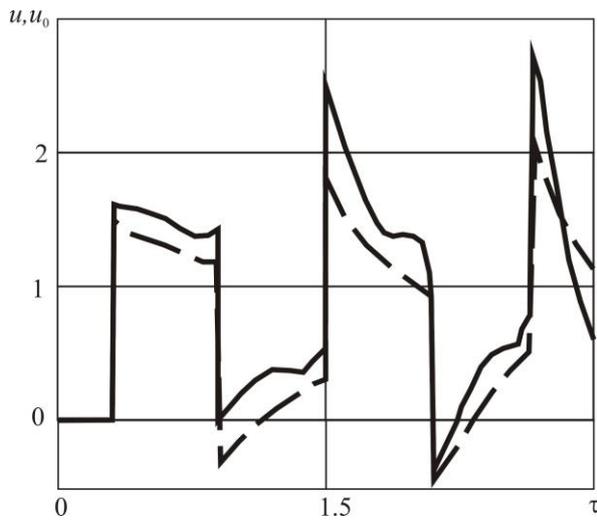


Рис. 3.9.3

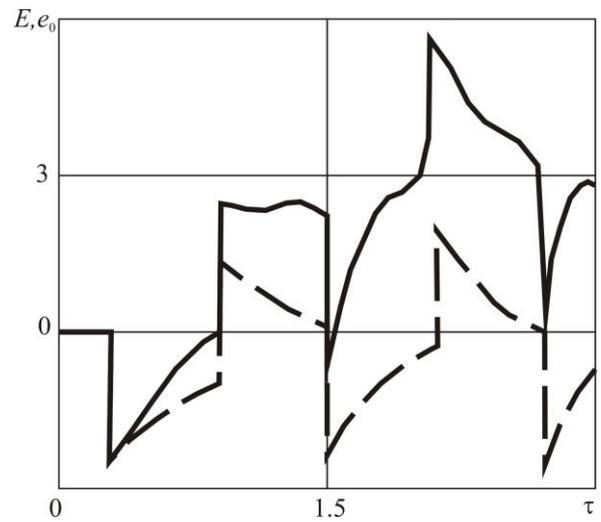


Рис. 3.9.4

Сходимость рядов разложений по малому параметру проиллюстрирована на рис. 3.9.5 и 3.9.6. Здесь изображены распределения перемещений и напряженности электрического поля по координате  $r$  в момент времени  $\tau = 3.5$ : кривые с номером «0» соответствуют учету только нулевых членов рядов; с номером «1» – нулевых и первых членов; с номером «2» – нулевых, первых и вторых членов и т.д. Видно, что кривые, построенные при учете пяти и шести членов рядов, практически не отличаются.

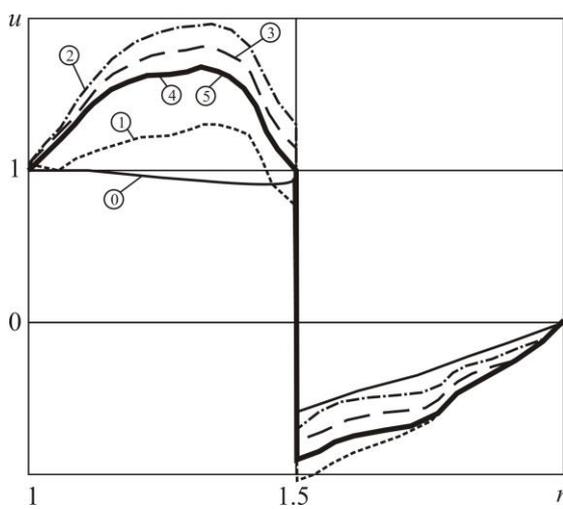


Рис. 3.9.5

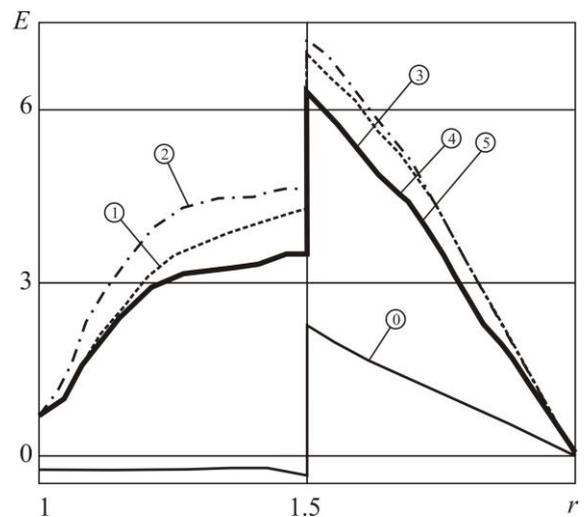


Рис. 3.9.6

В качестве альтернативного построенным выше аналитическим решениям для всех указанных выше изображений используем численное обращение преобразования Лапласа [60,61,67,92,93].

Для численного обращения преобразования Лапласа применяем формулу быстрого преобразования Фурье [196]:

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi} e^{\sigma\tau} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [f^L(\sigma + i\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (3.9.39)$$

где  $\sigma > 0$  - произвольный вещественный параметр.

В стандартных программах численного обращения преобразования Лапласа, для интегрирования используются методы трапеций или прямоугольников, имеющие недостаточную скорость сходимости. В отличие от них воспользуемся средствами широко распространенного пакета Maple. Такой подход представляется рациональным в смысле того, что эти алгоритмы имеют процедуры анализа подынтегральной функции, и в зависимости от ситуации выбирают наиболее подходящий метод с учетом контроля размера шага, сильной осцилляции, наличия особенностей и др. При этом формула (3.9.39) заменяется приближенным аналогом

$$f(\tau) \approx \frac{2}{\pi} e^{\sigma\tau} \int_0^{\Omega} \operatorname{Re} [f^L(\sigma + i\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (3.9.40)$$

где  $\Omega$  - достаточно большое положительное число.

Следует отметить, что точность всех без исключения алгоритмов численного обращения, основанных на приближенном вычислении интеграла (3.9.39), существенно зависит от значения параметра  $\sigma$ . Единых рекомендаций по его выбору не существует, т.к. численное обращение преобразования Лапласа является некорректной задачей. Поэтому на практике предварительно проводится подбор значения параметра  $\sigma$ , обеспечивающего сходимость по числу шагов разбиения промежутка интегрирования и по значению  $\Omega$ .

При использовании встроенных алгоритмов Maple эта процедура сводится к двум этапам. Первый из них состоит в подборе такого значения параметра  $\sigma$ , при котором с увеличением  $\Omega$  в два раза относительная погрешность результатов,

полученных по формуле (3.9.40), составляет менее 5%, что обеспечивает сходимость алгоритма. Кроме того, результаты должны изменяться мало при малом изменении параметра  $\sigma$ , что обеспечивает практическую устойчивость алгоритма по Ляпунову. Поэтому на втором этапе проводится проверка устойчивости по этому практическому критерию. Полученные значения  $\sigma$  и  $\Omega$  проверяются на тестовых примерах численного обращения изображений функций, оригиналы которых известны.

Полученные таким образом результаты практически совпадают с полученными выше. Однако сложности с подбором значений  $\sigma$  и  $\Omega$  все же говорят в пользу аналитических методов, если они возможны. Поэтому далее в более сложных задачах остановимся на их применении.

В качестве второго примера рассмотрим толстостенную сферу с теми же, геометрическими характеристиками. Электрические параметры принимаем следующими:  $\gamma = 5,06$ ;  $\alpha = 0,0806$  (материал алюминий,  $E_* = 100$  в/м). Начальное электрическое поле характеризуется параметрами (3.9.34), а перемещения внутренней поверхности имеют вид:

$$U_0(\tau) = \tau_+, \quad (3.9.41)$$

что, согласно (3.4.14), приводит к следующему равенству

$$U_{0s}(\tau) = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma\tau}) H(\tau). \quad (3.9.42)$$

Аналогичные представленным на рис. 3.9.1 – 3.9.4 результаты расчетов приведены на рис. 3.9.7 – 3.9.10. Кривые, изображённые сплошной и штрихпунктирной линиями на рис. 3.9.7, 3.9.8 соответствуют нулевым приближениям соответственно при  $\tau = 0.7$  и  $\tau = 1.8$ . Кривые, изображённые сплошной линией на рис. 3.9.9, 3.9.10 соответствуют нулевому приближению при  $r = 1.5$ . Очевидно, что в силу меньшего параметра  $\alpha$  в этом примере ряды сходятся значительно быстрее.

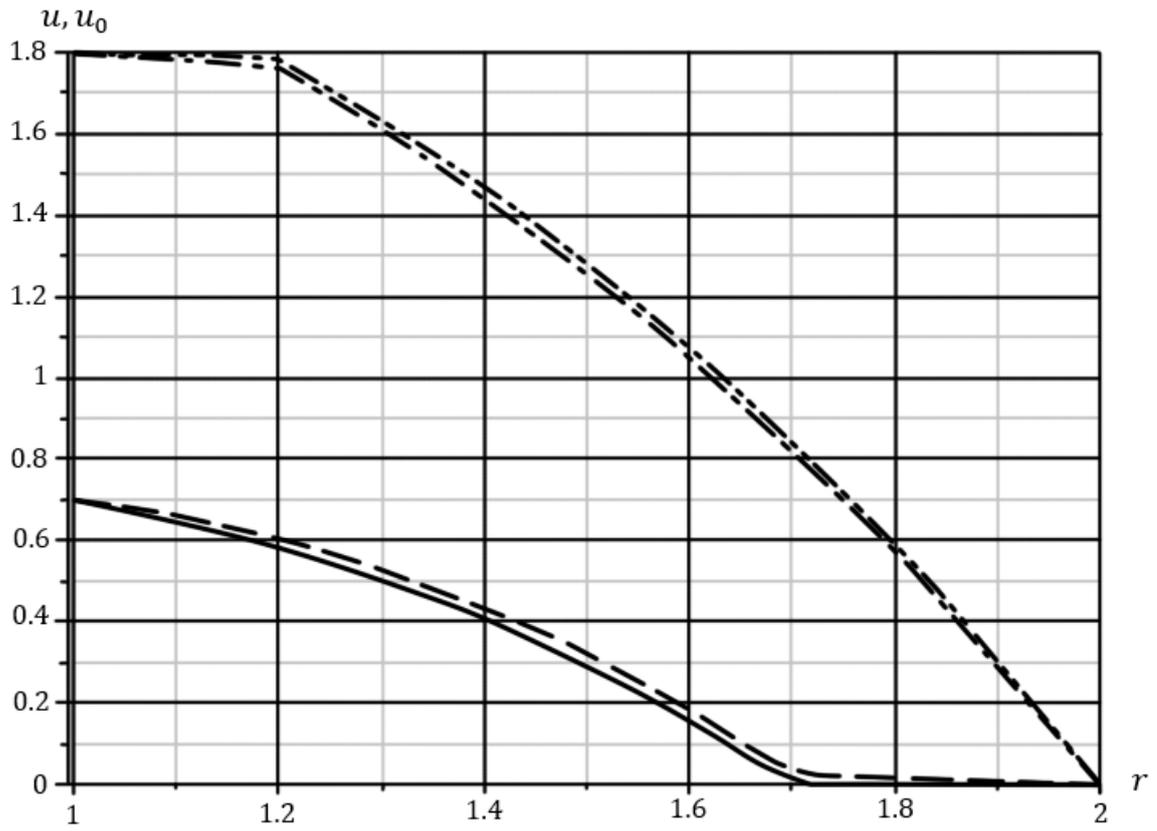


Рис. 3.9.7

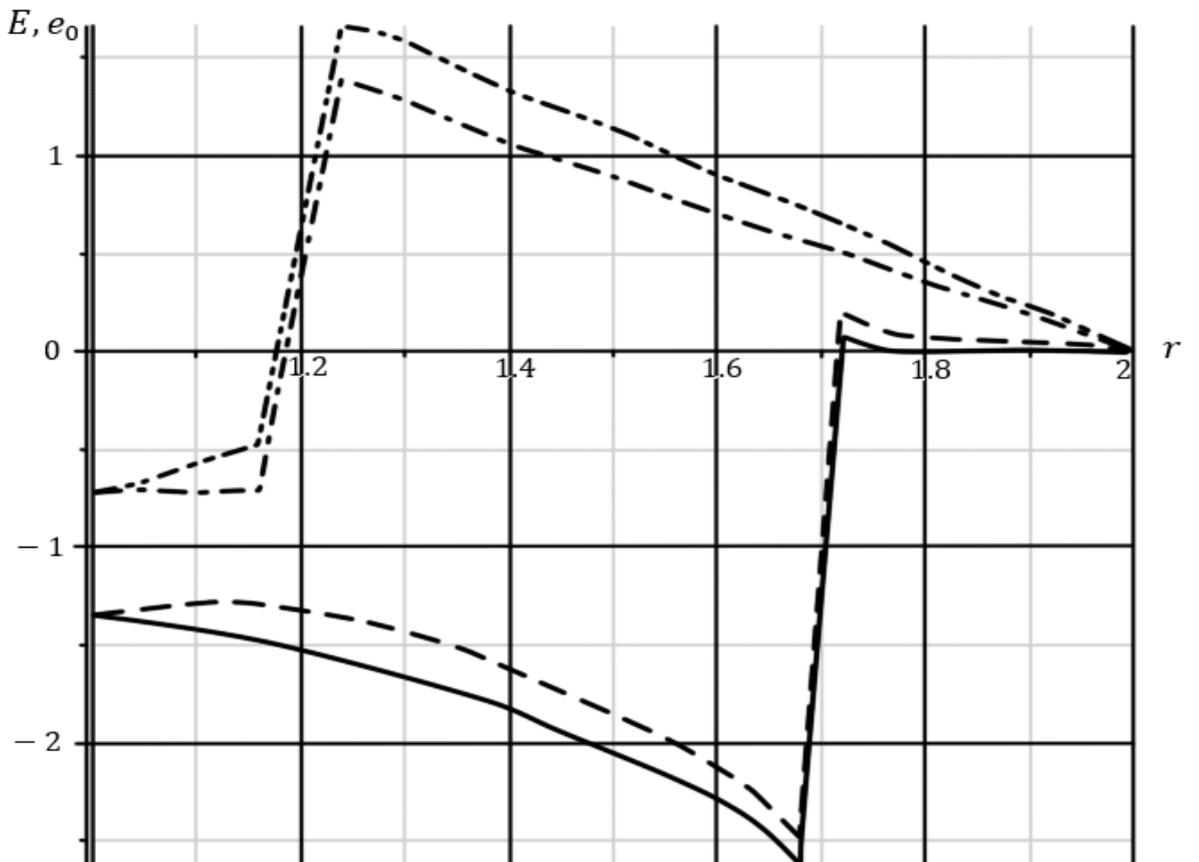


Рис. 3.9.8

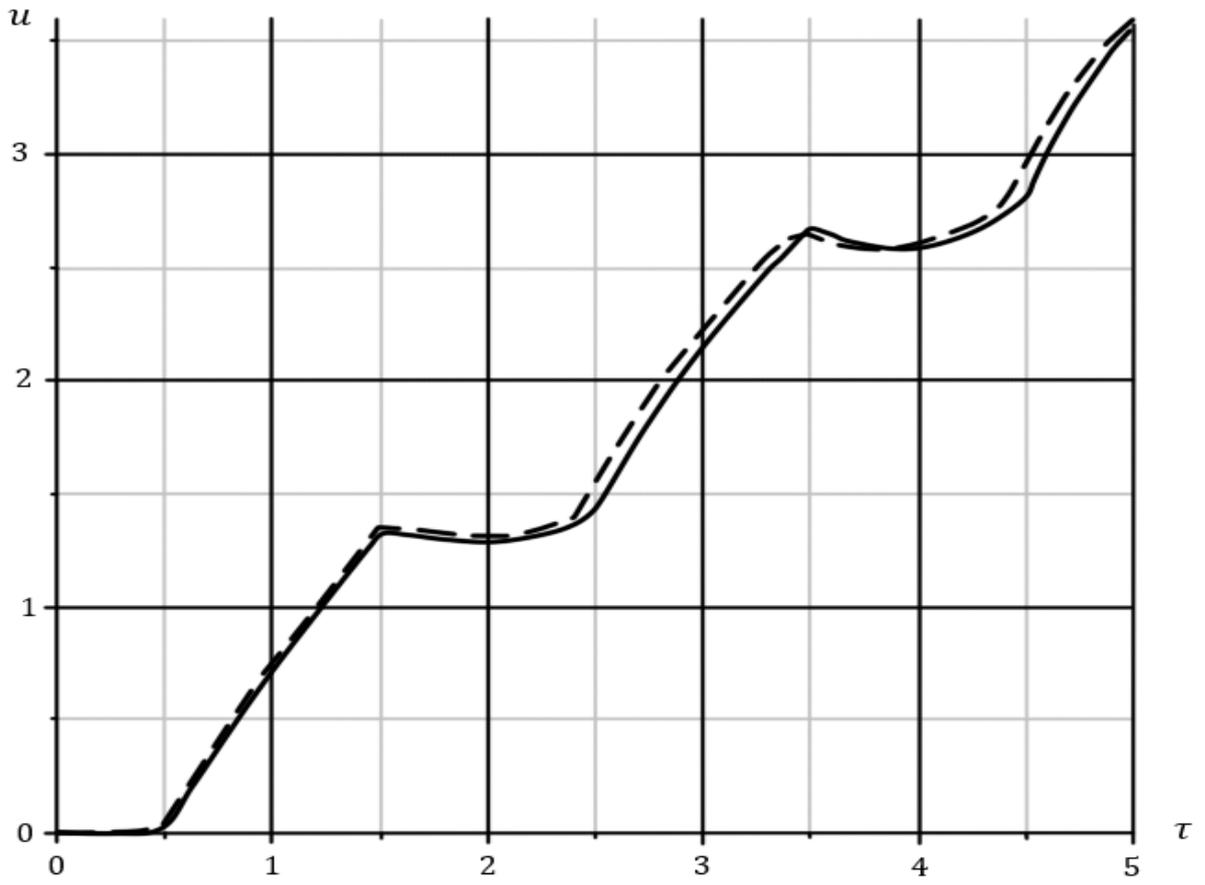


Рис. 3.9.9

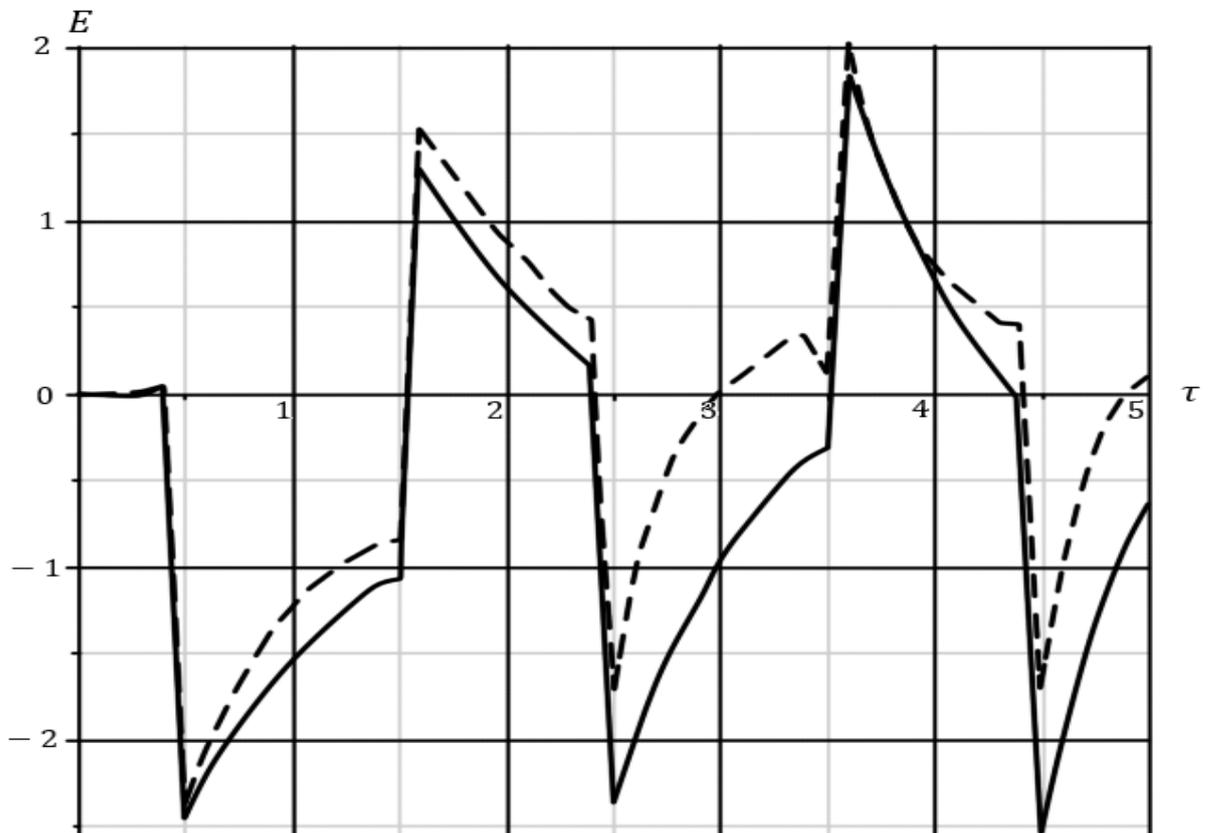


Рис. 3.9.10

## Глава 4

## Нестационарные волны в электромагнитоупругом пространстве со сферической полостью

## § 4.1. Электромагнитоупругое пространство со сферической полостью под действием нестационарных поверхностных возмущений

В качестве частного случая результатов главы 3 рассматриваем осесимметричное движение электромагнитоупругого пространства со сферической полостью радиуса  $r_0$  [88,58]. При этом остаются в силе предположения (3.1.1), (3.1.2), (3.1.8) и начальные условия (3.1.3). Граничные условия (3.1.4) или (3.1.5) преобразуются так:

$$u|_{r=r_0} = U_0(\tau, \theta), v|_{r=r_0} = V_0(\tau, \theta), E_\theta|_{r=r_0} = e_{00}(\tau, \theta). \quad (4.1.1)$$

или

$$u|_{r=r_0} = U_0(\tau, \theta), v|_{r=r_0} = V_0(\tau, \theta), E_r|_{r=r_0} = e_{r00}(\tau, \theta), \quad (4.1.2)$$

К ним добавляются условия ограниченности компонентов напряженно-деформированного состояния и электромагнитного поля на бесконечности.

Решение этой задачи по-прежнему представляем в виде рядов (3.1.6) и (3.1.7). Для коэффициентов рядов остаются в силе все соотношения (3.1.9) -(3.1.18). Граничные условия (4.1.1) или (4.1.2) аналогично (3.1.20) или (3.1.21) с использованием разложений (3.1.19) их правых частей переходят в следующие равенства относительно коэффициентов рядов:

$$v_n|_{r=r_0} = V_{0n}(\tau), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0 [V_{0n}(\tau), e_{00}(\tau)]|_{r=r_0} \quad (n \geq 1), \quad (4.1.3)$$

$$u_n|_{r=r_0} = U_{0n}(\tau) \quad (n \geq 0).$$

или

$$v_n|_{r=r_0} = V_{0n}(\tau), \left. \frac{n(n+1)}{r} H_n \right|_{r=r_0} = \eta_e^2 h_{r0} [U_{0n}(\tau), e_{r00n}(\tau)]|_{r=r_0} \quad (n \geq 1), \quad (4.1.4)$$

$$u_n|_{r=r_0} = U_{0n}(\tau) \quad (n \geq 0).$$

При этом функции  $U_0(\tau)$  и  $e_{r000}(\tau)$  не являются независимыми и связаны между собой соотношением (3.1.22).

Дополнительным условием является ограниченность этих коэффициентов на бесконечности.

В пространстве преобразований Лапласа по времени  $\tau$  остаются в силе все соотношения (3.1.23) - (3.1.27), а вместо граничных условий (3.1.28) или (3.1.29) имеют место следующие равенства:

$$v_n^L \Big|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s), \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{0n}^L(s), e_{00n}^L(s)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1), \quad (4.1.5)$$

$$u_n^L \Big|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0);$$

$$v_n^L \Big|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s), \frac{n(n+1)}{r} H_n^L \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_{r0}^L [U_{0n}^L(\tau), e_{r00n}^L(s)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1), \quad (4.1.6)$$

$$u_n^L \Big|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0).$$

К ним опять же добавляются условия ограниченности изображений на бесконечности.

Для решения поставленной задачи так же, как и в главе 3, используются разложения (3.2.1) искомых функций в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ . Для их коэффициентов остаются справедливыми (3.2.2) – (3.2.10).

Соответствующие граничные условия принимают следующий вид:

$$u_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0), v_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s) \quad (n \geq 1); \quad (4.1.7)$$

$$u_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = v_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 1), v_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1); \quad (4.1.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_{n0}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{0n}^L(s), e_{00n}^L(s)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1); \quad (4.1.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_{nm}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (4.1.10)$$

В случае граничных условий (4.1.2) последние два соотношения согласно (4.1.6) записываются так:

$$\frac{n(n+1)}{r} H_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_{r_0}^L [U_{0n}^L(\tau), e_{r_{00n}}^L(s)] \Big|_{r=r_0} \quad (n \geq 1); \quad (4.1.11)$$

$$\frac{n(n+1)}{r} H_{nm}^L \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (4.1.12)$$

К ним опять добавляется требование ограниченности всех искомым функций.

Так же, как и в главе 3, задача (3.2.2), (3.2.6), (4.1.7) является чисто упругой.

Ее решение подобно (3.2.17) записываем так:

$$\begin{aligned} u_{00}^L(r, s) &= G_{uu00}^L(r, s) U_{0n}^L(s), \\ u_{n0}^L(r, s) &= G_{uun0}^L(r, s) U_{0n}^L(s) + G_{uvn0}^L(r, s) V_{0n}^L(s), \\ v_{n0}^L(r, s) &= G_{vun0}^L(r, s) U_{0n}^L(s) + G_{vvn0}^L(r, s) V_{0n}^L(s) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

где  $G_{uun0}^L(r, s)$ ,  $G_{uvn0}^L(r, s)$ ,  $G_{vun0}^L(r, s)$  и  $G_{vvn0}^L(r, s)$  - поверхностные функции Грина, т.е. ограниченные решения следующих краевых задач:

- при  $n = 0$

$$s^2 G_{uu00}^L = l_{110}(G_{uu00}^L), \quad G_{uu00}^L \Big|_{r=r_0} = 1; \quad (4.1.14)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uun0}^L &= l_{11n}(G_{uun0}^L) + l_{12n}(G_{vun0}^L), \quad s^2 G_{vun0}^L = l_{21n}(G_{uun0}^L) + l_{22n}(G_{vun0}^L), \\ G_{uun0}^L \Big|_{r=r_0} &= 1, \quad G_{vun0}^L \Big|_{r=r_0} = 0; \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uvn0}^L &= l_{11n}(G_{uvn0}^L) + l_{12n}(G_{vvn0}^L), \quad s^2 G_{vvn0}^L = l_{21n}(G_{uvn0}^L) + l_{22n}(G_{vvn0}^L), \\ G_{uvn0}^L \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad G_{vvn0}^L \Big|_{r=r_0} = 1, \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Далее по аналогичным сформулированным в § 3.2 соображениям везде за исключением § 4.8 полагаем, что

$$U_0(\theta, \tau) \equiv 0, \quad V_0(\theta, \tau) \equiv 0. \quad (4.1.17)$$

При этом эта задача (3.2.2), (3.2.6), (4.1.7) становится однородной, и, следовательно, ее решение тривиальное, т.е. выполняются равенства (3.2.22).

Решение же задачи (3.2.3), (3.2.7), (4.1.5) аналогично (3.2.23), (3.2.24) записываем в интегральном виде ( $m \geq 1$ ):

- при  $n = 0$

$$u_{0m}^L(r, s) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0, m-1}^L(\xi, s) d\xi; \quad (4.1.18)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_{nm}^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \\ v_{nm}^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Здесь так же, как и ранее,  $G_{uun}^L$ ,  $G_{vun}^L$  и  $G_{uvn}^L$ ,  $G_{vvn}^L$  - объемные функции влияния, т.е. функции Грина краевых задач, соответствующих уравнениям (3.2.3), (3.2.6) и граничным условиям (4.1.8), а именно ограниченные решения следующих задач:

- при  $n = 0$

$$s^2 G_{uu0}^L = l_{110}(G_{uu0}^L) + \delta(r - \xi), \quad G_{uu0}^L \Big|_{r=r_0} = 0; \quad (4.1.20)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uun}^L &= l_{11n}(G_{uun}^L) + l_{12n}(G_{vun}^L) + \delta(r - \xi), \\ s^2 G_{vun}^L &= l_{21n}(G_{uun}^L) + l_{22n}(G_{vun}^L), \\ G_{uun}^L \Big|_{r=r_0} &= G_{vun}^L \Big|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uvn}^L &= l_{11n}(G_{uvn}^L) + l_{12n}(G_{vvn}^L), \\ s^2 G_{vvn}^L &= l_{21n}(G_{uvn}^L) + l_{22n}(G_{vvn}^L) + \delta(r - \xi), \\ G_{uvn}^L \Big|_{r=r_0} &= G_{vvn}^L \Big|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Также в интегральном виде при  $n \geq 1$  и  $m > 0$  записывается решение задачи (3.2.8), (4.1.10):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H \left[ u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s) \right] d\xi. \quad (4.1.23)$$

Здесь  $G_{Hn}^L$  - соответствующая объемная функция Грина, а именно ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (4.1.24)$$

Решение задачи (3.2.8) при  $m = 0$ , (4.1.9) записываем подобно (3.2.30):

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) G_{Hn0}^L(r, s) e_{00n}^L(s), \quad (4.1.25)$$

где  $G_{Hn0}^L$  - поверхностная функция Грина, т.е. ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn0}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn0}^L = 0, \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn0}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 1. \quad (4.1.26)$$

Аналогично (4.1.23) и (4.1.25) может быть записано решение задач (3.2.8), (4.1.11) и (4.1.12). Однако, поскольку методы решения в обоих случаях практически идентичны, то ограничимся только первым вариантом.

## § 4.2. Функции Грина для электромагнитного пространства со сферической полостью

Сначала аналогично § 3.3 построим решение краевой задачи (4.1.24) [233]. Общее и частное решения уравнения по-прежнему определяются соотношениями (3.3.1) и (3.3.5).

Для удовлетворения условиям ограниченности, подставляя (П.7.2) и (П.7.3) в (3.3.1) с учетом (3.3.5), приходим к следующему результату для функции влияния при  $r \rightarrow \infty$ :

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) \sim [C_{2n} + \eta_e s_e \xi^2 Z_{1n}(\eta_e \xi s_e)] Z_{2n}(\eta_e \xi s_e). \quad (4.2.1)$$

Отсюда вследствие неограниченности последнего множителя следует равенство

$$C_{2n} = -\eta_e s_e \xi^2 Z_{1n}(\eta_e \xi s_e). \quad (4.2.2)$$

Для второй постоянной из граничного условия (4.1.24) с учетом формул (3.3.6) получаем следующее уравнение:

$$C_{1n} Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e) + C_{2n} Y_{4n}(\eta_e r_0 s_e) = 0, \quad (4.2.3)$$

откуда следует, что

$$C_{1n} = \eta_e s_e \xi^2 Z_{1n}(\eta_e \xi s_e) \frac{Y_{4n}(\eta_e r_0 s_e)}{Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)}. \quad (4.2.4)$$

Подставляя (3.3.5), (4.2.1) и (4.2.3) в (3.3.1), приходим к такому результату:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \\ &= \eta_e s_e \xi^2 \left[ \frac{S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e) Z_{1n}(\eta_e \xi s_e)}{Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)} + P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Окончательно с использованием (П.3.10) или следствия П.6.2 эту функцию записываем так:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\ \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \frac{\eta_e s_e S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e) Z_{1n}(\eta_e \xi s_e)}{Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)}. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

С целью проверки перейдем к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в аналогичной формуле (3.3.10) для толстостенной сферы. Для этого, используя соотношения (П.7.4) - (П.7.6) получаем следующее равенство

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\eta_e r_1 s_e e^{\eta_e r_1 s_e} Z_{1n}(\eta_e \xi s_e)}{\eta_e r_1 s_e e^{\eta_e r_1 s_e} Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)} = \frac{Z_{1n}(\eta_e \xi s_e)}{Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)}. \quad (4.2.7)$$

Отсюда вытекает, что переход к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в формуле (3.3.10) приводит к полученному выше результату (4.2.5).

Соответствующую поверхностную функцию Грина как решение задачи (4.1.26) с учетом (3.3.1), (П.7.2) и условия ограниченности аналогично (3.3.11) записываем так:

$$G_{Hn0}^L(r, \xi, s) = C_{1n0} Z_{1n}(\eta_e r s_e). \quad (4.2.8)$$

Входящую в это равенство произвольную постоянную находим из граничного условия с использованием (3.3.6):

$$C_{1n0} = -\frac{1}{\eta_e s_e Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)}. \quad (4.2.9)$$

Подставляя этот результат в (4.2.8), получаем искомую функцию:

$$G_{Hn0}^L(r, \xi, s) = -\frac{Z_{1n}(\eta_e r s_e)}{\eta_e s_e Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e)}. \quad (4.2.10)$$

Отметим, что предельный переход при  $r_1 \rightarrow \infty$  в формуле (3.3.14) с учетом соотношения (4.2.7) приводит к этому же результату.

По отношению к (3.3.36) и (3.3.39) существенно упрощаются выражения изображений функций  $\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s)$  в (4.2.6) и  $G_{Hn0}^L$  в (4.2.10) через элементарные функции (используем (П.3.13), (П.3.14), (П.3.18) и (П.3.19)):

$$\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) = \sum_{k=1}^2 \tilde{G}_{Hn}^{(0k)L}(r, \xi, s) e^{-\tau_{e0k}(r, \xi) s_e}; \quad (4.2.11)$$

$$G_{Hn0}^L(r, \xi, s) = \frac{r_0^{n+2}}{r^{n+1}} G_{Hn0}^{(02)L}(r, s) e^{-\tau_{e02}(r, r_0) s_e}. \quad (4.2.12)$$

Входящие в эти формулы функции являются частным случаем ( $l=0$ ) выражений в (3.3.36) – (3.3.41) и имеют следующий конкретный вид:

$$\tau_{e01}(r, \xi) = \eta_e (\xi - r), \quad \tau_{e02}(r, \xi) = \eta_e (r + \xi - 2r_0); \quad (4.2.13)$$

$$\tilde{G}_{Hn}^{(01)L}(r, \xi, s) = \frac{(-1)^{n+1} R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}}, \quad (4.2.14)$$

$$\tilde{G}_{Hn}^{(02)L}(r, \xi, s) = \frac{(-1)^n R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}(-\eta_e r_0 s_e);$$

$$G_{Hn0}^{(02)L}(r, s) = -\frac{R_{n0}(\eta_e r s_e)}{R_{n3}(\eta_e r_0 s_e)}. \quad (4.2.15)$$

Оригинал последней функции может быть найден непосредственно с использованием формул (3.3.25) - (3.3.27). При вычислении же оригиналов функций (4.2.14) возникают те же проблемы, которые указаны в § 3.3.

Поэтому далее вместо оригиналов нестационарных функций Грина будем использовать их приближенные квазистатические аналоги при  $\eta_e = 0$ . В соответствии с (4.1.24) и (4.1.26), они являются ограниченными решениями следующих краевых задач:

$$\Delta_n G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (4.2.16)$$

$$\Delta_n G_{Hn0}^L = 0, \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn0}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 1. \quad (4.2.17)$$

Общее решение уравнения в (4.2.16) имеет вид (3.3.33). При  $r \rightarrow \infty$  с учетом (3.3.37) получаем следующее соотношение:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) \sim \left[ C_{2n} + \frac{1}{(2n+1)\xi^{n-1}} \right] r^n. \quad (4.2.18)$$

Следовательно, для ограниченности решения необходимо положить

$$C_{2n} = -\frac{1}{(2n+1)\xi^{n-1}}. \quad (4.2.19)$$

Учитывая (3.3.38), из граничного условия в (4.2.16) находим вторую постоянную интегрирования:

$$C_{1n} = \frac{n+1}{n} C_{2n} r_0^{2n+1} = -\frac{n+1}{n(2n+1)\xi^{n-1}} r_0^{2n+1}. \quad (4.2.20)$$

Подставляя теперь (3.3.37), (4.2.19) и (4.2.20) в (3.3.33), с учетом следствия П.6.1 получаем аналогичный (3.3.41) результат:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= G_{Hn}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \\ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_0, r)}{n(2n+1)\xi^{n+1}r^{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Очевидно, это равенство получается из (3.3.41) предельным переходом при  $r_1 \rightarrow \infty$ .

Поверхностную функцию Грина как ограниченное решение задачи (4.2.17) с учетом (3.3.42) записываем так:

$$G_{Hn0}^L(r, s) = C_{1n0} r^{-(n+1)}. \quad (4.2.22)$$

Произвольная постоянная в этом равенстве находится из граничного условия в (4.2.17):

$$C_{1n0} = -\frac{r_0^{n+2}}{n}. \quad (4.2.23)$$

Таким образом, искомая функция имеет следующий вид:

$$G_{Hn0}^L(r, s) = G_{Hn0}^c(r) = -\frac{r_0^{n+2}}{nr^{n+1}}. \quad (4.2.24)$$

Это равенство также вытекает из (3.3.45) при  $r_1 \rightarrow \infty$ .

При использовании квазистатических функций Грина упрощаются равенства (3.2.28)

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi \quad (n \geq 1, m \geq 0); \quad (4.2.25)$$

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) G_{Hn0}^c(r) e_{00n}^L(s) \quad (n \geq 1). \quad (4.2.26)$$

### § 4.3. Электромагнитное поле в движущемся пространстве со сферической полостью

Подобно § 3.4 рассмотрим вспомогательную задачу об определении параметров электромагнитного поля в движущемся по заданному закону  $u(r, \theta, \tau)$  и  $v(r, \theta, \tau)$  пространстве со сферической полостью [233]. При этом полагаем, что начальные условия однородные, т.е. имеет вид (3.4.1).

Кроме того, считаем, что все искомые функции ограничены, а на границе полости сферы аналогично (4.1.1) задана касательная составляющая вектора напряженности электрического поля:

$$E_\theta|_{r=r_0} = e_{00}(\tau, \theta). \quad (4.3.1)$$

Изображение коэффициентов рядов (3.2.1) координат напряженности магнитного поля аналогично (3.4.3) определяется так:

$$H_n^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi - \\ - \eta_e^2 G_{Hn0}^c(r) [(s + \gamma) e_{00n}^L(s) + s \rho_{e0}(r_0) v_n^L(r_0, s)]. \quad (4.3.2)$$

Далее подобно (3.4.4) получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_n^L)}{\partial r} = & -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi - \\ & - \eta_e^2 \Gamma_{Hn0}^c(r) [(s + \gamma) e_{00n}^L(s) + s \rho_{e0}(r_0) v_n^L(r_0, s)]. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Здесь функции  $\Gamma_{Hn}^c$  и  $\Gamma_{Hn0}^c$  определяются равенствами (3.4.5). Составляющие первой и вторую функции находим, используя (4.2.21), (4.2.24) и (3.4.8):

$$\Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)\xi^{n-1}r^{n+2}}, \quad \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_0, \xi)}{(2n+1)\xi^{n-1}r^{n+2}}, \quad \Gamma_{Hn0}^c(r) = \frac{r_0^{n+2}}{r^{n+2}}. \quad (4.3.4)$$

Эти равенства вытекают из (3.4.6) и (3.4.7) при  $r_1 \rightarrow \infty$ .

Теперь, подставляя (4.3.2) и (4.3.3) в формулы (3.2.9), приходим к аналогичным (3.4.9) и (3.4.10) равенствам:

$$\begin{aligned} E_m^L(r, s) = & -\frac{n(n+1)}{r} \left\{ \frac{s}{s+\gamma} \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi + \right. \\ & \left. + G_{Hn0}^c(r) \left[ e_{00n}^L(s) + \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r_0) v_n^L(r_0, s) \right] \right\} - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) u_n^L; \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} E_{0n}^L(r, s) = & \frac{s}{s+\gamma} \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi + \\ & + \Gamma_{Hn0}^c(r) \left[ e_{00n}^L(s) + \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r_0) v_n^L(r_0, s) \right] - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) v_n^L \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Оригиналы формул (4.3.2), (4.3.5) и (4.3.6) находятся так же, как и равенства (3.4.11) - (3.4.13):

$$\begin{aligned} H_n(r, \tau) = & -\eta_e^2 \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [\dot{u}_n(\xi, \tau), \dot{v}_n(\xi, \tau)] d\xi - \\ & - \eta_e^2 G_{Hn0}^c(r) [\gamma e_{00n}(\tau) + \dot{e}_{00n}(\tau) + \rho_{e0}(r_0) \dot{v}_n(r_0, \tau)]; \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned} E_m(r, \tau) = & -\frac{n(n+1)}{r} \left\langle \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^c(r, \xi) L_s \{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \} d\xi + \right. \\ & \left. + G_{Hn0}^c(r) \{ e_{00n}(\tau) + \rho_{e0}(r_0) L_s [v_n(r_0, \tau)] \} \right\rangle - \rho_{e0}(r) L_s [u_n(r, \tau)]; \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$E_{\theta n}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) L_s \left\{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \right\} d\xi + \quad (4.3.9)$$

$$+ \Gamma_{Hn0}^c(r) \left\{ e_{00n}(\tau) + \rho_{e0}(r_0) L_s [v_n(r_0, \tau)] \right\} - \rho_{e0}(r) L_s [v_n(r, \tau)] \quad (n \geq 1).$$

Оригиналы коэффициентов разложения поверхностных зарядов и координаты вектора тока, по-прежнему, определяются равенствами (3.4.15) и (3.4.16).

Далее аналогично § 3.4 и 4.3 рассмотрим три примера закона движения пространства с полостью.

1. *Пространство со сферической полостью неподвижно* (имеют место равенства (3.4.18)) и *на границе полости задана напряженность электрического поля* первым равенством в (3.4.21).

В этом случае компоненты электромагнитного поля, очевидно, определяются формулами (3.4.25), в которых выражения для функций  $G_{H10}^c$  и  $\Gamma_{H10}^c$  вытекают из (4.2.24) и (4.3.4):

$$G_{H10}^c(r) = -\frac{r_0^3}{r^2}, \quad \Gamma_{H10}^c(r) = \frac{r_0^3}{r^3}. \quad (4.3.10)$$

2. *Напряженность электрического поля на границе полости отсутствует* (имеет место первое равенство в (3.4.29)), *а перемещения являются радиальными и определяются равенствами* (3.4.30).

Как следует из примера 2 § 3.4, полученные для толстостенной сферы формулы (3.4.34) для компонент электромагнитного поля не зависят от геометрии тела. Поэтому они будут справедливы и в этом случае.

3. *Напряженность электрического поля на границе полости отсутствует* (см. первое равенство в (3.4.29)), *плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид* (3.4.35) и *пространство движется поступательно с перемещениями* (3.4.36).

При этом остаются в силе равенства (3.4.37) и (3.4.38), а формулы (3.4.39) с помощью (4.3.7) - (4.3.10) и (3.4.15) модифицируются так:

$$\begin{aligned}
H_1(r, \tau) &= -\frac{\eta_e^2}{r^2} [r_0^3 + r^2 J_1(r)] H(\tau), \\
E_{r1}(r, \tau) &= \frac{e^{-\gamma\tau} - 1}{\gamma r^3} [r^3 + r_0^3 - r^2 J_1(r)] H(\tau), \\
E_{\theta 1}(r, \tau) &= \frac{e^{-\gamma\tau} - 1}{\gamma r^3} [r_0^3 - r^3 + r^3 J_2(r)] H(\tau), \\
\rho_1(r, \tau) &= \frac{\rho'_{e0}(r)}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\
E_{r0}(r, \tau) &= \rho_0(r, \tau) = H_n(r, \tau) = E_m(r, \tau) = E_{\theta n}(r, \tau) = \rho_n(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 2),
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

где

$$J_1(r) = \int_{r_0}^{\infty} G_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi, \quad J_2(r) = \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi. \tag{4.3.12}$$

Ядра последних интегралов в соответствии с (3.4.5), (4.2.21) и (4.3.4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_{H1}^c(r, \xi) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{H1}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \\
\tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) &= -\frac{2r_0^3 + r^3}{3\xi^2 r^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{H1}^c(r, \xi) &= \Gamma_{1H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{2H1}^c(\xi, r, s) H(r - \xi), \\
\Gamma_{1H1}^c(r, \xi) &= -2 \frac{r^3 - r_0^3}{3r^3}, \quad \Gamma_{2H1}^c(r, \xi) = \frac{2r_0^3 + \xi^3}{3r^3}.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Подставляя (3.4.35), (4.3.13) и (4.3.14) в (4.3.12), вычисляем интегралы  $J_1(r)$  и  $J_2(r)$ :

$$J_1(r) = \rho_* \frac{r_0^2 + r^2}{2r^2}, \quad J_2(r) = \rho_* \frac{r^2 - r_0^2}{2r^3}. \tag{4.3.15}$$

Естественно эти равенства являются частным случаем формул (3.4.43) при  $r_1 \rightarrow \infty$ .

Окончательные формулы для компонент электромагнитного поля сохраняют вид (3.4.46), где следует положить

$$A_H(r) = -A_{E\theta}(r) = \frac{r^2 - r_0^2}{2r^2}, \quad A_{Er}(r) = \frac{r_0^2}{r^2}. \tag{4.3.16}$$

4. *Напряженность электрического поля на границе полости отсутствует (см. первое равенство в (3.4.29)), плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид*

$$\rho_{e0}(r) = 2ar^{-3/2} \quad (4.3.17)$$

*и пространство движется равноускоренно с перемещениями*

$$u = \frac{1}{2} w\tau_+^2 \cos \theta, \quad v = -\frac{1}{2} w\tau_+^2 \sin \theta, \quad (4.3.18)$$

что согласно (3.1.6) и (3.4.17) соответствует следующим коэффициентам рядов:

$$u_1 = \frac{1}{2} w\tau_+^2, \quad v_1 = -\frac{1}{2} w\tau_+^2, \quad u_0 = u_n = v_n \equiv 0 \quad (n \geq 2). \quad (4.3.19)$$

При этом для операторов в (3.1.14), (3.1.17) и (3.4.14) имеют место равенства:

$$\begin{aligned} L_s(u_1) &= -L_s(v_1) = \frac{w}{\gamma^2} (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau), \\ L_s(\dot{u}_1) &= -L_s(\dot{v}_1) = \frac{w}{\gamma} (1 - e^{-\gamma\tau}) H(\tau), \\ l_{np}(u_1, v_1) &= -l_H(u_1, v_1) = \frac{w}{2} \rho'_{e0}(r) \tau_+^2, \quad l_H(\dot{u}_1, \dot{v}_1) = -w\rho'_{e0}(r) \tau_+, \\ L_s[l_{1p}(u_1, v_1)] &= -L_s[l_H(u_1, v_1)] = \frac{w}{\gamma^2} \rho'_{e0}(r) (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau), \\ l_{0p}(u_0, v_0) &= L_s(u_0) = L_s[l_H(u_0, v_0)] = L_s[l_{1p}(u_0, v_0)] \equiv 0, \\ l_H(u_n, v_n) &= l_{np}(u_n, v_n) = L_s[u_n(r, \tau)] = L_s[v_n(r, \tau)] = \\ &= L_s[l_H(u_n, v_n)] = L_s[l_{1p}(u_n, v_n)] = L_s[l_H(\dot{u}_n, \dot{v}_n)] \equiv 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Подставляя их в (4.3.7) - (4.3.9), приходим к следующим результатам:

$$\begin{aligned} H_1(r, \tau) &= \eta_e^2 w\tau_+ [I_1(r) + G_{H10}^c(r) \rho_{e0}(r_0)], \\ E_{r1}(r, \tau) &= \frac{w}{\gamma^2} (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) \left\{ \frac{2}{r} [I_1(r) + \rho_{e0}(r_0) G_{H10}^c(r)] - \rho_{e0}(r) \right\} H(\tau), \\ E_{\theta 1}(r, \tau) &= -\frac{w}{\gamma^2} (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) [I_2(r) + \Gamma_{Hn0}^c(r) \rho_{e0}(r_0) - \rho_{e0}(r)] H(\tau), \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

где

$$I_1(r) = \int_{r_0}^{\infty} G_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi, \quad I_2(r) = \int_{r_0}^{\infty} \Gamma_{H1}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi.$$

Вычисляя с учетом (4.3.13), (4.3.14) и (4.3.17) эти интегралы

$$I_1(r) = 2a \frac{2r^{3/2} + r_0^{3/2}}{3r^2}, \quad I_2(r) = 2a \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{3r^3}, \quad (4.3.22)$$

формулы (4.3.21) преобразовываются так:

$$\begin{aligned} H_1(r, \tau) &= 4\eta_e^2 wa \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{3r^2} \tau_+, \\ E_{r1}(r, \tau) &= \frac{2wa}{3r^3 \gamma^2} (r^{3/2} - 4r_0^{3/2}) (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau), \\ E_{\theta 1}(r, \tau) &= -4aw (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{3\gamma^2 r^3} H(\tau). \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Соответствующие коэффициенты для поверхностных зарядов находятся по формулам (3.4.15):

$$\rho_1(r, \tau) = -\frac{3aw}{\gamma^2 r^{5/2}} (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau). \quad (4.3.24)$$

Окончательно для всех компонент электромагнитного поля аналогично (3.4.46) получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \tau) &= 4\eta_e^2 wa \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{3r^2} \tau_+ \sin \theta, \\ E_r(r, \theta, \tau) &= \frac{2wa}{3r^3 \gamma^2} (r^{3/2} - 4r_0^{3/2}) (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau) \cos \theta, \\ E_\theta(r, \theta, \tau) &= -4aw (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{3\gamma^2 r^3} H(\tau), \\ \rho_e(r, \theta, \tau) &= -\frac{3aw}{\gamma^2 r^{5/2}} (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) H(\tau) \cos \theta, \\ j_r &= \frac{2wa}{3\gamma^2 r^3} \left[ (r^{3/2} - 4r_0^{3/2}) (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) + 3\gamma r^{3/2} \tau \right] H(\tau) \cos \theta, \\ j_\theta &= -\frac{2wa}{3\gamma^2 r^3} \left[ 2(r^{3/2} - r_0^{3/2}) (\gamma\tau - 1 + e^{-\gamma\tau}) + 3\gamma r^{3/2} \tau \right] H(\tau) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

#### § 4.4. Объемные функции Грина для упругого пространства со сферической полостью

Сначала аналогично § 3.5 построим функции  $G_{uu}^L$  и  $G_{vm}^L$ , которые являются решениями краевых задач (4.1.20) - (4.1.22) [70,72,75].

Начнем с первой из этих задач. Общее решение соответствующего уравнения имеет вид (3.5.1), где частное решение по-прежнему определяется формулой (3.5.4).

Для удовлетворения условиям ограниченности, подставляя (П.7.4) в (3.5.1) с учетом (3.5.4), приходим к следующему результату для функции влияния при  $r \rightarrow \infty$ :

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) \sim \left[ A_{20}(s) + \xi^2 s X_{10}(\xi s) \right] \frac{e^{rs}}{rs\sqrt{2\pi}}. \quad (4.4.1)$$

Отсюда вследствие неограниченности последнего множителя следует равенство

$$A_{20}(s) = -\xi^2 s X_{10}(\xi s). \quad (4.4.2)$$

Для второй постоянной из граничного условия (4.1.20) получаем следующее уравнение:

$$A_{10}(s) X_{10}(r_0 s) + A_{20}(s) X_{20}(r_0 s) = 0, \quad (4.4.3)$$

откуда следует, что

$$A_{10}(s) = \xi^2 s \frac{X_{20}(r_0 s)}{X_{10}(r_0 s)} X_{10}(\xi s). \quad (4.4.4)$$

Подставляя теперь (3.5.4), (4.4.2) и (4.4.4) в (3.5.1), с учетом (П.4.13) приходим к такому результату:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = \xi^2 s \left[ \frac{P_{u0}(rs, r_0 s)}{X_{10}(r_0 s)} X_{10}(\xi s) - P_{u0}(rs, \xi s) H(r - \xi) \right]. \quad (4.4.5)$$

Окончательно с использованием следствия П.6.2 эту функцию записываем так:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uu0}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \quad (4.4.6)$$

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{s P_{u0}(rs, r_0 s) X_{10}(\xi s)}{X_{10}(r_0 s)}.$$

С целью проверки перейдем к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в аналогичной формуле (3.5.8) для толстостенной сферы. Учитывая (П.7.8), приходим к равенству

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{P_{u0}(r_1 s, \xi s)}{P_{u0}(r_0 s, r_1 s)} = - \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{r_1 s e^{r_1 s} X_{10}(\xi s)}{r_1 s e^{r_1 s} X_{10}(r_0 s)} = - \frac{X_{10}(\xi s)}{X_{10}(r_0 s)}, \quad (4.4.7)$$

из которого при использовании (П.3.4) вытекает, что этот предельный переход приводит к полученному выше результату (4.4.6).

Для определения функций  $G_{un}^L$  и  $G_{vn}^L$  при  $n \geq 1$  аналогично § 3.5 сводим систему уравнений в (4.1.21) к системе первого порядка и используем представление ее общего решения в виде (3.5.9), где частное решение по-прежнему определяется формулами (3.5.12).

Из формул (П.7.9) и (П.7.10) вытекает следующее представление при  $r \rightarrow \infty$  для фундаментальной матрицы  $\mathbf{X}_n(r, s)$  (здесь и далее знак эквивалентности для матриц понимается поэлементно):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n(r, s) &\sim \frac{1}{\eta^2 r^2 s^2 \sqrt{2\pi}} \left( \mathbf{0}, e^{rs} \eta^2 \mathbf{x}_{n2}, \mathbf{0}, e^{\eta rs} \mathbf{x}_{n4} \right), \\ \mathbf{x}_{n2} &= (rs, rs^2, -1, -s)^T, \quad \mathbf{x}_{n4} = (n(n+1), n(n+1)\eta s, -\eta rs, -\eta^2 rs^2)^T. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

А уже из него при дополнительном учете (3.5.11) получаем соответствующие асимптотические равенства для функций влияния:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{un}^L(r, \xi, s) &\sim \frac{1}{\eta^2 r^2 s^2 \sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \left\{ \eta^2 e^{rs} \left[ A_{2un} + \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \right] \mathbf{x}_{n2} + e^{\eta rs} \left[ B_{2un} + \eta^2 \xi Z_{1n}(\eta \xi s) \right] \mathbf{x}_{n4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Таким образом, функции влияния будут ограниченными только при выполнении следующих равенств:

$$A_{2un} = -\xi^2 s X_{1n}(\xi s), \quad B_{2un} = -\eta^2 \xi Z_{1n}(\eta \xi s). \quad (4.4.10)$$

Отметим, что первое из них является частным случаем формулы (4.4.2).

Подставляя теперь (3.5.13) в граничные условия в (4.1.22), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $A_{1un}$  и  $B_{1un}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n13}^{13}(r_0, s) \begin{pmatrix} A_{1un} \\ B_{1un} \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{n24}^{13}(r_0, s) \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}_{n13}^{13}(r_0, s) &= \mathbf{Z}_{n13}^{12}, \quad \mathbf{X}_{n24}^{13}(r_0, s) = \mathbf{Z}_{n24}^{12}, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

где  $\mathbf{X}_{nkl}^{ij}(r, s)$  и  $\mathbf{Z}_{nkl}^{ij}$  - матрицы, стоящие из элементов, расположенных в строках с номерами  $i, j$  и столбцах с номерами  $k, l$  матриц  $\mathbf{X}_n(r, s)$  в (П.4.1) и  $\mathbf{Z}_n$  в (3.5.14) соответственно.

Ее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_{1un} \\ B_{1un} \end{pmatrix} = -[\mathbf{X}_{n13}^{13}(r_0, s)]^{-1} \mathbf{X}_{n24}^{13}(r_0, s) \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

Отсюда после соответствующих преобразований получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{1un} \\ B_{1un} \end{pmatrix} &= -\frac{\mathbf{Y}_{n0}(r_0, s)}{T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)} \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_{n0}(r, s) &= \begin{pmatrix} T_{n23}(rs, \eta rs) & -T_{n34}(\eta rs, \eta rs) \\ T_{n12}(rs, rs) & T_{n14}(rs, \eta rs) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Здесь использованы обозначения

$$T_{nkl}(x, y) = \begin{vmatrix} X_{kn}(x) & X_{ln}(y) \\ Y_{kn}(x) & Y_{ln}(y) \end{vmatrix} \quad (k, l = 1, 2, 3, 4). \quad (4.4.14)$$

Подставляя теперь (4.4.10) и (4.4.13) в (3.5.9) и принимая во внимание (3.5.11), для искомых функций получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{uum}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} &= \xi \left[ \mathbf{X}_{n13}^{13}(r, s) \frac{\mathbf{Y}_{n0}(r_0, s)}{T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)} - \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \right] \begin{pmatrix} \xi s X_{1n}(\xi s) \\ \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} G_{uum*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} H(r - \xi). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

В развернутом виде оно записывается так:

$$\begin{aligned} G_{uum}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) + G_{uum*}^L(r, \xi, s) H(r - \xi), \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) + G_{vun*}^L(r, \xi, s) H(r - \xi). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Здесь

$$G_{um*}^L(r, \xi, s) = \xi^2 s P_{un}(\xi s, rs) - \eta \xi \frac{n(n+1)}{rs} P_{en}(\eta rs, \eta \xi s), \quad (4.4.17)$$

$$G_{vun*}^L(r, \xi, s) = -\frac{\xi^2}{r} S_{un}(\xi s, rs) + \eta^2 \xi S_{en}(\eta rs, \eta \xi s);$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{um}^L(r, \xi, s) &= \frac{sX_{1n}(\xi s)K_{n11}(rs, r_0s) + \eta^2 \xi^{-1} Z_{1n}(\eta \xi s) \tilde{K}_{n12}(rs, r_0s)}{T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{sX_{1n}(\xi s)K_{n21}(rs, r_0s) + \eta^2 \xi^{-1} Z_{1n}(\eta \xi s) K_{n22}(rs, r_0s)}{T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)}, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

где

$$\begin{aligned} K_{n11}(x, y) &= X_{1n}(x)T_{n23}(y, \eta y) + X_{3n}(\eta x)T_{n12}(y, y) - X_{2n}(x)T_{n13}(y, \eta y), \\ \tilde{K}_{n12}(x, y) &= -X_{1n}(x)T_{n34}(\eta y, \eta y) + X_{3n}(\eta x)T_{n14}(y, \eta y) - X_{4n}(\eta x)T_{n13}(y, \eta y), \\ K_{n21}(x, y) &= Y_{1n}(x)T_{n23}(y, \eta y) + Y_{3n}(\eta x)T_{n12}(y, y) - Y_{2n}(x)T_{n13}(y, \eta y), \\ K_{n22}(x, y) &= -Y_{1n}(x)T_{n34}(\eta y, \eta y) + Y_{3n}(\eta x)T_{n14}(y, \eta y) - Y_{4n}(\eta x)T_{n13}(y, \eta y). \end{aligned}$$

Последние равенства можно упростить. С этой целью, используя (4.4.14), (П.3.5), (П.4.15), (П.4.28) и (П.4.29), получаем следующие вспомогательные равенства:

$$T_{n12}(x, x) = -\frac{1}{x} S_{un}(x, x) = \frac{1}{x^3}, \quad T_{n34}(x, x) = \frac{n(n+1)}{x} S_{un}(x, x) = -\frac{n(n+1)}{x^3}; \quad (4.4.19)$$

$$\begin{aligned} &X_{1n}(x)T_{n23}(y, \eta y) - X_{2n}(x)T_{n13}(y, \eta y) = \\ &= Y_{3n}(\eta y)P_{un}(x, y) + y^{-1}X_{3n}(\eta y)S_{un}(x, y), \\ &X_{3n}(\eta x)T_{n14}(y, \eta y) - X_{4n}(\eta x)T_{n13}(y, \eta y) = \\ &= n(n+1)\eta^{-1}x^{-1} \left[ X_{1n}(y)S_{en}(\eta y, \eta x) - n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}Y_{1n}(y)P_{en}(\eta x, \eta y) \right], \\ &Y_{1n}(x)T_{n23}(y, \eta y) - Y_{2n}(x)T_{n13}(y, \eta y) = \\ &= x^{-1} \left[ Y_{3n}(\eta y)S_{un}(y, x) - y^{-1}X_{3n}(\eta y)P_{en}(x, y) \right], \\ &Y_{3n}(\eta x)T_{n14}(y, \eta y) - Y_{4n}(\eta x)T_{n13}(y, \eta y) = \\ &= X_{1n}(y)Q_{en}(\eta x, \eta y) + n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}Y_{1n}(y)S_{en}(\eta x, \eta y). \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Учитывая теперь последние две группы формул, приходим к следующим равенствам для функций  $K_{nij}(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
K_{n11}(x, y) &= Y_{3n}(\eta y)P_{un}(x, y) + y^{-1}X_{3n}(\eta y)S_{un}(x, y) + y^{-3}X_{3n}(\eta x), \\
\tilde{K}_{n12}(x, y) &= n(n+1)K_{n12}(x, y), \quad K_{n12}(x, y) = \eta^{-1} \left\{ \eta^{-2}y^{-3}X_{1n}(x) + \right. \\
&+ \left. x^{-1} \left[ X_{1n}(y)S_{en}(\eta y, \eta x) - n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}Y_{1n}(y)P_{en}(\eta x, \eta y) \right] \right\}, \\
K_{n21}(x, y) &= \\
&= x^{-1} \left[ Y_{3n}(\eta y)S_{un}(y, x) - y^{-1}X_{3n}(\eta y)P_{en}(x, y) \right] + y^{-3}Y_{3n}(\eta x), \\
K_{n22}(x, y) &= \\
&= X_{1n}(y)Q_{en}(\eta x, \eta y) + n(n+1)\eta^{-1}y^{-1} \left[ Y_{1n}(y)S_{en}(\eta x, \eta y) + \eta^{-2}y^{-2}Y_{1n}(x) \right].
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

Для определения функций  $G_{uvn}^L$  и  $G_{vvn}^L$  ( $n \geq 1$ ) аналогично § 3.5 сводим систему уравнений в (4.1.22) к системе первого порядка. Ее общее решение имеет вид (3.5.17), где частное решение определяется равенством (3.5.18).

При определении постоянных интегрирования выводы (П.7.8) - (4.4.16) фактически повторяются с заменой столбца  $\tilde{\mathbf{D}}_{un}$  из (3.5.11) столбцом  $\tilde{\mathbf{D}}_{vn}$  из (3.5.19). При этом асимптотические равенства (4.4.9) для функций влияния изменяются так:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_{vn}^L(r, \xi, s) &\sim \frac{1}{\eta^2 r^2 s^2 \sqrt{2\pi}} \times \\
&\times \left\{ \eta^2 e^{rs} \left[ A_{2vn} - n(n+1)\xi Z_{1n}(\xi s) \right] \mathbf{x}_{n2} + e^{\eta rs} \left[ B_{2vn} + \eta^3 \xi^2 s Y_{3n}(\eta \xi s) \right] \mathbf{x}_{n4} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Тогда условия ограниченности решения приводят к следующим равенствам:

$$A_{2vn} = n(n+1)\xi Z_{1n}(\xi s), \quad B_{2vn} = -\eta^3 \xi^2 s Y_{3n}(\eta \xi s). \tag{4.4.23}$$

Далее аналогично (4.4.13) находим остальные две постоянные:

$$\begin{pmatrix} A_{1vn} \\ B_{1vn} \end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{Y}_{n0}(r_0, s)}{T_{n13}(r_0 s, \eta r_0 s)} \begin{pmatrix} A_{2vn} \\ B_{2vn} \end{pmatrix}. \tag{4.4.24}$$

Подставляя теперь (4.4.23) и (4.4.24) в (3.5.17), для искомым функций получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} G_{uvn}^L(r, \xi, s) \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} G_{uvn}^L(r, \xi, s) \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} H(r - \xi) + \\
&+ \xi \left[ \mathbf{X}_{n13}^{13}(r, s) \frac{\mathbf{Y}_{n0}(r_0, s)}{T_{n13}(r_0 s, \eta r_0 s)} - \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \right] \begin{pmatrix} -n(n+1)Z_{1n}(\xi s) \\ \eta^3 \xi s Y_{3n}(\eta \xi s) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.4.25}$$

В развернутом виде оно аналогично (4.4.16) записывается так:

$$\begin{aligned} G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= n(n+1)\xi^2 \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) + G_{uvn*}^L(r, \xi, s)H(r-\xi), \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) + G_{vvn*}^L(r, \xi, s)H(r-\xi), \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{uvn*}^L(r, \xi, s) &= \xi \left[ S_{un}(rs, \xi s) - \frac{\xi}{r} \eta^2 S_{en}(\eta \xi s, \eta rs) \right], \\ G_{vvn*}^L(r, \xi, s) &= -\xi \left[ \eta^3 \xi s Q_{en}(\eta rs, \eta \xi s) + \frac{n(n+1)}{rs} P_{en}(rs, \xi s) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uvn}^L &= \frac{-\xi^{-1} Z_{1n}(\xi s) K_{n11}(rs, r_0 s) + \eta^3 s Y_{3n}(\eta \xi s) K_{n12}(rs, r_0 s)}{T_{n13}(r_0 s, \eta r_0 s)}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L &= \frac{-n(n+1)\xi^{-1} Z_{1n}(\xi s) K_{n21}(rs, r_0 s) + \eta^3 s Y_{3n}(\eta \xi s) K_{n22}(rs, r_0 s)}{T_{n13}(r_0 s, \eta r_0 s)}. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Окончательно в соответствии со следствием П.6.3 формулы (4.4.16) и (4.4.26) для функций  $G_{uun}^L$ ,  $G_{vun}^L$ ,  $G_{uvn}^L$  и  $G_{vvn}^L$  записываем в виде (3.5.24) и (3.5.25), где функции  $\tilde{G}_{uun}^L$ ,  $\tilde{G}_{vun}^L$ ,  $\tilde{G}_{uvn}^L$  и  $\tilde{G}_{vvn}^L$  определяются равенствами (4.4.18) и (4.4.28).

Для проверки рассмотрим частный случай при  $n=0$ . Используя формулы (3.5.26), (4.4.14) и (4.4.21) получаем следующие равенства:

$$T_{013}(x, y) = X_{10}(x)Y_{30}(y), K_{011}(x, y) = Y_{30}(\eta y)P_{u0}(x, y), \tilde{K}_{012}(x, y) = 0. \quad (4.4.29)$$

Подставляя их в (4.4.18), убеждаемся в том, что формула (4.4.23) переходит в (4.4.6).

С целью дополнительной проверки формул (4.4.18) и (4.4.31) перейдем к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в аналогичных формулах (3.5.16) и (3.5.23) для толстостенной сферы. Во-первых, подставляя асимптотики (П.7.3), (П.7.6), (П.7.7) и (П.7.8) в (П.5.5), (П.5.17) и (П.5.18), с учетом (П.2.17), (П.2.18) и (4.4.14) приходим к следующему соотношению при  $r_1 \rightarrow \infty$ :

$$|Z_n(s)| \sim \frac{e^{(\eta+1)r_1 s}}{2\pi\eta r_1^2 s^2} T_{n13}(r_0 s, \eta r_0 s). \quad (4.4.30)$$

Далее аналогичным образом из (3.5.12) получаем такие асимптотические равенства при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
R_{uun*}(x, y) &\sim -\frac{ye^x}{x\sqrt{2\pi}} X_{1n}(y) - \frac{n(n+1)e^{nx}}{x^2\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(\eta y), \\
R_{vun*}(x, y) &\sim \frac{ye^x}{x^2\sqrt{2\pi}} X_{1n}(y) + \frac{\eta e^{nx}}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(\eta y).
\end{aligned}
\tag{4.4.31}$$

Кроме того, также, используя (П.2.17), (П.2.18), (П.5.17), (П.5.18) и (4.4.21), строим такие асимптотические равенства при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
R_{un1}(x, y, z) &\sim -\frac{n(n+1)e^z}{z^2\sqrt{2\pi}} K_{n12}(x, y) + \frac{e^{\eta z}}{\eta z\sqrt{2\pi}} K_{n11}(x, y), \\
R_{un2}(x, y, z) &\sim -\frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}} K_{n12}(x, y) + \frac{e^{\eta z}}{\eta^2 z^2\sqrt{2\pi}} K_{n11}(x, y);
\end{aligned}
\tag{4.4.32}$$

$$\begin{aligned}
R_{vn1}(x, y, z) &\sim -\frac{e^z}{z^2\sqrt{2\pi}} K_{n22}(x, y) + \frac{e^{\eta z}}{\eta z\sqrt{2\pi}} K_{n21}(x, y), \\
R_{vn2}(x, y, z) &\sim -\frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}} K_{n22}(x, y) + \frac{me^{\eta z}}{\eta^2 z^2\sqrt{2\pi}} K_{n21}(x, y).
\end{aligned}
\tag{4.4.33}$$

Переходя теперь в равенствах (3.5.16) к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  с учетом соотношений (4.4.30), (4.4.32) и (4.4.33) приходим к формулам (4.4.18).

Далее аналогично формулам (4.4.31) получаем следующие соотношения при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
R_{uun*}(x, y) &\sim -\frac{y}{x} \frac{\eta e^{nx}}{x\sqrt{2\pi}} Y_{3n}(\eta y) + \frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(y), \\
R_{vun*}(x, y) &\sim \frac{\eta^2 ye^{nx}}{x\sqrt{2\pi}} Y_{3n}(\eta y) - \frac{n(n+1)}{x} \frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(y).
\end{aligned}
\tag{4.4.34}$$

Переход к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в равенствах (3.5.23) с учетом соотношений (4.4.32) - (4.4.34) приводит к формулам (4.4.28).

#### § 4.5. Оригиналы объемных функций влияния для упругого пространства со сферической полостью

Для вычисления оригиналов функций влияния в (4.4.16) и (4.4.26) аналогично (3.6.3) выразим функции в (4.4.18) и (4.4.28) через экспоненциальные многочлены  $E_{kln}(x, y)$  (см. (П.3.20)). Для этого сначала, используя (П.2.18), (П.3.13) - (П.3.19)

и (П.4.36), (П.4.37), проделаем эту процедуру для определителя  $T_{n13}(y, \eta y)$ , задаваемого формулой (4.4.14), а также для функций, входящих в (4.4.21):

$$T_{n13}(y, \eta y) = -\frac{\pi}{2\eta^{n+2} y^{2(n+2)}} D_n(y, y) e^{-\eta y}; \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} K_{n11}(x, y) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L_{n11}(x, y)}{2\eta^{n+2} x^{n+2} y^{2(n+2)}}, \quad K_{n12}(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L_{n12}(x, y)}{2\eta^{2(n+2)} x^{n+2} y^{2(n+2)}}, \\ K_{n21}(x, y) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L_{n21}(x, y)}{2\eta^{n+2} x^{n+2} y^{2(n+2)}}, \quad K_{n22}(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{L_{n22}(x, y)}{2\eta^{2(n+2)} x^{n+2} y^{2(n+2)}}, \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} L_{n11}(x, y) &= (-1)^n [R_{n3}(\eta y) E_{11n}(x, y) - n(n+1) R_{n0}(\eta y) E_{10n}(x, y)] e^{-\eta y} + \\ &\quad + 2n(n+1) y^{2n+1} R_{n0}(\eta x) e^{-\eta x}, \\ L_{n12}(x, y) &= (-1)^n [R_{n1}(y) E_{30n}(\eta y, \eta x) + n(n+1) R_{n0}(y) E_{00n}(\eta x, \eta y)] e^{-y} - \\ &\quad - 2\eta^{2n+1} y^{2n+1} R_{n1}(x) e^{-x}, \\ L_{n21}(x, y) &= (-1)^{n+1} [R_{n3}(\eta y) E_{10n}(y, x) + n(n+1) R_{n0}(\eta y) E_{00n}(x, y)] e^{-\eta y} + \\ &\quad + 2y^{2n+1} R_{n3}(\eta x) e^{-\eta x}, \\ L_{n22}(x, y) &= (-1)^n [n(n+1) R_{n0}(y) E_{30n}(\eta x, \eta y) - R_{n1}(y) E_{33n}(\eta x, \eta y)] e^{-y} - \\ &\quad - 2n(n+1) \eta^{2n+1} y^{2n+1} R_{n0}(x) e^{-x}, \end{aligned}$$

а функция  $D_n(x, y)$  и величина  $\eta_+$  определены равенствами в (П.5.22).

Подставляя теперь (4.5.1) и (4.5.2) в (4.4.18) и (4.4.28), с учетом (П.2.18), (П.3.13) - (П.3.15) приходим к аналогичным (3.6.3) равенствам:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \frac{F_{uun}^{(0)}(s)}{s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s)}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \frac{F_{vun}^{(0)}(s)}{s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s)}, \\ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \frac{F_{uvn}^{(0)}(s)}{s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s)}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \frac{F_{vvn}^{(0)}(s)}{s^{2n+3} D_n(r_0 s, r_0 s)}, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

где

$$\begin{aligned}
F_{uum}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n1}(\xi s) L_{n11}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - n(n+1) R_{n0}(\eta \xi s) L_{n12}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\
F_{vun}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n1}(\xi s) L_{n21}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n0}(\eta \xi s) L_{n22}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\
F_{uvn}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ \eta^{2n+1} R_{n0}(\xi s) L_{n11}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n3}(\eta \xi s) L_{n12}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right], \\
F_{vvn}^{(0)}(s) &= e^{\eta_+ r_0 s} \left[ n(n+1) \eta^{2n+1} R_{n0}(\xi s) L_{n21}(rs, r_0 s) e^{-\xi s} - R_{n3}(\eta \xi s) L_{n22}(rs, r_0 s) e^{-\eta \xi s} \right].
\end{aligned}$$

Для дополнительной проверки в формулах (3.6.3) переходим к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$ . С этой целью с помощью (П.7.11) и (П.7.12) сначала строим асимптотические формулы для функций в (3.6.1), (П.5.20) и (П.5.21):

$$\begin{aligned}
L_{uum*}(x, y) &\sim (-1)^{n+1} \eta^{2n+1} y^{n+1} R_{n1}(x) e^{y-x}, \\
L_{vun*}(x, y) &\sim (-1)^{n+1} \eta^{2n+1} y^{n+1} R_{n0}(x) e^{y-x}, \\
L_{vvn*}(x, y) &\sim (-1)^{n+1} \eta^{n+3} y^{n+1} R_{n3}(\eta x) e^{\eta(y-x)}, \quad y \rightarrow \infty (\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} x > 0);
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

$$\begin{aligned}
L_{uum*}(x, y) &\sim (-1)^n \eta^{2n+1} x^{n+1} R_{n1}(y) e^{x-y}, \\
L_{vun*}(x, y) &\sim (-1)^n \eta^{n+3} x^{n+1} R_{n3}(\eta y) e^{\eta(x-y)}, \\
L_{vvn*}(x, y) &\sim (-1)^n \eta^{n+1} x^{n+1} R_{n0}(\eta y) e^{\eta(x-y)}, \quad x \rightarrow \infty (\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} y > 0);
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

$$\begin{aligned}
L_{um1}(x, y, z) &\sim \eta^{n+1} z^{n+1} e^{\eta z} L_{n11}(x, y), \quad L_{um2}(x, y, z) \sim -z^{n+1} e^z L_{n12}(x, y), \\
L_{vm1}(x, y, z) &\sim \eta^{n+1} z^{n+1} e^{\eta z} L_{n21}(x, y), \quad z \rightarrow \infty;
\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

$$L_{um1}(x, y, z) \sim -x^{n+1} e^x L_{n22}(z, y), \quad x \rightarrow \infty. \tag{4.5.7}$$

Переходя теперь к пределу при  $r_1 \rightarrow \infty$  в (3.6.3) с использованием (4.5.4) - (4.5.7) и (П.7.13), приходим к равенствам (4.5.3).

Числители в равенствах (4.5.3) согласно (4.5.2) имеют аналогичный (3.6.4) вид экспоненциальных многочленов

$$\begin{aligned}
F_{uum}^{(0)}(s) &= \sum_{\alpha_1} P_{uum}^{(\alpha_1)}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_1}(r, \xi)s}, \quad F_{vun}^{(0)}(s) = \sum_{\alpha_2} P_{vun}^{(\alpha_2)}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_2}(r, \xi)s}, \\
F_{uvn}^{(0)}(s) &= \sum_{\alpha_3} P_{uvn}^{(\alpha_3)}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_3}(r, \xi)s}, \quad F_{vvn}^{(0)}(s) = \sum_{\alpha_4} P_{vvn}^{(\alpha_4)}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_4}(r, \xi)s},
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

которые могут быть найдены методами компьютерной алгебры. Поскольку знаменатель  $D_n(r_0 s, r_0 s)$  в (4.5.3) является многочленом, то  $\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s)$ ,  $\tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s)$  и  $\tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s)$  - суммы произведений рациональных функ-

ций аргумента  $s$  на экспоненты. Покажем, что все эти рациональные функции являются правильными дробями.

Действительно, учитывая, что согласно (П.5.22) и (3.6.10)  $\deg D_n(r_0s, r_0s) = 2(n+1)$ , получаем, что знаменатели в (4.5.3) имеют степени  $4n+5$ . Степени экспоненциальных многочленов в (4.5.2) и (4.5.3) находим, дополнительно учитывая (3.6.11):

$$\begin{aligned} \deg L_{n11}(\alpha s, \beta s) &= \deg L_{n22}(\alpha s, \beta s) = 3(n+1), \\ \deg L_{n12}(\alpha s, \beta s) &= \deg L_{n21}(\alpha s, \beta s) = 3n+2; \\ \deg R_{n0}(z) &= n, \quad \deg R_{n1}(z) = \deg R_{n3}(z) = n+1 \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

$$\begin{aligned} \deg F_{uun}^{(0)}(s) &= \deg F_{vvn}^{(0)}(s) = 4(n+1), \\ \deg F_{vun}^{(0)}(s) &= \deg F_{uvn}^{(0)}(s) = 4n+3. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Следовательно, оригиналы функций в (4.5.3) могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления.

Оригиналы искомых функций влияния при  $n \geq 1$  вычисляются так же, как и в § 3.6 по формулам (3.6.15).

Функцию влияния  $G_{uu0}(r, \xi, \tau)$  можно находить, используя первое равенство в (3.6.15) при  $n=0$ .

В качестве примера рассмотрим полость радиуса  $r_0=1$ , материал среды такой же, как и в предыдущих главах (алюминий,  $\eta=2,04$ ). Результаты расчетов приведены на рис. 4.5.1 и 4.5.2 [70]. На первом из них приведены графики распределения функций влияния  $G_{uu1}$ ,  $G_{vu1}$ ,  $G_{uv1}$  и  $G_{vv1}$  по радиусу  $r$  при  $\xi=1,5$ ,  $\tau=2$ : сплошная кривая соответствует функции  $G_{uu1}$ , штриховая  $G_{uv1}$ , штрихпунктирная -  $G_{vu1}$ , штрихпунктирная с двумя точками -  $G_{vv1}$ .

Рис. 4.5.2 иллюстрирует зависимость функции  $G_{uun}$  от времени при  $r=2$ ,  $\xi=1,5$  и различных значениях  $n$ : сплошная кривая соответствует  $n=0$ , штриховая -  $n=1$ , штрихпунктирная -  $n=2$ , штрихпунктирная с двумя точками -  $n=3$ .

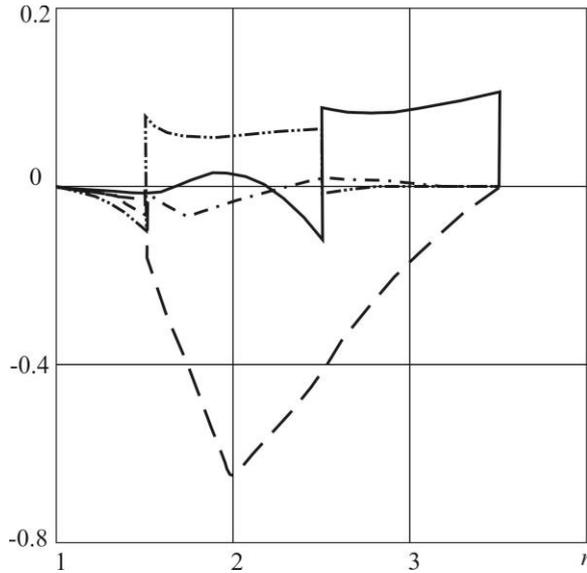


Рис. 4.5.1.

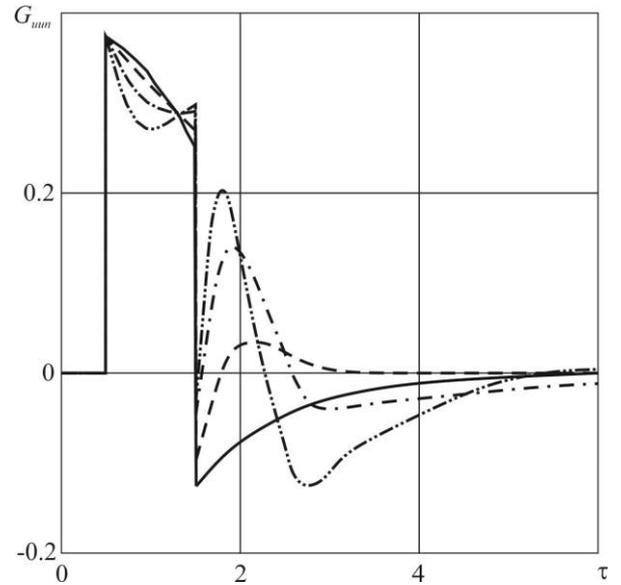


Рис. 4.5.2.

#### § 4.6. Нестационарное движение упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил

Аналогично § 3.7 рассмотрим вспомогательную задачу об осесимметричном движении упругого полупространства со сферической полостью под действием объемных сил с радиальной  $F_r(r, \theta, \tau)$  и тангенциальной компонентами  $F_\theta(r, \theta, \tau)$  [70,72,134].

Так же, как и ранее, полагаем, что начальные условия имеют вид (3.7.1), а граничные условия подобны (3.7.2):

$$u|_{r=r_0} = v|_{r=r_0} = 0. \quad (4.6.1)$$

Тогда с использованием (4.1.18) и (4.1.19) получаем следующие интегральные представления для изображений коэффициентов рядов для перемещений:

- при  $n = 0$

$$u_0^L(r, s) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}^L(r, \xi, s) F_{r0}^L(\xi, s) d\xi; \quad (4.6.2)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
u_n^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{uun}^L(r, \xi, s) F_m^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvn}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi, \\
v_n^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{vun}^L(r, \xi, s) F_m^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvn}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi.
\end{aligned}
\tag{4.6.3}$$

В пространстве оригиналов эти формулы преобразовываются так:

- при  $n = 0$

$$u_0(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * F_{r_0}(\xi, \tau) d\xi; \tag{4.6.4}$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
u_n(r, \tau) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{uun}(r, \xi, \tau) * F_m(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvn}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi, \\
v_n(r, \tau) &= \int_{r_0}^{\infty} G_{vun}(r, \xi, \tau) * F_m(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi.
\end{aligned}
\tag{4.6.5}$$

Ядра этих представлений определяются формулами (3.6.15).

В качестве примера движения среды рассмотрим действие объемной силы следующего вида:

$$F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau) \delta(r - r_*) \cos \theta, \quad F_{\theta}(r, \theta, \tau) = -H(\tau) \delta(r - r_*) \sin \theta,$$

что соответствует следующим коэффициентам рядов [134]:

$$\begin{aligned}
F_{r1}(r, \tau) &= \delta(r - r_*) H(\tau), \quad F_{\theta 1}(r, \tau) = -\delta(r - r_*) H(\tau), \\
F_{r0}(r, \tau) &= F_m(r, \tau) = F_{\theta n}(r, \tau) = 0, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

При этом в соответствии с (8) имеет место поступательное движение:  $u(r, \theta, \tau) = u_1(r, \tau) \cos \theta$ ,  $v(r, \theta, \tau) = v_1(r, \tau) \sin \theta$ . В расчете принято  $r_* = 3$ .

Результаты расчетов приведены для тех же механических и геометрических характеристик, которые приняты в предыдущем параграфе, приведены на рис. 4.6.1 и 4.6.2 [70]. На первом из них представлены графики распределения функций  $u_1(r, \tau)$  и  $v_1(r, \tau)$  по радиусу: сплошная и пунктирная кривые соответствуют перемещениям  $u_1(r, 3)$  и  $v_1(r, 3)$  соответственно, а штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками -  $u_1(r, 5)$  и  $v_1(r, 5)$  соответственно.

Зависимость функций  $u_1(r, \tau)$  и  $v_1(r, \tau)$  от времени иллюстрирует рисунок 4.6.2: сплошная и пунктирная кривые соответствуют перемещениям  $u_1(2, \tau)$  и  $v_1(2, \tau)$  соответственно, а штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками -  $u_1(5, \tau)$  и  $v_1(5, \tau)$  соответственно.

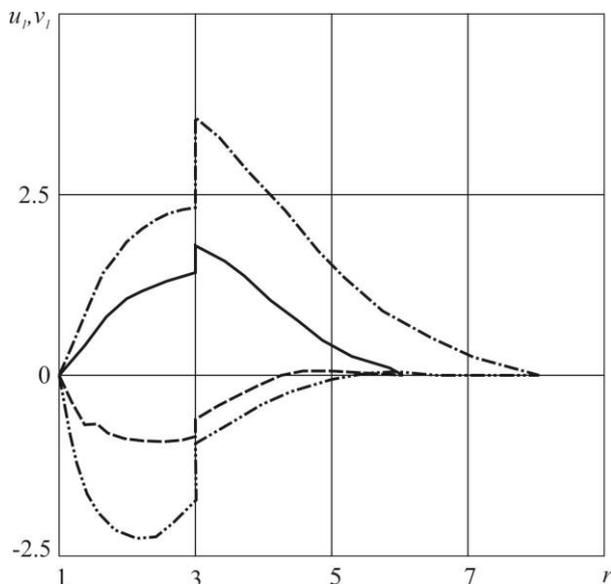


Рис. 4.6.1.

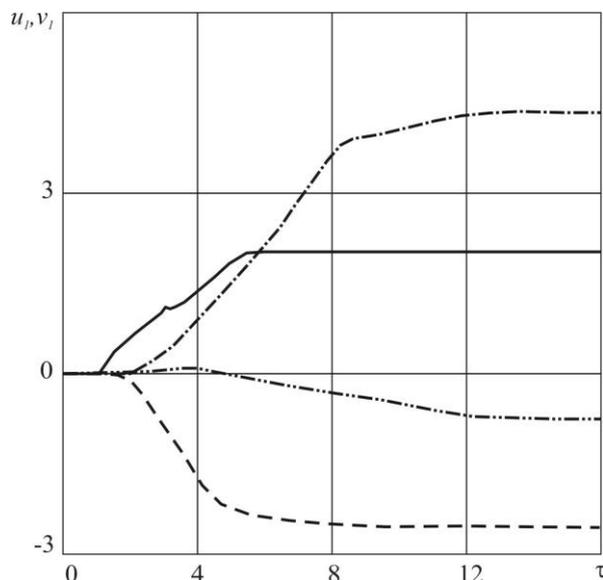


Рис. 4.6.2

#### § 4.7. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругом пространстве со сферической полостью

Постановка этой задачи приведена в § 4.1. Ее решение представлено в виде рядов (3.1.6) по углу  $\theta$  и (3.2.1) по малому параметру  $\alpha$ . Как показано в §§ 4.2 – 4.6, коэффициенты этих рядов при каждом  $n$  определяются независимыми рекуррентными системами интегральных соотношений. Аналогично § 3.8 доказывается, что для нулевых коэффициентов рядов (3.1.6) ( $n=0$ ) при условиях (4.1.17) выполняются равенства (3.8.2).

При  $n \geq 1$  аналогично § 3.8 получаем следующую рекуррентную ( $m \geq 1$ ) систему уравнений (отличие от соотношений (3.8.4), (3.8.9), (3.8.12), (3.8.13), (3.8.18), (3.8.20) – (3.8.22) и (3.8.43) в пределах интегрирования и количестве заданных на границе функций):

$$u_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uum}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{uvm}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.7.1)$$

$$v_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{vum}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} G_{vvm}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi;$$

$$\dot{u}_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{uum}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{uvm}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.7.2)$$

$$\dot{v}_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{vum}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} \Pi_{vvm}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi;$$

$$\chi_{nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} X_{um}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_{r_0}^{\infty} X_{vm}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.7.3)$$

где

$$f_{un, m-1}(\xi, \tau) = \rho_{e0}(\xi) E_{m, m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{n, m-1}(\xi, \tau),$$

$$f_{vn, m-1}(\xi, \tau) = \rho_{e0}(\xi) E_{\theta n, m-1}(\xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{n, m-1}(\xi, \tau);$$

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) [G_{Hum}^c(r, \xi) \dot{u}_{nm}(\xi, \tau) + G_{Hvm}^c(r, \xi) \dot{v}_{nm}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (4.7.4)$$

$$E_{rnm}(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \times \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) [G_{Hum}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + G_{Hvm}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (4.7.5)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} \rho_{e0}(\xi) \{ \Gamma_{Hum}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + \Gamma_{Hvm}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau) \} d\xi + \rho_{e0}(r) v_{nms}(r, \tau); \quad (4.7.6)$$

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r) u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0} \chi_{nms}(r, \tau), \quad (4.7.7)$$

$$u_{nms}(r, \tau) = u_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma \tau} * u_{nm}(r, \tau),$$

$$v_{nms}(r, \tau) = v_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma \tau} * v_{nm}(r, \tau), \quad (4.7.8)$$

$$\chi_{nms}(r, \tau) = \chi_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma \tau} * \chi_{nm}(r, \tau).$$

Начальными условиями для нее являются подобные (3.8.3) равенства:

$$\begin{aligned}
u_{n0}(r, \tau) &\equiv 0, \quad v_{n0}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 0), \\
H_{n0}(r, \tau) &= -\eta_e^2 G_{Hn0}^c(r) [\gamma e_{00n}(\tau) + \dot{e}_{00n}(\tau)], \\
E_{m0}(r, \tau) &= -\frac{n(n+1)}{r} G_{Hn0}^c(r) e_{00n}(\tau), \quad \rho_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \\
E_{\theta n0}(r, \tau) &= \Gamma_{Hn0}^c(r) e_{00n}(\tau) \quad (n \geq 1),
\end{aligned} \tag{4.7.9}$$

где функции  $G_{Hn0}^c(r)$  и  $\Gamma_{Hn0}^c(r)$  определяются формулами (4.2.24) и (4.3.4).

Естественно, по отношению к § 3.8 изменяются ядра в соотношениях (4.7.1) - (4.7.6). А именно, функции  $G_{uun}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{uvn}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vun}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vvn}(r, \xi, \tau)$  определяются формулами (3.6.15) и указанным в § 4.5 алгоритмом, а  $G_{Hn0}^c(r)$  и  $\Gamma_{Hn0}^c(r)$  - равенствами (4.2.24) и (4.3.4). Функции  $\Pi_{uun}(r, \xi, \tau)$ ,  $\Pi_{uvn}(r, \xi, \tau)$ ,  $\Pi_{vun}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvn}(r, \xi, \tau)$  задаются равенствами (3.8.45), а изображения их составляющих имеет вид (3.8.46) и являются суммами произведений рациональных функций на экспоненты. В соответствии с проведенным в § 4.5 анализом степеней числителей и знаменателей функции  $\Pi_{uun}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvn}(r, \xi, \tau)$  могут содержать подобные (3.8.48) слагаемые (времена запаздывания указаны в (4.5.8))

$$\frac{(-1)^n A_{uun}^{(\alpha_4)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \tau_{0\alpha_4}(r, \xi)], \quad \frac{(-1)^n A_{vvn}^{(\alpha_4)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \tau_{0\alpha_4}(r, \xi)], \tag{4.7.10}$$

которые должны быть учтены в свертках в (4.7.2) в соответствии со свойствами дельта-функции.

Ядра интегралов в (4.7.4) - (4.7.6) задаются формулами (3.8.15), которые получаются аналогично (3.8.16) и (3.8.17) с помощью интегрирования по частям в (4.3.7) - (4.3.9). При этом полагается, что начальная плотность поверхностных зарядов удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{e0}(r) = 0, \tag{4.7.11}$$

а также совместно с граничными условиями (4.1.8) учитываются вытекающие из формул (4.2.21) и (3.4.5), (4.3.4) равенства:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} G_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^2 \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{n(2n+1)r^{n+1}} \begin{cases} 1 & \text{при } n=1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2; \end{cases} \quad (4.7.12)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)r^{n+2}} \begin{cases} 1 & \text{при } n=1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

Явный вид этих ядер совпадает с формулами (3.8.16) и (3.8.17). При этом коэффициенты  $\Gamma_{Hn1}^c(r, \xi)$ ,  $\Gamma_{Hn2}^c(r, \xi)$ ,  $G_{Hn1}^c(r, \xi)$ ,  $G_{Hn2}^c(r, \xi)$ ,  $\Gamma_{Hn1}^c(r, \xi)$  и  $\Gamma_{Hn2}^c(r, \xi)$  перед функциями Хевисайда в соответствии с (3.8.15), (4.2.21) и (4.3.4) определяются так:

$$\Gamma_{Hn1}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2}}, \quad \Gamma_{Hn2}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_0, \xi)}{(2n+1)\xi^n r^{n+2}},$$

$$G_{Hn1}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}}, \quad G_{Hn2}^c(r, \xi) = -\frac{(n+1)\alpha_n(r_0, \xi)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n+1}}, \quad (4.7.13)$$

$$\Gamma_{Hn1}^c(r, \xi) = -\frac{n(n+1)\alpha_n(r, r_0)}{(2n+1)r^{n+2}\xi^n}, \quad \Gamma_{Hn2}^c(r, \xi) = \frac{n(n+1)\alpha_n(r_0, \xi)}{(2n+1)r^{n+2}\xi^n}.$$

Изображения ядер в (4.7.3) определяются равенствами (3.8.23) и (3.8.28), в которых постоянные интегрирования должны быть взяты из (4.4.10), (4.4.13), (4.4.23) и (4.4.24). Использование формул (4.4.10), (4.4.13), (3.8.27) и (4.4.23), (4.4.24), (3.8.31) при учете (4.4.14), (4.4.19), (П.3.3), (П.3.7), (П.4.13), (П.4.19), (П.4.20), (П.4.28) и (П.4.29) приводит к следующим аналогичным (3.8.33) и (3.8.34) результатам:

$$X_{un}^L(r, \xi, s) = X_{un1}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{un2}^L(r, \xi, s)H(r - \xi),$$

$$T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)X_{un1}^L(r, \xi, s) = \frac{n(n+1)\xi}{\eta r_0^3 s^2} Z_{1n}(rs)Z_{1n}(\eta \xi s) -$$

$$-\xi^2 s^2 X_{1n}(\xi s) \left[ Y_{3n}(\eta r_0s) S_{un}(r_0s, rs) + \frac{X_{3n}(\eta r_0s)}{r_0s} P_{en}(r_0s, rs) \right], \quad (4.7.14)$$

$$T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)X_{un2}^L(r, \xi, s) = \xi Z_{1n}(rs) \left\{ \frac{n(n+1)}{\eta r_0^3 s^2} Z_{1n}(\eta \xi s) + \right.$$

$$\left. + \xi s^2 \left[ Y_{3n}(\eta r_0s) P_{un}(\xi s, r_0s) + \frac{X_{3n}(\eta r_0s)}{r_0s} S_{un}(\xi s, r_0s) \right] \right\};$$

$$\begin{aligned}
X_{vn}^L(r, \xi, s) &= X_{vn1}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{vn2}^L(r, \xi, s)H(r - \xi), \\
T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)X_{vn1}^L(r, \xi, s) &= n(n+1)\xi \left\{ \frac{\xi}{r_0^3s} Z_{1n}(rs)Y_{3n}(\eta\xi s) + \right. \\
&+ sZ_{1n}(\xi s) \left[ Y_{3n}(\eta r_0s)S_{un}(r_0s, rs) + \frac{1}{r_0s} X_{3n}(\eta r_0s)P_{en}(r_0s, rs) \right] \left. \right\}, \quad (4.7.15) \\
T_{n13}(r_0s, \eta r_0s)X_{vn2}^L(r, \xi, s) &= n(n+1)\xi Z_{1n}(rs) \left\{ \frac{\xi}{r_0^3s} Y_{3n}(\eta\xi s) + \right. \\
&+ s \left[ Y_{3n}(\eta r_0s)S_{un}(r_0s, \xi s) + \frac{1}{r_0s} X_{3n}(\eta r_0s)P_{en}(r_0s, \xi s) \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

Для вычисления оригиналов функций в (4.7.14) и (4.7.15) аналогично (П.5.19) - (П.5.30) преобразовываем соответствующие числители и, учитывая (4.5.1), получаем подобные (3.8.37) результаты:

$$\begin{aligned}
X_{unk}^L(r, \xi, s) &= -\frac{N_{unk}^{(0)}(rs, r_0s, \xi s)}{2r^{n+1}\xi^n s^{2n+1}D_n(r_0s, r_0s)} e^{\eta r_0s}, \\
X_{vnk}^L(r, \xi, s) &= -\frac{N_{vnk}^{(0)}(rs, r_0s, \xi s)}{2r^{n+1}\xi^n s^{2n+1}D_n(r_0s, r_0s)} e^{\eta r_0s} \quad (k=1, 2).
\end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
N_{un1}^{(0)}(x, y, z) &= 2n(n+1)y^{2n+1}R_{n0}(x)R_{n0}(\eta z)e^{-x-\eta z} + \\
&+ (-1)^n R_{n1}(z)M_{un1}(x, y)e^{-\eta y-z}, \\
M_{un1}(x, y) &= n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{00n}(y, x) - R_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, x), \\
N_{un2}^{(0)}(x, y, z) &= \\
&= R_{n0}(x)e^{-x} \left[ 2n(n+1)y^{2n+1}R_{n0}(\eta z)e^{-\eta z} + (-1)^n M_{un2}(y, z)e^{-\eta y} \right], \\
M_{un2}(y, z) &= R_{n3}(\eta y)E_{11n}(z, y) - n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{10n}(z, y), \\
N_{vn1}^{(0)}(x, y, z) &= n(n+1) \times \\
&\times \left[ 2\eta^{n+2}y^{2n+1}R_{n0}(x)R_{n3}(\eta z)e^{-x-\eta z} + (-1)^n R_{n0}(z)M_{vn}(y, x)e^{-\eta y-z} \right], \\
N_{vn2}^{(0)}(x, y, z) &= n(n+1)R_{n0}(x)e^{-x} \times \\
&\times \left[ 2y^{2n+1}R_{n3}(\eta z)e^{-\eta z} + (-1)^n M_{vn}(y, z)e^{-\eta y} \right], \\
M_{vn}(y, z) &= n(n+1)R_{n0}(\eta y)E_{00n}(y, z) - R_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, z).
\end{aligned} \quad (4.7.17)$$

Функции в (4.7.16) являются отношениями экспоненциальных многочленов аргумента  $s$ , и их структура аналогична (4.5.3). Подобный проведенному в § 4.5 анализ показывает, что степени числителей и знаменателя этих функций таковы:

$$\begin{aligned} \deg M_{un1}(\alpha s, \beta s) &= 3n + 2, \quad \deg M_{un2}(\alpha s, \beta s) = 3n + 3, \\ \deg M_{vn}(\alpha s, \beta s) &= 3n + 2, \\ \deg N_{unk}^{(0)}(rs, r_0 s, \xi s) &= 4n + 3, \quad \deg N_{vnk}^{(0)}(rs, r_0 s, \xi s) = 4n + 2, \\ \deg [s^{2n+1} D_n(r_0 s, r_0 s)] &= 4n + 3 \end{aligned} \quad (4.7.18)$$

Числители дробей в (4.7.16) методами компьютерной алгебры подобно (4.5.8) приводятся к явному виду (показатели экспонент, несмотря на одинаковые обозначения, могут отличаться):

$$\begin{aligned} N_{unk}^{(0)}(rs, r_0 s, \xi s) &= \sum_{\alpha_k} P_{unk}^{(\alpha_k)}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_k}(r, \xi)s}, \\ N_{vnk}^{(0)}(rs, r_0 s, \xi s) &= \sum_{\alpha_{k+2}} P_{vnk}^{(\alpha_{k+2})}(rs, \xi s) e^{-\tau_{0\alpha_{k+2}}(r, \xi)s}. \end{aligned} \quad (4.7.19)$$

Следовательно, оригиналы функций в (4.7.16) могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления. Только необходимо учитывать, что функции  $X_{unk}(r, \xi, \tau)$  могут содержать слагаемые

$$\frac{C_{unk}^{(\alpha_1)}(r, \xi)}{2r^{n+1}\xi^n} \delta[\tau - \tau_{0\alpha_k}(r, \xi)], \quad (4.7.20)$$

которые также находятся методами компьютерной алгебры.

Для примера полагаем, что механические и электрические характеристики материала пространства такие же, как и в § 4.5 и втором примере § 3.9 (алюминий  $\eta = 2,04$ ;  $\eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma = 5,06$ ;  $\alpha = 0,0806$ ,  $E_* = 100$  в/м), радиус полости единичный:  $r_0 = 1$ , а начальные параметры электрического поля следующие:  $E_0 = 1$ ,  $\rho_{0e} = 2/r$ .

На границе полости напряженность электрического поля имеет вид:

$$e_{00} = -\tau_+ \sin \theta,$$

что соответствует таким коэффициентам:

$$e_{001} = -\tau_+, \quad e_{00n} \equiv 0 \quad (n \geq 2).$$

Интегралы в рекуррентных соотношениях находились численно. Распределение по радиусу нетривиальных коэффициентов рядов (3.1.5) при  $n=1$  для перемещений и компонентов электромагнитного поля представлены на рис. 4.7.1 – 4.7.8: сплошные кривые соответствуют  $\tau=1$ , штриховые –  $\tau=3$ , а штрихпунктирные  $\tau=5$ . Расчеты проводились с учетом первых трех членов рядов (3.2.1). Учет последующего члена практически не приводит к изменению результатов.

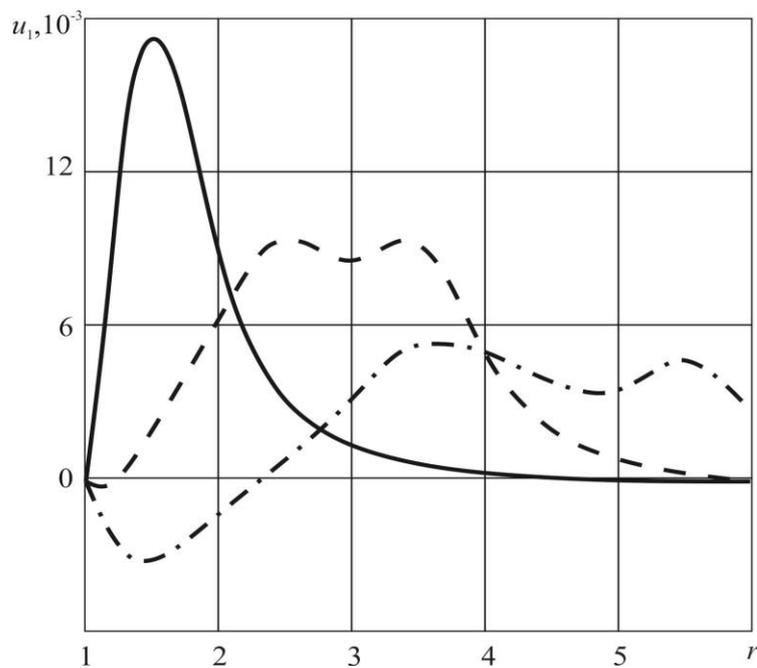


Рис. 4.7.1.

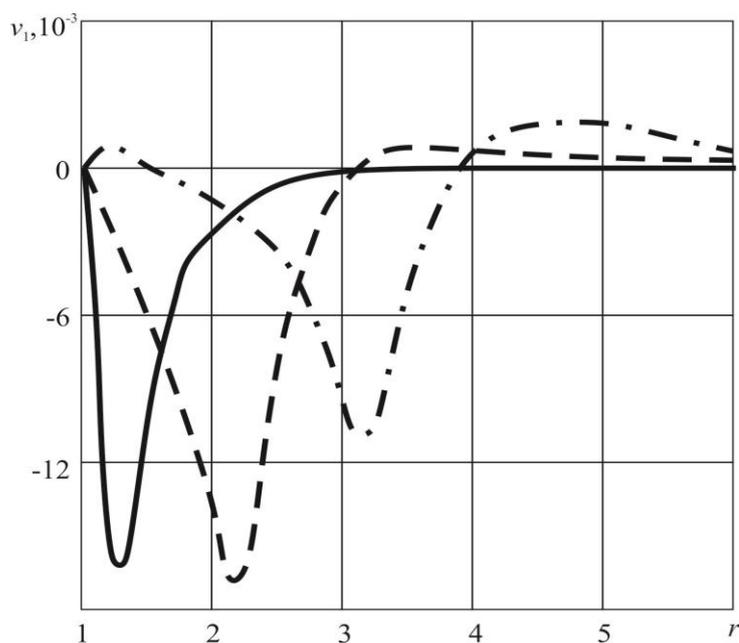


Рис. 4.7.2.

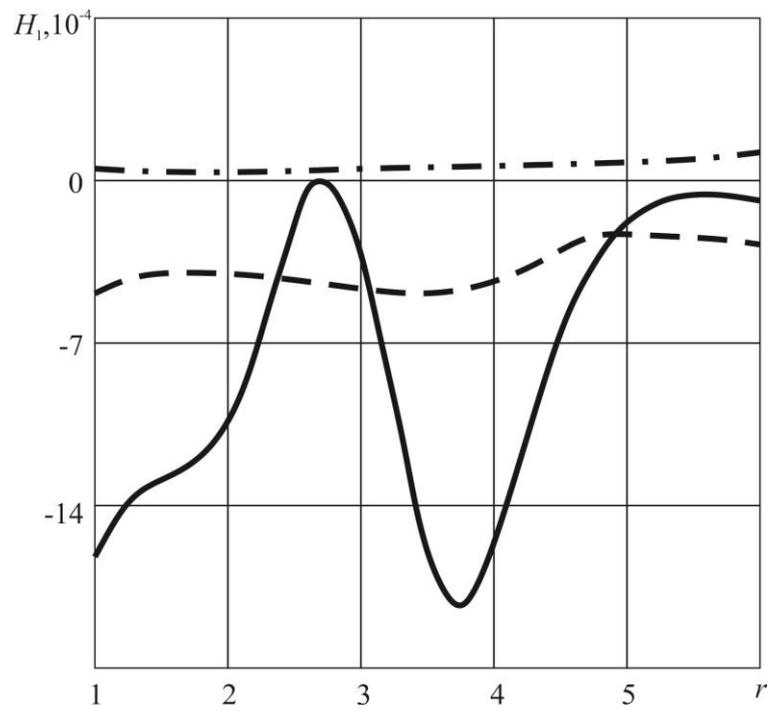


Рис. 4.7.3.

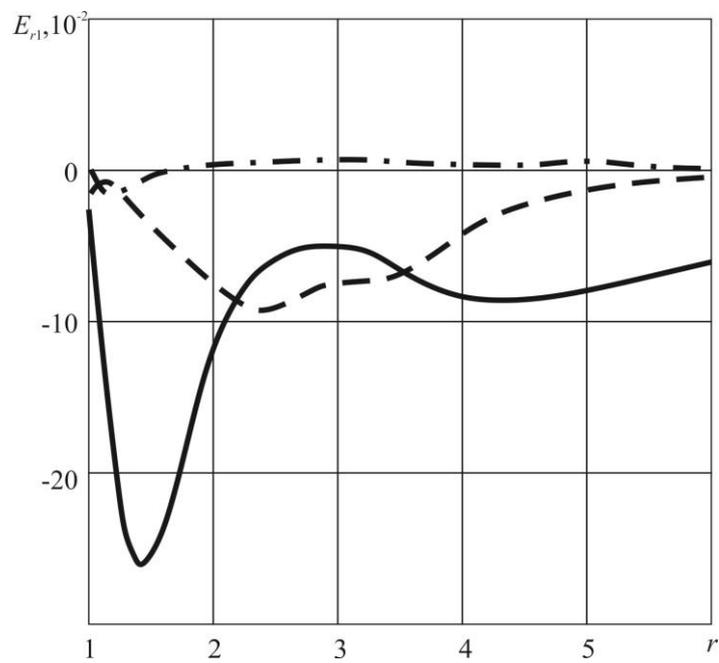


Рис. 4.7.4.

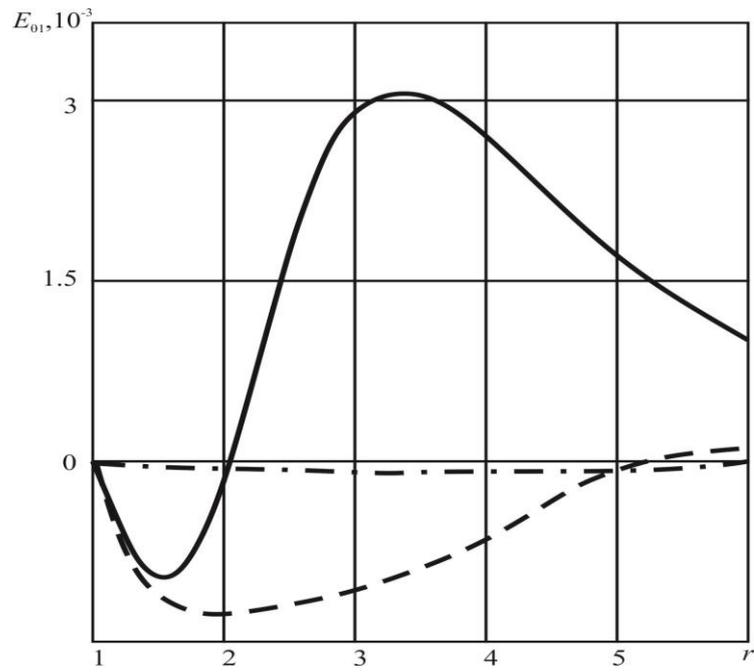


Рис. 4.7.5.

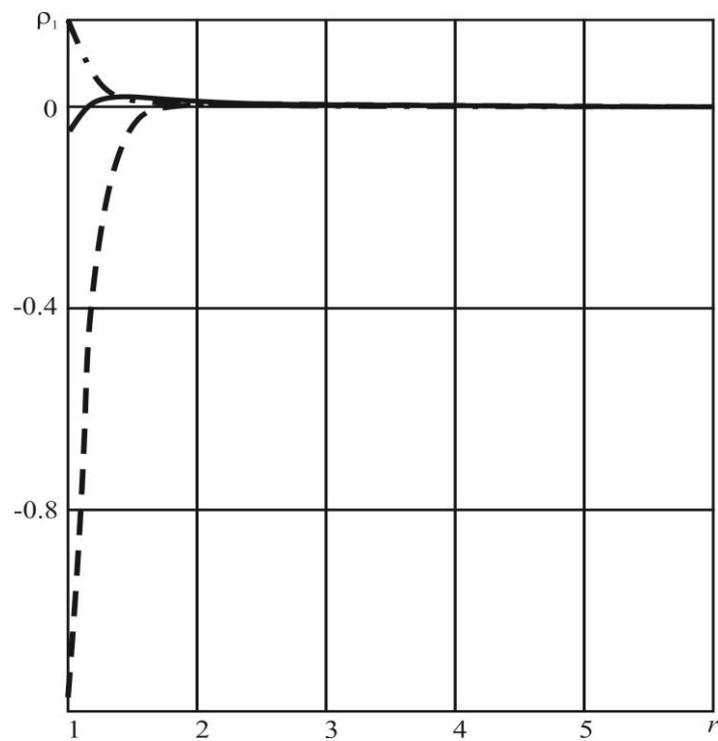


Рис.4.7.6.

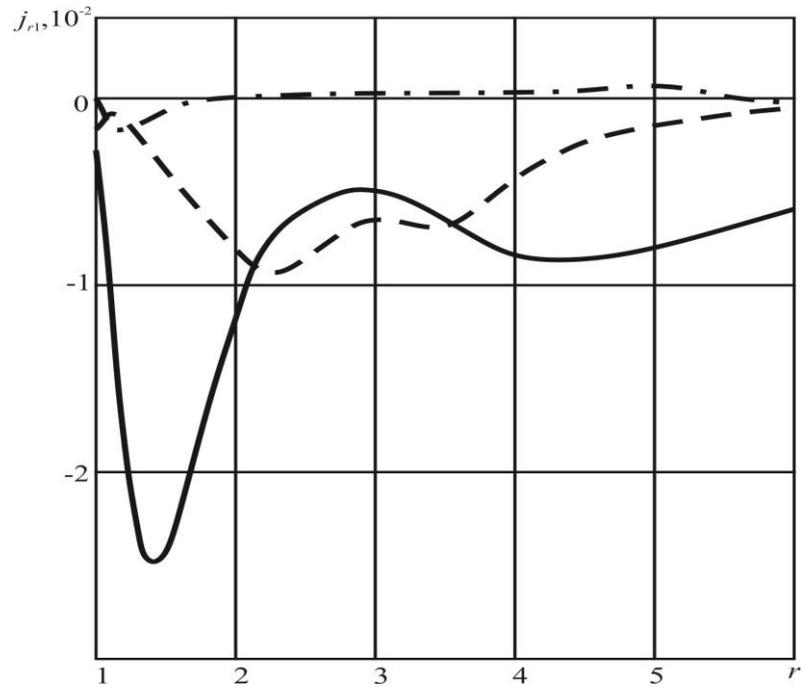


Рис.4.7.7.

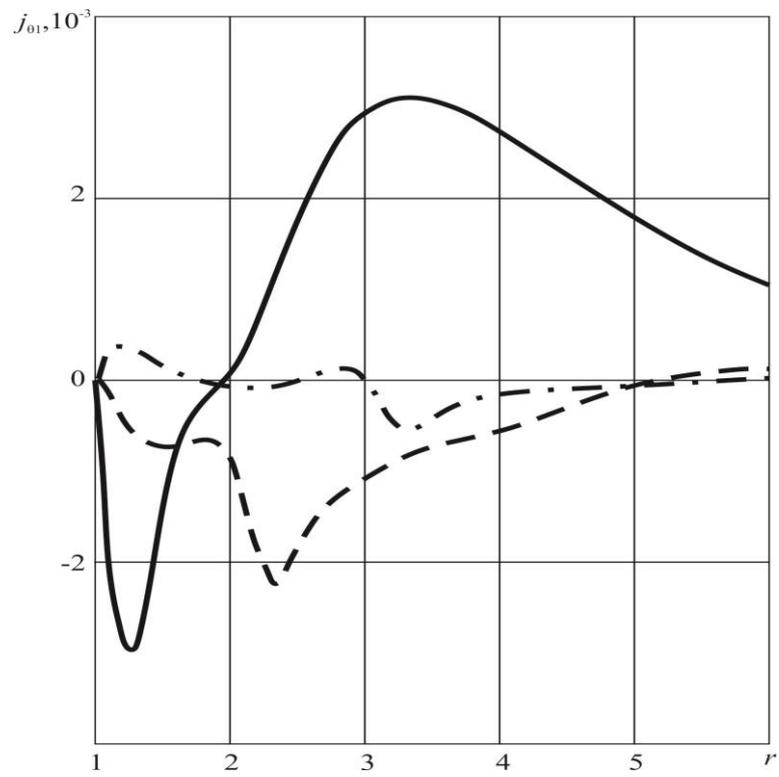


Рис. 4.7.8.

### § 4.8. Распространение радиальных нестационарных поверхностных возмущений в пространстве со сферической полостью

Аналогично § 3.9 рассматриваем вариант задания на границе только перемещения [59]:

$$u|_{r=r_0} = U_0(\tau). \quad (4.8.1)$$

Рекуррентная система уравнений относительно изображений при  $m \geq 1$  вытекает из (4.7.1) - (4.7.8) и имеет аналогичный (3.9.2) - (3.9.6) вид (здесь также индекс  $n = 0$  у искомых функций опущен):

$$u_m(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (4.8.2)$$

$$\chi_m = \int_{r_0}^{\infty} X_{u0}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (4.8.3)$$

$$E_{rm}(r, \tau) = -\rho_{e0}(r) u_{ms}(r, \tau); \quad (4.8.4)$$

$$\rho_m(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r) u_{ms}(r, \tau) - \rho_{e0} \chi_{ms}(r, \tau); \quad (4.8.5)$$

$$u_{ms}(r, \tau) = u_m(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * u_m(r, \tau), \quad \chi_{ms}(r, \tau) = \chi_m(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_m(r, \tau). \quad (4.8.6)$$

Начальные условия к этой системе следуют из (4.1.13), (4.8.4), (4.8.5) и подобны (3.9.7), (3.9.8):

$$\begin{aligned} u_0(r, \tau) &= G_{uu00}(r, \tau) * U_0(\tau), \\ E_{r0}(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) G_{uu00}(r, \tau) * U_{0s}(\tau), \\ \rho_0(r, \tau) &= -\rho_{e0}(r) \Gamma_{uu00}(r, \tau) * \dot{U}_{0s}(\tau) - \rho'_{e0}(r) G_{uu00}(r, \tau) * U_{0s}(\tau), \\ \Gamma_{uu00}^L(r, s) &= \frac{1}{s} \chi_0[G_{uu0k}^L(r, s), \nu] = \frac{1}{sr^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 G_{uu00}^L(r, s)]. \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Явный вид ядра  $G_{uu0}(r, \xi, \tau)$  в (4.8.2) указан в (3.6.16). Изображения его составляющих находим с использованием формул (4.5.2) (4.5.3), (П.5.22) и (3.9.12) записываем с использованием обозначений в (3.6.19):

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r^2\xi^2} \left[ Q_{uu0}^{(1)}(s) e^{-\tau_{10}(r, \xi)s} + Q_{uu0}^{(2)}(s) e^{-\tau_{20}(r, \xi)s} \right], \\ Q_{uu0}^{(1)}(s) &= -\frac{R_{01}(-rs)R_{01}(\xi s)}{s^3}, \quad Q_{uu0}^{(2)}(s) = \frac{R_{01}(rs)R_{01}(-r_0s)R_{01}(\xi s)}{s^3 R_{01}(r_0s)}, \\ \tau_{10}(r, \xi) &= \xi - r, \quad \tau_{20}(r, \xi) = r + \xi - 2r_0, \quad D_0(x, y) = R_{01}(x)R_{03}(\eta y).\end{aligned}\tag{4.8.8}$$

Оригинал этой функции находится достаточно просто с помощью соответствующих теорем операционного исчисления.

Изображение ядра в (4.8.3) определяется соответствующим равенством в (4.7.14) и имеет вид (3.9.10), где в соответствии с (4.7.16), (4.7.17) и (4.8.8)

$$\begin{aligned}X_{u01}^L(r, \xi, s) &= \frac{R_{01}(\xi s)E_{100}(r_0s, rs)}{2rsR_{01}(r_0s)} e^{-(\xi-r_0)s}, \\ X_{u02}^L(r, \xi, s) &= -\frac{R_{00}(rs)E_{110}(\xi s, r_0s)}{2rsR_{01}(r_0s)} e^{-(r-r_0)s}.\end{aligned}\tag{4.8.9}$$

Эти функции с учетом (3.9.12) и (4.8.8) записываем так:

$$\begin{aligned}X_{u01}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r} \left[ Q_{u01}^{(1)}(s) e^{-\tau_{10}(r, \xi)s} + Q_{u01}^{(2)}(s) e^{-\tau_{20}(r, \xi)s} \right], \\ X_{u02}^L(r, \xi, s) &= \frac{1}{2r} \left[ Q_{u02}^{(1)}(s) e^{-\tau_{10}(\xi, r)s} + Q_{u02}^{(2)}(s) e^{-\tau_{20}(r, \xi)s} \right],\end{aligned}\tag{4.8.10}$$

где

$$\begin{aligned}Q_{u01}^{(1)}(s) &= \frac{R_{01}(\xi s)}{s}, \quad Q_{u02}^{(1)}(s) = \frac{R_{01}(-\xi s)}{s}, \\ Q_{u01}^{(2)}(s) &= Q_{u02}^{(2)}(s) = -\frac{R_{01}(-r_0s)R_{01}(\xi s)}{sR_{01}(r_0s)}.\end{aligned}$$

Последние функции являются неправильными дробями, что соответствует выводам, сделанным в § 4.7. Выделяя в них целую часть

$$\begin{aligned}Q_{u01}^{(1)}(s) &= \frac{1}{s} + \xi, \quad Q_{u02}^{(1)}(s) = \frac{1}{s} - \xi, \quad Q_{u01}^{(2)}(s) = Q_{u01r}^{(2)}(s) + \xi, \\ Q_{u01r}^{(2)}(s) &= -\frac{1 + (2\xi - r_0)s}{s(1 + r_0s)},\end{aligned}\tag{4.8.11}$$

ядро в (4.8.3) представляем в виде суммы регулярной и сингулярной частей (3.9.15), где

$$\begin{aligned}
X_{u0r}(r, \xi, \tau) &= \frac{1}{2r} \left\{ H(\tau - |\xi - r|) + q_{u01r}^{(2)} [\tau - \tau_{20}(r, \xi)] H[\tau - \tau_{20}(r, \xi)] \right\}, \\
[q_{u01r}^{(2)}(\tau)]^L &= Q_{u01r}^{(2)}(s) \\
X_{u0b}(r, \xi, \tau) &= \frac{\xi}{2r} \left\{ \text{sign}(\xi - r) \delta(\tau - |\xi - r|) + \delta[\tau - \tau_{20}(r, \xi)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.8.12}$$

Тогда формула (4.8.3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\chi_m &= \int_{r_0}^{\infty} X_{u0r}(r, \xi, \tau) * [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)] d\xi + \\
&+ \frac{1}{2r} \int_{r_0}^{\infty} \xi [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)]_{\tau=\tau_{20}(r, \xi)} H[\tau - \tau_{20}(r, \xi)] d\xi + \\
&+ \frac{1}{2r} \int_r^{\infty} \xi [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)]_{\tau=\xi-r} H(\tau - \xi + r) d\xi - \\
&- \frac{1}{2r} \int_{r_0}^r \xi [\rho_{e0}(\xi) E_{r,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{m-1}(\xi, \tau)]_{\tau=r-\xi} H(\tau - r + \xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{4.8.13}$$

Здесь так же, как и в § 3.9, необходимо дополнительно построить поверхностные функции влияния  $G_{uu00}(r, \tau)$  и  $\Gamma_{uu00}(r, \tau)$ . Сначала найдем первую из них. Как следует из (3.9.14) и (П.7.4), ограниченное решение уравнения в (4.1.14) записывается так:

$$G_{uu00}^L(r, s) = A_{10}(s) X_{10}(rs). \tag{4.8.14}$$

Определяя постоянную интегрирования из граничного условия, приходим к следующему результату:

$$G_{uu00}^L(r, s) = \frac{X_{10}(rs)}{X_{10}(r_0s)}. \tag{4.8.15}$$

Отсюда находим изображение функции  $\Gamma_{uu0k}(r, \tau)$ , используя ее определение в (4.8.7) и (П.4.3):

$$\Gamma_{uu00}^L(r, s) = \frac{Z_{10}(rs)}{X_{10}(r_0s)}. \tag{4.8.16}$$

Явные выражения функций в (4.8.15) и (4.8.16) через элементарные функции получаем с помощью формул (П.3.13) и (П.3.14):

$$G_{uu00}^L(r, s) = \frac{r_0^2 R_{01}(rs)}{r^2 R_{01}(r_0 s)} e^{-(r-r_0)s}, \quad \Gamma_{uu00}^L(r, s) = -\frac{r_0^2 s}{r R_{01}(r_0 s)} e^{-(r-r_0)s}. \quad (4.8.17)$$

В этих функциях с использованием (П.2.20) и (П.3.16) выделяем регулярные и сингулярные составляющие:

$$G_{uu00}^L(r, s) = G_{uu00r}^L(r, s) + \frac{r_0}{r} e^{-(r-r_0)s}, \quad G_{uu00r}^L(r, s) = -\frac{r_0(r-r_0)}{r^2(1+r_0s)} e^{-(r-r_0)s}, \quad (4.8.18)$$

$$\Gamma_{uu00}^L(r, s) = \Gamma_{uu00r}^L(r, s) - \frac{r_0}{r} e^{-(r-r_0)s}, \quad \Gamma_{uu00r}^L(r, s) = \frac{r_0}{r(1+r_0s)},$$

что в пространстве оригиналов эквивалентно таким равенствам:

$$G_{uu00}(r, \tau) = G_{uu00r}(r, \tau) + \frac{r_0}{r} \delta(\tau - r + r_0), \quad (4.8.19)$$

$$\Gamma_{uu00}(r, \tau) = \Gamma_{uu00r}(r, \tau) - \frac{r_0}{r} \delta(\tau - r + r_0).$$

Тогда начальные условия (4.8.7) преобразовываются так:

$$u_0(r, \tau) = G_{uu00r}(r, \tau) * U_0(\tau) + \frac{r_0}{r} U_0(\tau - r + r_0),$$

$$E_{r_0}(r, \tau) = -\rho_{e0}(r) \left[ G_{uu00r}(r, \tau) * U_{0s}(\tau) + \frac{r_0}{r} U_{0s}(\tau - r + r_0) \right], \quad (4.8.20)$$

$$\rho_0(r, \tau) = -\rho_{e0}(r) \left[ \Gamma_{uu00r}(r, \tau) * \dot{U}_{0s}(\tau) - \frac{r_0}{r} \dot{U}_{0s}(\tau - r + r_0) \right] -$$

$$-\rho'_{e0}(r) \left[ G_{uu00r}(r, \tau) * U_{0s}(\tau) + \frac{r_0}{r} U_{0s}(\tau - r + r_0) \right].$$

По аналогичным высказанным в § 3.9 соображениям для расширения класса правых частей граничных условий (4.8.1) в качестве альтернативы построенной выше рекуррентной системе уравнений проведем подобные (3.9.30) преобразования соотношения (4.8.2):

$$u_m(r, \tau) = \int_{r_0}^{\infty} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * \left[ \frac{4}{\xi} E_0 E_{r, m-1} + \frac{\partial(E_0 E_{r, m-1})}{\partial \xi} \right] d\xi =$$

$$= \int_{r_0}^{\infty} E_0(\xi) G_1(r, \xi, \tau) * E_{r, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.8.21)$$

где

$$G_1(r, \xi, \tau) = \frac{4}{\xi} G_{uu0}(r, \xi, \tau) - \frac{\partial G_{uu0}(r, \xi, \tau)}{\partial \xi}.$$

Это равенство вместе с (4.8.4) образует рекуррентную систему уравнений при  $m \geq 1$ . Начальным условием для нее являются первые два равенства в (4.8.20). Учитывая, что и в этом случае имеет место равенство (3.9.36), а также (3.9.15) и (4.8.12), преобразовываем рекуррентное соотношение (4.8.21) так:

$$\begin{aligned} u_m(r, \tau) = & \int_{r_0}^{\infty} E_0(\xi) G_{1r}(r, \xi, \tau) * E_{r, m-1}(\xi, \tau) d\xi - \\ & - \frac{1}{2r} \int_{r_0}^{\infty} \xi E_0(\xi) E_{r, m-1}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=\tau_{20}(r, \xi)} H[\tau - \tau_{20}(r, \xi)] d\xi + \\ & - \frac{1}{2r} \int_r^{\infty} \xi E_0(\xi) E_{r, m-1}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=\xi-r} H(\tau - \xi + r) d\xi + \\ & + \frac{1}{2r} \int_r^{\infty} \xi E_0(\xi) E_{r, m-1}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=r-\xi} H(\tau - \xi + r) d\xi. \end{aligned} \quad (4.8.22)$$

В качестве примера рассмотрим пространство с полостью радиуса  $r_0 = 1$  с такими же, как и в § 3.9, физическими характеристиками, начальными значениями электромагнитного поля (3.9.38) и возмущением на границе (3.9.30). Результаты расчетов в виде графиков зависимости перемещения от времени при  $r = 1,5$  и  $r = 2$  представлены на рис. 4.8.1 и 4.8.2 соответственно: сплошные кривые отвечают нулевому приближению, штриховые – двум членам ряда по малому параметру, штрих-пунктирные – трем членам. Добавление последующих членов ряда приводит к практическому совпадению последующих кривых со штрих-пунктирной.

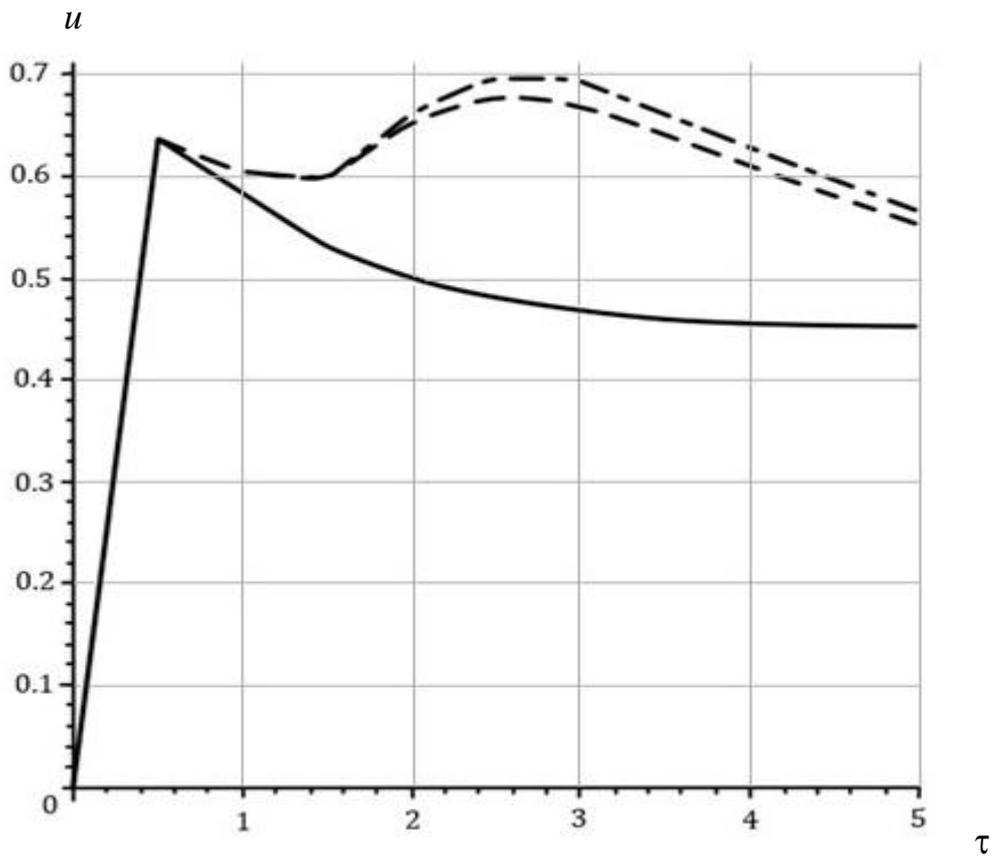


Рис. 4.8.1

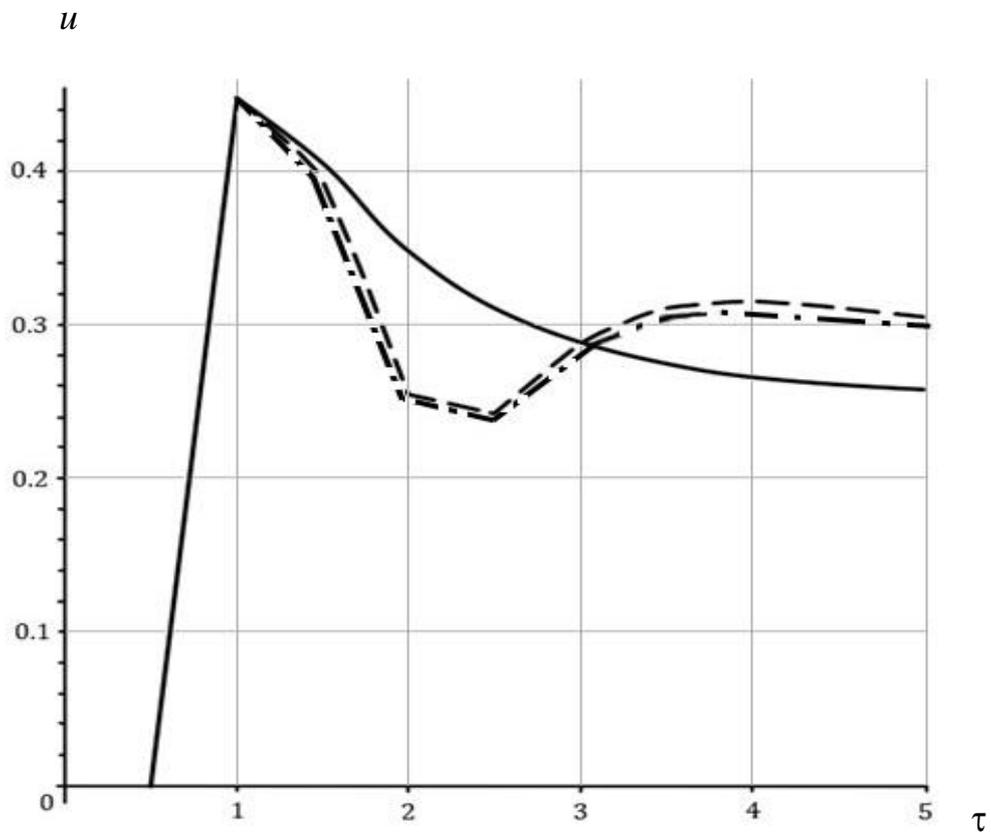


Рис. 4.8.2

## Глава 5

### Нестационарные волны в электромагнитоупругом шаре

#### § 5.1. Электромагнитоупругий шар под действием нестационарных поверхностных возмущений

Здесь аналогично главам 3 и 4 рассматриваем осесимметричное движение электромагнитоупругого шара радиуса  $r_1$ . При этом остаются в силе предположения (3.1.1), (3.1.2), (3.1.8) и начальные условия (3.1.3). Граничные условия (3.1.4) преобразуются так:

$$u|_{r=r_1} = U_1(\tau, \theta), v|_{r=r_1} = V_1(\tau, \theta), E_\theta|_{r=r_1} = e_{01}(\tau, \theta). \quad (5.1.1)$$

К ним добавляются условия ограниченности компонентов напряженно-деформированного состояния и электромагнитного поля.

Решение этой задачи опять представляем в виде рядов (3.1.6) и (3.1.7). Для коэффициентов рядов остаются в силе все соотношения (3.1.9) - (3.1.18). Граничные условия (5.1.1) с использованием разложений (3.1.19) их правых частей переходят в следующие равенства относительно коэффициентов рядов:

$$v_n|_{r=r_1} = V_{1n}(\tau), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = -\eta_e^2 h_0 [V_{1n}(\tau), e_{01n}(\tau)]|_{r=r_1} \quad (n \geq 1), \quad (5.1.2)$$

$$u_n|_{r=r_1} = U_{1n}(\tau) \quad (n \geq 0).$$

Дополнительным условием является ограниченность этих коэффициентов.

В пространстве преобразований Лапласа по времени  $\tau$  остаются в силе все соотношения (3.1.23) - (3.1.27), а вместо граничных условий (3.1.28) имеют место следующие равенства:

$$v_n^L|_{r=r_1} = V_{1n}^L(s), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n^L)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{1n}^L(s), e_{01n}^L(s)]|_{r=r_1} \quad (n \geq 1), \quad (5.1.3)$$

$$u_n^L|_{r=r_1} = U_{1n}^L(s) \quad (n \geq 0).$$

К ним опять же добавляются условия ограниченности изображений.

Для решения поставленной задачи так же, как и в главе 3, используются разложения (3.2.1) искомых функций в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ . Для их коэффициентов остаются справедливыми (3.2.2) – (3.2.10).

Соответствующие граничные условия принимают следующий вид:

$$u_{n1}^L \Big|_{r=r_1} = U_{1n}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad v_{n1}^L \Big|_{r=r_1} = V_{1n}^L(s) \quad (n \geq 1); \quad (5.1.4)$$

$$u_{nm}^L \Big|_{r=r_1} = v_{nm}^L \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 1), \quad v_{nm}^L \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1); \quad (5.1.5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{n0}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{1n}^L(s), e_{01n}^L(s)] \Big|_{r=r_1} \quad (n \geq 1); \quad (5.1.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{nm}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1). \quad (5.1.7)$$

Так же остаётся в силе требование ограниченности всех искомых функций.

Далее по аналогичным сформулированным в § 3.2 соображениям полагаем, что

$$U_1(\theta, \tau) \equiv 0, \quad V_1(\theta, \tau) \equiv 0. \quad (5.1.8)$$

При этом задача (3.2.2), (3.2.6), (4.1.7) становится однородной, и, следовательно, ее решение тривиальное, т.е. выполняются равенства (3.2.22).

Решение же задачи (3.2.3), (3.2.7), (5.1.3) аналогично (3.2.23), (3.2.24) записываем в интегральном виде ( $m \geq 1$ ):

- при  $n = 0$

$$u_{0m}^L(r, s) = \int_0^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0, m-1}^L(\xi, s) d\xi; \quad (5.1.9)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_{nm}^L(r, s) &= \int_0^{r_1} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_0^{r_1} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \\ v_{nm}^L(r, s) &= \int_0^{r_1} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_0^{r_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Здесь так же, как и ранее,  $G_{uun}^L$ ,  $G_{vun}^L$  и  $G_{vvn}^L$ ,  $G_{vvn}^L$  - объемные функции влияния, т.е. функции Грина, соответствующие уравнениям (3.2.3), (3.2.6) и граничным условиям (5.1.5), а именно ограниченные решения следующих задач:

- при  $n = 0$

$$s^2 G_{uu0}^L = l_{110} (G_{uu0}^L) + \delta(r - \xi), \quad G_{uu0}^L \Big|_{r=r_1} = 0; \quad (5.1.11)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uun}^L &= l_{11n} (G_{uun}^L) + l_{12n} (G_{vun}^L) + \delta(r - \xi), \\ s^2 \eta^2 G_{vun}^L &= l_{21n} (G_{uun}^L) + l_{22n} (G_{vun}^L), \\ G_{uun}^L \Big|_{r=r_1} &= G_{vun}^L \Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

$$\begin{aligned} s^2 G_{uvn}^L &= l_{11n} (G_{uvn}^L) + l_{12n} (G_{vvn}^L), \\ s^2 \eta^2 G_{vvn}^L &= l_{21n} (G_{uvn}^L) + l_{22n} (G_{vvn}^L) + \delta(r - \xi), \\ G_{uvn}^L \Big|_{r=r_1} &= G_{vvn}^L \Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Также в интегральном виде при  $n \geq 1$  и  $m > 0$  записывается решение задачи (3.2.8), (5.1.7):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_0^{r_1} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H [u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s)] d\xi. \quad (5.1.14)$$

Здесь  $G_{Hn}^L$  - соответствующая объемная функция Грина, а именно ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (5.1.15)$$

Решение задачи (3.2.8) при  $m = 0$ , (5.1.6) записываем подобно (3.2.30):

$$H_{n0}^L(r, s) = -\eta_e^2 (s + \gamma) G_{Hn1}^L(r, s) e_{01n}^L(s), \quad (5.1.16)$$

где  $G_{Hn1}^{LF}$  - поверхностная функция Грина, т.е. ограниченное решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_n G_{Hn1}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn1}^L = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn1}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 1. \quad (5.1.17)$$

## § 5.2. Функции Грина для электромагнитного шара

Сначала аналогично §§ 3.3 и 4.2 построим решение краевой задачи (4.1.24) [71]. Общее частное решения уравнения по-прежнему определяется соотношениями (3.3.1) и (3.3.5).

Поскольку в силу (3.3.5)  $G_{Hn^*}^L(r, \xi, s) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$ , то из (3.3.1) при учете (П.7.12) вытекает, что функция  $G_{Hn}^L(r, \xi, s)$  будет ограниченной только, если положить

$$C_{1n} = 0. \quad (5.2.1)$$

Следовательно, искомая функция влияния имеет следующий вид:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = C_{2n} Z_{2n}(\zeta_e) + G_{Hn^*}^L(r, \xi, s). \quad (5.2.2)$$

Для второй постоянной из граничного условия (5.1.15) с учетом (3.3.6) получаем следующее уравнение:

$$Y_4(\eta_e r_1 s_e) C_{2n} + \eta_e s_e \xi^2 S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e) = 0, \quad (5.2.3)$$

откуда следует, что

$$C_{2n} = -\eta_e s_e \xi^2 \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Y_4(\eta_e r_1 s_e)}. \quad (5.2.4)$$

Подставляя (3.3.5), (5.2.1) и (5.2.3) в (3.3.1), приходим к такому результату:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \\ &= \eta_e s_e \xi^2 \left[ P_{en}(\eta_e \xi s_e, \eta_e r s_e) H(r - \xi) - \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{Y_4(\eta_e r_1 s_e)} Z_{2n}(\eta_e r s_e) \right]. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Окончательно с использованием следствия П.6.1 эту функцию можно записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned} G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\ \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) &= -\eta_e s_e \frac{S_{en}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e) Z_{2n}(\eta_e r s_e)}{Y_4(\eta_e r_1 s_e)}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

С целью проверки перейдем к пределу при  $r_0 \rightarrow 0$  в аналогичной формуле (3.3.10) для толстостенной сферы. Из соотношений (П.7.14) - (П.7.17) получаем равенство

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{S_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r s_e)}{Q_{en}(\eta_e r_0 s_e, \eta_e r_1 s_e)} = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{-Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e) Z_{2n}(\eta_e r s_e)}{Y_{3n}(\eta_e r_0 s_e) Y_{4n}(\eta_e r_1 s_e)} = -\frac{Z_{2n}(\eta_e r s_e)}{Y_{4n}(\eta_e r_1 s_e)}. \quad (5.2.7)$$

Отсюда вытекает, что этот переход приводит к полученному выше результату (5.2.6).

Соответствующую поверхностную функцию Грина как решение задачи (5.1.17) с учетом (3.3.1), (П.7.12) и условия ограниченности аналогично (3.3.11) и (4.2.8) записываем так:

$$G_{Hn1}^L(r, \xi, s) = C_{2n1} Z_{2n}(\eta_e r s_e). \quad (5.2.8)$$

Входящую в это равенство произвольную постоянную находим из граничного условия с использованием (3.3.6):

$$C_{2n1} = -\frac{1}{\eta_e s_e Y_4(\eta_e r_1 s_e)}. \quad (5.2.9)$$

Подставляя этот результат в (4.2.8), получаем искомую функцию:

$$G_{Hn1}^L(r, \xi, s) = -\frac{Z_{2n}(\eta_e r s_e)}{\eta_e s_e Y_4(\eta_e r_1 s_e)}. \quad (5.2.10)$$

Отметим, что предельный переход при  $r_0 \rightarrow 0$  в формуле (3.3.14) с учетом соотношения (5.2.7) приводит к этому же результату.

По отношению к (3.3.36) и (3.3.39) существенно упрощаются выражения изображений функций  $\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s)$  в (5.2.6) и  $G_{Hn1}^L$  в (5.2.10) через элементарные функции. Для построения соответствующих разложений, используя (П.3.13), (П.3.15) и (П.3.18), выражаем эти функции через элементарные:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n E_{30n}(\eta_e r_1 s_e, \eta_e \xi s_e)}{2\eta_e^{2n+1} s_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1}} \times \\ &\times \frac{R_{n0}(-\eta_e r s_e) e^{\eta_e r s_e} - R_{n0}(\eta_e r s_e) e^{-\eta_e r s_e}}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e) e^{\eta_e r_1 s_e} - R_{n3}(\eta_e r_1 s_e) e^{-\eta_e r_1 s_e}}; \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$G_{Hn1}^L(r, \xi, s) = -\frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} \frac{R_{n0}(-\eta_e r s_e) e^{\eta_e r s_e} - R_{n0}(\eta_e r s_e) e^{-\eta_e r s_e}}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e) e^{\eta_e r_1 s_e} - R_{n3}(\eta_e r_1 s_e) e^{-\eta_e r_1 s_e}}. \quad (5.2.12)$$

Далее аналогично (3.3.17) - (3.3.24) раскладываем их в ряды по экспонентам:

$$\tilde{G}_{Hn}^L(r, \xi, s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \tilde{G}_{Hn}^{(lk)L}(r, \xi, s) e^{-\tau_{elk}(r, \xi) s_e}, \quad (5.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{Hn}^{(11)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1} R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\ \tilde{G}_{Hn}^{(12)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n R_{n0}(\eta_e \xi s_e) R_{n0}(\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\ \tilde{G}_{Hn}^{(13)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n R_{n0}(-\eta_e \xi s_e) R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^{l+1}(\eta_e r_1 s_e), \\ \tilde{G}_{Hn}^{(14)L}(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^{n+1} R_{n0}(-\eta_e \xi s_e) R_{n0}(\eta_e r s_e)}{2\eta_e^{2n+1} r^{n+1} \xi^{n+1} s_e^{2n+1}} B_{n3}^{l+1}(\eta_e r_1 s_e); \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

$$G_{Hn1}^L(r, s) = \frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=2}^3 G_{Hn1}^{(lk)L}(r, s) e^{-\tau_{elk}(r, r_1) s_e}, \quad (5.2.15)$$

где

$$\begin{aligned} G_{Hn1}^{(12)L}(r, s) &= \frac{R_{n0}(\eta_e r s_e)}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e)} B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e), \\ G_{Hn1}^{(13)L}(r, s) &= -\frac{R_{n0}(-\eta_e r s_e)}{R_{n3}(-\eta_e r_1 s_e)} B_{n3}^l(\eta_e r_1 s_e). \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_{el1}(r, \xi) &= \eta_e (2lr_1 - r + \xi), \quad \tau_{el2}(r, \xi) = \eta_e (2lr_1 + r + \xi), \\ \tau_{el3}(r, \xi) &= \eta_e [2(l+1)r_1 - r - \xi], \quad \tau_{el4}(r, \xi) = \eta_e [2(l+1)r_1 + r - \xi]. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Очевидно, формулы (5.3.21) - (5.3.25) есть частный случай равенств (3.3.20) - (3.3.24) при  $r_0 = 0$ .

Оригиналы функций (5.3.21) и (5.3.23) принципиально могут быть найдены аналитически так же, как указано в § 3.3. Однако при этом возникают те же проблемы, которые описаны там же.

Поэтому далее вместо оригиналов нестационарных функций Грина будем использовать их приближенные квазистатические аналоги при  $\eta_e = 0$ . В соответствии с (5.1.15) и (5.1.16), они являются решениями следующих краевых задач:

$$\Delta_n G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0; \quad (5.2.18)$$

$$\Delta_n G_{Hn1}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn1}^L = 0, \left. \frac{1}{r} \frac{\partial (r G_{Hn1}^L)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 1. \quad (5.2.19)$$

Общее ограниченное решение уравнения в (5.2.18) с использованием (3.3.33) записывается так:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = C_{2n} r^n + G_{Hn*}^L(r, \xi, s), \quad (5.2.20)$$

Постоянную интегрирования находим из граничного условия с использованием (3.3.38) и обозначений в (3.3.41):

$$C_{2n} = - \frac{\beta_n(r_1, \xi)}{(n+1)(2n+1)r_1^{2n+1}\xi^{n-1}}. \quad (5.2.21)$$

Подставляя теперь ее в (5.2.20), с учетом следствия П.6.1 окончательно получаем следующее равенство:

$$G_{Hn}^L(r, \xi, s) = G_{Hn}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \quad (5.2.22)$$

$$\tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) = - \frac{\beta_n(r_1, \xi)}{(n+1)(2n+1)\xi^{n+1}r_1^{2n+1}} r^n.$$

Квазистатическую поверхностную функцию Грина как ограниченное решение задачи (5.2.19) с учетом (3.3.33) записываем так:

$$G_{Hn1}^L(r, s) = C_{2n1} r^n. \quad (5.2.23)$$

Входящую в это равенство произвольную постоянную определяем из граничного условия в (5.2.19):

$$C_{2n1} = \frac{1}{(n+1)r_1^{n-1}}. \quad (5.2.24)$$

Следовательно, искомая функция записывается так:

$$G_{Hn1}^L(r, s) = G_{Hn1}^c(r) = \frac{r^n}{(n+1)r_1^{n-1}}. \quad (5.2.25)$$

Достаточно просто проверяется, что формулы (5.2.22) и (5.2.25) являются частным случаем равенств (3.3.41) и (3.3.45) при  $r_0 = 0$ .

### § 5.3. Электромагнитное поле в движущемся шаре

Подобно §§ 3.4 и 4.3 рассмотрим вспомогательную задачу об определении параметров электромагнитного поля в движущемся по заданному закону  $u(r, \theta, \tau)$  и  $v(r, \theta, \tau)$  шаре [71]. При этом полагаем, что начальные условия однородные, т.е. имеет вид (3.4.1).

Кроме того, считаем, что все искомые функции ограничены, а на границе полости сферы аналогично (5.1.1) задана касательная составляющая вектора напряженности электрического поля:

$$E_\theta|_{r=r_1} = e_{01}(\tau, \theta). \quad (5.3.1)$$

Изображение коэффициентов рядов (3.2.1) координат напряженности магнитного поля и значение соответствующего оператора от них аналогично (3.4.3), (4.3.2) и (3.4.4), (4.3.3) записываются так:

$$H_n^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_0^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi - \eta_e^2 G_{Hn1}^c(r) [(s + \gamma) e_{01n}^L(s) + s \rho_{e0}(r_1) v_n^L(r_1, s)]; \quad (5.3.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_n^L)}{\partial r} = -\eta_e^2 s \int_0^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi - \eta_e^2 \Gamma_{Hn1}^c(r) [(s + \gamma) e_{01n}^L(s) + s \rho_{e0}(r_1) v_n^L(r_1, s)]. \quad (5.3.3)$$

Здесь функции  $\Gamma_{Hn}^c$  и  $\Gamma_{Hn1}^c$  определяются равенствами (3.4.5). Составляющие первой и вторую функции находим, используя (5.2.22), (5.2.25) и (3.4.8):

$$\Gamma_{1Hn}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_1, \xi)r^{n-1}}{(2n+1)\xi^{n-1}r_1^{2n+1}}, \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = \frac{n\xi^{n+2}\alpha_n(r_1, r)}{(2n+1)r_1^{2n+1}r^{n+2}},$$

$$\Gamma_{Hn1}^c(r) = \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}}.$$
(5.3.4)

Отметим, что эти формулы также следуют из (3.4.6) и (3.4.7) при  $r_0 = 0$ .

Теперь, подставляя (5.3.2) и (5.3.3) в формулы (3.2.9), приходим к аналогичным (3.4.9) и (3.4.10) равенствам:

$$E_m^L(r, s) = -\frac{n(n+1)}{r} \left\{ \frac{s}{s+\gamma} \int_0^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi + \right.$$

$$\left. + G_{Hn1}^c(r) \left[ e_{01n}^L(s) + \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r_1) v_n^L(r_1, s) \right] \right\} - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) u_n^L;$$
(5.3.5)

$$E_{\theta n}^L(r, s) = \frac{s}{s+\gamma} \int_0^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) l_H [u_n^L(\xi, s), v_n^L(\xi, s)] d\xi +$$

$$+ \Gamma_{Hn1}^c(r) \left[ e_{01n}^L(s) + \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r_1) v_n^L(r_1, s) \right] - \frac{s}{s+\gamma} \rho_{e0}(r) v_n^L \quad (n \geq 1).$$
(5.3.6)

Оригиналы формул (5.3.2), (5.3.5) и (5.3.6) находятся так же, как и равенства (3.4.11) - (3.4.13):

$$H_n(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_0^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) l_H [\dot{u}_n(\xi, \tau), \dot{v}_n(\xi, \tau)] d\xi -$$

$$- \eta_e^2 G_{Hn1}^c(r) [\gamma e_{01n}(\tau) + \dot{e}_{01n}(\tau) + \rho_{e0}(r_1) \dot{v}_n(r_1, \tau)];$$
(5.3.7)

$$E_m(r, \tau) = -\frac{n(n+1)}{r} \left\langle \int_0^{r_1} G_{Hn}^c(r, \xi) L_s \{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \} d\xi + \right.$$

$$\left. + G_{Hn1}^c(r) \{ e_{01n}(\tau) + \rho_{e0}(r_1) L_s [v_n(r_1, \tau)] \} \right\rangle - \rho_{e0}(r) L_s [u_n(r, \tau)];$$
(5.3.8)

$$E_{\theta n}(r, \tau) = \int_0^{r_1} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) L_s \{ l_H [u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)] \} d\xi +$$

$$+ \Gamma_{Hn1}^c(r) \{ e_{01n}(\tau) + \rho_{e0}(r_1) L_s [v_n(r_1, \tau)] \} + \rho_{e0}(r) L_s [v_n(r, \tau)] \quad (n \geq 1).$$
(5.3.9)

Оригиналы коэффициентов разложения поверхностных зарядов и координаты вектора тока определяются равенствами (3.4.14) и (3.4.15).

Далее аналогично §§ 3.4 и 4.3 рассмотрим три примера закона движения шара.

1. *Шар неподвижен* (имеют место равенства (3.4.18)) и на его границе задана напряженность электрического поля вторым равенством в (3.4.26).

В этом случае компоненты электромагнитного поля, очевидно, определяются формулами (3.4.27), в которых выражения для функций  $G_{H11}^c$  и  $\Gamma_{H11}^c$  вытекают из (5.2.25) и (5.3.4):

$$G_{H11}^c(r) = \frac{r}{2}, \quad \Gamma_{H11}^c(r) = 1. \quad (5.3.10)$$

2. *Напряженность электрического поля на границе шара отсутствует* (имеет место второе равенство в (3.4.29)), а перемещения являются радиальными и определяются равенствами (3.4.30).

Как следует из примера 2 § 3.4, полученные для толстостенной сферы формулы (3.4.34) для компонент электромагнитного поля не зависят от геометрии тела. Поэтому они будут справедливы и в этом случае.

3. *Напряженность электрического поля на границе шара отсутствует* (см. второе равенство в (3.4.29)), плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид (3.4.35) и шар движется поступательно с перемещениями (3.4.36).

При этом остаются в силе равенства (3.4.37) и (3.4.38), а формулы (3.4.39) с помощью (5.3.7) - (5.3.10) и (3.4.15) модифицируются так:

$$\begin{aligned} H_1(r, \tau) &= \eta_e^2 H(\tau) [\rho_{e0}(r_1) G_{H11}^c(r) + J_1(r)], \\ E_{r1}(r, \tau) &= \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau) \left\{ \rho_{e0}(r) - \frac{2}{r} [J_1(r) + \rho_{e0}(r_1) G_{H11}^c(r)] \right\}, \\ E_{\theta 1}(r, \tau) &= \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau) [\rho_{e0}(r_1) \Gamma_{H11}^c(r) - \rho_{e0}(r) + J_2(r)], \\ \rho_1(r, \tau) &= \frac{\rho'_{e0}(r)}{\gamma} (e^{-\gamma\tau} - 1) H(\tau), \\ E_{r0}(r, \tau) &= \rho_0(r, \tau) = H_n(r, \tau) = E_m(r, \tau) = E_{\theta n}(r, \tau) = \rho_n(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 2), \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где

$$J_1(r) = \int_0^{r_1} G_{H11}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi, \quad J_2(r) = \int_0^{r_1} \Gamma_{H11}^c(r, \xi) \rho'_{e0}(\xi) d\xi. \quad (5.3.12)$$

Ядра последних интегралов в соответствии с (3.4.5), (5.2.22) и (5.3.4) имеют следующий вид:

$$G_{H1}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{H1}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right],$$

$$\tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) = -\frac{2r_1^3 + \xi^3}{6\xi^2 r_1^3} r; \quad (5.3.13)$$

$$\Gamma_{H1}^c(r, \xi) = \Gamma_{1H1}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \Gamma_{2H1}^c(\xi, r, s) H(r - \xi),$$

$$\Gamma_{1H1}^c(r, \xi) = -\frac{2r_1^3 + \xi^3}{3r_1^3}, \quad \Gamma_{2H1}^c(r, \xi) = \frac{r_1^3 - r^3}{3r_1^3 r^3} \xi^3. \quad (5.3.14)$$

Подставляя (3.4.35), (5.3.13) и (5.3.14) в (5.3.12), вычисляем интегралы  $J_1(r)$  и  $J_2(r)$ :

$$J_1(r) = \rho_* \frac{2r_1 - r}{4r_1}, \quad J_2(r) = \rho_* \frac{r_1 - r}{2r_1 r}. \quad (5.3.15)$$

Естественно, эти равенства являются частным случаем формул (3.4.43) при  $r_0 = 0$ .

Окончательные формулы для компонент электромагнитного поля сохраняют вид (3.4.46), где необходимо положить:

$$A_H(r) = \frac{r + 2r_1}{4r_1}, \quad A_{Er}(r) = \frac{r}{2r_1}, \quad A_{E\theta}(r) = \frac{r - r_1}{2r_1}.$$

## § 5.4. Объемные функции Грина для упругого шара

Сначала аналогично §§ 3.5 и 4.4 построим функции  $G_{uun}^L$  и  $G_{vun}^L$ , которые являются решениями краевых задач (5.1.11) - (5.1.13) [65,69].

Общее решение соответствующего задаче (5.1.11) уравнения имеет вид (3.5.1), где частное решение по-прежнему определяется формулой (3.5.4).

Поскольку в силу (3.5.4)  $G_{uu0*}^L(r, \xi, s) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$ , то из (3.5.1) при учете (П.7.17) вытекает, что функция  $G_{uu0}^L(r, \xi, s)$  будет ограниченной только, если положить

$$A_{10} = 0. \quad (5.4.1)$$

Следовательно, искомая функция влияния имеет такой вид:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = A_{20}(s) X_{20}(rs) + G_{uu0*}^L(r, \xi, s). \quad (5.4.2)$$

Для второй постоянной из граничного условия (5.1.11) получаем следующее уравнение:

$$A_{20}(s) X_{20}(r_1 s) + G_{uu0*}^L(r_1, \xi, s) = 0, \quad (5.4.3)$$

откуда с учетом (3.5.4) находим

$$A_{20}(s) = \xi^2 s \frac{P_{u0}(r_1 s, \xi s)}{X_{20}(r_1 s)}. \quad (5.4.4)$$

Подставляя теперь (3.5.4) и (5.4.4) в (5.4.2) приходим к такому результату:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = \xi^2 s \left[ \frac{P_{u0}(r_1 s, \xi s)}{X_{20}(r_1 s)} X_{20}(rs) - P_{u0}(rs, \xi s) H(r - \xi) \right]. \quad (5.4.5)$$

Окончательно с использованием следствия П.6.2 эту функцию записываем так:

$$G_{uu0}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uu0}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \quad (5.4.6)$$

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) = \frac{s P_{u0}(r_1 s, \xi s) X_{20}(rs)}{X_{20}(r_1 s)}.$$

С целью проверки перейдем к пределу при  $r_0 \rightarrow 0$  в аналогичной формуле (3.5.8) для толстостенной сферы. Учитывая (П.7.21), приходим к равенству

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{P_{u0}(r_0 s, rs)}{P_{u0}(r_0 s, r_1 s)} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{r_0^2 s^2 X_{20}(rs)}{r_0^2 s^2 X_{20}(r_1 s)} = \frac{X_{20}(rs)}{X_{20}(r_1 s)}, \quad (5.4.7)$$

из которого при использовании (3.5.8) вытекает, что этот предельный переход приводит к полученному выше результату (5.4.6).

Для определения функций  $G_{uin}^L$  и  $G_{vin}^L$  при  $n \geq 1$  аналогично §§ 3.5 и 4.4 сводим систему уравнений в (5.1.12) к системе первого порядка и используем представление ее общего решения в виде (3.5.9), где частное решение по-прежнему определяется формулами (3.5.12).

Поскольку в силу в силу (3.5.12)  $\mathbf{G}_{uin*}^L(r, \xi, s) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $r \rightarrow +0$ , то из (3.5.9) при учете (П.7.17) и (П.7.22) вытекает, что функции  $G_{uin}^L$  и  $G_{vin}^L$  при  $n \geq 1$  будут ограниченными только, если положить

$$A_{1un} = B_{1un} = 0. \quad (5.4.8)$$

Следовательно, искомые функции влияния имеют такой вид:

$$\begin{pmatrix} G_{uum}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{uum*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} H(r - \xi). \quad (5.4.9)$$

Здесь использованы обозначения, примененные в формуле (4.4.11).

Подставляя теперь (5.4.9) в граничные условия в (5.1.12), с учетом получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $A_{2un}$  и  $B_{2un}$ :

$$\mathbf{X}_{n24}^{13}(r_1, s) \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{uum*}^L(r_1, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r_1, \xi, s) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.4.10)$$

Учитывая теперь, что согласно (3.5.11) и (3.5.12) имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} G_{uum*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} = -\mathbf{X}_{n13}^{13}(r, s) \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{2n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{2n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} + \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} \quad (5.4.11)$$

систему уравнений (5.4.10) преобразовываем так:

$$\mathbf{X}_{n24}^{13}(r_1, s) \left[ \begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} \right] = \mathbf{X}_{n13}^{13}(r_1, s) \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{2n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{2n}(\eta \xi s) \end{pmatrix}.$$

Ее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{X}_{n24}^{13}(r_1, s) \right]^{-1} \mathbf{X}_{n13}^{13}(r_1, s) \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{2n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{2n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix}. \quad (5.4.12)$$

Отсюда после соответствующих преобразований получаем следующий результат:

$$\begin{pmatrix} A_{2un} \\ B_{2un} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{Y}_{n1}(r_1, s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)} \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{2n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{2n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix}, \quad (5.4.13)$$

$$\mathbf{Y}_{n1}(r, s) = \begin{pmatrix} T_{n14}(rs, \eta rs) & T_{n34}(\eta rs, \eta rs) \\ -T_{n12}(rs, rs) & T_{n23}(rs, \eta rs) \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения (4.4.14).

Подставляя теперь (5.4.13) в (5.4.9), для искомого функций получаем следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} G_{uun}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{uun*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} H(r - \xi) + \\ + \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \left[ \frac{\mathbf{Y}_{n1}(r_1, s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)} \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{2n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{2n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^2 s X_{1n}(\xi s) \\ \xi \eta^2 Z_{1n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} \right]. \quad (5.4.14)$$

Но, согласно следствию П.6.3, искомые функции имеют такой вид:

$$\begin{aligned} G_{uun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Учитывая теперь в (5.4.14) равенство (5.4.11) и сравнивая результат с последними формулами, приходим к следующим представлениям для составляющих искомым функций:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) &= \frac{s X_{2n}(rs) K_{n11}(\xi s, r_1 s) + r^{-1} \eta^2 Z_{2n}(\eta rs) \tilde{K}_{n12}(\xi s, r_1 s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{s X_{2n}(rs) K_{n21}(\xi s, r_1 s) + r^{-1} \eta^2 Z_{2n}(\eta rs) K_{n22}(\xi s, r_1 s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

где (использованы аналогичные § 4.4 обозначения, хотя смысл их другой)

$$\begin{aligned} K_{n11}(x, y) &= X_{2n}(x) T_{n14}(y, \eta y) - X_{4n}(\eta x) T_{n12}(y, y) - T_{n24}(y, \eta y) X_{1n}(x), \\ \tilde{K}_{n12}(x, y) &= X_{2n}(x) T_{n34}(\eta y, \eta y) + X_{4n}(\eta x) T_{n23}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y) X_{3n}(\eta x), \\ K_{n21}(x, y) &= Y_{2n}(x) T_{n14}(y, \eta y) - Y_{4n}(\eta x) T_{n12}(y, y) - T_{n24}(y, \eta y) Y_{1n}(x), \\ K_{n22}(x, y) &= Y_{2n}(x) T_{n34}(\eta y, \eta y) + Y_{4n}(\eta x) T_{n23}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y) Y_{3n}(\eta x). \end{aligned}$$

Последние равенства так же, как и ранее, можно упростить. С этой целью, используя (4.4.14), (4.4.19), (П.3.5), (П.4.15), (П.4.28) и (П.4.29), получаем вспомогательные соотношения:

$$\begin{aligned}
& X_{2n}(x)T_{n14}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y)X_{1n}(x) = \\
& = -Y_{4n}(\eta y)P_{un}(x, y) - y^{-1}X_{4n}(\eta y)S_{un}(x, y), \\
& X_{4n}(\eta x)T_{n23}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y)X_{3n}(\eta x) = n(n+1)\eta^{-1}x^{-1} \times \\
& \times \left[ -X_{2n}(y)S_{en}(\eta y, \eta x) + n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}Y_{2n}(y)P_{en}(\eta x, \eta y) \right], \\
& Y_{2n}(x)T_{n14}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y)Y_{1n}(x) = \\
& = x^{-1} \left[ -S_{un}(y, x)Y_{4n}(\eta y) + y^{-1}X_{4n}(\eta y)P_{en}(x, y) \right], \\
& Y_{4n}(\eta x)T_{n23}(y, \eta y) - T_{n24}(y, \eta y)Y_{3n}(\eta x) = \\
& = - \left[ X_{2n}(y)Q_{en}(\eta x, \eta y) + Y_{2n}(y)n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}S_{en}(\eta x, \eta y) \right].
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

Учитывая эти формулы, приходим к следующим равенствам для функций  $K_{nij}(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
& K_{n11}(x, y) = -Y_{4n}(\eta y)P_{un}(x, y) - \\
& \quad - y^{-1} \left[ y^{-2}X_{4n}(\eta x) + X_{4n}(\eta y)S_{un}(x, y) \right], \\
& \tilde{K}_{n12}(x, y) = n(n+1)K_{n12}(x, y), \quad K_{n12}(x, y) = -\eta^{-3}y^{-3}X_{2n}(x) + \\
& + \eta^{-1}x^{-1} \left[ -X_{2n}(y)S_{en}(\eta y, \eta x) + n(n+1)\eta^{-1}y^{-1}Y_{2n}(y)P_{en}(\eta x, \eta y) \right], \\
& K_{n21}(x, y) = y^{-1}Y_{4n}(\eta x)S_{un}(y, y) + \\
& \quad + x^{-1} \left[ y^{-1}X_{4n}(\eta y)P_{en}(x, y) - Y_{4n}(\eta y)S_{un}(y, x) \right], \\
& K_{n22}(x, y) = -X_{2n}(y)Q_{en}(\eta x, \eta y) - \\
& \quad - n(n+1)\eta^{-1}y^{-1} \left[ \eta^{-2}y^{-2}Y_{2n}(x) + Y_{2n}(y)S_{en}(\eta x, \eta y) \right].
\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

Для определения функций  $G_{uvn}^L$  и  $G_{vvn}^L$  ( $n \geq 1$ ) аналогично §§ 3.5, 4.4 сводим систему уравнений в (5.1.13) к системе первого порядка. Ее общее решение, как и ранее, имеет вид (3.5.17), где частное решение задается равенством (3.5.18).

При определении постоянных интегрирования выводы (5.4.8) - (5.4.14) фактически повторяются с заменой столбца  $\tilde{\mathbf{D}}_{un}$  из (3.5.11) столбцом  $\tilde{\mathbf{D}}_{vn}$  из (3.5.19). При этом имеют место равенства вида (5.4.8), (5.4.11), (5.4.13) и (5.4.14):

$$A_{1vn} = B_{1vn} = 0; \tag{5.4.19}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} G_{uvn*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vvn*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} = \\ & = \mathbf{X}_{n13}^{13}(r, s) \begin{pmatrix} n(n+1)\xi Z_{2n}(\xi s) \\ -\eta^3 \xi^2 s Y_{4n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} - \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \begin{pmatrix} n(n+1)\xi Z_{1n}(\xi) \\ -\eta^3 \xi^2 s Y_{3n}(\eta \xi) \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

$$\begin{pmatrix} A_{2vn} \\ B_{2vn} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{Y}_{n1}(r_1, s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)} \begin{pmatrix} -\xi n(n+1) Z_{2n}(\xi s) \\ \eta^3 \xi^2 s Y_{4n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n+1)\xi Z_{1n}(\xi s) \\ -\eta^3 \xi^2 s Y_{3n}(\eta \xi) \end{pmatrix}; \quad (5.4.21)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} G_{uvn}^L(r, \xi, s) \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{uvn*}^L(r, \xi, s) \\ G_{vvn*}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} H(r - \xi) + \mathbf{X}_{n24}^{13}(r, s) \times \\ & \times \left[ \frac{\mathbf{Y}_{n1}(r_1, s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)} \begin{pmatrix} -\xi n(n+1) Z_{2n}(\xi s) \\ \eta^3 \xi^2 s Y_{4n}(\eta \xi s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(n+1)\xi Z_{1n}(\xi s) \\ -\eta^3 \xi^2 s Y_{3n}(\eta \xi) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Но, согласно следствию П.6.3, искомые функции имеют такой вид:

$$\begin{aligned} G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 n(n+1) \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Учитывая теперь в (5.4.22) равенство (5.4.20) и сравнивая результат с последними формулами, приходим к следующим представлениям для составляющих искомым функций:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{\eta^3 s Y_{4n}(\eta r s) K_{n12}(\xi s, r_1 s) - r^{-1} Z_{2n}(rs) K_{n11}(\xi s, r_1 s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \\ &= \frac{\eta^3 s Y_{4n}(\eta r s) K_{n22}(\xi s, r_1 s) - n(n+1) r^{-1} Z_{2n}(rs) K_{n21}(\xi s, r_1 s)}{T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}. \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Для проверки рассмотрим частный случай при  $n=0$ . Используя формулы (3.5.26), (4.4.14) и (5.4.18) получаем следующие равенства:

$$T_{024}(x, y) = X_{20}(x) Y_{40}(y), \quad K_{011}(x, y) = -Y_{40}(\eta y) P_{u0}(x, y), \quad \tilde{K}_{012}(x, y) = 0. \quad (5.4.25)$$

Подставляя их в (5.4.16), убеждаемся в том, что эта формула с учетом (П.4.14) переходит в (5.4.6).

С целью дополнительной проверки формул (5.4.16) и (5.4.24) переходим к пределу при  $r_0 \rightarrow 0$  в аналогичных формулах (3.5.16) и (3.5.23) для толстостенной

сферы. Использование соотношений (П.7.26), (П.7.28) и (3.5.12), (3.5.20) показывает, что этот предельный переход приводит к формулам (5.4.16) и (5.4.24) этого раздела.

### § 5.5. Оригиналы объемных функций влияния для упругого шара

Для вычисления оригиналов функций влияния в (5.4.15) и (5.4.23) аналогично (3.6.3) и (4.5.3) выражаем функции в (4.4.18) и (4.4.28) через экспоненциальные многочлены  $E_{kln}(x, y)$  (см. (П.3.20)). Для этого сначала, используя (П.2.17), (П.2.18), (П.3.13) - (П.3.19) и (П.4.36), (П.4.37), сделаем это для определителя  $T_{n24}(y, \eta y)$ , задаваемого формулой (4.4.14), а также для функций, входящих в (4.4.21) (использованы аналогичные §§ 4.5, 4.6 обозначения, хотя смысл их другой):

$$T_{n24}(y, \eta y) = \frac{L_{zn}(y)}{2\pi\eta^{n+2}y^{2(n+2)}}, \quad L_{zn}(y) = -D_n(-y, -y)e^{\eta y} + D_n(-y, y)e^{-\eta y} + \\ + D_n(y, -y)e^{\eta y} - D_n(y, y)e^{-\eta y}; \quad (5.5.1)$$

$$K_{n11}(x, y) = \frac{L_{n11}(x, y)}{2\sqrt{2\pi}\eta^{n+2}x^{n+2}y^{2(n+2)}}, \quad K_{n12}(x, y) = \frac{L_{n12}(x, y)}{2\sqrt{2\pi}\eta^{2(n+2)}x^{n+2}y^{2(n+2)}}, \\ K_{n21}(x, y) = \frac{L_{n21}(x, y)}{2\sqrt{2\pi}\eta^{n+2}x^{n+2}y^{2(n+2)}}, \quad K_{n22}(x, y) = \frac{L_{n22}(x, y)}{2\sqrt{2\pi}\eta^{2(n+2)}x^{n+2}y^{2(n+2)}}, \quad (5.5.2)$$

где

$$L_{n11}(x, y) = n(n+1)\left[\Lambda_{n0}(\eta y)E_{10n}(x, y) - 2(-1)^n y^{2n+1}\Lambda_{n0}(\eta x)\right] - \\ - \Lambda_{n3}(\eta y)E_{11n}(x, y),$$

$$L_{n12}(x, y) = (-1)^n 2\eta^{2n+1}y^{2n+1}\Lambda_{n1}(x) - \Lambda_{n1}(y)E_{30n}(\eta y, \eta x) - \\ - n(n+1)\Lambda_{n0}(y)E_{00n}(\eta x, \eta y),$$

$$L_{n21}(x, y) = n(n+1)\Lambda_{n0}(\eta y)E_{00n}(x, y) + \Lambda_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, x) - \\ - (-1)^n 2y^{2n+1}\Lambda_{n3}(\eta x),$$

$$L_{n22}(x, y) = \Lambda_{n1}(y)E_{33n}(\eta x, \eta y) + \\ + n(n+1)\left[2(-1)^n \eta^{2n+1}y^{2n+1}\Lambda_{n0}(x) - \Lambda_{n0}(y)E_{30n}(\eta x, \eta y)\right],$$

а функция  $D_n(x, y)$  и величины  $\eta_{\pm}$  определены равенствами в (3.6.3).

Подставляя теперь (5.5.1) и (5.5.2) в (5.4.16) и (5.4.24), с учетом (П.2.18), (П.3.13) - (П.3.15) приходим к подобным (3.6.3) и (4.5.3) равенствам:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n F_{uum}^{(1)}(s)}{2\eta^{2n+1}\xi^{n+2}r^{n+2}s^{2n+3}L_{zn}(r_1s)}, \\ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n F_{uvn}^{(1)}(s)}{2\eta^{2n+1}\xi^{n+2}r^{n+2}s^{2n+3}L_{zn}(r_1s)}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n F_{vun}^{(1)}(s)}{2\eta^{2n+1}\xi^{n+2}r^{n+2}s^{2n+3}L_{zn}(r_1s)}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \frac{(-1)^n F_{vvn}^{(1)}(s)}{2\eta^{2n+1}\xi^{n+2}r^{n+2}s^{2n+3}L_{zn}(r_1s)},\end{aligned}\tag{5.5.3}$$

где

$$\begin{aligned}F_{uum}^{(1)}(s) &= n(n+1)\Lambda_{n0}(\eta rs)L_{n12}(\xi s, r_1s) - \eta^{2n+1}\Lambda_{n1}(rs)L_{n11}(\xi s, r_1s), \\ F_{uvn}^{(1)}(s) &= \Lambda_{n0}(\eta rs)L_{n22}(\xi s, r_1s) - \eta^{2n+1}\Lambda_{n1}(rs)L_{n21}(\xi s, r_1s), \\ F_{vun}^{(1)}(s) &= \Lambda_{n3}(\eta rs)L_{n12}(\xi s, r_1s) - \eta^{2n+1}\Lambda_{n0}(rs)L_{n11}(\xi s, r_1s), \\ F_{vvn}^{(1)}(s) &= \Lambda_{n3}(\eta rs)L_{n22}(\xi s, r_1s) - \eta^{2n+1}n(n+1)\Lambda_{n0}(rs)L_{n21}(\xi s, r_1s).\end{aligned}$$

Последние функции, очевидно, имеют аналогичные (3.6.4) структуры экспоненциальных многочленов:

$$\begin{aligned}F_{uum}^{(1)}(s) &= \sum_{\alpha_1} P_{uum}^{(\alpha_1)}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_1}(r, \xi)s}, \quad F_{vun}^{(1)}(s) = \sum_{\alpha_2} P_{vun}^{(\alpha_2)}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_2}(r, \xi)s}, \\ F_{uvn}^{(1)}(s) &= \sum_{\alpha_3} P_{uvn}^{(\alpha_3)}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_3}(r, \xi)s}, \quad F_{vvn}^{(1)}(s) = \sum_{\alpha_4} P_{vvn}^{(\alpha_4)}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_4}(r, \xi)s}.\end{aligned}\tag{5.5.4}$$

Для замыкания алгоритма определения оригиналов этих функций, используя (5.5.1), так же как в (3.6.5), представляем экспоненциальный многочлен в знаменателе так (здесь использованы аналогичные § 3.6 обозначения, хотя смысл их другой):

$$L_{zn}(r_1s) = -D_n(-r_1s, -r_1s) \left[ 1 + \sum_{k=1}^3 B_{kn}(r_1s) e^{-2\tau_{zk}s} \right] e^{\eta_+ r_1 s},\tag{5.5.5}$$

где

$$B_{1n}(y) = -\frac{D_n(y, -y)}{D_n(-y, -y)}, \quad B_{2n}(y) = -\frac{D_n(-y, y)}{D_n(-y, -y)}, \quad B_{3n}(y) = \frac{D_n(y, y)}{D_n(-y, -y)}$$

$$\tau_{z1} = r_1, \quad \tau_{z2} = \eta r_1, \quad \tau_{z3} = \eta_+ r_1 = \tau_{z1} + \tau_{z2}.$$

Отметим, что при  $n=0$  с учетом (П.5.24) выражение (5.5.5) подобно (3.6.6) существенно упрощается:

$$L_{z0}(r_1 s) = -D_0(-r_1 s, -r_1 s) \left[ 1 + B_{10}(r_1 s) e^{-2\tau_{z1}s} \right] \left[ 1 + B_{20}(r_1 s) e^{-\tau_{z2}s} \right] e^{\eta_+ r_1 s}. \quad (5.5.6)$$

Далее аналогично (3.6.8) получаем следующий ряд:

$$\frac{1}{L_{zn}(r_1 s)} = -\frac{1}{D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{|\beta|=l} (l; \beta) e^{-\sigma_\beta s} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1 s), \quad (5.5.7)$$

$$\beta = (l_1, l_2, l_3), \quad |\beta| = \sum_{k=1}^3 l_k, \quad (l; \beta) = \frac{l!}{l_1! l_2! l_3!}, \quad \sigma_\beta = \tau_{z3} + 2 \sum_{k=1}^3 \tau_{zk} l_k.$$

Окончательно изображения (5.5.3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} \xi^{n+2} r^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_1} \sum_{|\beta|=l} Q_{uun}^{(\alpha_1 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_1}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} \xi^{n+2} r^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_2} \sum_{|\beta|=l} Q_{vun}^{(\alpha_2 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_2}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} \xi^{n+2} r^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_3} \sum_{|\beta|=l} Q_{uvn}^{(\alpha_3 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_3}(r, \xi)]s}, \\ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) &= -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} \xi^{n+2} r^{n+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_4} \sum_{|\beta|=l} Q_{vvn}^{(\alpha_4 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_4}(r, \xi)]s}, \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{uun}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{uun}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1 s), \\ Q_{vun}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vun}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1 s), \\ Q_{uvn}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{uvn}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1 s), \\ Q_{vvn}^{(\alpha \beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vvn}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+3} D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1 s). \end{aligned}$$

Также как в §§ 3.6, 4.6, доказывается, что последние функции являются правильными рациональными дробями. Действительно, из (3.6.10) следует, что

$$\deg \Lambda_{n0}(z) = n, \deg \Lambda_{n1}(z) = \deg \Lambda_{n3}(z) = n + 1. \quad (5.5.9)$$

Учитывая эти равенства, а также (П.5.22) и (3.6.11), получаем, что экспоненциальные многочлены в (5.5.1) – (5.5.3) имеют следующие степени:

$$\deg L_{zn}(\alpha s) = 2(n + 1), \quad (5.5.10)$$

$$\begin{aligned} \deg L_{n11}(\alpha s, \beta s) &= \deg L_{n22}(\alpha s, \beta s) = 3(n + 1), \\ \deg L_{n12}(\alpha s, \beta s) &= \deg L_{n21}(\alpha s, \beta s) = 3n + 2, \\ \deg F_{uum}^{(1)}(s) &= \deg F_{vvn}^{(1)}(s) = 4(n + 1), \deg F_{uvn}^{(1)}(s) = \deg F_{vun}^{(1)}(s) = 4n + 3. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Следовательно, степени числителей в (5.5.3), по крайней мере, на единицу меньше степеней знаменателей. Поэтому оригиналы этих функций могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления. Оригиналы же искомых функций влияния при  $n \geq 1$  вычисляются так же, как и в § 3.6, по формулам (3.6.15).

Отметим, что функцию влияния  $G_{uu0}(r, \xi, \tau)$  можно находить, используя первое равенство в (3.6.15) при  $n = 0$ .

Дополнительно выясним, как ведут себя функции влияния в окрестности центра шара и точки  $\xi = 0$ . Из формул (5.4.15) и (5.4.23) для их изображений получаем такие асимптотические представления при  $\xi > 0$  и  $r \rightarrow +0$ :

$$\begin{aligned} G_{uum}^L(r, \xi, s) &\sim \xi^2 \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s), G_{vun}^L(r, \xi, s) \sim \xi^2 \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s), \\ G_{uvn}^L(r, \xi, s) &\sim \xi^2 n(n + 1) \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s), G_{vvn}^L(r, \xi, s) \sim \xi^2 \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s). \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Аналогичные соотношения для функций в (5.4.16) и (5.4.24) находим с использованием (П.2.17), (П.2.18) и (П.7.15) - (П.7.17):

-  $n = 0$

$$\tilde{G}_{uu0}^L(r, \xi, s) \sim \frac{rs^2}{3T_{n24}(r_1s, \eta r_1s)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{011}(\xi s, r_1s); \quad (5.5.13)$$

-  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) &\sim nr^{n-1}\tilde{G}_{un}^L(\xi, s), \quad \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) \sim r^{n-1}\tilde{G}_{vn}^L(\xi, s), \\ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) &\sim -r^{n-1}\tilde{G}_{un}^L(\xi, s), \quad \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) \sim -(n+1)r^{n-1}\tilde{G}_{vn}^L(\xi, s),\end{aligned}\quad (5.5.14)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{un}^L(\xi, s) &= s^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_{n11}(\xi s, r_1 s) + (n+1)\eta^{n+2}K_{n12}(\xi s, r_1 s)}{(2n+1)!!T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}, \\ \tilde{G}_{vn}^L(\xi, s) &= s^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{nK_{n21}(\xi s, r_1 s) + \eta^{n+2}K_{n22}(\xi s, r_1 s)}{(2n+1)!!T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)}.\end{aligned}$$

Следовательно, в центре шара имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}G_{uu0}^L(0, \xi, s) &= 0, \\ G_{uu1}^L(0, \xi, s) &= -G_{vu1}^L(0, \xi, s) = \xi^2 \tilde{G}_{u1}^L(\xi, s), \\ G_{uv1}^L(0, \xi, s) &= -G_{vv1}^L(0, \xi, s) = 2\xi^2 \tilde{G}_{v1}^L(\xi, s), \\ G_{uum}^L(0, \xi, s) &= G_{vun}^L(0, \xi, s) = G_{uvn}^L(0, \xi, s) = G_{vvn}^L(0, \xi, s) = 0 \quad (n \geq 2).\end{aligned}\quad (5.5.15)$$

Аналогично получаем следующие асимптотические представления при  $r > 0$  и  $\xi \rightarrow +0$ :

$$\begin{aligned}G_{uum}^L(r, \xi, s) &\sim \xi^2 \tilde{G}_{uum}^L(\xi, r, s), \quad G_{vun}^L(r, \xi, s) \sim \xi^2 \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s), \\ G_{uvn}^L(r, \xi, s) &\sim \xi^2 n(n+1) \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s), \quad G_{vvn}^L(r, \xi, s) \sim \xi^2 \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s);\end{aligned}\quad (5.5.16)$$

$$\tilde{G}_{uu0}^L(\xi, r, s) \sim \frac{\xi s^2}{3T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{011}(rs, r_1 s); \quad (5.5.17)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{uum}^L(\xi, r, s) &\sim n\xi^{n-1}\tilde{G}_{un}^L(r, s), \quad \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s) \sim \xi^{n-1}\tilde{G}_{vn}^L(r, s), \\ \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) &\sim -\xi^{n-1}\tilde{G}_{un}^L(r, s), \quad \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s) \sim -(n+1)\xi^{n-1}\tilde{G}_{vn}^L(r, s), \quad n \geq 1.\end{aligned}\quad (5.5.18)$$

Отсюда вытекают такие равенства:

$$G_{uum}^L(r, 0, s) = 0 \quad (n \geq 0), \quad G_{vun}^L(r, 0, s) = G_{uvn}^L(r, 0, s) = G_{vvn}^L(r, 0, s) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (5.5.19)$$

Из формул (5.5.15) и (5.5.19) приходим к следующим значениям для оригиналов функций влияния при  $n \neq 1$ :

$$\begin{aligned}G_{uum}(0, \xi, \tau) &= G_{vun}(0, \xi, \tau) = G_{uvn}(0, \xi, \tau) = G_{vvn}(0, \xi, \tau) = \\ &= G_{uum}(r, 0, \tau) = G_{vun}(r, 0, \tau) = G_{uvn}(r, 0, \tau) = G_{vvn}(r, 0, \tau) = 0.\end{aligned}\quad (5.5.20)$$

При  $n = 1$  их значения в центре шара отличны от нуля и имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{uu1}(0, \xi, \tau) &= -G_{vu1}(0, \xi, \tau) = \xi^2 \tilde{G}_{u1}(\xi, \tau), \\ G_{uv1}(0, \xi, \tau) &= -G_{vv1}(0, \xi, \tau) = 2\xi^2 \tilde{G}_{v1}(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (5.5.21)$$

Этот факт объясняется тем, что шар может двигаться как абсолютно твердое тело.

Явный вид функций  $\tilde{G}_{u1}(\xi, \tau)$  и  $\tilde{G}_{v1}(\xi, \tau)$  может быть найден аналогично (5.5.8). Во-первых, из (5.5.14) с использованием (5.5.1) и (5.5.2) получаем подобные (5.5.3) равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{u1}^L(\xi, s) &= \frac{F_{u1}(s)}{3\xi^3 s^2 L_{z1}(r_1 s)}, \quad \tilde{G}_{v1}^L(\xi, s) = \frac{F_{v1}(s)}{3\xi^3 s^2 L_{z1}(r_1 s)}, \\ F_{u1}(s) &= L_{111}(\xi s, r_1 s) + 2L_{112}(\xi s, r_1 s), \quad F_{v1}(s) = L_{121}(\xi s, r_1 s) + L_{122}(\xi s, r_1 s). \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

Далее так же, как и в (5.5.4), методами компьютерной алгебры получаем следующие представления:

$$F_{u1}(s) = \sum_{\alpha_1} P_{u1}^{(\alpha_1)}(\xi s, r_1 s) e^{\tau_{1\alpha_1}(\xi)s}, \quad F_{v1}(s) = \sum_{\alpha_2} P_{v1}^{(\alpha_2)}(\xi s, r_1 s) e^{\tau_{1\alpha_2}(\xi)s}. \quad (5.5.23)$$

А уже с помощью (5.5.5) приходим к аналогичному (5.5.8) результату:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{u1}^L(\xi, s) &= \frac{1}{\xi^3} Q_{u1}^L(\xi, s), \quad Q_{u1}^L(\xi, s) = -\frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_1} \sum_{|\beta|=l} Q_{u1}^{(\alpha_1 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_{\beta} - \tau_{1\alpha_1}(\xi)]s}, \\ \tilde{G}_{v1}^L(\xi, s) &= \frac{1}{\xi^3} Q_{v1}^L(\xi, s), \quad Q_{v1}^L(\xi, s) = -\frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_1} \sum_{|\beta|=l} Q_{v1}^{(\alpha_1 \beta l)}(s) e^{-[\sigma_{\beta} - \tau_{1\alpha_2}(\xi)]s}, \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

где

$$Q_{u1}^{(\alpha \beta l)}(s) = \frac{(l; \beta) P_{u1}^{(\alpha)}(\xi s, r_1 s)}{s^2 D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^l(r_1 s), \quad Q_{v1}^{(\alpha \beta l)}(s) = \frac{(l; \beta) P_{v1}^{(\alpha)}(\xi s, r_1 s)}{s^2 D_n(-r_1 s, -r_1 s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^l(r_1 s).$$

Для выяснения поведения функций  $\tilde{G}_{u1}^L(\xi, s)$  и  $\tilde{G}_{v1}^L(\xi, s)$  в окрестности точки  $\xi = 0$  найдем асимптотическое представление функций  $F_{u1}(s)$  и  $F_{v1}(s)$  при  $\xi \rightarrow 0$ . С этой целью сначала, используя (5.5.2) и (П.7.30) - (П.7.32), построим вспомогательные равенства ( $x \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned}
L_{111}(x, y) &\sim 4\Lambda_{10}(\eta y)\Lambda_{11}(y) - 2\Lambda_{13}(\eta y)\Lambda_{11}(y) + \\
&+ [\Lambda_{13}(\eta y)\Sigma_{11}(y) - 2\Lambda_{10}(\eta y)\Sigma_{11}(y) - 8\eta^3 y^3] \frac{x^3}{3}, \\
L_{112}(x, y) &\sim [\Lambda_{11}(y)\Lambda_{13}(\eta y) - 2\Lambda_{10}(y)\Lambda_{10}(\eta y)] \left(1 - \frac{\eta^2 x^2}{2}\right) + \\
&+ [\Lambda_{11}(y)\Sigma_{13}(\eta y) - 2\Lambda_{10}(y)\Sigma_{10}(\eta y) - 4y^3] \frac{\eta^3 x^3}{3}, \\
L_{121}(x, y) &\sim [2\Lambda_{10}(\eta y)\Lambda_{10}(y) - \Lambda_{13}(\eta y)\Lambda_{11}(y)] \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \\
&+ \left[2\Lambda_{10}(\eta y)\Sigma_{10}(y) - \Lambda_{13}(\eta y)\Sigma_{11}(y) + \frac{8}{3}\eta^3 y^3\right] \frac{x^3}{3}, \\
L_{122}(x, y) &\sim [\Lambda_{11}(y)\Lambda_{13}(\eta y) - 2\Lambda_{10}(y)\Lambda_{10}(\eta y)] \left(1 + \frac{\eta^2 x^2}{2}\right) - \\
&- \frac{2\eta^3 x^3}{3} [\Lambda_{11}(y)\Sigma_{13}(\eta y) - 2\Lambda_{10}(y)\Sigma_{10}(\eta y) - 4y^3].
\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

Отсюда для числителей в (5.5.22) находим следующие асимптотические представления при  $\xi \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
F_{u1}(s) &= L_{111}(\xi s, r_1 s) + 2L_{112}(\xi s, r_1 s) \sim -\eta^2 \xi^2 s^2 \tilde{\Lambda}_{u1}(y), \\
F_{v1}(s) &= L_{121}(\xi s, r_1 s) + L_{122}(\xi s, r_1 s) \sim -\frac{1+\eta^2}{2} \xi^2 s^2 \Lambda_{v1}(y), \\
\Lambda_{u1}(y) &= \Lambda_{11}(y)\Lambda_{13}(\eta y) - 2\Lambda_{10}(y)\Lambda_{10}(\eta y), \\
\Lambda_{v1}(y) &= 2\Lambda_{10}(\eta y)\Lambda_{10}(y) - \Lambda_{13}(\eta y)\Lambda_{11}(y).
\end{aligned} \tag{5.5.26}$$

Учитывая эти равенства, для функций в (5.5.19) и (5.5.18) получаем такие результаты:

$$\tilde{G}_{u1}^L(\xi, s), \tilde{G}_{v1}^L(\xi, s) = O(\xi^{-1}), \xi \rightarrow 0; \tag{5.5.27}$$

$$G_{uu1}(0, 0, \tau) = G_{vu1}(0, 0, \tau) = G_{uv1}(0, 0, \tau) = G_{vv1}(0, 0, \tau) = 0. \tag{5.5.28}$$

В качестве примера рассмотрим шара радиуса  $r_1 = 2$ , материал среды, как и ранее, алюминий,  $\eta = 2,04$ . Результаты расчетов приведены на рис. 5.5.1 – 5.5.8. На рис. 5.5.1 представлены зависимости функции  $G_{unn}(r, \xi, \tau)$  от времени при  $\xi = 1.5$ ,  $r = 1.2$ . Сплошная кривая соответствует  $n = 0$ , штриховая -  $n = 1$ ,

штрихпунктирная -  $n=2$ . Аналогичные графики для функций  $G_{uvn}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vvn}(r, \xi, \tau)$  и  $G_{vvn}(r, \xi, \tau)$  представлены на рис. 5.5.2 – 5.5.4. Здесь сплошные кривые соответствуют  $n=1$ , а штриховые -  $n=2$ .

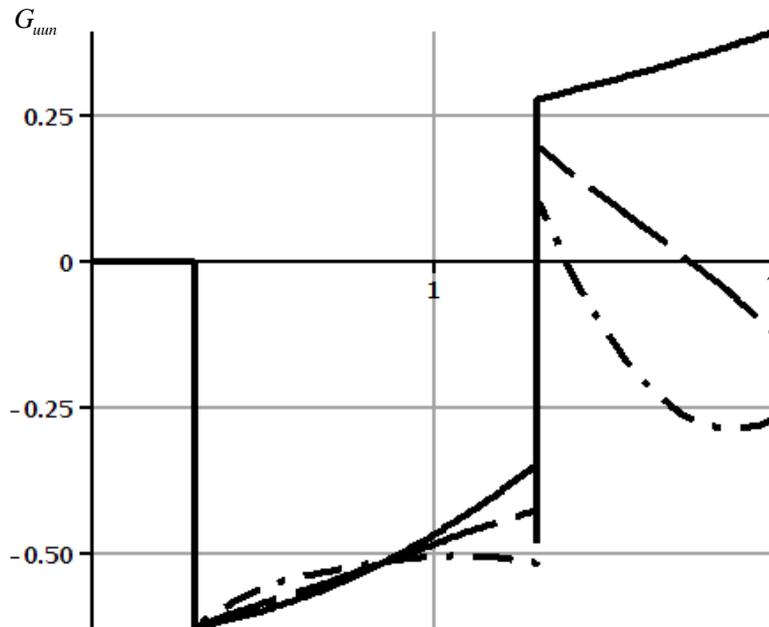


Рис. 5.5.1

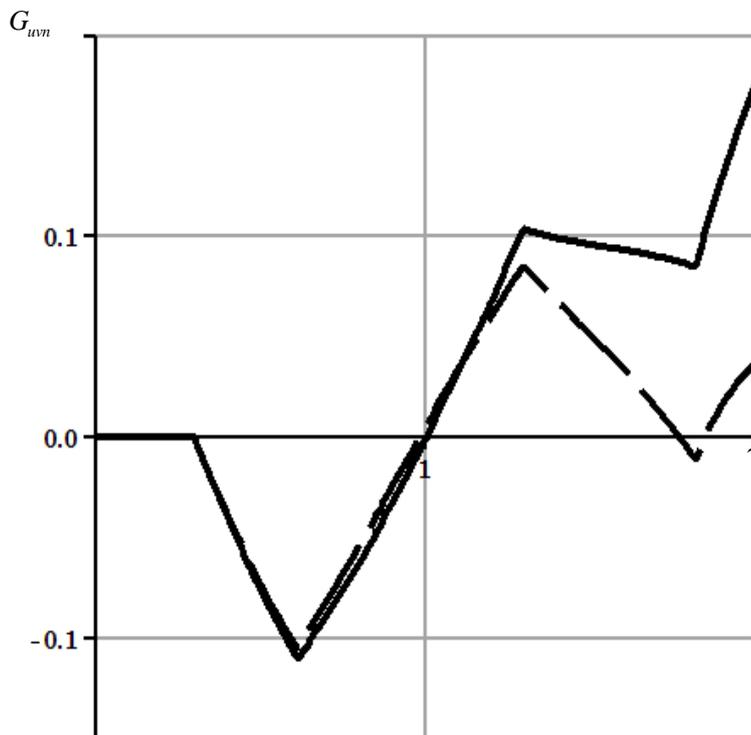


Рис. 5.5.2

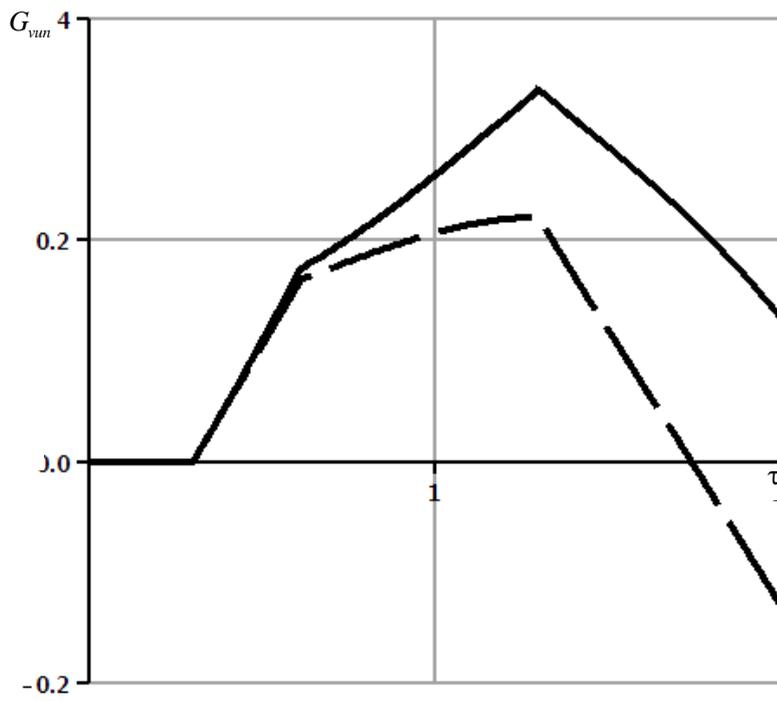


Рис.5.5.3

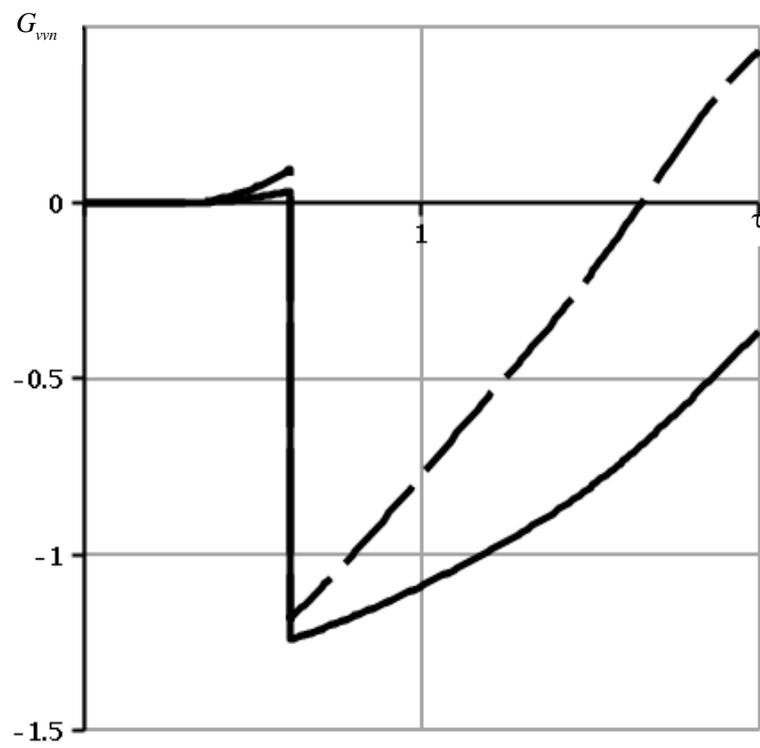


Рис. 5.5.4.

Распределение функции  $G_{um}(r, \xi, \tau)$  по координате  $r$  в момент времени  $\tau = 1$  и при  $\xi = 1.5$  представлено на рис. 5.5.5. Здесь, как и ранее, сплошная кривая соответствует  $n = 0$ , штриховая -  $n = 1$ , штрихпунктирная -  $n = 2$ . Аналогичные распределения для функций  $G_{un}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vm}(r, \xi, \tau)$  и  $G_{vn}(r, \xi, \tau)$  изображены на рис. 5.5.6 – 5.5.8, где сплошные кривые соответствуют  $n = 1$ , а штриховые -  $n = 2$ .

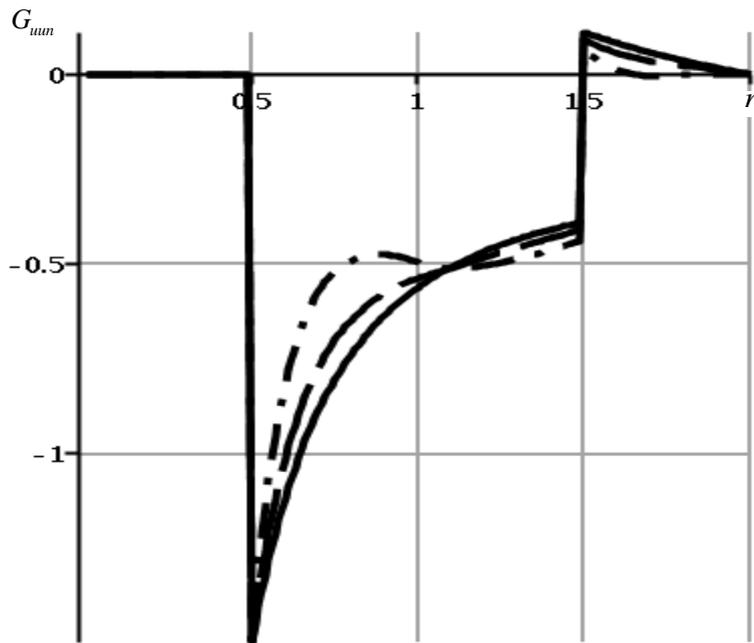


Рис. 5.5.5

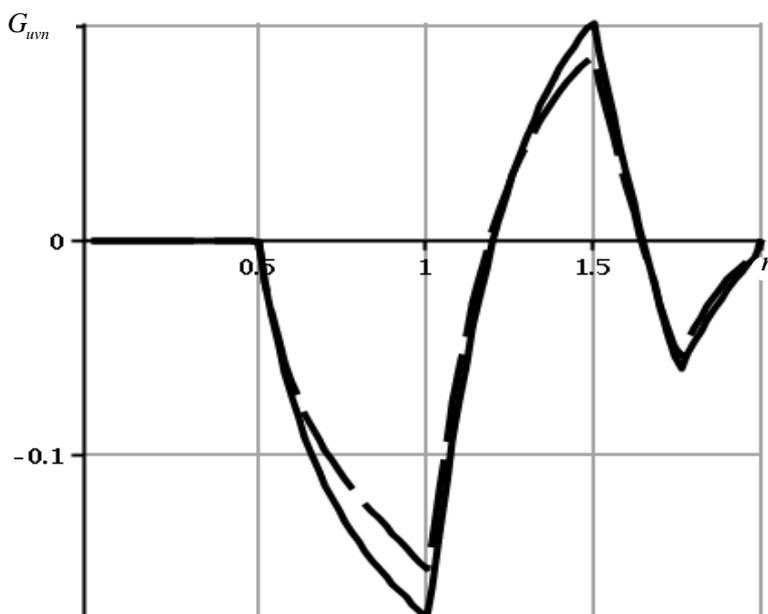


Рис. 5.5.6

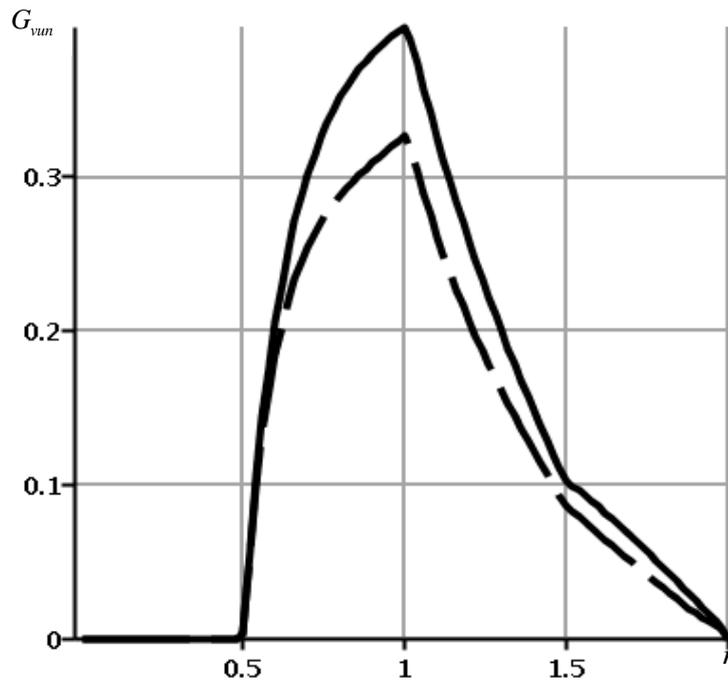


Рис. 5.5.7

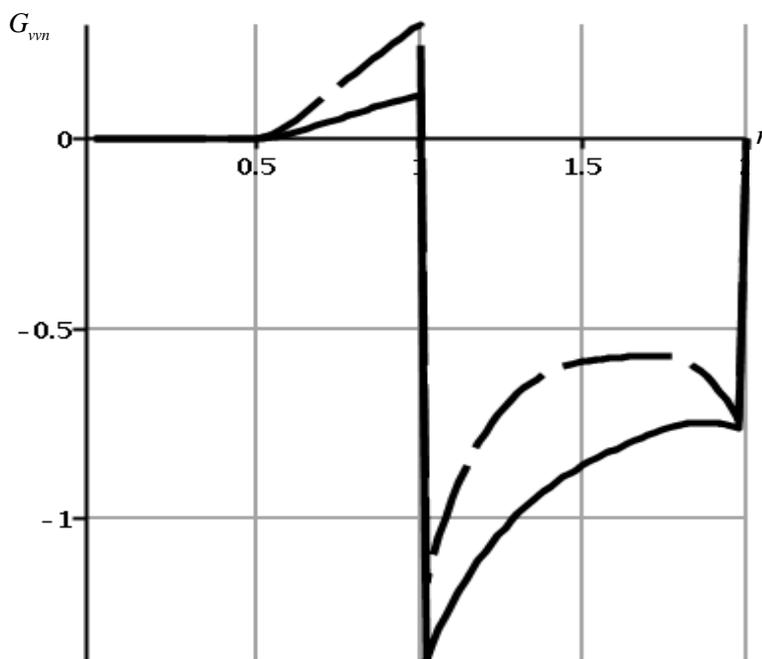


Рис. 5.5.8

### § 5.6. Нестационарное движение упругого шара под действием объемных сил

Аналогично §§ 3.7, 4.6 рассмотрим вспомогательную задачу об осесимметричном движении шара под действием объемных сил с радиальной  $F_r(r, \theta, \tau)$  и тангенциальной компонентами  $F_\theta(r, \theta, \tau)$  [65].

Так же, как и ранее, полагаем, что в начальные условия имеют вид (3.7.1), а граничные условия подобны (3.7.2):

$$u|_{r=r_1} = v|_{r=r_1} = 0. \quad (5.6.1)$$

Тогда с использованием (5.1.9) и (5.1.10) получаем следующие интегральные представления для изображений коэффициентов рядов для перемещений:

- при  $n = 0$

$$u_0^L(r, s) = \int_0^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) F_{r0}^L(\xi, s) d\xi; \quad (5.6.2)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n^L(r, s) &= \int_0^{r_1} G_{uum}^L(r, \xi, s) F_{rn}^L(\xi, s) d\xi + \int_0^{r_1} G_{uvm}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi, \\ v_n^L(r, s) &= \int_0^{r_1} G_{vum}^L(r, \xi, s) F_{rn}^L(\xi, s) d\xi + \int_0^{r_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) F_{\theta n}^L(\xi, s) d\xi. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

В пространстве оригиналов эти формулы преобразовываются так:

- при  $n = 0$

$$u_0(r, \tau) = \int_0^{r_1} G_{uu0}(r, \xi, \tau) * F_{r0}(\xi, \tau) d\xi; \quad (5.6.4)$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n(r, \tau) &= \int_0^{r_1} G_{uum}(r, \xi, \tau) * F_{rn}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{uvm}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi, \\ v_n(r, \tau) &= \int_0^{r_1} G_{vum}(r, \xi, \tau) * F_{rn}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * F_{\theta n}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

Ядра этих представлений определяются формулами (3.6.15), а их предельные значения – равенствами (5.5.19) – (5.5.21).

В качестве примеров применения интегральных представлений (5.6.4) и (5.6.5) рассмотрим шар с такими же характеристиками, что и в предыдущем параграфе, при трех вариантах задания объемных сил.

а). *Сосредоточенная на сфере  $r = r_*$  ( $r_0 \leq r_* \leq r_1$ ) радиальная сила:*

$$F_r(r, \theta, \tau) = \delta(r - r_*)H(\tau), \quad F_\theta(r, \theta, \tau) = 0,$$

что соответствует следующим коэффициентам рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра:  $F_{r_0}(r, \tau) = \delta(r - r_*)H(\tau)$ ,  $F_m(r, \tau) = F_{\theta n}(r, \tau) = 0$ ,  $n \geq 1$ . При этом  $u(r, \theta, \tau) = u_0(r, \tau)$ ,  $v(r, \theta, \tau) = 0$ . Графики функции  $u_0(r, \tau)$  при  $r_* = 1.5$  представлены на рис. 5.6.1 и 5.6.2. Первый из них иллюстрирует распределение  $u_0(r, \tau)$  по координате  $r$ . Сплошная кривая соответствует моменту времени  $\tau = 0.5$ , штриховая -  $\tau = 1$ , а штрихпунктирная -  $\tau = 1.5$ . На рис. 9 изображены зависимости этой же функции от времени в точках с различными значениями координаты  $r$ : сплошная кривая соответствует  $r = 0.5$ , штриховая -  $r = 1$ , штрихпунктирная -  $r = 1.5$ .

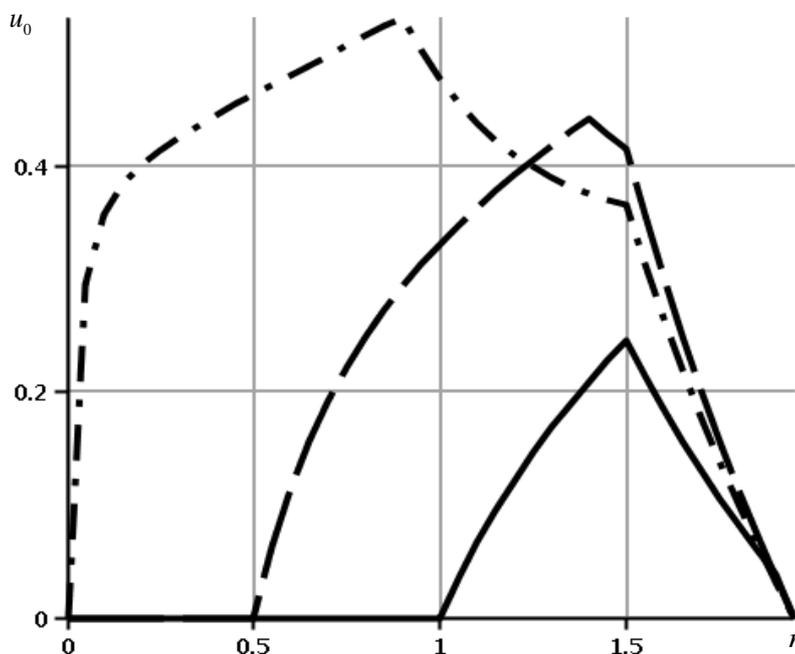


Рис. 5.6.1

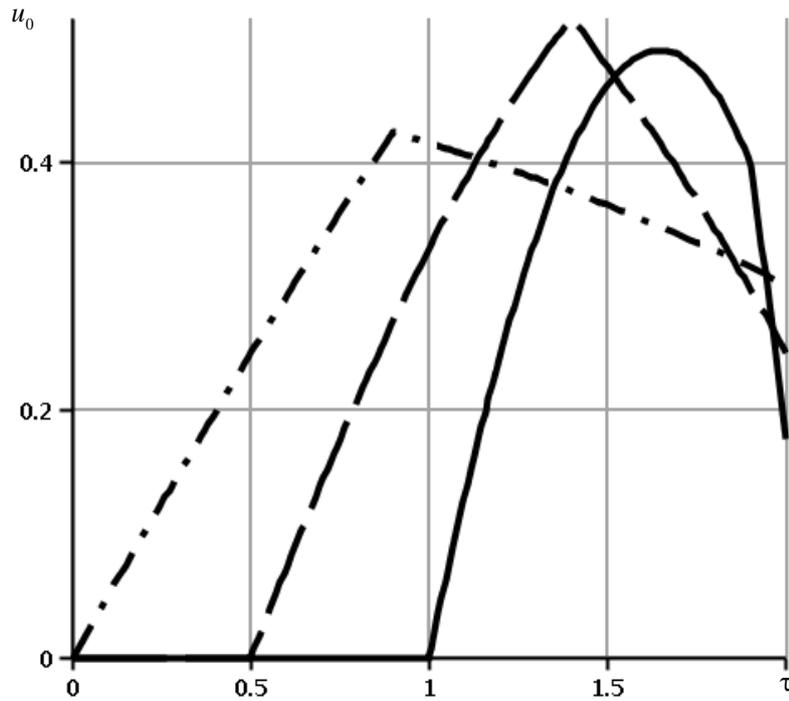


Рис. 5.6.2

б) Равномерно распределенная по радиусу радиальная сила:  $F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau)$ ,  $F_\theta(r, \theta, \tau) = 0$ . Это соответствует следующим коэффициентам рядов:  $F_{r0}(r, \tau) = H(\tau)$ ,  $F_m(r, \tau) = F_{\theta n}(r, \tau) = 0$ ,  $n \geq 1$ . При этом так же, как и в предыдущем варианте,  $u(r, \theta, \tau) = u_0(r, \tau)$ ,  $v(r, \theta, \tau) = 0$ . Аналогичные предыдущему пункту графики функции  $u_0(r, \tau)$  представлены на рис. 5.6.3 и 5.6.4.

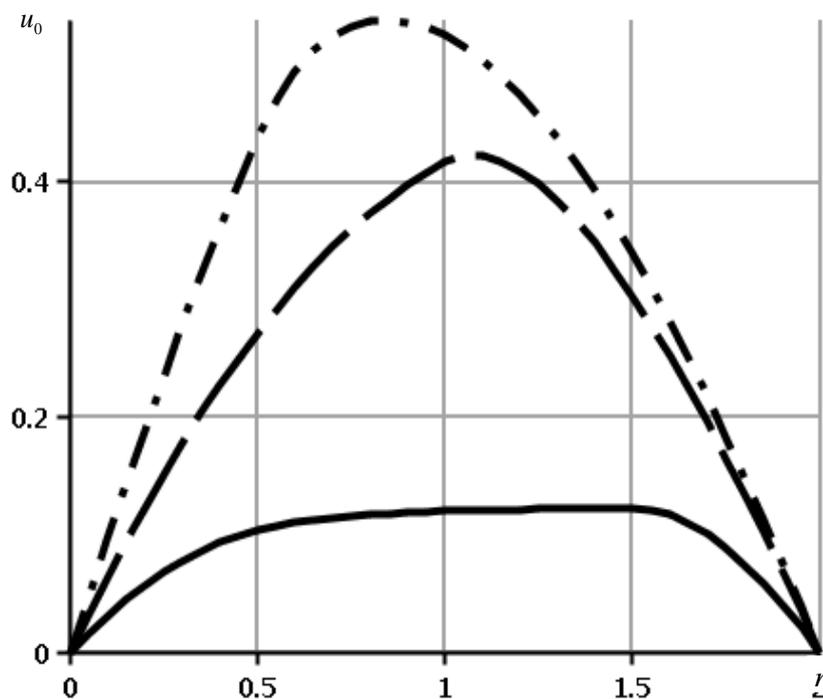


Рис. 5.6.3

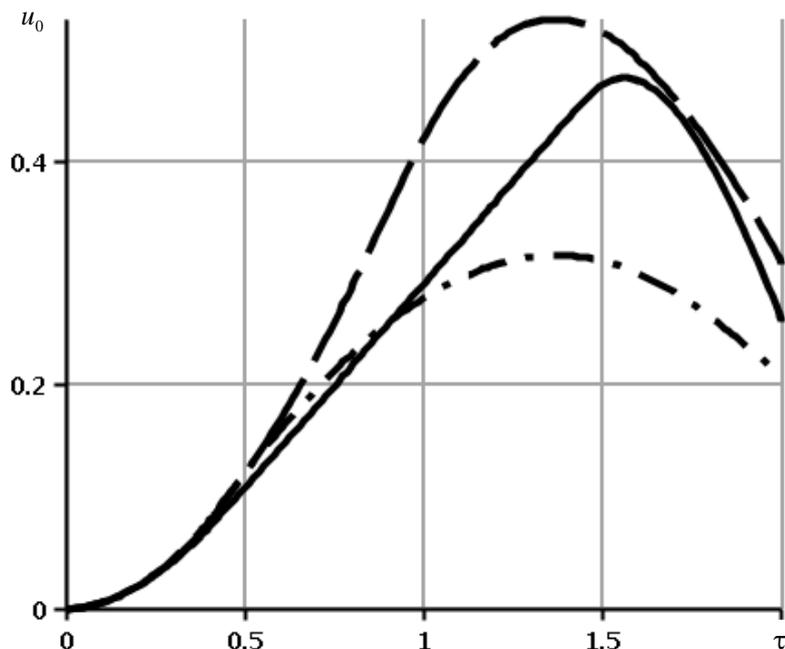


Рис. 5.6.4

в) Объемная сила направлена по оси  $\theta=0$  и равна  $H(\tau)$ . Тогда ненулевые координаты вектора объемной силы в сферической системе координат определяются так:  $F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau)\cos\theta$ ,  $F_\theta(r, \theta, \tau) = -H(\tau)\sin\theta$ , что соответствует следующим коэффициентам рядов:  $F_{r1}(r, \tau) = H(\tau)$ ,  $F_{\theta1}(r, \tau) = -H(\tau)$ ,  $F_{r0}(r, \tau) = F_{m}(r, \tau) = F_{\theta n}(r, \tau) = 0$ ,  $n \geq 2$ .

При этом имеет место поступательное движение шара:  $u(r, \theta, \tau) = u_1(r, \tau)\cos\theta$ ,  $v(r, \theta, \tau) = v_1(r, \tau)\sin\theta$ . На рис. 5.6.5 представлено распределение функции  $u_1(r, \tau)$  по координате  $r$ . Сплошная кривая соответствует моменту времени  $\tau=0.5$ , штриховая -  $\tau=1$ , а штрихпунктирная -  $\tau=1.5$ . Зависимость  $u_1(r, \tau)$  от времени показана на рис. 5.6.6. Здесь сплошная кривая соответствует  $r=0.5$ , штриховая -  $r=1$ , а штрихпунктирная -  $r=1.5$ . Аналогичные графики для функции  $v_1(r, \tau)$  представлены на рис. 5.6.7 и 5.6.8.

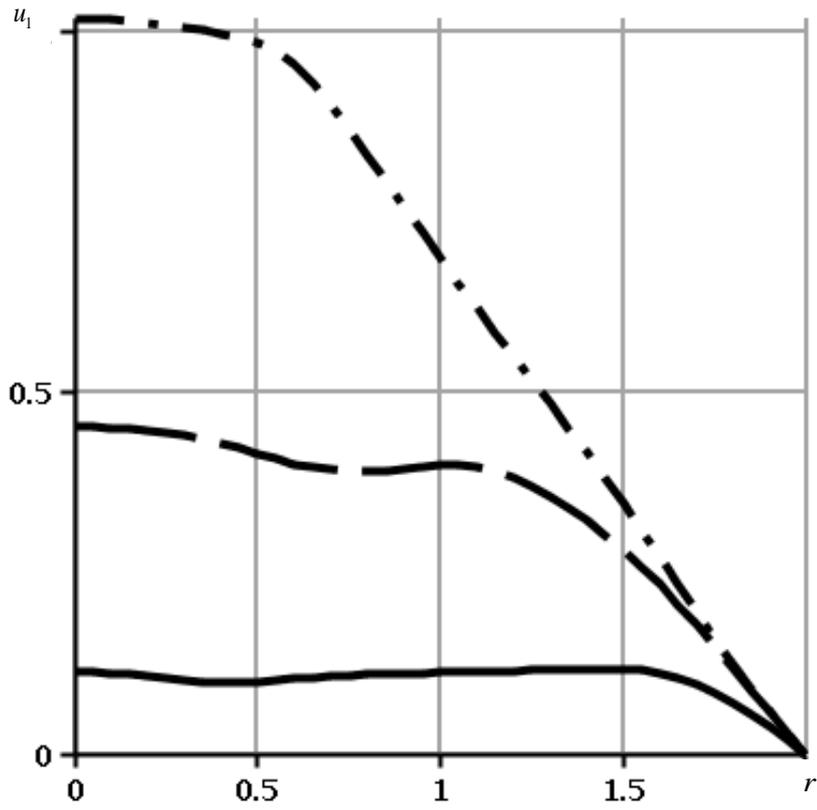


Рис. 5.6.5

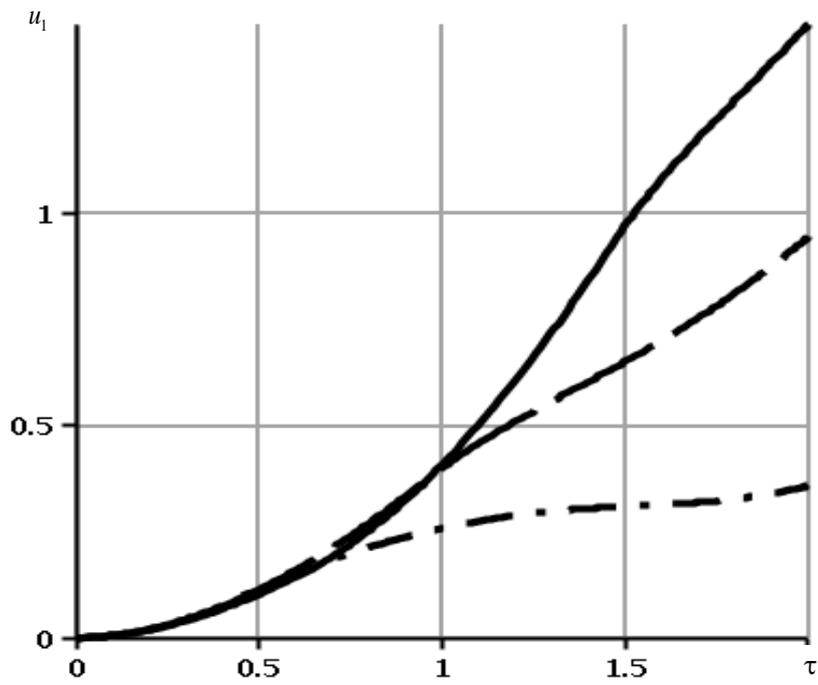


Рис. 5.6.6

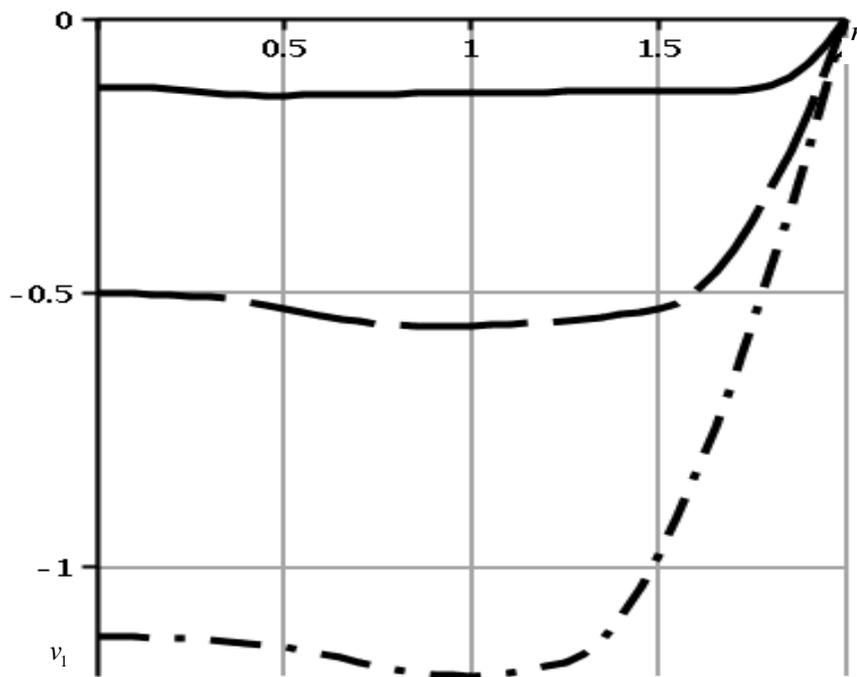


Рис. 5.6.7

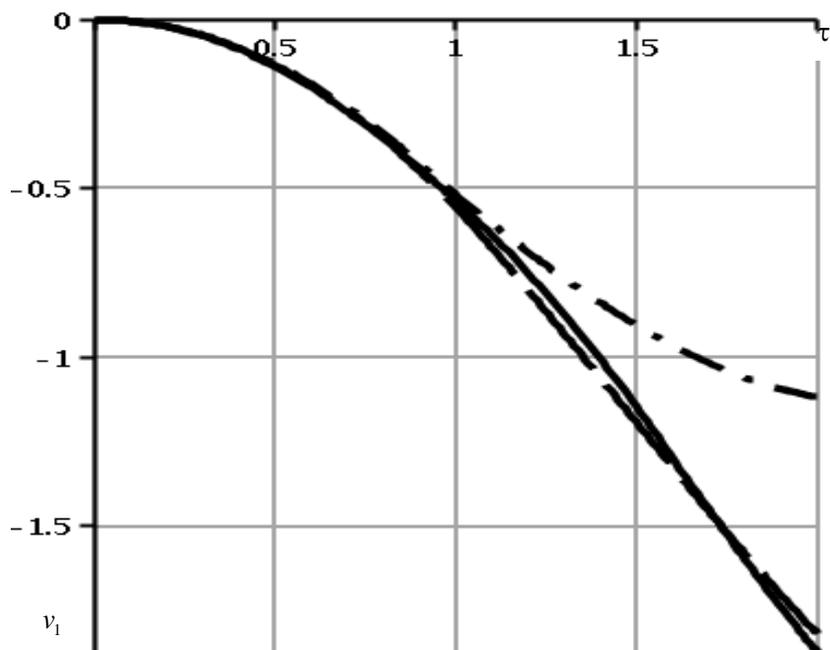


Рис. 5.6.8

### § 5.7. Распространение осесимметричных нестационарных поверхностных возмущений в электромагнитоупругом шаре

Постановка этой задачи приведена в § 5.1. Ее решение представлено в виде рядов (3.1.6) по углу  $\theta$  и (3.2.1) по малому параметру  $\alpha$ . Как показано в §§ 5.2 – 5.6, коэффициенты этих рядов при каждом  $n$  определяются независимыми рекуррентными системами интегральных соотношений. Аналогично § 3.8 доказывается, что для нулевых коэффициентов рядов (3.1.6) ( $n = 0$ ) при условиях (5.1.8) выполняются равенства (3.8.2).

При  $n \geq 1$  подобно §§ 3.8 и 4.7 получаем следующую рекуррентную ( $m \geq 1$ ) систему уравнений (отличие от предыдущих соотношений в пределах интегрирования и количестве заданных на границе функций):

$$u_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} G_{uun}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{uvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (5.7.1)$$

$$v_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} G_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi;$$

$$\dot{u}_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} \Pi_{uun}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} \Pi_{uvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (5.7.2)$$

$$\dot{v}_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi;$$

$$\chi_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} X_{un}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} X_{vn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (5.7.3)$$

где

$$\begin{aligned} f_{un, m-1}(\xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{m, m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{n, m-1}(\xi, \tau), \\ f_{vn, m-1}(\xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{0n, m-1}(\xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{n, m-1}(\xi, \tau); \end{aligned}$$

$$H_{nm}(r, \tau) = -\eta_e^2 \int_0^{r_1} \rho_{e0}(\xi) \{ G_{Hun}^c(r, \xi) \dot{u}_{nm}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) \dot{v}_{nm}(\xi, \tau) \} d\xi \quad (5.7.4)$$

$$\begin{aligned} E_{rnm}(r, \tau) &= -\frac{n(n+1)}{r} \times \\ &\times \int_0^{r_1} \rho_{e0}(\xi) [ G_{Hun}^c(r, \xi) u_{nms}(\xi, \tau) + G_{Hvn}^c(r, \xi) v_{nms}(\xi, \tau) ] d\xi; \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

$$E_{\theta nm}(r, \tau) = \rho_{e0}(r)v_{nms}(r, \tau) + \int_0^{r_1} \rho_{e0}(\xi) [\Gamma_{Hum}^c(r, \xi)u_{nms}(\xi, \tau) + \Gamma_{Hvnr}^c(r, \xi)v_{nms}(\xi, \tau)] d\xi; \quad (5.7.6)$$

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r)u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0}\chi_{nms}(r, \tau), \quad (5.7.7)$$

$$\begin{aligned} u_{nms}(r, \tau) &= u_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * u_{nm}(r, \tau), \\ v_{nms}(r, \tau) &= v_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * v_{nm}(r, \tau), \\ \chi_{nms}(r, \tau) &= \chi_{nm}(r, \tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_{nm}(r, \tau). \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

Начальными условиями для нее являются аналогичные (3.8.3) и (4.7.9) равенства:

$$\begin{aligned} u_{n0}(r, \tau) &\equiv 0, \quad v_{n0}(r, \tau) \equiv 0 \quad (n \geq 0), \\ H_{n0}(r, \tau) &= -\eta_e^2 G_{Hn1}^c(r) [\gamma e_{01n}(\tau) + \dot{e}_{01n}(\tau)], \\ E_{rn0}(r, \tau) &= -\frac{n(n+1)}{r} G_{Hn1}^c(r) e_{01n}(\tau), \quad \rho_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \\ E_{\theta n0}(r, \tau) &= \Gamma_{Hn1}^c(r) e_{01n}(\tau) \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

где функции  $G_{Hn1}^c(r)$  и  $\Gamma_{Hn1}^c(r)$  определяются формулами (5.2.25) и (5.3.4).

При этом по отношению к §§ 3.8 и 4.7 изменяются ядра в соотношениях (5.7.1) - (5.7.6). А именно, функции  $G_{uum}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{uvm}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vum}(r, \xi, \tau)$ ,  $G_{vvm}(r, \xi, \tau)$  определяются формулами (3.6.15) и указанным в § 5.5 алгоритмом, а  $G_{Hn1}^c(r)$  и  $\Gamma_{Hn1}^c(r)$  - равенствами (5.2.25) и (5.3.4). Функции  $\Pi_{uum}(r, \xi, \tau)$ ,  $\Pi_{uvm}(r, \xi, \tau)$ ,  $\Pi_{vum}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvm}(r, \xi, \tau)$  задаются равенствами (3.8.45), а изображения их составляющих имеет вид (3.8.46) и являются суммами произведений рациональных функций на экспоненты. В соответствии с проведенным в § 5.5 анализом степеней числителей и знаменателей функции  $\Pi_{uum}(r, \xi, \tau)$  и  $\Pi_{vvm}(r, \xi, \tau)$  могут содержать подобные (3.8.18) и (4.7.10) слагаемые (времена запаздывания указаны в (5.5.8))

$$\frac{(-1)^n A_{uum}^{(\alpha_1)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \tau_{1\alpha_1}(r, \xi)], \quad \frac{(-1)^n A_{vvm}^{(\alpha_4)}(r, \xi)}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2}} \delta[\tau - \tau_{1\alpha_4}(r, \xi)], \quad (5.7.10)$$

которые должны быть учтены в свертках в (5.7.3) в соответствии со свойствами дельта-функции.

Ядра интегралов в (5.7.3) - (5.7.6) задаются формулами (3.8.15), которые получаются аналогично (3.8.16) и (3.8.17) с помощью интегрирования по частям в (5.3.7) - (5.3.9). При этом совместно с граничными условиями (5.1.5) учитываются вытекающие из формул (5.2.22) и (3.4.5), (5.3.4) равенства:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} G_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \Gamma_{Hn}^c(r, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \Gamma_{2Hn}^c(r, \xi) = 0. \quad (5.7.11)$$

Явный вид этих ядер совпадает с формулами (3.8.16) и (3.8.17). При этом коэффициенты  $\Gamma_{Hun1}^c(r, \xi)$ ,  $\Gamma_{Hun2}^c(r, \xi)$ ,  $G_{Hvn1}^c(r, \xi)$ ,  $G_{Hvn2}^c(r, \xi)$ ,  $\Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi)$  и  $\Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi)$  перед функциями Хевисайда в соответствии с (3.8.15), (5.2.22) и (5.3.4) определяются так:

$$\begin{aligned} \Gamma_{Hun1}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi) r^{n-1}}{(2n+1) \xi^n r_1^{2n+1}}, \quad \Gamma_{Hun2}^c(r, \xi) = \frac{n \xi^{n+1} \alpha_n(r_1, r)}{(2n+1) r_1^{2n+1} r^{n+2}}, \\ G_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{nr^n \alpha_n(r_1, \xi)}{(2n+1) r_1^{2n+1} \xi^{n+1}}, \quad G_{Hvn2}^c(r, \xi) = \frac{\beta_n(r_1, r) \xi^n}{(2n+1) r^{n+1} r_1^{2n+1}}, \\ \Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{n(n+1) r^{n-1} \alpha_n(r_1, \xi)}{(2n+1) r_1^{2n+1} \xi^n}, \quad \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) = -\frac{n(n+1) \xi^{n+1} \alpha_n(r_1, r)}{(2n+1) r_1^{2n+1} r^{n+2}}. \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

Эти равенства также вытекают из формул (3.8.16) и (3.8.17) при  $r_0 \rightarrow 0$ .

Изображения ядер в (5.7.3) определяются равенствами (3.8.23) и (3.8.28), в которых постоянные интегрирования должны быть взяты из (5.4.8), (5.4.13), (5.4.19) и (5.4.21). Использование формул (5.4.8), (5.4.13), (3.8.27) и (5.4.19), (5.4.21), (3.8.31) при учете (4.4.14), (4.4.19), (П.3.3), (П.3.7), (П.4.13), (П.4.19), (П.4.20), (П.4.28) и (П.4.29) приводит к следующим аналогичным (3.8.33), (3.8.34) и (4.7.14), (4.7.15) результатам:

$$\begin{aligned} X_{un}^L(r, \xi, s) &= X_{un1}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + X_{un2}^L(r, \xi, s) H(r - \xi), \\ T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s) X_{un1}^L(r, \xi, s) &= \xi s Z_{2n}(rs) \times \\ &\times \left[ \xi s Y_{4n}(\eta r_1 s) P_{un}(r_1 s, \xi s) - \frac{\xi s}{\eta r_1 s} X_{4n}(r_1 s) S_{un}(\xi s, \eta r_1 s) - \frac{n(n+1)}{\eta r_1^3 s^3} Z_{2n}(\eta \xi s) \right], \\ T_{n24}(r_1 s, \eta r_1 s) X_{un2}^L(r, \xi, s) &= \xi \left\{ -\frac{n(n+1)}{\eta r_1^3 s^2} Z_{2n}(\eta \xi s) Z_{2n}(rs) + \right. \\ &\left. + \xi s^2 X_{2n}(\xi s) \left[ Y_{4n}(\eta r_1 s) S_{un}(r_1 s, rs) + \frac{1}{\eta r_1 s} X_{4n}(r_1 s) P_{en}(\eta r_1 s, rs) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

$$\begin{aligned}
X_{vn}^L(r, \xi, s) &= X_{vn1}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + X_{vn2}^L(r, \xi, s)H(r - \xi), \\
T_{n24}(r_1s, \eta r_1s)X_{vn1}^L(r, \xi, s) &= -n(n+1)\xi s Z_{2n}(rs) \times \\
&\times \left[ Y_{4n}(\eta r_1s)S_{un}(r_1s, \xi s) + \frac{X_{4n}(r_1s)}{\eta r_1s} P_{en}(\eta r_1s, \xi s) + \frac{\xi Y_{4n}(\eta \xi s)}{r_1^3 s^2} \right], \quad (5.7.14) \\
T_{n24}(r_1s, \eta r_1s)X_{vn2}^L(r, \xi, s) &= n(n+1)\xi s \left\{ -\frac{\xi Y_{4n}(\eta \xi s)}{r_1^3 s^2} Z_{2n}(rs) + \right. \\
&\left. + Z_{2n}(\xi s) \left[ \frac{X_{4n}(r_1s)}{\eta r_1s} P_{en}(rs, \eta r_1s) - Y_{4n}(\eta r_1s)S_{un}(r_1s, rs) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Для вычисления оригиналов функций в (5.7.13) и (5.7.14) подобно (П.5.19) - (П.5.30) и (4.7.16) преобразовываем соответствующие числители и, учитывая (5.5.1), получаем подобные (3.8.37) результаты:

$$\begin{aligned}
X_{unk}^L(r, \xi, s) &= \frac{N_{unk}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s)}{2r^{n+1}\xi^n s^{2n+1}L_{zn}(r_1s)}, \\
X_{vnk}^L(r, \xi, s) &= \frac{N_{vnk}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s)}{2r^{n+1}\xi^n s^{2n+1}L_{zn}(r_1s)} \quad (k=1, 2), \quad (5.7.15)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_{un1}^{(1)}(x, y, z) &= \Lambda_{n0}(x) \left[ (-1)^n M_{un1}(y, z) - 2n(n+1)y^{2n+1}\Lambda_{n0}(\eta z) \right], \\
M_{un1}(y, z) &= \Lambda_{n3}(\eta y)E_{11n}(y, z) + n(n+1)\Lambda_{n0}(y)E_{10n}(z, \eta y), \\
N_{un2}^{(1)}(x, y, z) &= (-1)^n \Lambda_{n1}(z)M_{un2}(x, y) - 2n(n+1)y^{2n+1}\Lambda_{n0}(x)\Lambda_{n0}(\eta z), \\
M_{un2}(x, y) &= \Lambda_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, x) - n(n+1)\Lambda_{n0}(y)E_{00n}(\eta y, x), \\
N_{vn1}^{(1)}(x, y, z) &= -n(n+1)\Lambda_{n0}(x) \left[ 2y^{2n+1}\Lambda_{n3}(\eta z) + (-1)^n M_{vn}(y, z) \right] \\
M_{vn}(y, z) &= n(n+1)\Lambda_{n0}(y)E_{00n}(\eta y, z) - \Lambda_{n3}(\eta y)E_{10n}(y, z), \\
N_{vn2}^{(1)}(x, y, z) &= -n(n+1) \left[ 2y^{2n+1}\Lambda_{n0}(x)\Lambda_{n3}(\eta z) + (-1)^n \Lambda_{n0}(z)M_{vn}(y, x) \right].
\end{aligned}$$

а функция  $L_{zn}(y)$  определяется формулой (5.5.1).

Числители дробей в (5.7.15) методами компьютерной алгебры подобно (5.5.8) приводятся к явному виду (показатели экспонент, несмотря на одинаковые обозначения, могут отличаться):

$$\begin{aligned}
N_{unj}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s) &= \sum_{\alpha_j} P_{unj}^{(\alpha_j)}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_j}(r, \xi)s}, \\
N_{vnj}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s) &= \sum_{\alpha_{j+2}} P_{vnj}^{(\alpha_{j+2})}(rs, \xi s) e^{\tau_{1\alpha_{j+2}}(r, \xi)s}.
\end{aligned} \tag{5.7.16}$$

Подставляя теперь в (5.7.15) ряд (5.5.7), окончательно с учетом последних равенств для функций  $X_{unk}^L$  и  $X_{vnk}^L$  получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
X_{unj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{1}{2r^{n+1}\xi^n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_j} \sum_{|\beta|=l} Q_{unj}^{(\alpha_j\beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_j}(r, \xi)]s}, \\
X_{vnj}^L(r, \xi, s) &= -\frac{1}{2r^{n+1}\xi^n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sum_{\alpha_j} \sum_{|\beta|=l} Q_{vnj}^{(\alpha_j\beta l)}(s) e^{-[\sigma_\beta - \tau_{1\alpha_j}(r, \xi)]s},
\end{aligned} \tag{5.7.17}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{unj}^{(\alpha\beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{unj}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+1} D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1s), \\
Q_{vnj}^{(\alpha\beta l)}(s) &= \frac{(l; \beta) P_{vnj}^{(\alpha)}(rs, \xi s)}{s^{2n+1} D_n(-r_1s, -r_1s)} \prod_{k=1}^3 B_{kn}^{l_k}(r_1s).
\end{aligned}$$

Функции в (5.7.15) являются отношениями экспоненциальных многочленов аргумента  $s$ , и их структура аналогична (5.5.3). Подобный проведенному в § 5.5 анализ показывает, что степени числителей и знаменателя этих функций таковы:

$$\begin{aligned}
\deg M_{un1}(\alpha s, \beta s) &= 3(n+1), \quad \deg M_{un2}(\alpha s, \beta s) = \deg M_{vn}(\alpha s, \beta s) = 3n+2, \\
\deg N_{unk}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s) &= 4n+3, \quad \deg N_{vnk}^{(1)}(rs, r_1s, \xi s) = 2(2n+1), \\
\deg [s^{2n+1} L_{zn}(r_1s)] &= 4n+3.
\end{aligned} \tag{5.7.18}$$

Следовательно, оригиналы функций в (5.7.15) могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления. Только необходимо учитывать, что функции  $X_{unk}(r, \xi, \tau)$  могут содержать слагаемые

$$\frac{C_{unk}^{(\alpha_1)}(r, \xi)}{2r^{n+1}\xi^n} \delta[\tau - \tau_{0\alpha_k}(r, \xi)], \tag{5.7.19}$$

которые также находятся методами компьютерной алгебры.

Отметим также, что при вычислении интегралов в (5.7.4) - (5.7.6) необходимо знать, как ведут себя ядра в окрестности центра шара и точки  $\xi = 0$ . Соответствующие результаты вытекают из (3.8.16), (3.8.17), (5.2.22) и (5.7.12):

$$\begin{aligned}
G_{Hvn}^c(0, \xi) &= \xi G_{Hvn1}^c(0, \xi) = 0, \\
G_{Hum}^c(r, 0) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) = G_{Hvn}^c(r, 0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\xi G_{Hvn2}^c(r, \xi)] = 0 \quad (n \geq 1), \\
\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} G_{Hu1}^c(r, \xi) \right] &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\xi}{r} \tilde{G}_{H1}^c(r, \xi) \right] = -\frac{\beta_1(r_1, \xi)}{6\xi r_1^3}, \\
\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} G_{Hv1}^c(r, \xi) \right] &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\xi}{r} [G_{Hv11}^c(r, \xi)] = -\frac{\alpha_1(r_1, \xi)}{3r_1^3 \xi}, \\
\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} G_{Hum}^c(r, \xi) \right] &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\xi}{r} \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) \right] = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} G_{Hvn}^c(r, \xi) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\xi}{r} G_{Hvn1}^c(r, \xi) \right] = 0 \quad (n \geq 2);
\end{aligned} \tag{5.7.20}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Hu1}^c(r, \xi) &= \Gamma_{Hu11}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_1(r_1, \xi)}{3\xi r_1^3}, \quad \Gamma_{Hv1r}^c(r, \xi) = -\frac{2\alpha_1(r_1, \xi)}{3r_1^3 \xi}, \\
\Gamma_{Hum}^c(0, \xi) &= \Gamma_{Hum1}^c(0, \xi) = \Gamma_{Hvnr}^c(0, \xi) = \Gamma_{Hvn1}^c(0, \xi) = 0 \quad (n \geq 2), \\
\Gamma_{Hum}^c(r, 0) &= \Gamma_{Hum2}^c(r, 0) = \Gamma_{Hvnr}^c(r, 0) = \Gamma_{Hvn2}^c(r, 0) = 0 \quad (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{5.7.21}$$

Для примера полагаем, что физические характеристики материала шара и начальные параметры электрического поля такие же, как и в § 4.7, а  $r_1 = 2$ .

На границе шара напряженность электрического поля имеет вид:

$$e_{01} = -\tau_+ \sin \theta,$$

что соответствует таким коэффициентам:

$$e_{011} = -\tau_+, \quad e_{01n} \equiv 0 \quad (n \geq 2).$$

На рисунках 5.7.1, 5.7.3, 5.7.5, 5.7.7, 5.7.9, 5.7.11 соответственно представлены графики коэффициентов радиальных и тангенциальных перемещений, напряжённости магнитного поля, радиальных и тангенциальных перемещений напряжённости электрического поля и плотности поверхностных зарядов в зависимости от  $r$ . При этом сплошная линия отвечает моменту  $\tau = 0,2$ , штриховая -  $\tau = 0,3$ , штрихпунктирная -  $\tau = 0,4$ .

На рисунках 5.7.2, 5.7.4, 5.7.6, 5.7.8, 5.7.10, 5.7.12 соответственно представлены графики коэффициентов радиальных и тангенциальных перемещений, напряжённости магнитного поля, радиальных и тангенциальных перемещений напряжённости электрического поля и плотности поверхностных зарядов в зависимости от  $\tau$ . При этом сплошная линия отвечает значению  $r=0,5$ , штриховая -  $r=1$ , штрихпунктирная -  $r=1,5$ .

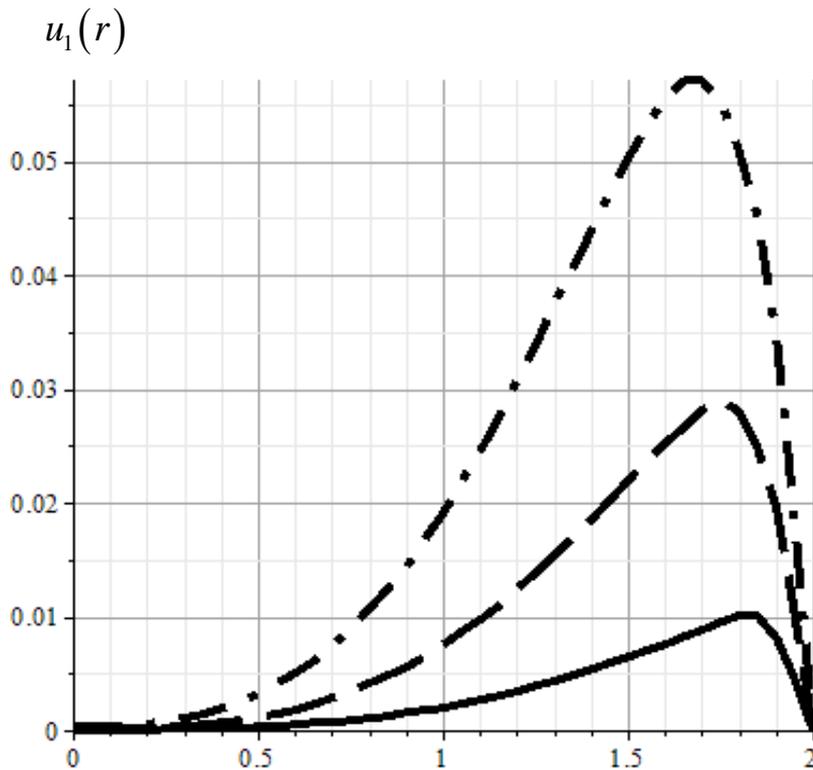


Рис. 5.7.1

 $u_1(\tau)$

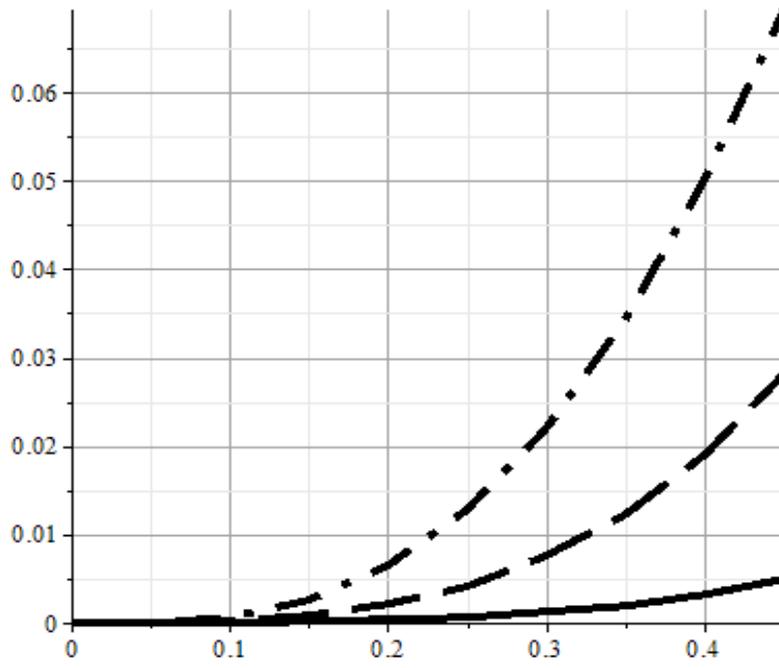


Рис. 5.7.2

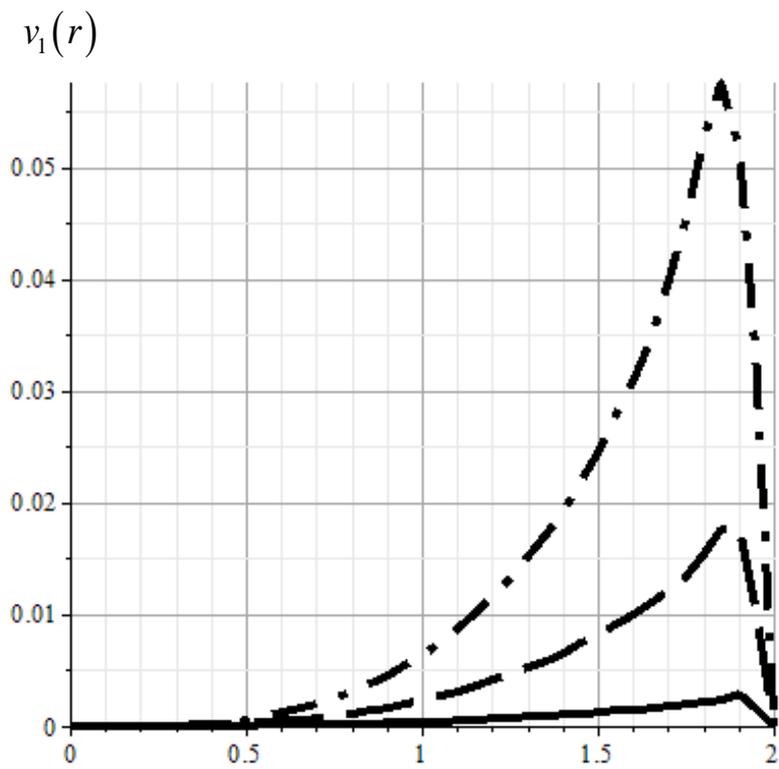


Рис. 5.7.3

$v_1(\tau)$

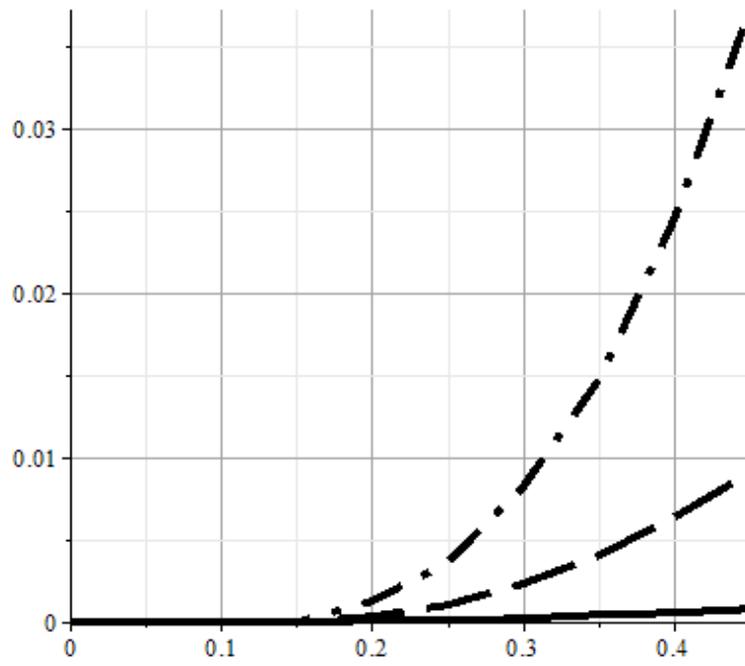


Рис. 5.7.4

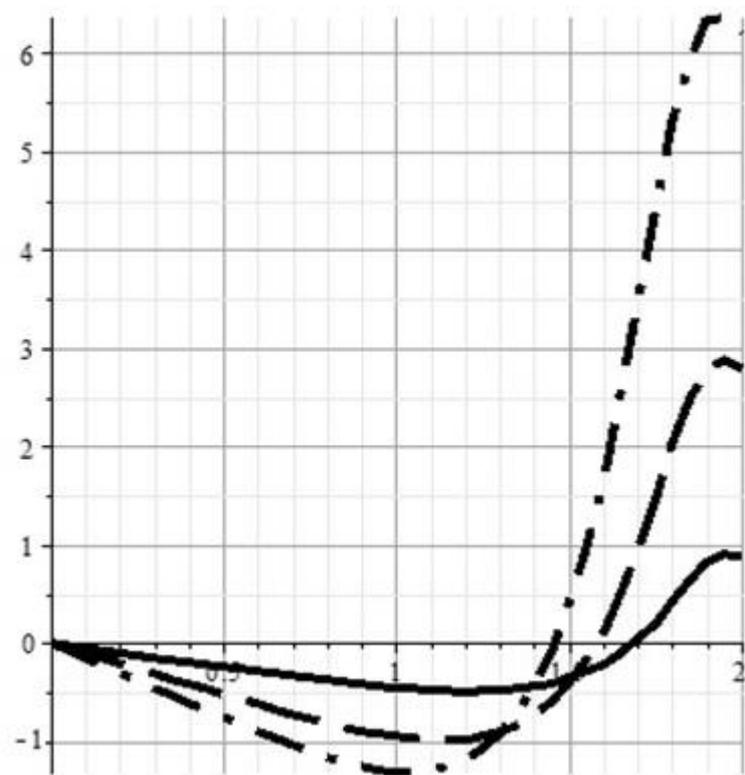
 $H_1(r), \times 10^{-11}$ 


Рис. 5.7.5

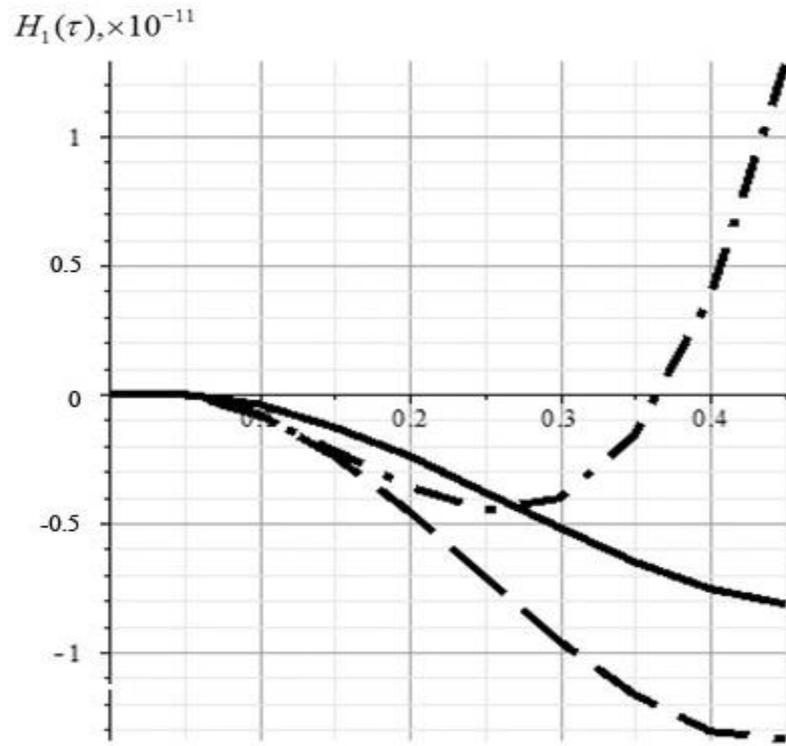


Рис. 5.7.6

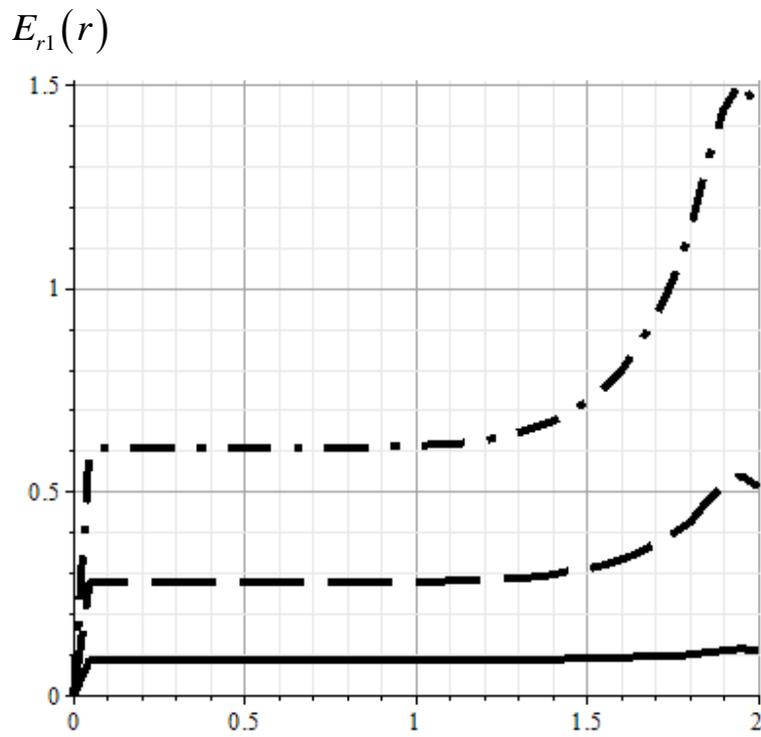


Рис. 5.7.7

$$E_{r1}(\tau)$$

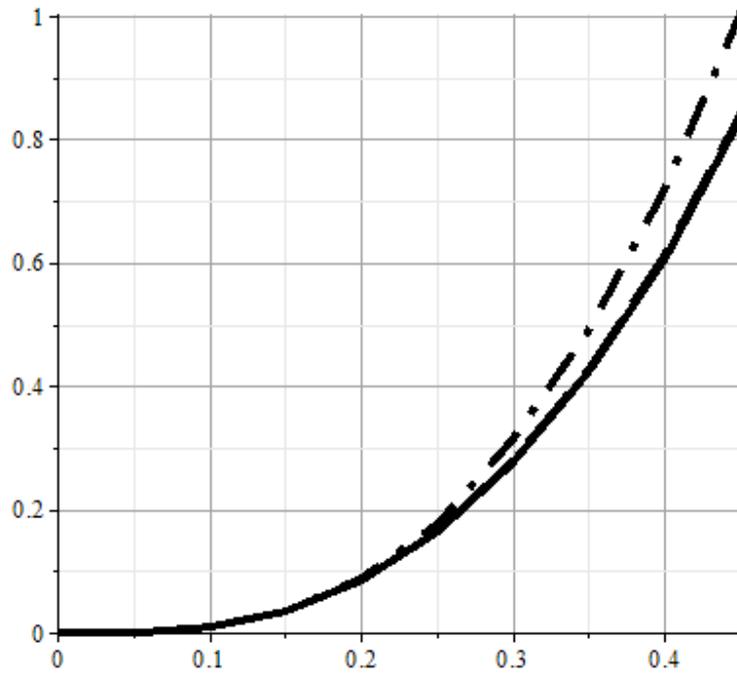


Рис. 5.7.8

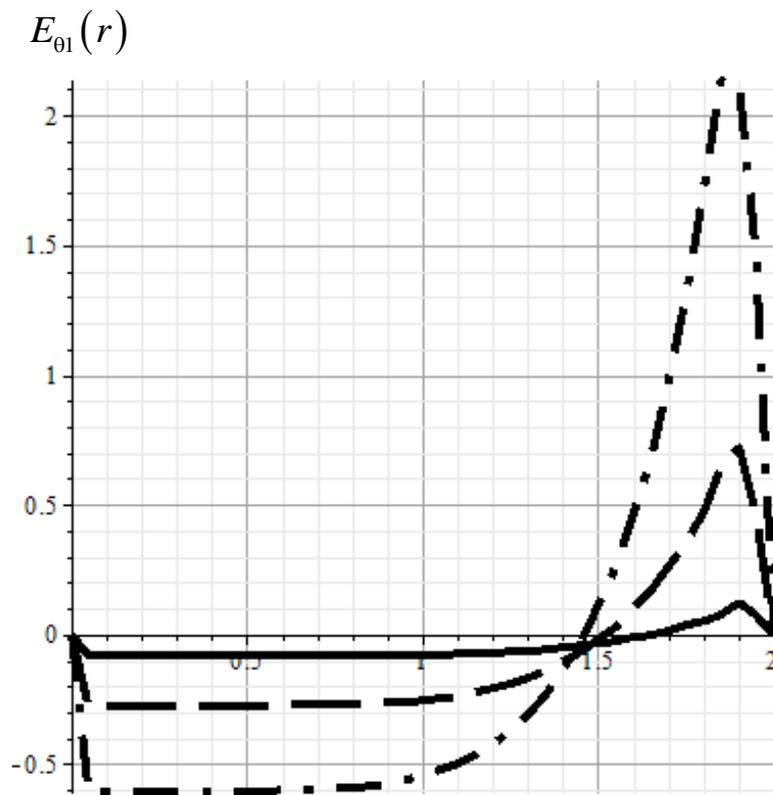


Рис. 5.7.9

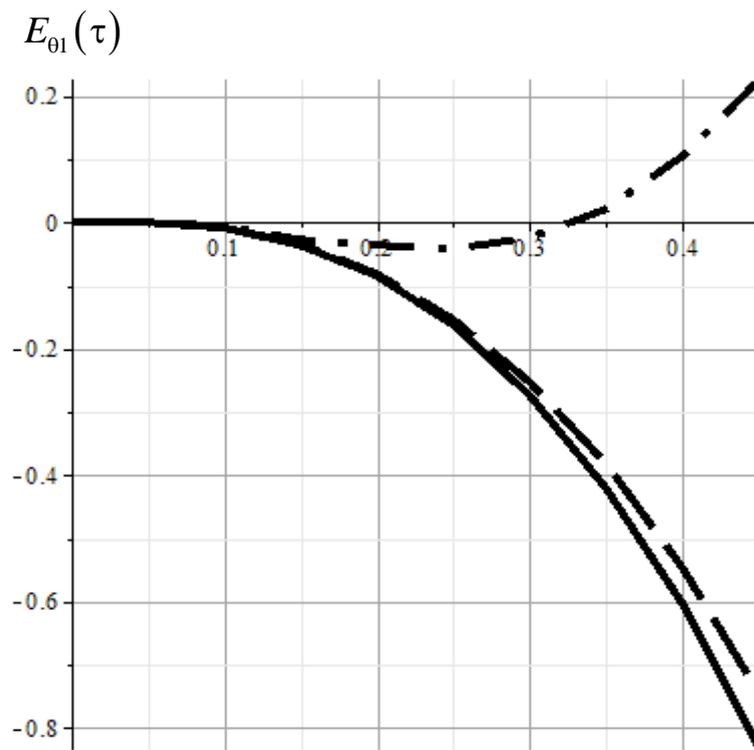


Рис. 5.7.10

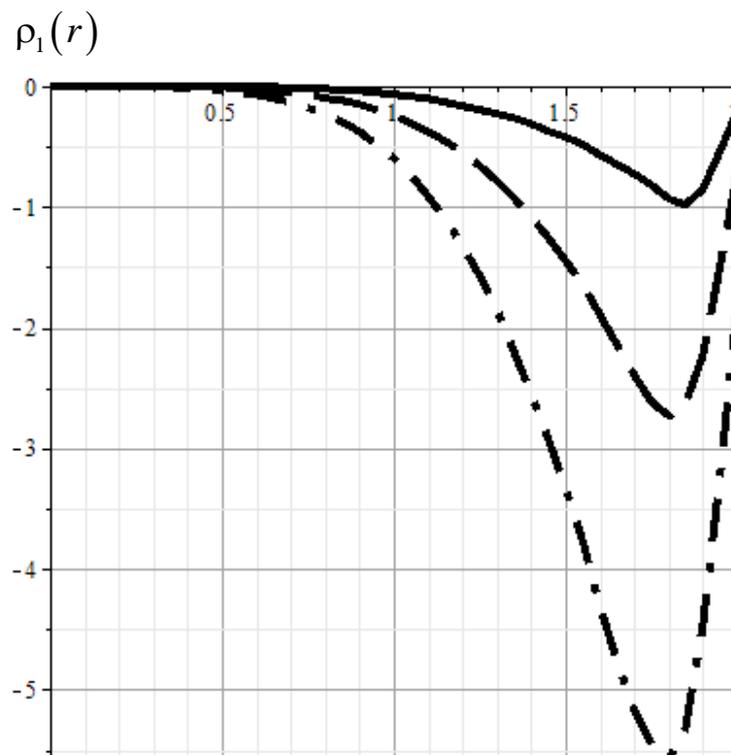


Рис. 5.7.11

$\rho_1(\tau)$

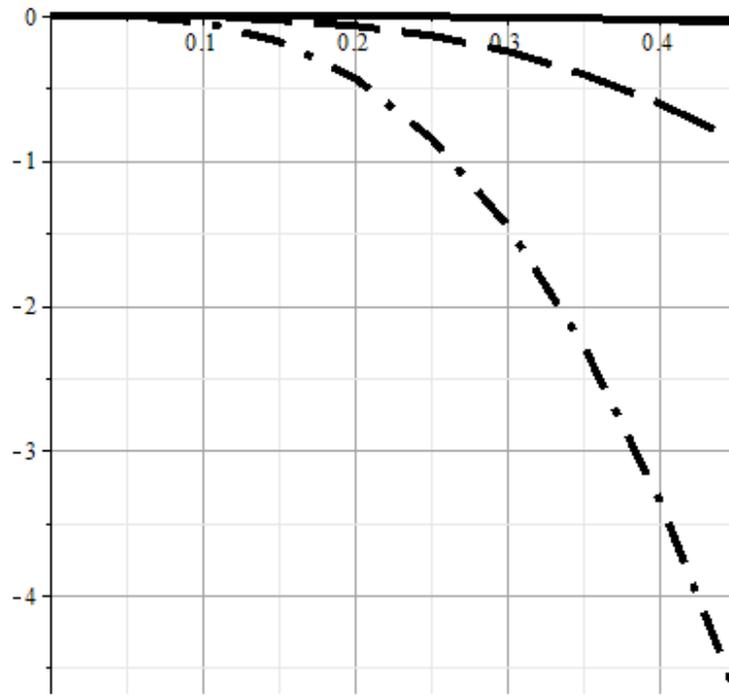


Рис. 5.7.12

На рисунке 5.7.13 изображена сходимость по числу членов степенного ряда на примере функции  $u_1(r, 0.3)$  Сплошная кривая отвечает -  $u_1(r, 0.3) = u_{11}(r, 0.3)\alpha$ , штрихованная кривая -  $u_1(r, 0.3) = u_{11}(r, 0.3)\alpha + u_{12}(r, 0.3)\alpha^2$ , штрих-пунктирная кривая -  $u_1(r, 0.3) = u_{11}(r, 0.3)\alpha + u_{12}(r, 0.3)\alpha^2 + u_{13}(r, 0.3)\alpha^3$ .

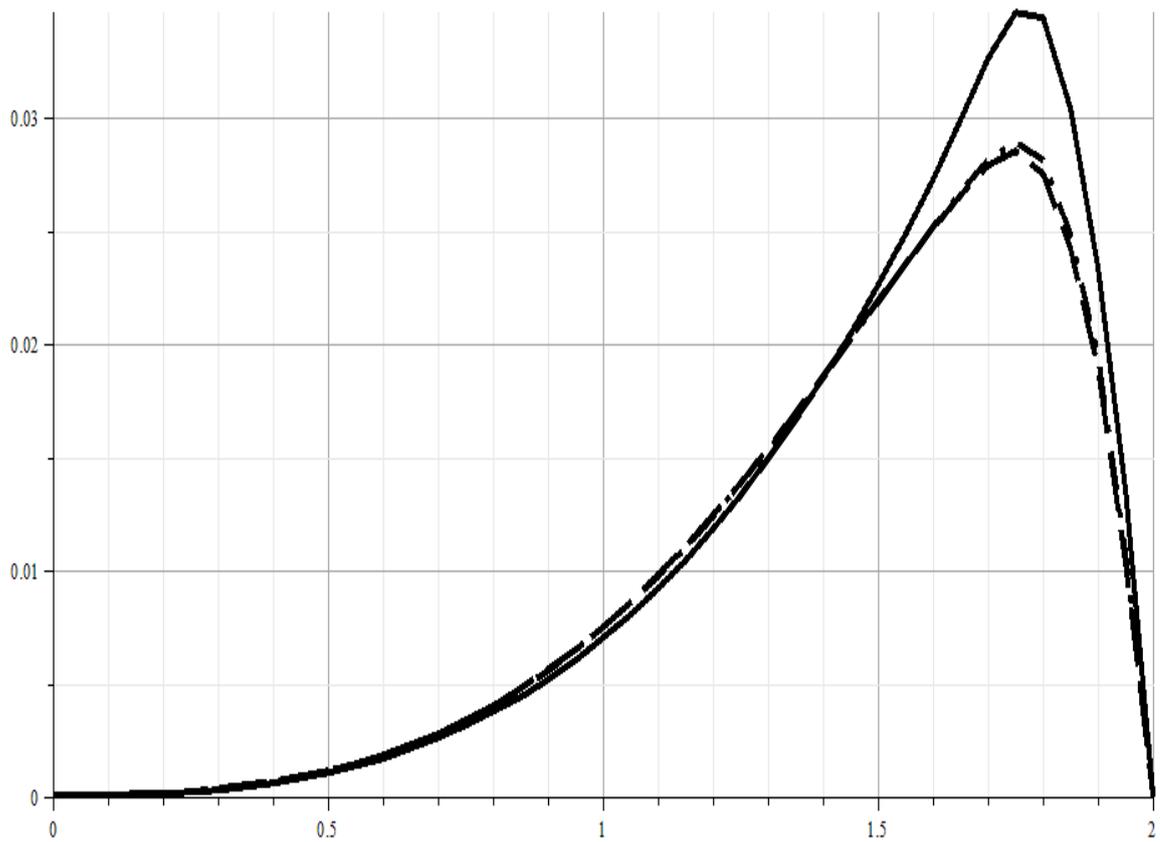


Рис. 5.7.13

## Приложение

### § П.1. Оригиналы преобразований Лапласа и Фурье для некоторых функций

Здесь в виде таблиц приводятся оригиналы некоторых, не вошедших в широко известные справочники [30,122,123,173], изображений преобразований Лапласа (таблица П.1.1), одномерного экспоненциального преобразования Фурье (таблица П.1.2) и совместного преобразования Лапласа-Фурье (таблица П.1.3) [108,171]. В необходимых случаях они сопровождаются соответствующими выкладками.

Основные обозначения следующие:

- для преобразования Фурье верхний индекс  $F$  указывает на изображение по координате  $x$ ,  $q$  - соответствующий параметр, знак « $\div$ » указывает на соответствие между оригиналами и изображениями;

- для преобразования Лапласа верхний индекс « $L$ » соответствует изображению по времени  $t$ ,  $s$  - соответствующий параметр, знак « $\dot{\div}$ » указывает на соответствие между оригиналами и изображениями;

-  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  - модифицированная функция Бесселя [1, 111];

-  $H(t)$  - функция Хевисайда,  $\delta(t)$  - дельта-функция Дирака,  $x_+^\beta = x^\beta H(x)$ ;

-  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

**Таблица П.1.1**

№	$f^F(q)$	$f(x)$ ,
1	$\frac{i}{q} e^{-z q }, \quad z > 0$	$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{z}$

**Таблица П.1.2**

№	$f^L(s)$	$f(t) \quad (a \geq 0, \alpha, \beta > 0)$

1	$\frac{K_\nu \left[ \alpha \sqrt{(s+a)(s+b)} \right]}{\left[ (s+a)(s+b) \right]^{\nu/2}}, z > 0$	$\frac{2^{\nu-1} (t^2 - \alpha^2)_+^{\nu/2-1/4} \sqrt{\pi}}{\alpha^\nu (a-b)^{\nu-1/2}} e^{-(a+b)t/2} \times$ $\times I_{\nu-1/2} \left( \frac{a-b}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right)$
2	$K_0 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right]$	$(t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} e^{-at/2} C(t^2, 1)$
3	$\frac{K_1 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right]}{\sqrt{s(s+a)}}$	$\frac{2}{\alpha a} e^{-at/2} S(t^2, 1) H(t - \alpha)$
4	$\frac{K_2 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right]}{s(s+a)}$	$\frac{4}{\alpha^2 a^2} e^{-at/2} \left[ \sqrt{t^2 - \alpha^2} C(t^2, 1) - \right.$ $\left. - \frac{2}{a} S(t^2, 1) \right] H(t - \alpha)$
5	$e^{-\alpha \sqrt{s(s+a)}}$	$e^{-at/2} \left[ \delta(t - \alpha) + \right.$ $\left. + \frac{a\alpha}{2\sqrt{t^2 - \alpha^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) H(t - \alpha) \right]$
6	$f^L \left[ \sqrt{s(s+a)} \right] e^{-\alpha \sqrt{s(s+a)}}$	$e^{-at/2} \left[ \frac{a}{2} \int_\alpha^t \frac{\tau f(\tau - \alpha)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \tau^2} \right) d\tau + \right.$ $\left. + f(t - \alpha) \right] H(t - \alpha)$

Таблица П.1.3

№	$f^{LF}(q, s) \quad (z > 0)$	$f(x, t) \quad (a \geq 0, \alpha > 0)$
1	$\frac{e^{-z\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}$	$\frac{e^{-at/2}}{\pi} (t^2 - \alpha^2 r^2)_+^{-1/2} C(t^2, r^2)$
2	$\frac{e^{-z\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{s+a}$	$\frac{z}{\pi r^2} \left[ \frac{2tC(t^2, r^2)}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} - S(t^2, r^2) \right] e^{-at/2} H(t - \alpha r)$
3	$\frac{iqe^{-z\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{(s+a)\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}$	$\frac{2x}{\pi \alpha r^2} e^{-at/2} S(t^2, r^2) H(t - \alpha r)$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$C(t, r) = \operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t - \alpha^2 r} \right), \quad S(t, r) = \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t - \alpha^2 r} \right)$$

1. *Строки 1-4 таблицы П.1.2.* Сначала рассмотрим следующие соответствия в [123] (для их сравнения обозначения по отношению к первоисточнику изменены;  $\alpha > 0, a > 0$ ):

- № 29.144

$$\frac{K_\nu \left[ \alpha \sqrt{(s+a)(s+b)} \right]}{\left[ (s+a)(s+b) \right]^{v/2}} \doteq \frac{2^{\nu-1} (t^2 - \alpha^2)_+^{v/2} \sqrt{\pi}}{\alpha^\nu (a-b)^{\nu-1/2}} e^{-(a+b)\tau/2} I_{\nu-1/2} \left( \frac{a-b}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right), \quad (\text{П.1.1})$$

- № 29.154

$$\frac{K_\nu \left[ \alpha \sqrt{s^2 - a^2} \right]}{\left( \sqrt{s^2 - a^2} \right)^{v/2}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(t^2 - \alpha^2)_+^{v/2-1/4}}{\alpha^\nu a^{\nu-1/2}} I_{\nu-1/2} \left( a \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right). \quad (\text{П.1.2})$$

Полагая в (П.1.1)  $b = -a$ , получаем следующий результат:

$$\frac{K_\nu \left[ \alpha \sqrt{s^2 - a^2} \right]}{\left( \sqrt{s^2 - a^2} \right)^{v/2}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(t^2 - \alpha^2)_+^{v/2}}{\alpha^\nu a^{\nu-1/2}} I_{\nu-1/2} \left( a \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right), \text{ который не совпадает с}$$

(П.1.2).

С целью проверки, какое из этих соответствий верное, рассмотрим (П.1.2) при  $\nu = 0$ :

$$\begin{aligned} K_0 \left[ \alpha \sqrt{s^2 - a^2} \right] &\doteq \sqrt{\frac{\pi a}{2}} (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/4} I_{-1/2} \left( a \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} \left( e^{a\sqrt{t^2 - \alpha^2}} + e^{-a\sqrt{t^2 - \alpha^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

Здесь учтено равенство [1, 111]:

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{ch} z. \quad (\text{П.1.4})$$

Проверку соответствия (П.1.3) удобнее провести, определяя изображение правой части:

$$\left( e^{a\sqrt{t^2-\alpha^2}} + e^{-a\sqrt{t^2-\alpha^2}} \right) (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} \doteq I_{1+}(s) + I_{1-}(s),$$

$$I_{1\pm}(s) = \int_0^\infty e^{\pm a\sqrt{\tau^2-\alpha^2}-s\tau} (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} dt = \int_\alpha^\infty \frac{e^{\pm a\sqrt{t^2-\alpha^2}-st}}{\sqrt{t^2-\alpha^2}} dt. \quad (\text{П.1.5})$$

Поскольку изображение является аналитической функцией в некоторой правой полуплоскости параметра  $s$ , то его достаточно определить на действительной оси, полагая, что  $\text{Im } s = 0, \text{Re } s > a$ . Учитывая это, выполним в интегралах  $I_{1\pm}(s)$  соответственно замену переменной интегрирования:

$$y_\pm = \pm a\sqrt{\tau^2 - \alpha^2} - st, \quad y_\pm(\alpha) = -\alpha s. \quad (\text{П.1.6})$$

Для этих функций имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_-(\tau) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_+(t) = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} = -\infty.$$

Их исследование показывает, что нули отсутствуют и имеются наклонные асимптоты:  $y = -(s+a)t$  и  $y = \mp(s \mp a)t$ .

Кроме этого, функция  $y_-(t)$  монотонно убывающая, а для производной функции  $y_+(t)$  справедливо равенство:

$$\lim_{t \rightarrow \alpha+0} \dot{y}_+ = +\infty,$$

и в точке  $t_0 = \frac{\alpha s}{\sqrt{s^2 - a^2}}$  она имеет максимум  $y_+(t_0) = -\alpha\sqrt{s^2 - a^2}$ .

Качественно графики этих функций изображены на рис П.1.1. Штрихпунктирные линии соответствуют асимптотам, сплошная кривая -  $y_+(t)$ , штрихованная -  $y_-(t)$ .

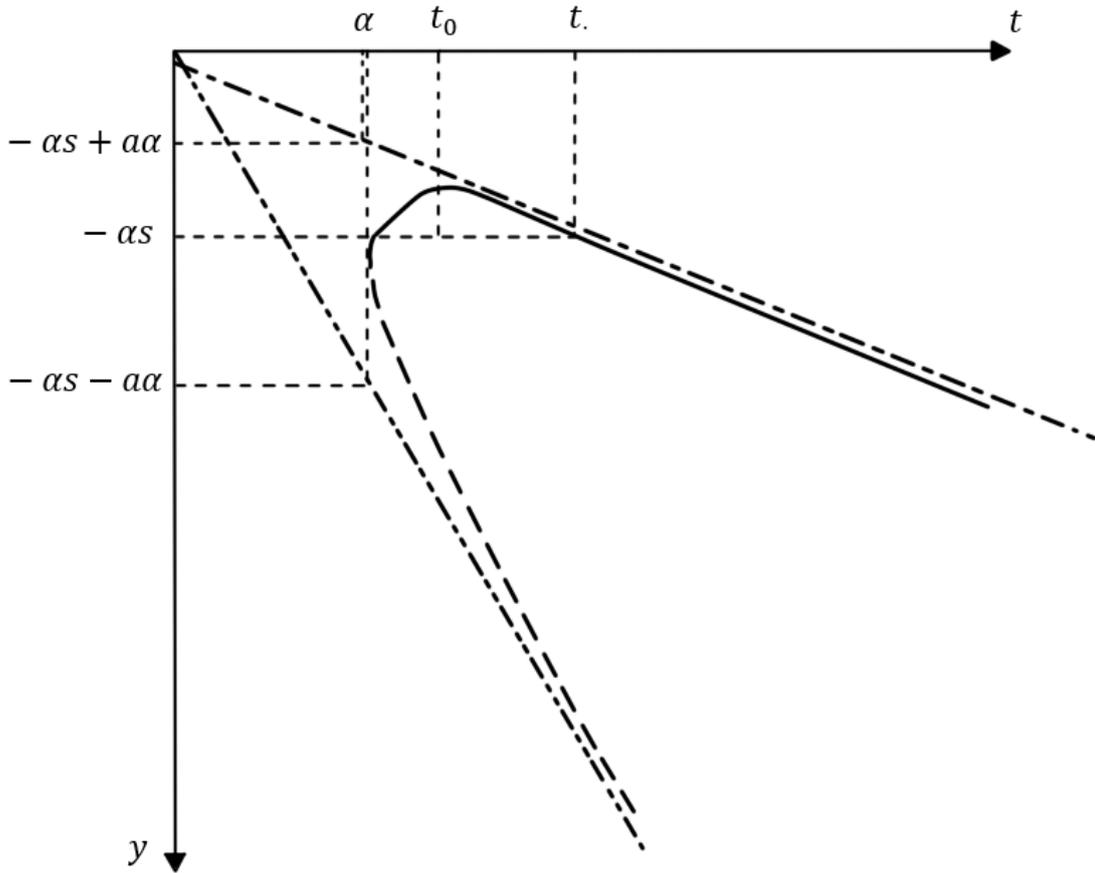


Рис. П.1.1

Для обратных функций справедливы равенства:

- для  $y_-^{-1}(y)$  при  $y \leq -\alpha s$  ( $\alpha \leq t < \infty$ ) и для  $y_+^{-1}(y)$  при  $-\alpha s \leq y \leq y_0$  ( $\alpha \leq t \leq t_0$ )

$$t = y_+^{-1}(y) = y_-^{-1}(y) = \frac{-sy - a\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}{s^2 - a^2}; \quad (\text{П.1.7})$$

- для  $y_+^{-1}(y)$  при  $y \leq y_0$  ( $t \geq t_0$ )

$$t = y_+^{-1}(y) = \frac{-sy + a\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}{s^2 - a^2}. \quad (\text{П.1.8})$$

Из (П.1.5) находим дифференциалы:

$$\begin{aligned} dy_{\pm} &= \pm a \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} - sdt, \quad \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} = \frac{dy}{\pm at - s\sqrt{t^2 - \alpha^2}} = \\ &= \frac{dy}{\pm at - s\frac{y+st}{\pm a}} = \frac{\pm a dy}{a^2 t - s(y+st)} = \frac{\mp a dy}{sy + (s^2 - a^2)t}. \end{aligned}$$

Учитывая в этих равенствах формулы (П.1.7) и (П.1.8), приходим к следующим результатам:

- для  $y_-^{-1}(y)$  при  $y \leq -\alpha s$  ( $\alpha \leq \tau < \infty$ ) и для  $y_+^{-1}(y)$  при  $-\alpha s \leq y \leq y_0$  ( $\alpha \leq t \leq t_0$ )

$$\frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} = \frac{\pm dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}; \quad (\text{П.1.9})$$

- для  $y_+^{-1}(y)$  при  $y \leq y_0$  ( $t \geq t_0$ )

$$\frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}. \quad (\text{П.1.10})$$

Тогда результат замены переменной интегрирования для интегралов выглядит следующим образом:

$$I_{1-}(s) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{t^2 - \alpha^2} - st}}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} dt = \int_{s\alpha}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}; \quad (\text{П.1.11})$$

$$I_{1+}(s) = -\int_{s\alpha}^{-y_0} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}} + \int_{-y_0}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}. \quad (\text{П.1.12})$$

Отсюда получаем, что сумма этих интегралов имеет вид:

$$I_{1+}(s) + I_{1-}(s) = 2 \int_{-y_0}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}}.$$

Используя табличный интеграл [111], получаем равенство

$$\int_b^{\infty} \frac{e^{-py} dy}{\sqrt{y^2 - b^2}} = K_0(bp). \quad (\text{П.1.13})$$

Подставляя его в (П.1.4), а затем в (П.1.2), приходим к следующему соответствию:

$$\frac{1}{2} \left( e^{a\sqrt{t^2 - \alpha^2}} + e^{-a\sqrt{t^2 - \alpha^2}} \right) (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} \doteq \int_{-y_0}^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2(s^2 - a^2)}} = K_0 \left( \alpha \sqrt{s^2 - a^2} \right).$$

Таким образом, делаем вывод, что формула (П.1.1) ошибочна и должна иметь вид:

$$\frac{K_\nu \left[ \alpha \sqrt{(s+a)(s+b)} \right]}{\left[ (s+a)(s+b) \right]^{v/2}} \doteq \frac{2^{\nu-1} (t^2 - \alpha^2)_+^{v/2-1/4} \sqrt{\pi}}{\alpha^\nu (a-b)^{\nu-1/2}} e^{-(a+b)t/2} I_{\nu-1/2} \left( \frac{a-b}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right). \quad (\text{П.1.14})$$

Как частный случай (П.1.2) получаем следующие результаты:

$$K_0 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right] \doteq (t^2 - \alpha^2)_+^{-1/2} e^{-at/2} \text{ch} \frac{a \sqrt{t^2 - \alpha^2}}{2}; \quad (\text{П.1.15})$$

$$\frac{K_1 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right]}{\sqrt{s(s+a)}} \doteq \frac{2}{\alpha a} e^{-at/2} \text{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) H(t - \alpha); \quad (\text{П.1.16})$$

$$\frac{K_2 \left[ \alpha \sqrt{s(s+a)} \right]}{s(s+a)} \doteq \frac{4}{\alpha^2 a^2} e^{-at/2} \left[ \sqrt{t^2 - \alpha^2} \text{ch} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) - \frac{2}{a} \text{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) \right] H(t - \alpha). \quad (\text{П.1.17})$$

Здесь использовано (П.1.4), а также следующие аналогичные равенства [111,1]:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \text{sh} z. \quad (\text{П.1.18})$$

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \text{ch} z - \frac{\text{sh} z}{z} \right). \quad (\text{П.1.19})$$

2. *Строка 5 таблицы П.1.2.* Используем свойства преобразования Лапласа

$$e^{-\alpha \sqrt{s(s+a)}} = e^{-\alpha \sqrt{(s+a/2)^2 - a^2/4}} \doteq e^{-at/2} \left[ e^{-\alpha \sqrt{s^2 - a^2/4}} \right]^{L^{-1}},$$

а затем таблицы оригиналов из [108,1]:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha \sqrt{s^2 - a^2/4}} &= e^{-\alpha \sqrt{s^2 - a^2/4}} - e^{-\alpha s} + e^{-\alpha s} \doteq \\ &\doteq \frac{a\alpha}{2\sqrt{t^2 - \alpha^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) H(t - \alpha) + \delta(t - \alpha). \end{aligned}$$

Из этих двух равенств получаем требуемый результат:

$$e^{-\alpha\sqrt{s(s+a)}} \doteq e^{-at/2} \left[ \frac{a\alpha}{2\sqrt{t^2 - \alpha^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2} \right) H(t - \alpha) + \delta(t - \alpha) \right].$$

3. *Строка 6 таблицы П.1.2.* Применяем теорему Эфроса, свойства дельта-функции Дирака и соответствие 5 из этой же таблицы:

$$\begin{aligned} f^L \left[ \sqrt{s(s+a)} \right] e^{-\alpha\sqrt{s(s+a)}} &\doteq \int_0^\infty f(\tau) \left[ e^{-(\tau+\alpha)\sqrt{s(s+a)}} \right]^{L^{-1}} d\tau = e^{-at/2} \int_0^\infty f(\tau) \left[ \delta(t - \tau - \alpha) + \right. \\ &+ \left. \frac{a(\tau + \alpha)}{2\sqrt{t^2 - (\tau + \alpha)^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - (\tau + \alpha)^2} \right) H(t - \tau - \alpha) \right] d\tau = \\ &= e^{-at/2} \left[ f(t - \alpha) + \frac{a}{2} \int_\alpha^t \frac{\tau f(\tau - \alpha)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} I_1 \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \tau^2} \right) d\tau \right] H(t - \alpha). \end{aligned}$$

4. *Строка 1 таблицы П.1.3.* Используем последовательное обращение преобразований Фурье и Лапласа, а также таблицы в [108,123] и П.1.2:

$$\frac{e^{-z\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}} \doteq \frac{1}{\pi} K_0 \left[ \alpha r \sqrt{s(s+a)} \right] \doteq \frac{e^{-at/2}}{\pi} (t^2 - \alpha^2 r^2)_+^{-1/2} \operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \right).$$

5. *Строка 2 таблицы П.1.3.* Используем последовательное обращение преобразований Фурье и Лапласа, а также таблицы в [108,123] и П.1.2:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-z\sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{s+a} &\doteq \frac{\alpha z s}{\pi r} \frac{K_1 \left[ \alpha r \sqrt{s(s+a)} \right]}{\sqrt{s(s+a)}} \doteq \\ &\doteq \frac{2z}{\pi a r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{-at/2} \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \right) H(t - \alpha r) \right] = \\ &= \frac{z}{\pi r^2} \left[ \frac{2t}{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \right) - \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \right) \right] e^{-at/2} H(t - \alpha r). \end{aligned}$$

6. *Строка 3 таблицы П.1.3.* Используем последовательное обращение преобразований Фурье и Лапласа, а также преобразования предыдущего пункта и таблицы в [108,123] и П.1.2:

$$\begin{aligned} & \frac{i q e^{-z \sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}}}{(s+a) \sqrt{q^2 + \alpha^2 s(s+a)}} \div - \frac{1}{\pi(s+a)} \frac{\partial}{\partial x} K_0 \left[ \alpha r \sqrt{s(s+a)} \right] = \\ & = \frac{\alpha x \sqrt{s(s+a)}}{\pi r (s+a)} K_1 \left[ \alpha r \sqrt{s(s+a)} \right] \div \frac{2x}{\pi \alpha r^2} e^{-at/2} \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \right) H(t - \alpha r). \end{aligned}$$

## § П.2. Общие решения уравнений электромагнитного поля и теории упругости в сферической системе координат

Для построения общих решений уравнений (3.2.25) - (3.2.27) и (3.2.29) необходимо иметь общие решения соответствующих однородных систем и уравнений.

Для соответствующего (3.2.29) однородного уравнения и уравнения (3.2.31)

$$\Delta_n H_n^L - s_e^2 \eta_e^2 H_n^L = 0 \quad (\text{П.2.1})$$

это решение имеет вид:

$$H_n^L(r, s) = C_{1n}(s) Z_{1n}(\zeta_e) + C_{2n}(s) Z_{2n}(\zeta_e), \quad \zeta_e = \eta_e r s_e, \quad (\text{П.2.2})$$

где

$$Z_{1n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} K_{n+1/2}(z), \quad Z_{2n}(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} I_{n+1/2}(z)$$

а  $K_\nu(z)$  и  $I_\nu(z)$  - модифицированные функции Бесселя [111,1];  $C_{kn}(s)$  ( $k=1,2$ ) - произвольные функции.

Отметим, что функции  $Z_{kn}(z)$  удовлетворяют уравнению

$$\Delta_n Z_{kn}(z) = Z_{kn}(z) \quad (\text{П.2.3})$$

В случае малого параметра  $\eta_e$  (большой скорости распространения возмущений) можно рассматривать квазистатическое решение. Ему соответствует вытекающее из (П.2.1) уравнение при  $\eta_e = 0$ :

$$r^2 \frac{\partial^2 H_n^L}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial H_n^L}{\partial r} - n(n+1) H_n^L = 0. \quad (\text{П.2.4})$$

Его общее решение уравнения записывается так:

$$H_n^L(r, s) = C_1 r^{-(n+1)} + C_2 r^n. \quad (\text{П.2.5})$$

Для построения общих решений соответствующих (3.2.25) - (3.2.27) однородных уравнений используем представления (1.5.22) перемещений через их потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$ , полагая, что они удовлетворяют уравнениям (1.5.36) и (1.5.37) при  $\Phi = \Psi \equiv 0$ .

Указанные потенциалы представляем в виде аналогичных (3.1.6) рядов:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n P_n(\cos \theta), \quad \psi = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (\text{П.2.6})$$

Подставляя их в (1.5.22), приходим к следующим равенствам:

$$u_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} \varphi_n \quad (n \geq 0), \quad v_n = -\frac{1}{r} \left[ \varphi_n + \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_n) \right] \quad (n \geq 1). \quad (\text{П.2.7})$$

Кроме того, из однородных аналогов уравнений (1.5.36) и (1.5.37) вытекают следующие уравнения для коэффициентов рядов (П.2.6):

$$\ddot{\varphi}_n = \Delta_n \varphi_n \quad (n \geq 0); \quad (\text{П.2.8})$$

$$\eta^2 \ddot{\psi}_n = \Delta_n \psi_n \quad (n \geq 1). \quad (\text{П.2.9})$$

Начальным условиям (3.1.18) отвечают следующие равенства:

$$\varphi_n|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 0), \quad \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (\text{П.2.10})$$

Тогда в пространстве преобразований Лапласа уравнения (П.2.8) и (П.2.9) записываются так:

$$s^2 \varphi_n^L = \Delta_n \varphi_n^L \quad (n \geq 0); \quad (\text{П.2.11})$$

$$s^2 \eta^2 \psi_n^L = \Delta_n \psi_n^L \quad (n \geq 1). \quad (\text{П.2.12})$$

Общие решения этих уравнений с учетом обозначений (П.2.2) имеют вид:

$$\varphi_n^L(r, s) = \tilde{A}_{1n}(s) Z_{1n}(\xi) + \tilde{A}_{2n}(s) Z_{2n}(\xi), \quad \xi = rs; \quad (\text{П.2.13})$$

$$\psi_n^L(r, s) = \tilde{B}_{1n}(s) Z_{1n}(\zeta) + \tilde{B}_{2n}(s) Z_{2n}(\zeta), \quad \zeta = \eta rs, \quad (\text{П.2.14})$$

где  $A_{kn}(s)$  и  $B_{kn}(s)$  ( $k=1,2$ ) - произвольные функции.

Подставляя теперь (П.2.13) и (П.2.14) в (П.2.7), находим общие решения однородных уравнений, соответствующих (3.2.25) - (3.2.27):

- при  $n=0$

$$u_0^L = A_{10}(s) X_{10}(\xi) + A_{20}(s) X_{20}(\xi), \quad A_{k0}(s) = s \tilde{A}_{k0}(s) \quad (k=1,2); \quad (\text{П.2.15})$$

- при  $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} u_n^L \\ v_n^L \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^2 A_{kn}(s) \mathbf{U}_{kn}(\xi) + \sum_{k=1}^2 B_{kn}(s) \mathbf{U}_{k+2,n}(\zeta), \quad \mathbf{U}_{kn}(z) = \begin{pmatrix} X_{kn}(z) \\ Y_{kn}(z) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.16})$$

где  $A_{kn}(s) = s\tilde{A}_{kn}(s)$ ,  $B_{kn}(s) = \eta s\tilde{B}_{kn}(s)$  и

$$\begin{aligned} X_{1n}(z) &= Z'_{1n}(z) = -\frac{1}{2z^{3/2}} K_{n+1/2}(z) + \\ &+ \frac{1}{z^{3/2}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) K_{n+1/2}(z) - zK_{n+3/2}(z) \right] = \frac{1}{z^{3/2}} [nK_{n+1/2}(z) - zK_{n+3/2}(z)], \\ X_{2n}(z) &= Z'_{2n}(z) = -\frac{1}{2z^{3/2}} I_{n+1/2}(z) + \\ &+ \frac{1}{z^{3/2}} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) I_{n+1/2}(z) + zI_{n+3/2}(z) \right] = \frac{1}{z^{3/2}} [nI_{n+1/2}(z) + zI_{n+3/2}(z)], \\ X_{3n}(z) &= \frac{n(n+1)}{z} Z_{1n}(z), \quad X_{4n}(z) = \frac{n(n+1)}{z} Z_{2n}(z); \end{aligned} \quad (\text{П.2.17})$$

$$\begin{aligned} Y_{1n}(z) &= -\frac{1}{z} Z_{1n}(z), \quad Y_{2n}(z) = -\frac{1}{z} Z_{2n}(z), \\ Y_{3n}(z) &= -z^{-1} [zZ_{1n}(z)]' = -z^{-1} Z_{1n}(z) - Z'_{1n}(z) = \\ &= -X_{1n}(z) - \frac{1}{z} Z_{1n}(z) = -\frac{1}{z^{3/2}} [(n+1)K_{n+1/2}(z) - zK_{n+3/2}(z)], \\ Y_{4n}(z) &= -z^{-1} [zZ_{2n}(z)]' = -z^{-1} Z_{2n}(z) - Z'_{2n}(z) = \\ &= -X_{2n}(z) - \frac{1}{z} Z_{2n}(z) = -\frac{1}{z^{3/2}} [(n+1)I_{n+1/2}(z) + zI_{n+3/2}(z)]. \end{aligned} \quad (\text{П.2.18})$$

Отметим также, что модифицированные функции Бесселя полуцелого индекса выражаются через элементарные функции [1,110,111]:

$$\begin{aligned} K_{n+1/2}(z) &= \frac{1}{z^{n+1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n0}(z) e^{-z}, \\ I_{n+1/2}(z) &= \frac{(-1)^n}{z^{n+1/2} \sqrt{2\pi}} [R_{n0}(-z) e^z - R_{n0}(z) e^{-z}], \end{aligned} \quad (\text{П.2.19})$$

где

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k (n-k)! k!}. \quad (\text{П.2.20})$$

Найдем также связь общих решений уравнений (3.1.24) с общими решениям неоднородных уравнений (1.5.44) и (1.5.45). С этой целью функции  $\chi$  и  $\omega$ , а также правые части уравнений представим в виде аналогичных (3.1.6) и (П.2.6) рядов

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(u_n, v_n) P_n(\cos \theta), \quad \omega = \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(u_n, v_n) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta), \\ \chi_e &= \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{en} P_n(\cos \theta), \quad \eta^2 \omega_e = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{en} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{П.2.21})$$

Подставляя их в (1.5.44) - (1.5.46), приходим к следующим равенствам:

$$\ddot{\chi}_n = \Delta_n \chi_n + \chi_{en} \quad (n \geq 0); \quad (\text{П.2.22})$$

$$\eta^2 \ddot{\omega}_n = \Delta_n \omega_n + \omega_{en} \quad (n \geq 1); \quad (\text{П.2.23})$$

$$\chi_n(u_n, v_n) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_n)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} v_n, \quad \omega_n(u_n, v_n) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rv_n)}{\partial r} + u_n \right]. \quad (\text{П.2.24})$$

В пространстве преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях (П.2.10) уравнения (П.2.22) и (П.2.23) записываются так:

$$s^2 \chi_n^L = \Delta_n \chi_n^L + \chi_{en}^L \quad (n \geq 0); \quad (\text{П.2.25})$$

$$s^2 \eta^2 \omega_n^L = \Delta_n \omega_n^L + \omega_{en}^L \quad (n \geq 1). \quad (\text{П.2.26})$$

Общие решения последних уравнений с учетом (П.2.2) имеют следующий вид:

$$\chi_n^L = D_{1n}(s) Z_{1n}(rs) + D_{2n}(s) Z_{2n}(rs) + \chi_{n*}^L; \quad (\text{П.2.27})$$

$$\omega_n^L = E_{1n}(s) Z_{1n}(\eta rs) + E_{2n}(s) Z_{2n}(\eta rs) + \omega_{n*}^L, \quad (\text{П.2.28})$$

где  $\chi_{n*}^L$  и  $\omega_{n*}^L$  - частные решения.

Общие решения неоднородных уравнений (3.1.24) согласно (П.2.16) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} u_n^L &= \sum_{k=1}^2 A_{kn}(s) X_{kn}(rs) + \sum_{k=1}^2 B_{kn}(s) X_{k+2,n}(\eta rs) + u_{n*}^L, \\ v_n^L &= \sum_{k=1}^2 A_{kn}(s) Y_{kn}(rs) + \sum_{k=1}^2 B_{kn}(s) Y_{k+2,n}(\eta rs) + v_{n*}^L. \end{aligned} \quad (\text{П.2.29})$$

Подставляя эти равенства в (П.2.24), приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}\chi_n(u_n^L, v_n^L) &= \sum_{k=1}^2 A_{kn} \chi_n [X_{kn}(rs), Y_{kn}(rs)] + \\ &+ \sum_{k=1}^2 B_{kn} \chi_n [X_{k+2,n}(\eta rs), Y_{k+2,n}(\eta rs)] + \chi_n(u_{n^*}^L, v_{n^*}^L), \\ \omega_n(u_n^L, v_n^L) &= \sum_{k=1}^2 A_{kn} \omega_n [X_{kn}(rs), Y_{kn}(rs)] + \\ &+ \sum_{k=1}^2 B_{kn} \omega_n [X_{k+2,n}(\eta rs), Y_{k+2,n}(\eta rs)] + \omega_n(u_{n^*}^L, v_{n^*}^L).\end{aligned}\quad (\text{П.2.30})$$

Для преобразования этих выражений сначала вычислим входящие в (П.2.17) и (П.2.18) производные. Для этого, прежде всего, отметим, что из (П.2.3) с учетом (3.1.14) вытекает равенство:

$$Z_{kn}''(z) = -\frac{2}{z} Z_{kn}'(z) + b_n(z) Z_{kn}(z), \quad b_n(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{z^2}. \quad (\text{П.2.31})$$

Учитывая это соотношение, получаем следующие формулы ( $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned}X_{kn}'(z) &= Z_{kn}''(z) = b_n(z) Z_{kn}(z) - \frac{2}{z} X_{kn}(z), \\ X_{k+2,n}'(z) &= \frac{n(n+1)}{z} \left[ X_{kn}(z) - \frac{1}{z} Z_{kn}(z) \right] = \frac{n(n+1)}{z} [X_{kn}(z) + Y_{kn}(z)] = \\ &= \frac{1}{z} [n(n+1) X_{kn}(z) - X_{k+2,n}(z)];\end{aligned}\quad (\text{П.2.32})$$

$$\begin{aligned}Y_{kn}'(z) &= -\left[ -\frac{1}{z^2} Z_{kn}(z) + \frac{1}{z} X_{kn}(z) \right] = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} Z_{kn}(z) - X_{kn}(z) \right] = \\ &= -\frac{1}{z} [Y_{kn}(z) + X_{kn}(z)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_{k+2,n}'(z) &= -X_{kn}'(z) + \frac{1}{z^2} Z_{kn}(z) - \frac{1}{z} X_{kn}(z) = \\ &= -b_n(z) Z_{kn}(z) + \frac{2}{z} X_{kn}(z) + \frac{1}{z^2} Z_{kn}(z) - \frac{1}{z} X_{kn}(z) = \\ &= -b_n(z) Z_{kn}(z) - \frac{1}{z} Y_{k+2,n}(z) = -c_n(z) Z_{kn}(z) + \frac{1}{z} X_{kn}(z), \quad c_n(z) = b_n(z) - \frac{1}{z^2}.\end{aligned}\quad (\text{П.2.33})$$

Следовательно, для функций входящих в (П.2.30) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\chi_n [X_{kn}(rs), Y_{kn}(rs)] &= sZ_{kn}(rs), \\
\omega_n [X_{kn}(rs), Y_{kn}(rs)] &= 0, \chi_n [X_{k+2,n}(\eta rs), Y_{k+2,n}(\eta rs)] = 0, \\
\omega_n [X_{k+2,n}(\eta rs), Y_{k+2,n}(\eta rs)] &= -\eta sZ_{kn}(\eta rs).
\end{aligned} \tag{П.2.34}$$

Подставляя их в (П.2.30), приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned}
\chi_n (u_n^L, v_n^L) &= s \sum_{k=1}^2 A_{kn} Z_{kn}(rs) + \chi_n (u_{n^*}^L, v_{n^*}^L), \\
\omega_n (u_n^L, v_n^L) &= -\eta s \sum_{k=1}^2 B_{kn} Z_{kn}(\eta rs) + \omega_n (u_{n^*}^L, v_{n^*}^L).
\end{aligned} \tag{П.2.35}$$

Сравнивая теперь его с (П.2.27) и (П.2.28), получаем такую связь постоянных интегрирования и частных решений:

$$\begin{aligned}
D_{kn}(s) &= sA_{kn}(s), E_{kn}(s) = -\eta sB_{kn}, \\
\chi_{n^*}^L &= \chi_n [u_{n^*}^L, v_{n^*}^L], \omega_{n^*}^L = \omega_n [u_{n^*}^L, v_{n^*}^L].
\end{aligned} \tag{П.2.36}$$

### § П.3. Свойства фундаментальных решений уравнений электромагнитного поля в сферической системе координат

Сначала найдем вронскиан  $W(Z_{1n}, Z_{2n})$  указанной в (П.2.2) системы функций. Используя обозначения (П.2.17) и свойства модифицированных функций Бесселя, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
W(Z_{1n}, Z_{2n}) &= \begin{vmatrix} Z_{1n}(z) & Z_{2n}(z) \\ Z'_{1n}(z) & Z'_{2n}(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{1n}(z) & Z_{2n}(z) \\ X_{1n}(z) & X_{2n}(z) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{z^2} \begin{vmatrix} K_{n+1/2}(z) & I_{n+1/2}(z) \\ -zK_{n+3/2}(z) & zI_{n+3/2}(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{z^2}.
\end{aligned} \tag{П.3.1}$$

Здесь использована формула для вронскиана модифицированных функций Бесселя:

$$W[I_\nu(z), K_\nu(z)] = K_\nu(z)I_{\nu+1}(z) + K_{\nu+1}(z)I_\nu(z) = z^{-1}. \tag{П.3.2}$$

Рассмотрим еще один определитель, связанный с этими функциями:

$$P_{en}(x, y) = \begin{vmatrix} Z_{1n}(x) & Z_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}. \tag{П.3.3}$$

Он обладает очевидными свойствами:

$$P_{en}(y, x) = -P_{en}(x, y), P_{en}(x, x) \equiv 0. \quad (\text{П.3.4})$$

Кроме того, имея в виду граничные условия в (3.2.29), с системой функций  $Y_{3n}(z)$  и  $Y_{4n}(z)$  в (П.2.18) свяжем определитель

$$Q_{en}(x, y) = \begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Y_{3n}(y) & Y_{4n}(y) \end{vmatrix}, \quad (\text{П.3.5})$$

который обладает аналогичным (П.3.4) свойством:

$$Q_{en}(y, x) = -Q_{en}(x, y). \quad (\text{П.3.6})$$

Далее введем также следующее обозначение для значения оператора в (П.2.18) по первому аргументу от функции  $P_{en}(x, y)$ :

$$S_{en}(x, y) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} [xP_{en}(x, y)] = - \begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}. \quad (\text{П.3.7})$$

Отметим, что для функций  $P_{en}(x, y)$ ,  $Q_{en}(x, y)$  и  $S_{en}(x, y)$  справедливо равенство:

$$S_{en}(x_1, y_1)S_{en}(x_2, y_2) - Q_{en}(x_1, x_2)P_{en}(y_1, y_2) = S_{en}(x_2, y_1)S_{en}(x_1, y_2). \quad (\text{П.3.8})$$

Аналогично доказываются такие равенства:

$$Q_{en}(x_1, y_1)S_{en}(x_2, y_2) - Q_{en}(x_1, x_2)S_{en}(y_1, y_2) = Q_{en}(x_2, y_1)S_{en}(x_1, y_2); \quad (\text{П.3.9})$$

$$S_{en}(x, y)Z_{kn}(z) + P_{en}(z, y)Y_{k+2,n}(x) = S_{en}(x, z)Z_{kn}(y) \quad (k=1, 2). \quad (\text{П.3.10})$$

Кроме того, отметим, что из (П.2.18), (П.3.5) и (П.3.7) вытекает следующая связь функций  $S_{en}(x, y)$  с  $Q_{en}(x, y)$ :

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} [yS_{en}(x, y)] = \begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Y_{3n}(y) & Y_{4n}(y) \end{vmatrix} = Q_{en}(x, y). \quad (\text{П.3.11})$$

Из формул (П.3.7) и (П.3.11) с учетом (П.3.4) получаем такие равенства для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{en}(x, y)}{\partial x} &= S_{en}(x, y) - \frac{1}{x} P_{en}(x, y), \quad \frac{\partial P_{en}(x, y)}{\partial y} = -S_{en}(y, x) - \frac{1}{y} P_{en}(x, y), \\ \frac{\partial S_{en}(x, y)}{\partial y} &= Q_{en}(x, y) - \frac{1}{y} S_{en}(x, y). \end{aligned} \quad (\text{П.3.12})$$

Далее, используя (П.2.19) и (П.2.20), выразим введенные в этом параграфе функции через экспоненциальные многочлены. Сначала из (П.2.2), (П.2.17) и (П.2.18) получаем соответствующие формулы для  $Z_{1n}(z)$ ,  $Z_{2n}(x, s)$ ,  $X_{1n}(x, s)$ ,  $X_{2n}(x, s)$ ,  $Y_{3n}(x, s)$  и  $Y_{4n}(x, s)$ :

$$Z_{1n}(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n0}(z) e^{-z}, \quad Z_{2n}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+1} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n0}(z); \quad (\text{П.3.13})$$

$$X_{1n}(z) = -\frac{1}{z^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n1}(z) e^{-z}, \quad X_{2n}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+2} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n1}(z); \quad (\text{П.3.14})$$

$$Y_{3n}(z) = \frac{1}{z^{n+2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{n3}(z) e^{-z}, \quad Y_{4n}(z) = \frac{(-1)^n}{z^{n+2} \sqrt{2\pi}} \Lambda_{n3}(z). \quad (\text{П.3.15})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_{nk}(z) &= R_{nk}(-z) e^z - R_{nk}(z) e^{-z} \quad (k = 0, 1, 3), \\ R_{n3}(z) &= R_{n1}(z) - R_{n0}(z), \quad R_{n1}(z) = R_{n+1,0}(z) - nR_{n0}(z). \end{aligned} \quad (\text{П.3.16})$$

Далее, подставляя последние равенства в (П.3.3), (П.3.5) и (П.3.7), приходим к следующим представлениям:

$$P_{en}(x, y) = \begin{vmatrix} Z_{1n}(x) & Z_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{2x^{n+1} y^{n+1}} E_{00n}(x, y); \quad (\text{П.3.17})$$

$$S_{en}(x, y) = -\begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{2x^{n+2} y^{n+1}} E_{30n}(x, y); \quad (\text{П.3.18})$$

$$Q_{en}(x, y) = \begin{vmatrix} Y_{3n}(x) & Y_{4n}(x) \\ Y_{3n}(y) & Y_{4n}(y) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{2x^{n+2} y^{n+2}} E_{33n}(x, y). \quad (\text{П.3.19})$$

Здесь

$$E_{kln}(x, y) = R_{nk}(x) R_{nl}(-y) e^{y-x} - R_{nk}(-x) R_{nl}(y) e^{x-y} \quad (k, l = 0, 1, 3) \quad (\text{П.3.20})$$

Из формул (П.3.17) - (П.3.19) вытекают следующие аналоги равенств (П.3.8) и (П.3.9) для экспоненциальных многочленов (П.3.20):

$$E_{30n}(x_1, y_1) E_{30n}(x_2, y_2) - E_{33n}(x_1, x_2) E_{00n}(y_1, y_2) = E_{30n}(x_2, y_1) E_{30n}(x_1, y_2), \quad (\text{П.3.21})$$

$$E_{33n}(x_1, y_1) E_{30n}(x_2, y_2) - E_{33n}(x_1, x_2) E_{30n}(y_1, y_2) = E_{33n}(x_2, y_1) E_{30n}(x_1, y_2). \quad (\text{П.3.22})$$

Кроме того, из (П.3.20) получаем следующие свойства функций  $E_{kln}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} E_{kkn}(y, x) &= -E_{kkn}(x, y)E_{kln}(x, -y) = \\ &= -E_{kln}(-x, y), E_{kln}(-x, -y) = -E_{kln}(x, y). \end{aligned} \quad (\text{П.3.23})$$

#### § П.4. Свойства фундаментальных решений уравнений теории упругости в сферической системе координат

Найдем вронскиан системы вектор-функций  $\mathbf{U}_{1n}(\xi)$ ,  $\mathbf{U}_{2n}(\xi)$ ,  $\mathbf{U}_{3n}(\zeta)$ ,  $\mathbf{U}_{4n}(\zeta)$  в (П.2.16) при  $n \geq 1$ :

$$W_U = |\mathbf{X}_n|, \mathbf{X}_n(r, s) = \begin{pmatrix} X_{1n}(\xi) & X_{2n}(\xi) & X_{3n}(\zeta) & X_{4n}(\zeta) \\ sX'_{1n}(\xi) & sX'_{2n}(\xi) & \eta sX'_{3n}(\zeta) & \eta sX'_{4n}(\zeta) \\ Y_{1n}(\xi) & Y_{2n}(\xi) & Y_{3n}(\zeta) & Y_{4n}(\zeta) \\ sY'_{1n}(\xi) & sY'_{2n}(\xi) & \eta sY'_{3n}(\zeta) & \eta sY'_{4n}(\zeta) \end{pmatrix} \quad (\text{П.4.1})$$

Сначала вычислим входящие в (П.4.1) производные. Для этого, прежде всего, отметим, что из (П.2.3) с учетом (3.1.14) вытекает равенство:

$$Z''_{kn}(z) = -\frac{2}{z}Z'_{kn}(z) + b_n(z)Z_{kn}(z), b_n(z) = 1 + \frac{n(n+1)}{z^2}. \quad (\text{П.4.2})$$

Учитывая это соотношение, из (П.2.17) и (П.2.18) получаем следующие формулы для производных ( $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} X'_{kn}(z) &= Z''_{kn}(z) = b_n(z)Z_{kn}(z) - \frac{2}{z}X_{kn}(z), \\ X'_{k+2,n}(z) &= \frac{n(n+1)}{z} \left[ X_{kn}(z) - \frac{1}{z}Z_{kn}(z) \right] = \frac{n(n+1)}{z} [X_{kn}(z) + Y_{kn}(z)] = \\ &= \frac{1}{z} [n(n+1)X_{kn}(z) - X_{k+2,n}(z)]; \end{aligned} \quad (\text{П.4.3})$$

$$\begin{aligned}
Y'_{kn}(z) &= -\left[-\frac{1}{z^2}Z_{kn}(z) + \frac{1}{z}X_{kn}(z)\right] = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}Z_{kn}(z) - X_{kn}(z)\right] = \\
&= -\frac{1}{z}\left[Y_{kn}(z) + X_{kn}(z)\right], \\
Y'_{k+2,n}(z) &= -X'_{kn}(z) + \frac{1}{z^2}Z_{kn}(z) - \frac{1}{z}X_{kn}(z) = \tag{П.4.4} \\
&= -b_n(z)Z_{kn}(z) + \frac{2}{z}X_{kn}(z) + \frac{1}{z^2}Z_{kn}(z) - \frac{1}{z}X_{kn}(z) = \\
&= -b_n(z)Z_{kn}(z) - \frac{1}{z}Y_{k+2,n}(z) = -c_n(z)Z_{kn}(z) + \frac{1}{z}X_{kn}(z), \quad c_n(z) = b_n(z) - \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Для вычисления вронскиана в (П.4.1) используем теорему Лапласа [41,42]:

$$W_U = M_{12}^{12}M_{34}^{34} - M_{12}^{13}M_{34}^{24} + M_{12}^{14}M_{34}^{23} + M_{12}^{23}M_{34}^{14} - M_{12}^{24}M_{34}^{13} + M_{12}^{34}M_{34}^{12}. \tag{П.4.5}$$

Здесь  $M_{kl}^{ij}$  - миноры матрицы  $\mathbf{X}_n$ . Они в соответствии с (П.3.1), (П.4.1), (П.4.2) и (П.4.3) вычисляются так:

$$\begin{aligned}
M_{12}^{12}(r,s) &= sW[X_{1n}(\xi), X_{2n}(\xi)] = \frac{1}{r^3s^3}, \\
M_{12}^{14}(r,s) &= -\frac{1}{r^4s^3}, \\
M_{12}^{23}(r,s) &= -\frac{2}{r^4s^3}, \tag{П.4.6} \\
M_{12}^{24}(r,s) &= -\frac{d_n(rs)}{r^3s}, \quad d_n(\xi) = b_n(\xi) - \frac{2}{\xi^2}, \\
M_{12}^{34}(r,s) &= \frac{1}{r^4s^3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{34}^{34}(r,s) &= \eta s W[Y_{3n}(\zeta), Y_{4n}(\zeta)] = -\frac{b_n(\eta rs)}{\eta r^2 s}, \\
M_{34}^{24}(r,s) &= n(n+1) \frac{d_n(\eta rs)}{\eta r^3 s}, \tag{П.4.7} \\
M_{34}^{23}(r,s) &= \frac{2n(n+1)}{\eta^3 s^3 r^4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{34}^{14}(r, s) &= \frac{n(n+1)}{\eta^3 s^3 r^4}; \\
M_{34}^{13}(r, s) &= -\frac{n(n+1)}{\eta^3 r^3 s^3}, \\
M_{34}^{12}(r, s) &= \frac{n^2(n+1)^2}{\eta^3 r^4 s^3}.
\end{aligned} \tag{П.4.8}$$

Отсюда для искомого вронскиана получаем следующую формулу:

$$W_U = \frac{1}{\eta r^4 s^2}. \tag{П.4.9}$$

Вронскиан системы функций  $X_{10}(\xi)$ ,  $X_{20}(\xi)$  в (П.2.15) получаем из (П.4.6):

$$W[X_{10}(\xi), X_{20}(\xi)] = -\frac{sb_0(\xi)}{\xi^2} = -\frac{s}{\xi^2}. \tag{П.4.10}$$

Далее, используя (П.4.3) – (П.4.8), при  $n \geq 1$  вычисляем дополнительные миноры к элементам второй и четвертой строки матрицы  $\mathbf{X}_n$  в (П.4.1):

$$\begin{aligned}
M_{21} &= X_{2n}(\xi)M_{34}^{34} - Y_{2n}(\xi)M_{34}^{14} + sY'_{2n}(\xi)M_{34}^{13} = -\frac{1}{\eta r^2 s} X_{2n}(rs), \\
M_{22} &= X_{1n}(\xi)M_{34}^{34} - Y_{1n}(\xi)M_{34}^{14} + sY'_{1n}(\xi)M_{34}^{13} = -\frac{1}{\eta r^2 s} X_{1n}(rs), \\
M_{23} &= X_{4n}(\zeta)M_{12}^{34} - Y_{4n}(\zeta)M_{12}^{14} + \eta s Y'_{4n}(\zeta)M_{12}^{13} = -\frac{\eta}{r^3 s^2} Z_{2n}(\eta rs), \\
M_{24} &= X_{3n}(\zeta)M_{12}^{34} - Y_{3n}(\zeta)M_{12}^{14} + \eta s Y'_{3n}(\zeta) + \eta s Y'_{3n}(\zeta)M_{12}^{13} = \\
&= -\frac{\eta}{r^3 s^2} Z_{1n}(\eta rs).
\end{aligned} \tag{П.4.11}$$

$$\begin{aligned}
M_{41} &= X_{2n}(\xi)M_{34}^{23} - sX'_{2n}(\xi)M_{34}^{13} + Y_{2n}(\xi)M_{34}^{12} = \frac{n(n+1)}{\eta^3 r^3 s^2} Z_{2n}(rs), \\
M_{42} &= X_{1n}(\xi)M_{34}^{23} - sX'_{1n}(\xi)M_{34}^{13} + Y_{1n}(\xi)M_{34}^{12} = \frac{n(n+1)}{\eta^3 r^3 s^2} Z_{1n}(rs), \\
M_{43} &= X_{4n}(\zeta)M_{12}^{23} - \eta s X'_{4n}(\zeta)M_{12}^{13} + Y_{4n}(\zeta)M_{12}^{12} = -\frac{1}{r^2 s} Y_{4n}(\eta rs), \\
M_{44} &= X_{3n}(\zeta)M_{12}^{23} - \eta s X'_{3n}(\zeta)M_{12}^{13} + Y_{3n}(\zeta)M_{12}^{12} = -\frac{1}{r^2 s} Y_{3n}(\eta rs).
\end{aligned} \tag{П.4.12}$$

Аналогично (П.3.3) и (П.3.7) введем еще два обозначения:

$$P_{un}(x, y) = \begin{vmatrix} X_{1n}(x) & X_{2n}(x) \\ X_{1n}(y) & X_{2n}(y) \end{vmatrix}, S_{un}(x, y) = \begin{vmatrix} X_{1n}(x) & X_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix}. \quad (\text{П.4.13})$$

Первая из этих функций обладает очевидным свойством:

$$P_{un}(x, y) = -P_{un}(y, x). \quad (\text{П.4.14})$$

Для второй в соответствии с (П.2.17) и (П.3.1) имеет место соотношение:

$$S_{un}(x, x) = -\frac{1}{x^2}. \quad (\text{П.4.15})$$

Как следует из (П.2.17), (П.4.3) и (П.4.14), эти функции связаны следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{un}(x, y)}{\partial y} &= P_{un}(x, y), \\ \frac{\partial S_{un}(x, y)}{\partial x} &= b_n(x)P_{en}(x, y) - \frac{2}{x}S_{un}(x, y), \\ \frac{\partial P_{un}(x, y)}{\partial x} &= -b_n(x)S_{un}(y, x) - \frac{2}{x}P_{un}(x, y), \\ \frac{\partial P_{un}(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial P_{un}(y, x)}{\partial y} = b_n(y)S_{un}(x, y) - \frac{2}{y}P_{un}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{П.4.16})$$

Далее, используя (П.2.18), (П.3.5) - (П.3.7) и (П.4.4), построим аналогичные формулы для производных от введенных в предыдущем параграфе функций:

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{en}(x, y) = -\begin{vmatrix} Y'_{3n}(x) & Y'_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = c_n(x)P_{en}(x, y) - \frac{1}{x}S_{un}(x, y); \quad (\text{П.4.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} Q_{en}(x, y) &= \begin{vmatrix} Y'_{3n}(x) & Y'_{4n}(x) \\ Y_{3n}(y) & Y_{4n}(y) \end{vmatrix} = \\ &= c_n(x) \left[ \frac{1}{y}P_{en}(x, y) - S_{un}(y, x) \right] - \frac{1}{x} \left[ P_{un}(x, y) + \frac{1}{y}S_{un}(x, y) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.4.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} Q_{en}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} Q_{en}(y, x) = \\ &= c_n(y) \left[ S_{un}(x, y) - \frac{1}{x}P_{en}(y, x) \right] + \frac{1}{y} \left[ \frac{1}{y}S_{un}(y, x) - P_{un}(x, y) \right]; \end{aligned}$$

Введенные ранее функции  $S_{en}(x, y)$  и  $Q_{en}(x, y)$ , как следует из (П.3.5), (П.3.7) и (П.2.18), связаны с функциями в (П.4.13) так:

$$S_{en}(x, y) = S_{un}(x, y) + \frac{1}{x}P_{en}(x, y). \quad (\text{П.4.19})$$

$$\begin{aligned} Q_{en}(x, y) &= P_{un}(x, y) + \frac{1}{xy}P_{en}(x, y) + \frac{1}{y}S_{un}(x, y) - \frac{1}{x}S_{un}(y, x) = \\ &= P_{un}(x, y) + \frac{1}{y}S_{un}(x, y) - \frac{1}{x}S_{en}(y, x). \end{aligned} \quad (\text{П.4.20})$$

Кроме того, справедливы равенства, аналогичные (П.3.10) ( $k = 1, 2$ ):

$$S_{un}(y, x)X_{kn}(z) + P_{un}(z, y)Z_{kn}(x) = S_{un}(z, x)X_{kn}(y); \quad (\text{П.4.21})$$

$$S_{un}(x, y)Z_{kn}(z) + P_{en}(y, z)X_{kn}(x) = S_{un}(x, z)Z_{kn}(y); \quad (\text{П.4.22})$$

$$S_{en}(y, x)Y_{k+2, n}(z) + Q_{en}(y, z)Z_{kn}(x) = S_{en}(z, x)Y_{k+2, n}(y); \quad (\text{П.4.23})$$

$$S_{un}(x, y)Z_{kn}(z) - S_{un}(x, z)Z_{kn}(y) = X_{kn}(x)P_{en}(z, y); \quad (\text{П.4.24})$$

$$P_{en}(x, y)Z_{kn}(z) - P_{en}(z, y)Z_{kn}(x) = Z_{kn}(y)P_{en}(x, z). \quad (\text{П.4.25})$$

Также справедливы такие равенства:

$$P_{un}(x_1, y_1)P_{un}(x_2, y_2) - P_{un}(y_2, y_1)P_{un}(x_2, x_1) = P_{un}(x_2, y_1)P_{un}(x_1, y_2); \quad (\text{П.4.26})$$

$$P_{un}(x_1, y_1)S_{un}(x_2, y_2) - P_{un}(x_1, x_2)S_{un}(y_1, y_2) = P_{un}(x_2, y_1)S_{un}(x_1, y_2). \quad (\text{П.4.27})$$

Дополнительно, учитывая (П.2.17), (П.2.18), (П.4.3), (П.4.4) и (П.4.16) получаем, что через функции  $P_{un}(x, y)$ ,  $S_{un}(x, y)$  в (П.4.13) и  $P_{en}(x, y)$  в (П.3.3) выражаются следующие определители второго порядка, связанные с фундаментальной матрицей  $\mathbf{X}_n$  в (П.4.1):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X'_{1n}(x) & X'_{2n}(x) \\ X_{1n}(y) & X_{2n}(y) \end{vmatrix} &= \frac{\partial P_{un}(x, y)}{\partial x} = -b_n(x)S_{un}(y, x) - \frac{2}{x}P_{un}(x, y), \\ \begin{vmatrix} X_{1n}(x) & X_{2n}(x) \\ Y_{1n}(y) & Y_{2n}(y) \end{vmatrix} &= -\frac{1}{y}S_{un}(x, y), \\ \begin{vmatrix} Y_{1n}(x) & Y_{2n}(x) \\ Y_{1n}(y) & Y_{2n}(y) \end{vmatrix} &= \frac{1}{xy}P_{en}(x, y), \end{aligned} \quad (\text{П.4.28})$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} X'_{1n}(x) & X'_{2n}(x) \\ Y_{1n}(y) & Y_{2n}(y) \end{vmatrix} &= -\frac{1}{y} \frac{\partial S_{un}(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{y} \left[ b_n(x)P_{en}(x, y) - \frac{2}{x}P_{un}(x, y) \right], \\ \begin{vmatrix} Y'_{1n}(x) & Y'_{2n}(x) \\ X_{1n}(y) & X_{2n}(y) \end{vmatrix} &= -\frac{1}{x^2}S_{un}(y, x) - \frac{1}{x}P_{un}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \left[ S_{un}(y, x) + xP_{un}(x, y) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} Y_{1n}(x) & Y_{2n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}P_{en}(x, y), \quad \begin{vmatrix} Y_{1n}(x) & Y_{2n}(x) \\ Y_{1n}(y) & Y_{2n}(y) \end{vmatrix} = \frac{1}{xy}P_{en}(x, y),$$

$$\begin{vmatrix} X_{3n}(x) & X_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{x}P_{en}(x, y),$$

$$\begin{vmatrix} X_{3n}(x) & X_{4n}(x) \\ X_{3n}(y) & X_{4n}(y) \end{vmatrix} = \frac{n^2(n+1)^2}{xy}P_{en}(x, y),$$

$$\begin{vmatrix} X_{3n}(x) & X_{4n}(x) \\ Y_{3n}(y) & Y_{4n}(y) \end{vmatrix} = -\frac{n(n+1)}{x} \left[ -S_{un}(y, x) + \frac{1}{y}P_{en}(x, y) \right] = \frac{n(n+1)}{x}S_{en}(y, x),$$

$$\begin{vmatrix} X'_{3n}(x) & X'_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{x} \left[ S_{un}(x, y) - \frac{1}{x}P_{en}(x, y) \right],$$

$$\begin{vmatrix} Y'_{3n}(x) & Y'_{4n}(x) \\ Z_{1n}(y) & Z_{2n}(y) \end{vmatrix} = -c_n(x)P_{en}(x, y) + \frac{1}{x}S_{un}(x, y). \quad (\text{П.4.29})$$

Рассмотрим также связанную с системой уравнений (3.5.14) матрицу

$$\mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix} X_{1n}(x_1) & X_{2n}(x_1) & X_{3n}(y_1) & X_{4n}(y_1) \\ Y_{1n}(x_1) & Y_{2n}(x_1) & Y_{3n}(y_1) & Y_{4n}(y_1) \\ X_{1n}(x_2) & X_{2n}(x_2) & X_{3n}(y_2) & X_{4n}(y_2) \\ Y_{1n}(x_2) & Y_{2n}(x_2) & Y_{3n}(y_2) & Y_{4n}(y_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{П.4.30})$$

Ее дополнительные миноры  $N_{3j}$  и  $N_{4j}$  выражаются через миноры второго порядка  $N_{12}^{ij}$  и  $N_{34}^{ij}$  так:

$$\begin{aligned}
N_{31} &= X_{2n}(x_1)N_{34}^{24} - Y_{2n}(x_1)N_{34}^{14} + Y_{2n}(x_2)N_{34}^{12}, \\
N_{32} &= X_{1n}(x_1)N_{34}^{24} - Y_{1n}(x_1)N_{34}^{14} + Y_{1n}(x_2)N_{34}^{12}, \\
N_{33} &= X_{4n}(y_1)N_{12}^{24} - Y_{4n}(y_1)N_{12}^{14} + Y_{4n}(y_2)N_{12}^{12}, \\
N_{34} &= X_{3n}(y_1)N_{12}^{24} - Y_{3n}(y_1)N_{12}^{14} + Y_{3n}(y_2)N_{12}^{12}, \\
N_{41} &= X_{2n}(x_1)N_{34}^{23} - Y_{2n}(x_1)N_{34}^{13} + X_{2n}(x_2)N_{34}^{12}, \\
N_{42} &= X_{1n}(x_1)N_{34}^{23} - Y_{1n}(x_1)N_{34}^{13} + X_{1n}(x_2)N_{34}^{12}, \\
N_{43} &= X_{4n}(y_1)N_{12}^{23} - Y_{4n}(y_1)N_{12}^{13} + X_{4n}(y_2)N_{12}^{12}, \\
N_{44} &= X_{3n}(y_1)N_{12}^{23} - Y_{3n}(y_1)N_{12}^{13} + X_{3n}(y_2)N_{12}^{12}.
\end{aligned} \tag{П.4.31}$$

Теперь, используя (П.4.28), (П.4.13), (П.4.15), (П.4.6) и (П.4.8), находим входящие в (П.4.31) миноры:

$$\begin{aligned}
N_{12}^{12} &= M_{12}^{13} \Big|_{\xi=x_1} = \frac{1}{x_1^3}, \quad N_{12}^{13} = P_{un}(x_1, x_2), \quad N_{12}^{14} = -\frac{1}{x_2} S_{un}(x_1, x_2), \\
N_{12}^{23} &= \frac{1}{x_1} S_{un}(x_2, x_1), \quad N_{12}^{24} = \frac{1}{x_1 x_2} P_{en}(x_1, x_2), \\
N_{34}^{12} &= M_{34}^{13} \Big|_{\zeta=y_1} = -\frac{n(n+1)}{y_1^3}, \quad N_{34}^{13} = \frac{n^2(n+1)^2}{y_1 y_2} P_{en}(y_1, y_2), \\
N_{34}^{14} &= \frac{n(n+1)}{y_1} S_{en}(y_2, y_1), \quad N_{34}^{23} = -\frac{n(n+1)}{y_2} S_{en}(y_1, y_2), \quad N_{34}^{24} = Q_{en}(y_1, y_2).
\end{aligned} \tag{П.4.32}$$

Подставляя (П.4.32) в (П.4.31), приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned}
N_{31} &= X_{2n}(x_1)Q_{en}(y_1, y_2) - \frac{n(n+1)}{y_1} \left[ Y_{2n}(x_1)S_{en}(y_2, y_1) + \frac{1}{y_1^2} Y_{2n}(x_2) \right], \\
N_{32} &= X_{1n}(x_1)Q_{en}(y_1, y_2) - \frac{n(n+1)}{y_1} \left[ Y_{1n}(x_1)S_{en}(y_2, y_1) + \frac{1}{y_1^2} Y_{1n}(x_2) \right], \\
N_{33} &= \frac{1}{x_1 x_2} X_{4n}(y_1)P_{en}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_2} Y_{4n}(y_1)S_{un}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1^3} Y_{4n}(y_2), \\
N_{34} &= \frac{1}{x_1 x_2} X_{3n}(y_1)P_{en}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_2} Y_{3n}(y_1)S_{un}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1^3} Y_{3n}(y_2),
\end{aligned} \tag{П.4.33}$$

$$\begin{aligned}
N_{41} &= -n(n+1) \left[ \frac{1}{y_2} X_{2n}(x_1) S_{en}(y_1, y_2) + \frac{n(n+1)}{y_1 y_2} Y_{2n}(x_1) P_{en}(y_1, y_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{y_1^3} X_{2n}(x_2) \right], \\
N_{42} &= -n(n+1) \left[ \frac{1}{y_2} X_{1n}(x_1) S_{en}(y_1, y_2) + \frac{n(n+1)}{y_1 y_2} Y_{1n}(x_1) P_{en}(y_1, y_2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{y_1^3} X_{1n}(x_2) \right], \\
N_{43} &= \frac{1}{x_1} X_{4n}(y_1) S_{un}(x_2, x_1) - Y_{4n}(y_1) P_{un}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1^3} X_{4n}(y_2), \\
N_{44} &= \frac{1}{x_1} X_{3n}(y_1) S_{un}(x_2, x_1) - Y_{3n}(y_1) P_{un}(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1^3} X_{3n}(y_2).
\end{aligned} \tag{П.4.34}$$

Далее находим определитель матрицы  $\mathbf{Z}_n$ :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Z}_n| &= X_{1n}(x_2) N_{31} - X_{2n}(x_2) N_{32} + X_{3n}(y_2) N_{33} - X_{4n}(y_2) N_{34} = \\
&= -P_{un}(x_1, x_2) Q_{en}(y_1, y_2) + n(n+1) \left[ \frac{1}{x_1 y_1} S_{un}(x_2, x_1) S_{en}(y_2, y_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{x_2 y_2} S_{un}(x_1, x_2) S_{en}(y_1, y_2) - \frac{1}{y_1^3 x_2^3} - \frac{1}{x_1^3 y_2^3} - \frac{n(n+1)}{x_1 x_2 y_1 y_2} P_{en}(x_1, x_2) P_{en}(y_1, y_2) \right].
\end{aligned} \tag{П.4.35}$$

В качестве проверки положим в (П.4.35)  $x_1 = x_2 = x$  и  $y_1 = y_2 = y$ . Тогда с учетом (П.3.4), (П.3.6), (П.4.15) и (П.4.19) приходим к результату, соответствующему совпадению первой и третьей, а также второй и четвертой строк матрицы в (П.4.30):

$$|\mathbf{Z}_n| = n(n+1) \left( \frac{1}{x^3 y^3} + \frac{1}{x^3 y^3} - \frac{2}{x^3 y^3} \right) = 0.$$

Далее, используя (П.2.19) и (П.2.20), в продолжение равенств (П.3.13) - (П.3.20) выражаем введенные уже в этом параграфе функции через экспоненциальные многочлены (П.3.20). С этой целью подставляем равенства в (П.3.13) и (П.3.14) в (П.4.13):

$$P_{un}(x, y) = \frac{(-1)^n}{2x^{n+2} y^{n+2}} E_{11n}(x, y); \tag{П.4.36}$$

$$S_{un}(x, y) = \frac{(-1)^{n+1}}{2x^{n+2}y^{n+1}} E_{10n}(x, y). \quad (\text{П.4.37})$$

Из формул (П.4.36) и (П.4.37) подобно (П.3.21) и (П.3.22) вытекает аналог равенств (П.4.26) и (П.4.27) для экспоненциальных многочленов (П.3.20):

$$E_{11n}(x_1, y_1)E_{11n}(x_2, y_2) - E_{11n}(y_2, y_1)E_{11n}(x_2, x_1) = E_{11n}(x_1, y_2)E_{11n}(x_2, y_1). \quad (\text{П.4.38})$$

$$E_{11n}(x_1, y_1)E_{10n}(x_2, y_2) - E_{11n}(x_1, x_2)E_{10n}(y_1, y_2) = E_{11n}(x_2, y_1)E_{10n}(x_1, y_2). \quad (\text{П.4.39})$$

### § П.5. Свойства матрицы граничных условий для уравнений теории упругости в сферической системе координат

Рассмотрим частный случай (3.5.14) матрицы (П.4.30), возникающий при построении функция влияния в §§ 3.5 и 3.6 (для отличия от обозначений § П.4 здесь добавлен аргумент):

$$\mathbf{Z}_n(s) = \begin{pmatrix} X_{1n}(r_0s) & X_{2n}(r_0s) & X_{3n}(\eta r_0s) & X_{4n}(\eta r_0s) \\ Y_{1n}(r_0s) & Y_{2n}(r_0s) & Y_{3n}(\eta r_0s) & Y_{4n}(\eta r_0s) \\ X_{1n}(r_1s) & X_{2n}(r_1s) & X_{3n}(\eta r_1s) & X_{4n}(\eta r_1s) \\ Y_{1n}(r_1s) & Y_{2n}(r_1s) & Y_{3n}(\eta r_1s) & Y_{4n}(\eta r_1s) \end{pmatrix}. \quad (\text{П.5.1})$$

Обратная для нее матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{Z}_n^{-1}(s) = \frac{1}{|\mathbf{Z}_n(s)|} \begin{pmatrix} N_{11}(s) & -N_{21}(s) & N_{31}(s) & -N_{41}(s) \\ -N_{12}(s) & N_{22}(s) & -N_{32}(s) & N_{42}(s) \\ N_{13}(s) & -N_{23}(s) & N_{33}(s) & -N_{43}(s) \\ -N_{14}(s) & N_{24}(s) & -N_{34}(s) & N_{44}(s) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.5.2})$$

Здесь  $N_{ij}(s)$  - дополнительные миноры матрицы  $\mathbf{Z}_n(s)$ . Для рассматриваемых граничных условий необходимы только дополнительные миноры для третьей и четвертой строк. Они согласно (П.4.33) и (П.4.34) определяются так ( $x_1 = r_0s$ ,  $x_2 = r_1s$ ,  $y_1 = \eta r_0s$ ,  $y_2 = \eta r_1s$ ):

$$\begin{aligned}
N_{31}(s) &= X_{2n}(r_0s)Q_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) - \\
&\quad - \frac{n(n+1)}{\eta r_0s} \left[ Y_{2n}(r_0s)S_{en}(\eta r_1s, \eta r_0s) + \frac{1}{\eta^2 r_0^2 s^2} Y_{2n}(r_1s) \right], \\
N_{32}(s) &= X_{1n}(r_0s)Q_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) - \\
&\quad - \frac{n(n+1)}{\eta r_0s} \left[ Y_{1n}(r_0s)S_{en}(\eta r_1s, \eta r_0s) + \frac{1}{\eta^2 r_0^2 s^2} Y_{1n}(r_1s) \right], \\
N_{33}(s) &= \frac{1}{r_0 r_1 s^2} X_{4n}(\eta r_0s)P_{en}(r_0s, r_1s) + \frac{1}{r_1s} Y_{4n}(\eta r_0s)S_{un}(r_0s, r_1s) + \\
&\quad + \frac{1}{r_0^3 s^3} Y_{4n}(\eta r_1s), \\
N_{34}(s) &= \frac{1}{r_0 r_1 s^2} X_{3n}(\eta r_0s)P_{en}(r_0s, r_1s) + \frac{1}{r_1s} Y_{3n}(\eta r_0s)S_{un}(r_0s, r_1s) + \\
&\quad + \frac{1}{r_0^3 s^3} Y_{3n}(\eta r_1s). \tag{II.5.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{41}(s) &= -n(n+1) \left[ \frac{1}{\eta r_1s} X_{2n}(r_0s)S_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n+1)}{\eta^2 r_0 r_1 s^2} Y_{2n}(r_0s)P_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \frac{1}{\eta^3 r_0^3 s^3} X_{2n}(r_1s) \right], \\
N_{42}(s) &= -n(n+1) \left[ \frac{1}{\eta r_1s} X_{1n}(r_0s)S_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n+1)}{\eta^2 r_0 r_1 s^2} Y_{1n}(r_0s)P_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \frac{1}{\eta^3 r_0^3 s^3} X_{1n}(r_1s) \right], \tag{II.5.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{43}(s) &= \frac{1}{r_0s} X_{4n}(\eta r_0s)S_{un}(r_1s, r_0s) - Y_{4n}(\eta r_0s)P_{un}(r_0s, r_1s) + \frac{1}{r_0^3 s^3} X_{4n}(\eta r_1s), \\
N_{44}(s) &= \frac{1}{r_0s} X_{3n}(\eta r_0s)S_{un}(r_1s, r_0s) - Y_{3n}(\eta r_0s)P_{un}(r_0s, r_1s) + \frac{1}{r_0^3 s^3} X_{3n}(\eta r_1s).
\end{aligned}$$

Определитель же  $|\mathbf{Z}_n(s)|$  находится с помощью формулы (II.4.35):

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Z}_n(s)| &= R_{zn}(r_0s, r_1s), \\
R_{zn}(x, y) &= -P_{un}(x, y)Q_{en}(\eta x, \eta y) + n(n+1) \times \\
&\times \left[ \frac{1}{\eta x^2} S_{un}(y, x) S_{en}(\eta y, \eta x) + \frac{1}{\eta y^2} S_{un}(x, y) S_{en}(\eta x, \eta y) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\eta^3 x^3 y^3} - \frac{n(n+1)}{\eta^2 x^2 y^2} P_{en}(x, y) P_{en}(\eta x, \eta y) \right].
\end{aligned} \tag{П.5.5}$$

Далее для нужд формул (3.5.13) с учетом (3.5.15) находим явные представления третьего и четвертого столбцов произведения  $-|\mathbf{Z}_n(s)|\mathbf{X}_n(r, s)\mathbf{Z}_n^{-1}(s)$  ( $\mathbf{X}_n(r, s)$  - фундаментальная матрица в (П.4.1)):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} R_{un1}(rs, r_0s, r_1s) \\ sT_{un1}(rs, r_0s, r_1s) \\ R_{vn1}(rs, r_0s, r_1s) \\ sT_{vn1}(rs, r_0s, r_1s) \end{pmatrix} &= -\mathbf{X}_n(r, s) \begin{pmatrix} N_{31}(s) \\ -N_{32}(s) \\ N_{33}(s) \\ -N_{34}(s) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} n(n+1)R_{un2}(rs, r_0s, r_1s) \\ sT_{un2}(rs, r_0s, r_1s) \\ R_{vn2}(rs, r_0s, r_1s) \\ sT_{vn2}(rs, r_0s, r_1s) \end{pmatrix} &= -\mathbf{X}_n(r, s) \begin{pmatrix} -N_{41}(s) \\ N_{42}(s) \\ -N_{43}(s) \\ N_{44}(s) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{П.5.6}$$

Элементы столбцов этих произведений записываются так (приводятся только те из них, которые используются далее):

$$\begin{aligned}
R_{un1}(rs, r_0s, r_1s) &= -N_{31}(s)X_{1n}(rs) + N_{32}(s)X_{2n}(rs) - \\
&\quad - N_{33}(s)X_{3n}(\eta rs) + N_{34}(s)X_{4n}(\eta rs), \\
n(n+1)R_{un2}(rs, r_0s, r_1s) &= N_{41}(s)X_{1n}(rs) - N_{42}(s)X_{2n}(rs) + \\
&\quad + N_{43}(s)X_{3n}(\eta rs) - N_{44}(s)X_{4n}(\eta rs), \\
R_{vn1}(rs, r_0s, r_1s) &= -N_{31}(s)Y_{1n}(rs) + N_{32}(s)Y_{2n}(rs) - \\
&\quad - N_{33}(s)Y_{3n}(\eta rs) + N_{34}(s)Y_{4n}(\eta rs), \\
R_{vn2}(rs, r_0s, r_1s) &= N_{41}(s)Y_{1n}(rs) - N_{42}(s)Y_{2n}(rs) + \\
&\quad + N_{43}(s)Y_{3n}(\eta rs) - N_{44}(s)Y_{4n}(\eta rs).
\end{aligned} \tag{П.5.7}$$

Для упрощения последних выражений, используя (П.5.3), (П.5.4), а также (П.4.13), (П.4.28) и (П.4.29), находим следующие комбинации:

$$\begin{aligned}
& -N_{31}(s)X_{1n}(rs) + N_{32}(s)X_{2n}(rs) = P_{un}(r_0s, rs)Q_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) - \\
& -\frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 s^2} \left[ S_{un}(rs, r_0s)S_{en}(\eta r_1s, \eta r_0s) + \frac{1}{\eta^2 r_0 r_1 s^2} S_{un}(rs, r_1s) \right]; \tag{II.5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{33}(s)X_{3n}(\eta rs) + N_{34}(s)X_{4n}(\eta rs) = \\
& = \frac{n(n+1)}{\eta rs^2} \left[ \frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 r_1 s^2} P_{en}(r_0s, r_1s)P_{en}(\eta r_0s, \eta rs) - \frac{1}{r_0^3 s^2} S_{en}(\eta r_1s, \eta rs) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r_1} S_{un}(r_0s, r_1s)S_{en}(\eta r_0s, \eta rs) \right]; \tag{II.5.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{31}(s)Y_{1n}(rs) + N_{32}(s)Y_{2n}(rs) = \\
& = -\frac{1}{rs} Q_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s)S_{un}(r_0s, rs) - \\
& -\frac{n(n+1)}{\eta r r_0^2 s^3} \left[ P_{en}(r_0s, rs)S_{en}(\eta r_1s, \eta r_0s) + \frac{1}{\eta^2 r_0 r_1 s^2} P_{en}(r_1s, rs) \right]; \tag{II.5.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{33}(s)Y_{3n}(\eta rs) + N_{34}(s)Y_{4n}(\eta rs) = \\
& = \frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 r_1 s^3} P_{en}(r_0s, r_1s)S_{en}(\eta rs, \eta r_0s) + \\
& + \frac{1}{r_1 s} S_{un}(r_0s, r_1s)Q_{en}(\eta r_0s, \eta rs) + \frac{1}{r_0^3 s^3} Q_{en}(\eta r_1s, \eta rs); \tag{II.5.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{41}(s)X_{1n}(rs) - N_{42}(s)X_{2n}(rs) = \\
& = n(n+1) \left[ \frac{1}{\eta r_1 s} P_{un}(r_0s, rs)S_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \frac{1}{\eta^3 r_0^3 s^3} P_{un}(r_1s, rs) + \right. \\
& \left. + \frac{n(n+1)}{\eta^2 r_0^2 r_1 s^3} P_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s)S_{un}(rs, r_0s) \right]; \tag{II.5.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{43}(s)X_{3n}(\eta rs) - N_{44}(s)X_{4n}(\eta rs) = \\
& = \frac{n(n+1)}{\eta rs} \left\{ -S_{en}(\eta r_0s, \eta rs)P_{un}(r_0s, r_1s) + \right. \\
& \left. + \frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 s^2} \left[ P_{en}(\eta rs, \eta r_0s)S_{un}(r_1s, r_0s) + \frac{1}{r_0 r_1 s^2} P_{en}(\eta rs, \eta r_1s) \right] \right\}; \tag{II.5.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{41}(s)Y_{1n}(rs) - N_{42}(s)Y_{2n}(rs) = \\
& = -\frac{n(n+1)}{\eta rs^2} \left\{ \frac{1}{r_1} S_{un}(r_0s, rs) S_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) + \frac{1}{\eta^2 r_0^3 s^2} S_{un}(r_1s, rs) + \right. \\
& \left. + \frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 r_1 s^2} P_{en}(rs, r_0s) P_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) \right\}; \tag{П.5.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{43}(s)Y_{3n}(\eta rs) - N_{44}(s)Y_{4n}(\eta rs) = Q_{en}(\eta r_0s, \eta rs) P_{un}(r_0s, r_1s) - \\
& - \frac{n(n+1)}{\eta r_0^2 s^2} \left[ S_{en}(\eta rs, \eta r_0s) S_{un}(r_1s, r_0s) + \frac{1}{r_0 r_1 s^2} S_{en}(\eta rs, \eta r_1s) \right]; \tag{П.5.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_{31}(s)X'_{1n}(rs) + N_{32}(s)X'_{2n}(rs) = \\
& = \left[ b_n(rs) S_{un}(r_0s, rs) + \frac{2}{rs} P_{un}(rs, r_0s) \right] Q_{en}(\eta r_0s, \eta r_1s) - \\
& - \frac{n(n+1)}{\eta r_0 s} \left\{ \frac{1}{r_0 s} \left[ b_n(rs) P_{en}(rs, r_0s) - \frac{2}{rs} P_{un}(rs, r_0s) \right] S_{en}(\eta r_1s, \eta r_0s) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\eta^2 r_0^3 s^3} \left[ b_n(rs) P_{en}(rs, r_1s) - \frac{2}{rs} P_{un}(rs, r_1s) \right] \right\}; \tag{П.5.16}
\end{aligned}$$

Используя теперь (П.5.8) - (П.5.16), получаем следующие формулы для функций, входящих в (П.5.7):

$$\begin{aligned}
R_{un1}(x, y, z) &= P_{un}(y, x) Q_{en}(\eta y, \eta z) - \frac{n(n+1)}{\eta} \left[ \frac{1}{y^2} S_{un}(x, y) S_{en}(\eta z, \eta y) + \right. \\
& + \frac{1}{\eta^2 y^3 z} S_{un}(x, z) + \frac{1}{xy^3} S_{en}(\eta z, \eta x) + \frac{1}{xz} S_{un}(y, z) S_{en}(\eta y, \eta x) - \\
& \left. - \frac{n(n+1)}{\eta xy^2 z} P_{en}(y, z) P_{en}(\eta y, \eta x) \right], \tag{П.5.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{un2}(x, y, z) &= \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{1}{z} P_{un}(y, x) S_{en}(\eta y, \eta z) - \frac{1}{x} S_{en}(\eta y, \eta x) P_{un}(y, z) + \right. \\
& + \frac{1}{\eta^2 y^3} P_{un}(z, x) + \frac{n(n+1)}{\eta y^2} \left[ \frac{1}{z} P_{en}(\eta y, \eta z) S_{un}(x, y) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{x} P_{en}(\eta x, \eta y) S_{un}(z, y) + \frac{1}{xyz} P_{en}(\eta x, \eta z) \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{vn1}(x, y, z) = & -\frac{1}{x} Q_{en}(\eta y, \eta z) S_{un}(y, x) + \frac{1}{z} S_{un}(y, z) Q_{en}(\eta y, \eta x) + \\
& + \frac{1}{y^3} Q_{en}(\eta z, \eta x) - \frac{n(n+1)}{\eta y^2} \times \\
& \times \left[ \frac{1}{x} P_{en}(y, x) S_{en}(\eta z, \eta y) - \frac{1}{z} P_{en}(y, z) S_{en}(\eta x, \eta y) + \frac{1}{\eta^2 xyz} P_{en}(z, x) \right], \\
R_{vn2}(x, y, z) = & R_{un1}(z, y, x).
\end{aligned} \tag{П.5.18}$$

Функции в (П.5.5), (П.5.17) - (П.5.27) с помощью формул (П.3.17) - (П.3.19) и (П.4.36), (П.4.37) могут быть выражены через экспоненциальные многочлены (П.3.20):

$$|Z_n(s)| = R_{zn}(r_0 s, r_1 s) = \frac{1}{4\eta^{2(n+2)} r_0^{2(n+2)} r_1^{2(n+2)} s^{4(n+2)}} L_{zn}(r_0 s, r_1 s), \tag{П.5.19}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{zn}(x, y) = & -E_{11n}(x, y) E_{33n}(\eta x, \eta y) + n(n+1) [-8\eta^{2n+1} x^{2n+1} y^{2n+1} + \\
& + E_{10n}(y, x) E_{30n}(\eta y, \eta x) + E_{10n}(x, y) E_{30n}(\eta x, \eta y) - \\
& - n(n+1) E_{00n}(x, y) E_{00n}(\eta x, \eta y)];
\end{aligned}$$

$$R_{un1}(x, y, z) = \frac{1}{4\eta^{2(n+2)} x^{n+2} y^{2(n+2)} z^{n+2}} L_{un1}(x, y, z), \tag{П.5.20}$$

$$R_{un2}(x, y, z) = \frac{1}{4\eta^{2(n+2)} x^{n+2} y^{2(n+2)} z^{n+2}} L_{un2}(x, y, z),$$

где

$$\begin{aligned}
L_{un1}(x, y, z) = & E_{11n}(y, x) E_{33n}(\eta y, \eta z) - n(n+1) \{ E_{10n}(x, y) E_{30n}(\eta z, \eta y) + \\
& + E_{10n}(y, z) E_{30n}(\eta y, \eta x) - 2(-1)^n y^{2n+1} [ \eta^{2n+1} E_{10n}(x, z) + E_{30n}(\eta z, \eta x) ] - \\
& - n(n+1) E_{00n}(y, z) E_{00n}(\eta y, \eta x) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{un2}(x, y, z) = & E_{11n}(x, y) E_{30n}(\eta y, \eta z) + E_{30n}(\eta y, \eta x) E_{11n}(y, z) + \\
& + 2(-1)^n \eta^{2n+1} y^{2n+1} E_{11n}(z, x) + n(n+1) [ 2(-1)^n y^{2n+1} E_{00n}(\eta x, \eta z) - \\
& - E_{00n}(\eta y, \eta z) E_{10n}(x, y) - E_{00n}(\eta x, \eta y) E_{10n}(z, y) ];
\end{aligned}$$

$$R_{vn1}(x, y, z) = \frac{1}{4\eta^{2(n+2)} x^{n+2} y^{2(n+2)} z^{n+2}} L_{vn1}(x, y, z), \tag{П.5.21}$$

где

$$\begin{aligned} L_{vn1}(x, y, z) = & E_{33n}(\eta y, \eta z) E_{10n}(y, x) - E_{10n}(y, z) E_{33n}(\eta y, \eta x) + \\ & + 2(-1)^n y^{2n+1} E_{33n}(\eta z, \eta x) + n(n+1) \left[ -2(-1)^n \eta^{2n+1} y^{2n+1} E_{00n}(z, x) + \right. \\ & \left. + E_{00n}(y, x) E_{30n}(\eta z, \eta y) - E_{00n}(y, z) E_{30n}(\eta x, \eta y) \right]; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{un1}(x, y, z) = & - \left[ x^2 + n(n+1) \right] E_{10n}(y, x) E_{33n}(\eta y, \eta z) + \\ & + n(n+1) \left\{ \left[ x^2 + n(n+1) \right] E_{00n}(x, y) E_{30n}(\eta z, \eta y) - \right. \\ & - 2(-1)^n \eta^{2n+1} \left[ x^2 + n(n+1) \right] y^{2n+1} E_{00n}(x, z) - 2(-1)^n y^{2n+1} E_{33n}(\eta z, \eta x) + \\ & \left. + E_{10n}(y, z) E_{33n}(\eta y, \eta x) + n(n+1) E_{00n}(y, z) E_{30n}(\eta x, \eta y) \right\}, \\ M_{un2}(x, y, z) = & \left[ x^2 + n(n+1) \right] E_{10n}(y, x) E_{30n}(\eta y, \eta z) - E_{11n}(y, z) E_{33n}(\eta y, \eta x) - \\ & - 2(-1)^n \eta^{2n+1} \left[ x^2 + n(n+1) \right] y^{2n+1} E_{10n}(z, x) + \\ & + n(n+1) \left\{ \left[ x^2 + n(n+1) \right] E_{00n}(x, y) E_{00n}(\eta y, \eta z) + \right. \\ & \left. + E_{30n}(\eta x, \eta y) E_{10n}(z, y) - 2(-1)^n y^{2n+1} E_{30n}(\eta x, \eta z) \right\}. \end{aligned}$$

Экспоненциальный многочлен в (П.5.19) может быть записан в явном виде:

$$\begin{aligned} L_{zn}(x, y) = & -8n(n+1) \eta^{2n+1} x^{2n+1} y^{2n+1} - \\ & - D_n(-x, -x) D_n(y, y) e^{\eta_+(x-y)} + D_n(-x, x) D_n(y, -y) e^{-\eta_-(x-y)} + \quad (\text{П.5.22}) \\ & + D_n(x, -x) D_n(-y, y) e^{\eta_-(x-y)} - D_n(x, x) D_n(-y, -y) e^{-\eta_+(x-y)}, \end{aligned}$$

где

$$D_n(x, y) = R_{n1}(x) R_{n3}(\eta y) - n(n+1) R_{n0}(x) R_{n0}(\eta y), \quad \eta_{\pm} = \eta \pm 1.$$

Отметим свойство многочлена  $D_n(x, y)$ :

$$D_n(x, y) D_n(-x, -y) - D_n(x, -y) D_n(-x, y) = -4n(n+1) \eta^{2n+1} x^{2n+1} y^{2n+1}. \quad (\text{П.5.23})$$

Здесь использовано второе равенство в (П.3.16), а также доказанное в [110] следующее свойство многочленов  $R_{n0}(z)$  и  $R_{n1}(z)$ :

$$R_{n1}(z) R_{n0}(-z) - R_{n0}(z) R_{n1}(-z) = (-1)^n 2z^{2n+1}. \quad (\text{П.5.24})$$

### § П.6. Симметрия функций Грина в сферической системе координат

Сначала докажем утверждение, соответствующее функциям Грина (3.2.25) и (3.2.29).

**Утверждение П.6.1.** Пусть  $U = \{u(r) | u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}\}$ , где  $u(r)$  - дважды непрерывно дифференцируемые функции на интервале  $(r_0, r_1)$ , имеющие производные на концах этого интервала и удовлетворяющие на них условиям

$$(a_k u + b_k u') \Big|_{r=r_k} = 0, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad a_k^2 + b_k^2 \neq 0 \quad (k=0,1). \quad (\text{П.6.1})$$

Тогда оператор  $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$L(u) = r^{-2} \left[ (r^2 u')' + \beta \right] + \alpha, \quad (\text{П.6.2})$$

является самосопряженным относительно скалярного произведения

$$(u, v) = \int_{r_0}^{r_1} r^2 u(r) v(r) dr \quad (\text{П.6.3})$$

При  $r_1 = \infty$  к элементам множества  $U$  добавляется требование существования интеграла в (П.6.3).

*Доказательство.* Пусть  $u, v \in U$ . Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} (L(u), v) &= \int_{r_0}^{r_1} r^2 L(u) v dr = \int_{r_0}^{r_1} \left[ (r^2 u')' + (r^2 \alpha + \beta) u \right] v dr = \\ &= r^2 u' v \Big|_{r_0}^{r_1} - \int_{r_0}^{r_1} \left[ r^2 u' v' - (r^2 \alpha + \beta) uv \right] dr = \\ &= r^2 u' v \Big|_{r_0}^{r_1} + \int_{r_0}^{r_1} (r^2 \alpha + \beta) uv dr - r^2 v' u \Big|_{r_0}^{r_1} + \int_{r_0}^{r_1} (r^2 v')' u dr = \\ &= r_1^2 D_1 - r_0^2 D_0 + (L(v), u), \quad D_k = u'(r_k) v(r_k) - v'(r_k) u(r_k). \end{aligned}$$

Но согласно (П.6.1) для функций  $u(r)$  и  $v(r)$  на границах отрезка  $[r_0, r_1]$  имеют место следующие равенства. Если  $a_k \neq 0$ , то  $u(r_k) = c_k u'(r_k)$  и  $v(r_k) = c_k v'(r_k)$ , где  $c_k = -b_k/a_k$ . Если же  $b_k \neq 0$ , то  $u'(r_k) = d_k u(r_k)$  и  $v'(r_k) = d_k v(r_k)$ , где

$d_k = -a_k/b_k$ . И в обоих случаях  $D_0 = D_1 = 0$ . Следовательно,  $(L(u), v) = (L(v), u)$ , что и завершает доказательство.

**Следствие П.6.1.** Функция Грина  $G(r, \xi)$  краевой задачи

$$L(G) = \delta(r - \xi), (a_k u + b_k u')|_{r=r_k} = 0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k^2 + b_k^2 \neq 0 (k = 0, 1), \quad (\text{П.6.4})$$

где  $L$  - оператор в (П.6.2) при  $\alpha \in \mathbb{C}$ , обладает следующей симметрией:

$$G(r, \xi) = \xi^2 G_*(r, \xi), G_*(r, \xi) = G_*(\xi, r). \quad (\text{П.6.5})$$

*Доказательство.* Сначала положим, что  $\alpha \in \mathbb{R}$ , и в дополнение к  $G(r, \xi)$  рассмотрим функцию Грина  $G(r, \zeta)$ . Принимая во внимание утверждение П.6.1 и свойства дельта-функции Дирака, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} 0 &= (G(r, \zeta), L(G(r, \xi))) - (L(G(r, \zeta)), G(r, \xi)) = \\ &= (G(r, \zeta), \delta(r - \xi)) - (\delta(r - \zeta), G(r, \xi)) = \\ &= \xi^2 G(\xi, \zeta) - \zeta^2 G(\zeta, \xi), \end{aligned}$$

что, очевидно, эквивалентно свойству (П.6.5).

Если  $\alpha \in \mathbb{C}$ , то достаточно рассмотреть аналитическое продолжение функции Грина по параметру  $\alpha$  на всю комплексную плоскость.

**Следствие П.6.2.** Функция Грина задачи (П.6.4) имеет следующий вид:

$$G(r, \xi) = \xi^2 [\tilde{G}(r, \xi)H(\xi - r) + \tilde{G}(\xi, r)H(r - \xi)]. \quad (\text{П.6.6})$$

*Доказательство.* Эту функцию всегда можно представить так:

$$G(r, \xi) = \xi^2 [\tilde{G}(r, \xi)H(\xi - r) + G_1(r, \xi)H(r - \xi)].$$

Учитывая (П.6.5), получаем соотношение

$$\tilde{G}(r, \xi)H(\xi - r) + G_1(r, \xi)H(r - \xi) = G_1(\xi, r)H(\xi - r) + \tilde{G}(\xi, r)H(r - \xi),$$

из которого вытекает равенство  $G_1(r, \xi) = \tilde{G}(\xi, r)$ , что и завершает доказательство.

Перед построением аналогичных утверждений для функций Грина в (3.2.25) – (3.2.27) сначала найдем выражение скалярного произведения определенных и

интегрируемых с квадратом на множестве  $r_0 \leq r \leq r_1$  векторов (обозначения см. § 1.5)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta) = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta) = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\text{П.6.7})$$

через коэффициенты их разложений в ряды (3.1.6)

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn} P_n(\cos \theta), \quad u_\theta = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta) \quad (\text{П.6.8})$$

В сферической системе координат это скалярное произведение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \int_0^\pi r^2 (u_r v_r + u_\theta v_\theta) \sin \theta dr d\theta, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \int_{r_0}^{r_1} r^2 (u_{rn} v_{rn} + m u_{\theta n} v_{\theta n}) dr, \quad m = n(n+1). \end{aligned} \quad (\text{П.6.9})$$

Здесь учтена ортогональность многочленов и следующие равенства [1]:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta &= \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \\ \int_0^\pi [C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)]^2 \sin^3 \theta d\theta &= \frac{2m}{2n+1}. \end{aligned}$$

**Утверждение П.6.2.** Пусть матрица

$$\mathbf{G}_n(r, \xi, s) = \begin{pmatrix} G_{uun}^L(r, \xi, s) & G_{u\theta n}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) & G_{v\theta n}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix} \quad (\text{П.6.10})$$

есть решение краевой задачи ( $s \in \mathbb{C}$ )

$$(\mathbf{L}_n - s^2 \mathbf{E}) \mathbf{G}_n + \mathbf{E} \delta(r - \xi) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_n|_{r=r_0, r_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_n = (l_{ijn})_{2 \times 2}, \quad (\text{П.6.11})$$

где  $l_{ijn}$  - определенные в (3.1.14) операторы,  $\mathbf{E}$  - единичная матрица.

Тогда ее элементы обладают следующей симметрией:

$$\begin{aligned} \xi^2 G_{uun}(\xi, \zeta, s) &= \zeta^2 G_{uun}(\zeta, \xi, s), \quad \xi^2 G_{v\theta n}(\xi, \zeta, s) = \zeta^2 G_{v\theta n}(\zeta, \xi, s), \\ \xi^2 G_{u\theta n}(\xi, \zeta, s) &= m \zeta^2 G_{vun}(\zeta, \xi, s). \end{aligned} \quad (\text{П.6.12})$$

*Доказательство.* Сначала положим, что  $s \in \mathbb{R}$ . И в дополнение к матрице  $\mathbf{G}_n(r, \xi, s)$  рассмотрим матрицу  $\mathbf{G}_n(r, \zeta, s)$ , являющуюся решением задачи

(П.6.11) при  $\xi = \zeta$ . Их первые столбцы - решения краевых задач теории упругости соответственно с объемными силами

$$F_r = \left[ \delta(r - \xi) - s^2 G_{uum}(r, \xi, s) \right] P_n(\cos \theta), \quad F_\theta = -s^2 G_{vum}(r, \xi, s) \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta),$$

$$F_{r1} = \left[ \delta(r - \zeta) - s^2 G_{uum}(r, \zeta, s) \right] P_n(\cos \theta), \quad F_{\theta1} = -s^2 G_{vum}(r, \zeta, s) \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).$$

К этим двум состоянием с учетом (П.6.9) применяем теорему взаимности для линейно упругих тел:

$$\int_{r_0}^{r_1} r^2 \left\{ \left[ \delta(r - \xi) - s^2 G_{uum}(r, \xi, s) \right] G_{uum}(r, \zeta, s) - ms^2 G_{vum}(r, \xi, s) G_{vum}(r, \zeta, s) \right\} dr =$$

$$= \int_{r_0}^{r_1} r^2 \left\{ \left[ \delta(r - \zeta) - s^2 G_{uum}(r, \zeta, s) \right] G_{uum}(r, \xi, s) - ms^2 G_{vum}(r, \zeta, s) G_{vum}(r, \xi, s) \right\} dr.$$

Отсюда с использованием свойств дельта-функции приходим к первому равенству в (П.6.12).

Доказательство соответствующего равенства для элементов вторых столбцов матриц  $\mathbf{G}_n(r, \xi, s)$  и  $\mathbf{G}_n(r, \zeta, s)$  проводится аналогичным образом с помощью рассмотрения следующих систем объемных сил соответственно:

$$F_r = -s^2 G_{uvm}(r, \xi, s), \quad F_\theta = \left[ \delta(r - \xi) - s^2 G_{vvn}(r, \xi, s) \right] \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta),$$

$$F_{r1} = -s^2 G_{uvm}(r, \zeta, s) P_n(\cos \theta), \quad F_{\theta1} = \left[ \delta(r - \zeta) - s^2 G_{vvn}(r, \zeta, s) \right] \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).$$

Для обоснования третьего равенства в (П.6.12) рассматриваем следующие системы сил:

$$F_r = \left[ \delta(r - \xi) - s^2 G_{uum}(r, \xi, s) \right] P_n(\cos \theta), \quad F_\theta = -s^2 G_{vum}(r, \xi, s) \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta),$$

$$F_{r1} = -s^2 G_{uvm}(r, \zeta, s) P_n(\cos \theta), \quad F_{\theta1} = \left[ \delta(r - \zeta) - s^2 G_{vvn}(r, \zeta, s) \right] \sin \theta C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta).$$

К двум соответствующим этим силам состояниям опять применяем теорему взаимности:

$$\int_{r_0}^{r_1} r^2 \left\{ \left[ \delta(r - \xi) - s^2 G_{uum}(r, \xi, s) \right] G_{uvm}(r, \zeta, s) - ms^2 G_{vum}(r, \xi, s) G_{vvn}(r, \zeta, s) \right\} dr =$$

$$= \int_{r_0}^{r_1} r^2 \left\{ -s^2 G_{uvm}(r, \zeta, s) G_{uum}(r, \xi, s) + m \left[ \delta(r - \zeta) - s^2 G_{vvn}(r, \zeta, s) \right] G_{vum}(r, \xi, s) \right\} dr,$$

откуда и вытекает требуемое соотношение.

Если  $s \in \mathbb{C}$ , то достаточно рассмотреть аналитические продолжения элементов матрицы  $\mathbf{G}_n(r, \xi, s)$  по параметру  $s$  на всю комплексную плоскость.

**Следствие П.6.3.** Элементы матрицы (П.6.10) при  $n \neq 0$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_{uun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{uun}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right], \\ G_{vvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right]; \end{aligned} \quad (\text{П.6.13})$$

$$\begin{aligned} G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right], \\ G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 m \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.6.14})$$

*Доказательство* равенств (П.6.13) проводится аналогично доказательству следствия П.6.2.

Для обоснования формул (П.6.14) представляем входящие в них функции так:

$$\begin{aligned} G_{vun}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun1}^L(r, \xi, s)H(r - \xi) \right], \\ G_{uvn}^L(r, \xi, s) &= \xi^2 m \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn1}^L(r, \xi, s)H(r - \xi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.6.15})$$

Учитывая последнее равенство в (П.6.12), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \xi^2 r^2 m \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s)H(r - \xi) + \tilde{G}_{uvn1}^L(\xi, r, s)H(\xi - r) \right] &= \\ = m r^2 \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun1}^L(r, \xi, s)H(r - \xi) \right], \end{aligned}$$

из которого вытекают равенства

$$\tilde{G}_{vun1}^L(r, \xi, s) = \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s), \quad \tilde{G}_{uvn1}^L(\xi, r, s) = \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s).$$

Подставляя их в (П.6.15), получаем искомые равенства (П.6.14).

## § П.7. Асимптотические свойства фундаментальных решений в сферической системе координат

*А. Асимптотические представления при  $r \rightarrow \infty$ .*

Асимптотические представления при  $z \rightarrow \infty$  функций, входящих в фундаментальную систему решений (П.2.2), получаем из (П.3.13) с учетом (П.2.20) и (П.3.16):

$$R_{n0}(z) \sim z^n, \quad R_{n1}(z) \sim z^{n+1}, \quad R_{n3}(z) \sim z^{n+1}; \quad (\text{П.7.1})$$

$$Z_{1n}(z) \sim \frac{e^{-z}}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad Z_{2n}(z) \sim \frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{П.7.2})$$

Отсюда с учетом (П.3.4) вытекают такие асимптотические представления функции  $P_{en}(x, y)$  в (П.3.3):

$$\begin{aligned} P_{en}(x, y) &\sim \frac{e^y}{y\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(x), \quad |y| \rightarrow \infty, \\ P_{en}(x, y) &\sim -\frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(y), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{П.7.3})$$

Далее, используя (П.7.1), (П.3.14) и (П.3.15), построим асимптотические представления при  $z \rightarrow \infty$  для других функций, входящих в фундаментальные системы решений:

$$X_{1n}(z) \sim -\frac{e^{-z}}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad X_{2n}(z) \sim \frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}}; \quad (\text{П.7.4})$$

$$Y_{3n}(z) \sim \frac{e^{-z}}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad Y_{4n}(z) \sim -\frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{П.7.5})$$

Учитывая их, из (П.3.5) и (П.3.7) с использованием (П.7.3) и (П.3.6) получаем следующие представления при  $z \rightarrow \infty$ :

$$Q_{en}(x, y) \sim -\frac{e^y}{y\sqrt{2\pi}} Y_{3n}(x), \quad |y| \rightarrow \infty, \quad (\text{П.7.6})$$

$$Q_{en}(x, y) \sim \frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Y_{3n}(y), \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$$S_{en}(x, y) \sim \frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(y), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\text{П.7.7})$$

$$S_{en}(x, y) \sim -\frac{e^y}{y\sqrt{2\pi}} Y_{3n}(x), \quad |y| \rightarrow \infty.$$

Аналогичные асимптотические равенства для функций  $P_{un}(x, y)$  и  $S_{un}(x, y)$  в (П.4.13) находим аналогично (П.7.3), (П.7.6) и (П.7.7) с использованием (П.7.4):

$$\begin{aligned}
P_{un}(x, y) &\sim -\frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} X_{1n}(y), S_{un}(x, y) \sim -\frac{e^x}{x\sqrt{2\pi}} Z_{1n}(y), |x| \rightarrow \infty, \\
P_{un}(x, y) &\sim \frac{e^y}{y\sqrt{2\pi}} X_{1n}(x), S_{un}(x, y) \sim \frac{e^y}{y\sqrt{2\pi}} X_{1n}(x), |y| \rightarrow \infty.
\end{aligned}
\tag{П.7.8}$$

Далее в дополнение к (П.7.4) и (П.7.5) с использованием (П.7.2), (П.2.17), (П.2.18) и (П.4.2) - (П.4.4) строим асимптотические соотношения при  $z \rightarrow \infty$  для остальных функций, входящих в фундаментальную матрицу  $\mathbf{X}_n(r, s)$  (П.4.1):

$$\begin{aligned}
X_{3n}(z) &\sim n(n+1) \frac{e^{-z}}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, X_{4n}(z) \sim \frac{n(n+1)e^z}{z^2 \sqrt{2\pi}}, \\
Y_{1n}(z) &= -\frac{e^{-z}}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, Y_{2n}(z) = -\frac{e^z}{z^2 \sqrt{2\pi}};
\end{aligned}
\tag{П.7.9}$$

$$\begin{aligned}
X'_{1n}(z) &\sim \frac{e^{-z}}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, X'_{2n}(z) \sim \frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}}, Y'_{1n}(z) \sim \frac{e^{-z}}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\
Y'_{2n}(z) &\sim -\frac{e^z}{z^2 \sqrt{2\pi}}, Y'_{3n}(z) \sim -\frac{e^{-z}}{z} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, Y'_{4n}(z) \sim -\frac{e^z}{z\sqrt{2\pi}}, \\
X'_{3n}(z) &\sim -n(n+1) \frac{e^{-z}}{z^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, X'_{4n}(z) \sim n(n+1) \frac{e^z}{z^2 \sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}
\tag{П.7.10}$$

Кроме того, находим асимптотические представления функций, входящих в (П.3.20) и (П.5.22):

$$\begin{aligned}
E_{00n}(x, y) &\sim (-1)^n y^n R_{n0}(x) e^{y-x}, E_{10n}(x, y) \sim (-1)^n y^n R_{n1}(x) e^{y-x}, \\
E_{11n}(x, y) &\sim (-1)^{n+1} y^{n+1} R_{n1}(x) e^{y-x}, E_{30n}(x, y) \sim (-1)^n y^n R_{n3}(x) e^{y-x}, \\
E_{33n}(x, y) &\sim (-1)^{n+1} y^{n+1} R_{n3}(x) e^{y-x}, y \rightarrow \infty (\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} x > 0);
\end{aligned}
\tag{П.7.11}$$

$$E_{10n}(x, y), E_{30n}(x, y) \sim (-1)^n x^{n+1} R_{n0}(y) e^{x-y}, x \rightarrow \infty (\operatorname{Re} x > \operatorname{Re} y > 0); \tag{П.7.12}$$

$$D_n(y, y) \sim \eta^{n+1} y^{2(n+1)}, D_n(-y, -y) \sim \eta^{n+1} y^{2(n+1)},$$

$$D_n(y, -y) \sim (-1)^{n+1} \eta^{n+1} y^{2(n+1)}, D_n(-y, y) \sim (-1)^{n+1} \eta^{n+1} y^{2(n+1)}, y \rightarrow \infty, \tag{П.7.13}$$

$$L_{zn}(x, y) \sim -D_n(x, x) \eta^{n+1} y^{2(n+1)} e^{\eta_+(y-x)}, y \rightarrow \infty (\operatorname{Re} y > \operatorname{Re} x > 0).$$

Б. Асимптотические представления при  $r \rightarrow 0$ .

Для функций, входящих в фундаментальную систему решений (П.2.2), из (П.3.13) с учетом (П.2.20) и (П.3.16) получаем следующие соотношения при  $z \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} R_{00}(z) &= 1, R_{01}(z) = R_{10}(z) = 1 + z, R_{03}(z) = z, \\ R_{11}(z) &= 2(1+z) + z^2, R_{13}(z) = 1 + z + z^2, \\ R_{n0}(z) &\sim A_{nn}(1 + z + k_{n0}z^2), R_{n1}(z) \sim (n+1)A_{nn}(1 + z + k_{n1}z^2), \\ R_{n3}(z) &\sim nA_{nn}(1 + z + k_{n3}z^2), A_{nn} = (2n-1)!!, \\ k_{n0} &= \frac{n-1}{2n-1}, k_{n1} = \frac{n^2}{(n+1)(2n-1)}, k_{n3} = \frac{n^2 - n + 1}{n(2n-1)} \quad (n \geq 2); \end{aligned} \quad (\text{П.7.14})$$

$$Z_{1n}(z) \sim A_{nn} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha_{z1n} z^2}{z^{n+1}}, Z_{2n}(z) \sim \frac{z^n}{(2n+1)!!} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \alpha_{z1n} = \frac{1}{2(2n-1)}. \quad (\text{П.7.15})$$

Здесь дополнительно учтено, что при  $z \rightarrow 0$  имеет место соотношение [111]:

$$I_{n+1/2}(z) \sim \frac{z^{n+1/2}}{(2n+1)!!} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (\text{П.7.16})$$

Далее, используя (П.7.14), (П.2.17), (П.2.18) и (П.3.14), (П.3.15), построим асимптотические представления при  $z \rightarrow 0$  для других функций, входящих в фундаментальные системы решений:

$$\begin{aligned} X_{1n}(z) &\sim -(n+1)A_{nn} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha_{x1n} z^2}{z^{n+2}}, \alpha_{x1n} = \frac{n-1}{2(n+1)(2n-1)}, \\ X_{20}(z) &\sim \frac{z}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, X_{2n}(z) \sim \frac{nz^{n-1}}{(2n+1)!!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (\text{П.7.17})$$

$$Y_{3n}(z) \sim nA_{nn} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha_{y3n} z^2}{z^{n+2}}, \alpha_{y3n} = \frac{n-2}{2n(2n-1)}, Y_{4n}(z) \sim -\frac{(n+1)z^{n-1}}{(2n+1)!!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (\text{П.7.18})$$

Учитывая их, из (П.3.5) и (П.3.7) с использованием (П.7.3) и (П.3.6) получаем следующие представления:

$$\begin{aligned} Q_{en}(x, y) &\sim nA_{nn} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha_{y3n} x^2}{x^{n+2}} Y_{4n}(y), \quad x \rightarrow 0, \\ Q_{en}(x, y) &\sim -nA_{nn} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \alpha_{y3n} y^2}{y^{n+2}} Y_{4n}(x), \quad y \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (\text{П.7.19})$$

$$S_{en}(x, y) \sim -Y_{3n}(x)Z_{2n}(y) \sim -nA_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{y3n}x^2}{x^{n+2}}Z_{2n}(y), \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{П.7.20})$$

$$S_{en}(x, y) \sim Z_{1n}(y)Y_{4n}(x) \sim A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}y^2}{y^{n+1}}Y_{4n}(x), \quad y \rightarrow 0.$$

Далее использованием (П.7.17) построим асимптотические представления для функции  $P_{un}(x, y)$  в (П.4.13):

$$P_{un}(x, y) \sim X_{1n}(x)X_{2n}(y) \sim -(n+1)A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{x1n}x^2}{x^{n+2}}X_{2n}(y), \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{П.7.21})$$

$$P_{un}(x, y) \sim -X_{1n}(y)X_{2n}(x) \sim (n+1)A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{x1n}y^2}{y^{n+2}}X_{2n}(x), \quad y \rightarrow 0.$$

Теперь в дополнение к (П.7.17) и (П.7.18) с использованием (П.7.15), (П.2.17) и (П.2.18) построим асимптотические соотношения при  $z \rightarrow 0$  для остальных функций, входящих в первую и третью строки фундаментальной матрицы  $\mathbf{X}_n(r, s)$  (П.4.1):

$$X_{3n}(z) \sim n(n+1)A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}z^2}{z^{n+2}}, \quad X_{4n}(z) \sim n(n+1)\frac{z^{n-1}}{(2n+1)!!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (\text{П.7.22})$$

$$Y_{1n}(z) \sim -A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}z^2}{z^{n+2}}, \quad Y_{2n}(z) \sim -\frac{z^{n-1}}{(2n+1)!!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Кроме того, в дополнение к формулам (П.7.19), (П.7.20) и (П.7.21) с использованием (П.7.15) и (П.7.17) построим асимптотики функций  $P_{en}(x, y)$  и функций  $S_{un}(x, y)$ :

$$P_{en}(x, y) \sim A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}x^2}{x^{n+1}}Z_{2n}(y), \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{П.7.23})$$

$$P_{en}(x, y) \sim -A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}y^2}{y^{n+1}}Z_{2n}(x), \quad y \rightarrow 0;$$

$$S_{un}(x, y) \sim X_{1n}(x)Z_{2n}(y) \sim -(n+1)A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{x1n}x^2}{x^{n+2}}Z_{2n}(y), \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{П.7.24})$$

$$S_{un}(x, y) \sim -Z_{1n}(y)X_{2n}(x) \sim -A_{mn}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\alpha_{z1n}y^2}{y^{n+1}}X_{2n}(x), \quad y \rightarrow 0;$$

Далее, используя все эти формулы, приходим к следующим представлениям при  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
P_{un}(x, y)Q_{en}(\eta x, \eta z) &\sim -n(n+1) \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{xyn} x^2)}{2\eta^{n+2} x^{2(n+2)}} X_{2n}(y) Y_{4n}(\eta z), \\
S_{un}(y, x)S_{en}(\eta z, \eta x) &\sim -\frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{zzn} x^2)}{2\eta^{n+1} x^{2(n+1)}} X_{2n}(y) Y_{4n}(\eta z), \\
S_{un}(x, z)S_{en}(\eta x, \eta y) &\sim n(n+1) \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{xyn} x^2)}{2\eta^{n+2} x^{2(n+2)}} Z_{2n}(z) Z_{2n}(\eta y), \\
P_{en}(x, z)P_{en}(\eta x, \eta y) &\sim \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{zzn} x^2)}{2\eta^{n+1} x^{2(n+1)}} Z_{2n}(z) Z_{2n}(\eta y), \\
P_{un}(x, y)S_{en}(\eta x, \eta z) &\sim n(n+1) \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{xyn} x^2)}{2\eta^{n+2} x^{2(n+2)}} X_{2n}(y) Z_{2n}(\eta z), \\
P_{en}(\eta y, \eta x)S_{un}(z, x) &\sim \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{zzn} x^2)}{2\eta^{n+1} x^{2(n+1)}} X_{2n}(z) Z_{2n}(\eta y), \\
S_{un}(x, z)Q_{en}(\eta x, \eta y) &\sim -n(n+1) \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{xyn} x^2)}{2\eta^{n+2} x^{2(n+2)}} Y_{4n}(\eta y) Z_{2n}(z), \\
P_{en}(x, y)S_{en}(\eta z, \eta x) &\sim \frac{\pi A_{mn}^2 (1 - \beta_{zzn} x^2)}{2\eta^{n+1} x^{2(n+1)}} Z_{2n}(y) Y_{4n}(\eta z).
\end{aligned} \tag{П.7.25}$$

где

$$\beta_{xyn} = \alpha_{x1n} + \alpha_{y3n} \eta^2, \quad \beta_{zzn} = (1 + \eta^2) \alpha_{z1n}.$$

Подставляя (П.7.17) - (П.7.25) в (П.5.17) и (П.5.18), приходим к таким асимптотическим равенствам при  $y \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\eta^{n+2} y^{2(n+1)}}{\pi A_{mn}^2 [n + \eta^2 (n+1)] \alpha_{z1n}} R_{un1}(x, y, z) &\sim Y_{2n}(z) X_{4n}(\eta x) - X_{2n}(x) Y_{4n}(\eta z), \\
\frac{\eta^{n+2} y^{2(n+1)}}{\pi A_{mn}^2 [n + \eta^2 (n+1)] \alpha_{z1n}} R_{un2}(x, y, z) &\sim X_{2n}(z) Y_{2n}(\eta x) - X_{2n}(x) Y_{2n}(\eta z), \\
\frac{\eta^{n+2} y^{2(n+1)}}{\pi A_{mn}^2 [n + \eta^2 (n+1)] \alpha_{z1n}} R_{vn1}(x, y, z) &\sim Y_{2n}(z) Y_{4n}(\eta x) - Y_{2n}(x) Y_{4n}(\eta z).
\end{aligned} \tag{П.7.26}$$

Здесь учтены следующие соотношения:

$$\alpha_{x1n} = \frac{n-1}{n+1} \alpha_{z1n}, \alpha_{y3n} = \frac{n-2}{n} \alpha_{z1n}, \alpha_{x1n} - \alpha_{z1n} = -\frac{2\alpha_{z1n}}{n+1}, \alpha_{y3n} - \alpha_{z1n} = -\frac{2\alpha_{z1n}}{n},$$

$$\beta_{xyn} - \beta_{z1n} = -\frac{2\alpha_{z1n}}{n+1} - \eta^2 \frac{2\alpha_{z1n}}{n} = -2 \frac{n + \eta^2(n+1)}{n(n+1)} \alpha_{z1n}. \quad (\text{П.7.27})$$

Аналогично при дополнительном учете обозначения (4.4.14) строится следующее равенство для определителя в (П.5.5) при  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\eta^{n+2} x^{2(n+1)}}{\pi A_m^2 [n + \eta^2(n+1)]} R_{zn}(x, y) \sim T_{24}(y, \eta y). \quad (\text{П.7.28})$$

Рассмотрим также асимптотическое поведение некоторых функций из (П.3.16) и (П.3.20) при  $n=1$ . С этой целью, учитывая (П.7.14), сначала находим следующие представления при  $z \rightarrow 0$ :

$$R_{10}(z) e^{-z} \sim (1+z) \left( 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \sim 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3},$$

$$R_{11}(z) e^{-z} \sim [2(1+z) + z^2] \left( 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \sim 2 - \frac{z^3}{3}, \quad (\text{П.7.29})$$

$$R_{13}(z) e^{-z} \sim (1+z+z^2) \left( 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) \sim 1 + \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3}.$$

Используя эти равенства, для функций из (П.3.16) получаем следующий результат:

$$\Lambda_{10}(z) \sim -\frac{2z^3}{3}, \Lambda_{11}(z) \sim \frac{2z^3}{3}, \Lambda_{13}(z) \sim \frac{4z^3}{3}, z \rightarrow 0. \quad (\text{П.7.30})$$

А для функций из (П.3.20) аналогичным образом приходим к таким представлениям:

- при  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 E_{101}(x, y) &\sim 2\Lambda_{10}(y) - \frac{x^3}{3}\Sigma_{10}(y), \quad E_{111}(x, y) \sim 2\Lambda_{11}(y) - \frac{x^3}{3}\Sigma_{11}(y), \\
 E_{001}(x, y) &\sim \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\Lambda_{10}(y) + \frac{x^3}{3}\Sigma_{10}(y), \\
 E_{331}(x, y) &\sim \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\Lambda_{13}(y) - \frac{2x^3}{3}\Sigma_{13}(y), \\
 E_{301}(x, y) &\sim \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\Lambda_{10}(y) - \frac{2x^3}{3}\Sigma_{10}(y);
 \end{aligned}
 \tag{П.7.31}$$

- при  $y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 E_{101}(x, y) &\sim -\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\Lambda_{11}(x) - \frac{y^3}{3}\Sigma_{11}(x), \\
 E_{301}(x, y) &\sim -\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)\Lambda_{13}(x) - \frac{y^3}{3}\Sigma_{13}(x),
 \end{aligned}
 \tag{П.7.32}$$

где

$$\Sigma_{nk}(z) = R_{nk}(-z)e^z + R_{nk}(z)e^{-z} \quad (k = 0, 1, 3).
 \tag{П.7.33}$$

## § П.8. Общие решения уравнений электромагнитного поля и теории упругости в прямоугольной декартовой системе координат

Для построения общих решений уравнений (2.2.17), (2.2.18) и (2.2.20) необходимо иметь общие решения соответствующих однородных систем и уравнений.

Общее решение соответствующего (2.2.20) однородного уравнения и уравнения (2.2.22)

$$\frac{\partial^2 H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H^{LF} = 0
 \tag{П.8.1}$$

имеет вид:

$$H^{LF}(q, z, s) = C_1(q, s)e^{k_e z} + C_2(q, s)e^{-k_e z},
 \tag{П.8.2}$$

где

$$k_e(q, s) = \sqrt{s_e^2 \eta_e^2 + q^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}.$$

а  $C_k(q, s)$  ( $k = 1, 2$ ) - произвольные функции.

Для построения общих решений соответствующих (2.2.17) и (2.2.18) однородных уравнений используем представления (1.4.21) перемещений через их потенциалы  $\phi$  и  $\psi$ , полагая, что они удовлетворяют уравнениям (1.4.33) и (1.4.34) при  $\Phi = \Psi \equiv 0$ .

При этом начальным условиям (2.1.3) отвечают следующие равенства:

$$\phi|_{\tau=0} = \dot{\phi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \quad (\text{П.8.3})$$

Тогда в пространстве преобразований Лапласа и Фурье с учетом (П.8.3) уравнения (1.4.33) и (1.4.34) записываются аналогично (П.8.1):

$$\frac{\partial^2 \phi^{LF}}{\partial z^2} - k_1^2(q^2, s^2) \phi^{LF} = 0; \quad (\text{П.8.4})$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{LF}}{\partial z^2} - k_2^2(q^2, s^2) \psi^{LF} = 0, \quad (\text{П.8.5})$$

где

$$k_1(q, s) = \sqrt{s+q}, \quad k_2(q, s) = \sqrt{s\eta^2 + q}, \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0. \quad (\text{П.8.6})$$

Общие решения этих уравнений подобно (П.8.2) записываются так:

$$\phi^{LF}(q, z, s) = -A_1(q, s)e^{-k_1 z} + A_2(q, s)e^{k_1 z}; \quad (\text{П.8.7})$$

$$\psi^{LF}(q, z, s) = B_1(q, s)e^{-k_2 z} - B_2(q, s)e^{k_2 z}, \quad (\text{П.8.8})$$

где  $A_k(q, s)$  и  $B_k(q, s)$  ( $k=1, 2$ ) - произвольные функции.

Далее применяем преобразования Лапласа и Фурье к соотношениям (1.4.21):

$$u^{LF} = -iq\phi^{LF} - \frac{\partial \psi^{LF}}{\partial z}, \quad w^{LF} = \frac{\partial \phi^{LF}}{\partial z} - iq\psi^{LF}. \quad (\text{П.8.9})$$

$$\phi^{LF}(q, z, s) = -A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{k_1 z}, \quad \psi^{LF}(q, z, s) = B_1 e^{-k_2 z} - B_2 e^{k_2 z}$$

$$u^{LF} = -iq(-A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{k_1 z}) + k_2(B_1 e^{-k_2 z} + B_2 e^{k_2 z})$$

$$w^{LF} = k_1(A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{k_1 z}) - iq(B_1 e^{-k_2 z} - B_2 e^{k_2 z})$$

$$\frac{\partial u^{LF}}{\partial z} = -iqk_1(A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{k_1 z}) + k_2^2(-B_1 e^{-k_2 z} + B_2 e^{k_2 z})$$

$$\frac{\partial w^{LF}}{\partial z} = k_1^2(-A_1 e^{-k_1 z} + A_2 e^{k_1 z}) + iqk_2(B_1 e^{-k_2 z} + B_2 e^{k_2 z})$$

Подставляя теперь (П.8.7) и (П.8.8) в (П.8.9), находим общие решения однородных уравнений, соответствующих (2.2.17) и (2.2.18):

$$\begin{aligned} u^{LF} &= iq \left[ A_1(q, s) e^{-k_1 z} - A_2(q, s) e^{k_1 z} \right] + k_2 \left[ B_1(q, s) e^{-k_2 z} + B_2(q, s) e^{k_2 z} \right], \\ w^{LF} &= k_1 \left[ A_1(q, s) e^{-k_1 z} + A_2(q, s) e^{k_1 z} \right] - iq \left[ B_1(q, s) e^{-k_2 z} - B_2(q, s) e^{k_2 z} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.8.10})$$

Отсюда следует, что фундаментальная матрица систем уравнений (2.2.17) и (2.2.18) имеет следующий вид:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} iqe^{-k_1 z} & -iqe^{k_1 z} & k_2 e^{-k_2 z} & k_2 e^{k_2 z} \\ -iqk_1 e^{-k_1 z} & -iqk_1 e^{k_1 z} & -k_2^2 e^{-k_2 z} & k_2^2 e^{k_2 z} \\ k_1 e^{-k_1 z} & k_1 e^{k_1 z} & -iqe^{-k_2 z} & iqe^{k_2 z} \\ -k_1^2 e^{-k_1 z} & k_1^2 e^{k_1 z} & iqk_2 e^{-k_2 z} & iqk_2 e^{k_2 z} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.8.11})$$

Для нужд § 2.6 найдем ее миноры второго порядка, алгебраические дополнения и определитель. Сначала вычисляем миноры, соответствующие 1, 2 и 3, 4 столбцам:

$$\begin{aligned} M_{12}^{12} &= 2q^2 k_1, \quad M_{12}^{13} = 2iqk_1, \\ M_{12}^{14} &= M_{12}^{23} = 0, \\ M_{12}^{24} &= -2iqk_1^3, \quad M_{12}^{34} = 2k_1^3, \\ M_{34}^{34} &= 2q^2 k_2, \quad M_{34}^{24} = -2iqk_2^3, \\ M_{34}^{13} &= 2iqk_2, \quad M_{34}^{12} = 2k_2^3, \\ M_{34}^{23} &= M_{34}^{14} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.8.12})$$

Затем находим алгебраические дополнения  $X_{2j}(q, \xi, s)$  и  $X_{4j}(q, \xi, s)$  элементов второй и четвертой строки:

$$\begin{aligned} -X_{21} &= -iqe^{k_1 z} M_{34}^{34} - k_1 e^{k_1 z} M_{34}^{14} + k_1^2 e^{k_1 z} M_{34}^{13} = 2iqs^2 k_2 e^{k_1 z}, \\ X_{22} &= iqe^{-k_1 z} M_{34}^{34} - k_1 e^{-k_1 z} M_{34}^{14} - k_1^2 e^{-k_1 z} M_{34}^{13} = -2iqs^2 k_2 e^{-k_1 z}, \\ -X_{23} &= k_2 e^{k_2 z} M_{12}^{34} - iqe^{k_2 z} M_{12}^{14} + iqk_2 e^{k_2 z} M_{12}^{13} = 2s^2 k_1 k_2 e^{k_2 z}, \\ X_{24} &= k_2 e^{-k_2 z} M_{12}^{34} - iqe^{-k_2 z} M_{12}^{14} + iqk_2 e^{-k_2 z} M_{12}^{13} = 2s^2 k_1 k_2 e^{-k_2 z}; \end{aligned} \quad (\text{П.8.13})$$

$$\begin{aligned} -X_{41} &= -iqe^{k_1 z} M_{34}^{23} + iqk_1 e^{k_1 z} M_{34}^{13} + k_1 e^{k_1 z} M_{34}^{12} = 2\eta^2 s^2 k_1 k_2 e^{k_1 z}, \\ X_{42} &= iqe^{-k_1 z} M_{34}^{23} + iqk_1 e^{-k_1 z} M_{34}^{13} + k_1 e^{-k_1 z} M_{34}^{12} = 2\eta^2 s^2 k_1 k_2 e^{-k_1 z}, \\ -X_{43} &= k_2 e^{k_2 z} M_{12}^{23} - k_2^2 e^{k_2 z} M_{12}^{13} + iqe^{k_2 z} M_{12}^{12} = -2\eta^2 iqs^2 k_1 e^{k_2 z}, \\ X_{44} &= k_2 e^{-k_2 z} M_{12}^{23} + k_2^2 e^{-k_2 z} M_{12}^{13} - iqe^{-k_2 z} M_{12}^{12} = 2\eta^2 iqs^2 k_1 e^{-k_2 z}. \end{aligned} \quad (\text{П.8.14})$$

Определитель матрицы  $\mathbf{X}$  вычисляем двумя способами:

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}| &= -iqk_1 e^{-k_1 z} X_{21} - iqk_1 e^{k_1 z} X_{22} - k_2^2 e^{-k_2 z} X_{23} + k_2^2 e^{k_2 z} X_{24} = 4\eta^2 s^4 k_1 k_2, \\ |\mathbf{X}| &= -k_1^2 e^{-k_1 z} X_{41} + k_1^2 e^{k_1 z} X_{42} + iqk_2 e^{-k_2 z} X_{43} + iqk_2 e^{k_2 z} X_{44} = 4\eta^2 s^4 k_1 k_2. \end{aligned} \quad (\text{П.8.15})$$

Найдем также аналогично § П.2 связь общих решений уравнений (2.1.14) с общими решениям неоднородных уравнений (1.4.39) и (1.4.40). Общее решение изображений последних имеет вид:

$$\chi^{LF}(q, z, s) = D_1(q, s) e^{-zk_1(q^2, s^2)} + D_2(q, s) e^{zk_1(q^2, s^2)} + \chi_*^{LF}(z, q, s); \quad (\text{П.8.16})$$

$$\omega^{LF}(q, z, s) = E_1(q, s) e^{-zk_2(q^2, s^2)} + E_2(q, s) e^{zk_2(q^2, s^2)} + \omega_*^L(z, q, s), \quad (\text{П.8.17})$$

где  $\chi_*^{LF}$  и  $\omega_*^L$  - частные решения.

Общее решение системы уравнений (2.1.14) согласно (П.8.10) записывается так:

$$\begin{aligned} u^{LF}(q, z, s) &= iq \left[ A_1(q, s) e^{-zk_1(q^2, s^2)} - A_2(q, s) e^{zk_1(q^2, s^2)} \right] + \\ &+ k_2(q^2, s^2) \left[ B_1(q, s) e^{-zk_2(q^2, s^2)} + B_2(q, s) e^{zk_2(q^2, s^2)} \right] + u_*^{LF}(z, q, s), \\ w^{LF}(q, z, s) &= k_1(q^2, s^2) \left[ A_1(q, s) e^{-zk_1(q^2, s^2)} + A_2(q, s) e^{zk_1(q^2, s^2)} \right] + \\ &+ iq \left[ -B_1(q, s) e^{-zk_2(q^2, s^2)} + B_2(q, s) e^{zk_2(q^2, s^2)} \right] + w_*^{LF}(z, q, s). \end{aligned} \quad (\text{П.8.18})$$

Подставляя эти равенства в (1.4.41), с учетом свойств преобразований Фурье и Лапласа приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \chi^{LF}(u^{LF}, w^{LF}) &= -s^2 (A_1 e^{-zk_1} - A_2 e^{zk_1}) + \chi^{LF}(u_*^{LF}, w_*^{LF}), \\ \omega^{LF}(u^{LF}, w^{LF}) &= -\eta^2 s^2 (B_1 e^{-zk_2} - B_2 e^{zk_2}) + \omega^{LF}(u_*^{LF}, w_*^{LF}), \end{aligned} \quad (\text{П.8.19})$$

где

$$\chi^{LF}(u, w) = -iqu + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \omega^{LF}(u, w) = \frac{\partial u}{\partial z} + iqw.$$

Сравнивая теперь их с (П.8.16) и (П.8.17), получаем аналогичную (П.2.36) связь постоянных интегрирования и частных решений:

$$\begin{aligned}
D_1(q, s) &= -s^2 A_1(q, s), \quad D_2(q, s) = s^2 A_2(q, s), \quad \chi_*^{LF} = \chi(u_*^{LF}, w_*^{LF}), \\
E_1(q, s) &= -\eta^2 s^2 B_1(q, s), \quad E_2(q, s) = \eta^2 s^2 B_2(q, s), \quad \omega_*^{LF} = \omega(u_*^{LF}, w_*^{LF}).
\end{aligned}
\tag{II.8.20}$$

## Заключение

1. Дана общая математическая постановка задач нестационарной связанной термоэлектромагнитоупругости анизотропных тел. Из нее как частный случай получены начально-краевые задачи для изотропных проводников.

2. Предложен и реализован основанный на использовании малого параметра метод решения класса нестационарных связанных двумерных задач в прямоугольной декартовой и сферической системе координат.

3. Получены решения новых нестационарных связанных плоских задач электромагнитоупругости для полупространства.

4. Получены решения новых нестационарных связанных осесимметричных задач электромагнитоупругости для толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара.

5. Построены нестационарные поверхностные и объемные функции Грина для электромагнитной и упругой полуплоскостей.

6. Доказаны утверждения о структуре нестационарных осесимметричных объемных функций функции Грина в сферической системе координат.

7. Построены нестационарные объемные функции Грина для электромагнитных и упругих толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара.

8. Получено решение нестационарных двумерных задач для тел указанной геометрии о деформировании под действием объемных сил и об определении электромагнитного поля по заданным перемещениям.

### Литература

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям: С формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с англ. // М., Наука, 1979 г., 832с.
2. Абрамян Б.Л. Об одной задаче распространения упругих волн в полупространстве // Докл. АН АрмССР. 1985. 81, N 3, С. 118-122.
3. Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. Магнитоупругие колебания электропроводящей ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле // Изв. Нац. АН Армении. Мех.. 1997. 50, N 3-4, С. 3-16.
4. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – 272 с.
5. Бабаев А.Э., Бут Л.М., Савин В.Г. Нестационарные колебания тонкостенного цилиндрического пьезовибратора в жидкости при неосесимметричном электрическом возбуждении // Прикл. мех. (Киев). 1990. 26, N 12, С. 59-67.
6. Бабаев А.Э., Докучаева Л.И. Излучение нестационарных волн тонкостенным пьезокерамическим цилиндром, содержащим вязкую сжимаемую жидкость // Прикл. мех. (Киев). 1999. 35, N 12, С. 63-71.
7. Бабаев А.Э., Лейко А.А. Нестационарная задача излучения акустических волн цилиндрическим пьезопреобразователем вблизи плоской границы // Прикл. мех. (Киев). 1997. 33, N 12, С. 60-67.
8. Бабаев А.Э., Лейко А.А. Работа системы двух параллельных многомодовых цилиндрических пьезопреобразователей при нестационарном электрическом возбуждении // Прикл. мех. (Киев). 1995. 31, N 3, С. 66-75.
9. Бабаев А.Э., Маценко Г.Л. Взаимодействие нестационарной цилиндрической акустической волны с многомодовым цилиндрическим пьезопреобразователем // Прикл. мех. (Киев). 1999. 35, N 10, С. 37-45.

10. Бабаев А.Э., Маценко Г.Л. Действие плоской нестационарной акустической волны на цилиндрический пьезопреобразователь с секционированными электродами // Прикл. мех. (Киев). 1998. 34, N 2, С. 78-85.
11. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Взаимодействие нестационарной акустической волны с системой коаксиальных электроупругих цилиндрических оболочек // Прикл. мех. (Киев). 1993. 29, N2, С. 32-38.
12. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Взаимодействие плоской нестационарной волны с системой двух цилиндрических электроупругих оболочек // Прикл. мех. (Киев). 1995. 31, N 1, С. 50-58.
13. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Возбуждение нестационарными электрическими сигналами толстостенного радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра // Прикл. мех. (Киев). 1994. 30, N 9, С. 24-30.
14. Бабаев А.Э., Рябуха Ю.Н., Савин В.Г. Возбуждение толстостенной пьезокерамической сферы нестационарными электрическими импульсами // Изв. АН. Мех. тверд. тела. 1995, N 5, С. 94-101.
15. Бабаев А.Э., Савин В.Г. Излучение нестационарных акустических волн радиально поляризованным цилиндрическим пьезопреобразователем // Прикл. мех. (Киев). 1995. 31, N 4, С. 41-48.
16. Бабаев А. Э., Савин В.Г. Излучение нестационарных акустических волн толстостенной электроупругой сферой // Прикл. мех. (Киев). 1995. 31, N11, С. 25-32.
17. Бабаев А.Э., Савин В.Г. Нестационарные процессы в многослойном пьезокерамическом пакете при электрическом воздействии // Прикл. мех. (Киев), 1990. 26, N 11, С. 61-66.
18. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Джулинский А.В. Аналитический метод решения задачи излучения нестационарных волн сферическим пьезопреобразователем // Теор. и прикл. мех. (Киев). 2003, N 37, С. 195-199, 213.
19. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Лейко А.А. Излучение нестационарных акустических волн системой двух однонаправленных цилиндрических пьезопре-

образователей // Изв. АН. Мех. тверд. тела. 1996, N 2, С. 182-190.

20. Бабаев А.Э., Савин В. Г., Стадник А.И. Излучение звука системой пьезокерамических сферических оболочек при электрическом импульсном возбуждении // Прикл. мех. (Киев). 1988. 24, N 10, С. 34-40.

21. Бабаев А.Э., Янчевский И. В. Излучение нестационарных акустических волн электроупругим цилиндром с проводной цепью // Теор. и прикл. мех.. 2010, N 1, С. 114-125.

22. Бабешко В.А. Об интегральных уравнениях электроупругости, возникающих при расчете акустоэлектронных устройств // Докл. АН СССР. 1988. 302, N 4, С. 812-815.

23. Баблоян А.А., Мелкумян С.А. Смешанная задача электроупругости для пьезокерамического клина с электродами // Докл. НАН Армении, – 1999, Т.99, №1. – С.45-51.

24. Багдасарян Г.Е. Возбуждение сдвиговых поверхностных волн в полупространстве волной Релея // Изв. АН АрмССР. Мех.. 1990. 43, N 2, С. 38-43.

25. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Плоская магнитоупругая задача Лэмба // Механика: Ереван, 1983, №3. С.68-76.

26. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

27. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сенник Н.А., Фильштинский М.Л., Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. 2. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел // М.: КомКнига., 2005. – 374 с.

28. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. – URSS, 2003. – 336 с.

29. Бардзокас Д.И., Сенник Н.А., Контактные задачи электроупругости // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит., – 2001. С.583-606.

30. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Том 1 // М., Наука, 1969.
31. Белубекян М.В. Магнитоупругие поверхностные волны в полупространстве с поверхностным электрическим током // Изв. АН АрмССР. Мех.. 1990. 43, N 1, С. 3-9.
32. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Ворович И.И., Зайцева И.А., Калинин В.В., Динамика контактного взаимодействия электроупругих тел и резонансные явления // 8-ой Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг., 2001: Аннотации докладов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН; Пермь: Изд-во Ин-та мех. сплош. сред УрО РАН, – 2001. – С.95.
33. Болкисев А.М., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А. Колебания пьезокерамического полого цилиндра при механическом нагружении // Прикл. мех. (Киев). 1985. 21, N 9, С. 109-112.
34. Бурак Я.Й., Грицина О.Р., Нагірний Т.С. Основополагающие соотношения обобщенной электротермомеханики N-компонентного твердого тела. Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки N-компонентного твердого розчину // Физ.-хим. мех. матер.. 1991. 27, N 1, С. 9-13.
35. Ватульян А.О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэлектроупругости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. н.. 1999, N 3, С. 28-31, 128.
36. Ватульян А.О. Об анализе движений в термоэлектроупругости // Совер. пробл. мех. сплош. среды: Тр. 4-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 27-28 окт., 1998. Т. 1. Ростов н/Д. 1998, С. 79-83.
37. Ватульян А.О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // Прикл. мат. и мех. (Москва). 1996. 60, N 2, С. 309-312.
38. Ватульян А.О., Домброва О.Б. Коэффициентные обратные задачи электроупругости // Совер. пробл. мех. сплош. среды: Тр. 5-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 12-14 окт., 1999. Т. 2. Ростов н/Д., – 2000. – С.48-52.

39. Ватульян А.О., Домброва О.Б. Об одной обратной задаче электроупругости // *Соврем. пробл. мех. сплош. среды: Тр. 4-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 27-28 окт., 1998. т. 1. Ростов н/Д., – 1998. – С.84-88.*
40. Вестяк А.В., Вестяк В.А., Садков А.С., Терлецкий Р.Ф. Обращение совместного преобразования Фурье и Лапласа в задачах о распространении волн в упругом изотропном пространстве или полупространстве // *Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. - Чебоксары.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. - С. 25 - 27.*
41. Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.1. // *М.: изд-во МАИ, 2002. – 460 с.: ил.*
42. Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.2. // *М.: изд-во МАИ, 2007. – 544 с.: ил.*
43. Вестяк В.А. Нестационарные колебания упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // *Строительство и восстановление искусственных сооружений : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2015. - С. 376 - 378.*
44. Вестяк В., Гачкевич О., Мусій Р., Тарлаковский Д., Шимчак Ю. Проблеми математичного моделювання фізико-механічних процесів в електропровідних тілах за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. - Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 21 – 23.*
45. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Интегральное представление нестационарного электромагнитного поля в движущейся толсто-стенной сфере // *Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. X Междунар. научн. конф. (19-22 авг. 2013). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2013. – С. 32-35.*
46. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости // – *Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механи-*

ки конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТР-принт", 2013. - С. 17-18.

47. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в толстостенной упругой сфере // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТР-принт", 2012.- С. 18-19.

48. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф., Тарлаковский Д.В. Упругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных кинематических возмущений // Математические методы и физико-механические поля - 2013.- Т.56, № 2. – С. 164 -172. = Vestyak V.A., Nachkevych A.R., Tarlakovskii D.V., Terletsii. R.F. Elastic Half Plane Under the Action of Nonstationary Surface Kinematic Perturbations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 203, Issue 2. - p. 202-214.

49. Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарные процессы в электромагнитоупругих и термодиффузионных средах // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всеросс. конф. 31 мая - 5 июня 2011 г., Астрахань, Россия. - Астрахань: Изд-во АГТУ, 2011. - С. 41-42.

50. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56, № 6. – С. 59-69. = V.A. Vestyak, D.V. Tarlakovskii Unsteady Axisymmetric Deformation of an Elastic Thick-Walled Sphere Under the Action of Volume Forces // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2015, Vol. 56, No. 6. - p. 984–994.

51. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций – Днепропетровский национальный университет. – Днепропетровск: ИМА-пресс, 2009. – Вып. 13. – С.24-30.

52. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Радиальные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Материалы XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. - М.: «Типография «ПАРАДИЗ», 2009. - С. 43.
53. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Распространение нестационарных радиальных возмущений от цилиндрической полости в электромагнитоупругой среде. // Материалы XIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, 2008, Том 1, С. 59-60.
54. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. - Чебоксары.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. - С. 27 - 29.
55. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое. // Доклады РАН, 2009. - Т. 426, №6 - С. 747 - 749. = Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovsky D.V. One-dimensional time-dependent waves in an electromagnetoelastic half-space or in a layer // DOKLADY PHYSICS. — 2009. — V. 54. — Issue 6. — P. 262—264.
56. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. (17-21 авг. 2009). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. - С. 26 - 27.
57. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Плоские нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Сучасні проблеми механіки та математики. Т.1. – Львів, 2008. – С. 65 - 67.

58. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды Междунар. конф. Т. 2. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – С. 58 - 65.
59. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Доклады РАН, 2010. – Т. 434, № 2 – С. 186 - 188. = Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii, D. V. The propagation of time-dependent radial perturbations from a spherical cavity in an electromagnetoelastic space // DOKLADY PHYSICS. — 2010. — V. 55. — Issue 9. — P. 468 — 470.
60. Вестяк В.А., Малашкин А.В., Тарлаковский Д.В. Применение численного обращения преобразования Лапласа при исследовании нестационарных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы // Сучасні проблеми механіки та математики. Т. 1. – Львів, ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – С. 80 - 82.
61. Вестяк В.А., Малашкин А.В., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Исследование осесимметричных нестационарных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферической оболочки с использованием численного обращения преобразования Лапласа // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: материалы междунар. науч. конф., 16-20 сент. 2013 г., г. Минск, Беларусь. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. С. 67-69.
62. Вестяк В.А., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В. Электромагнитоупругая полуплоскость под действием заданного на границе нестационарного электрического поля // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки - 2011». Матеріали конференції. Т. 1. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ. – 2011. – С. 117 – 119.

63. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Возбуждение нестационарного электромагнитного поля в движущемся плоскопараллельно полупространстве // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16-21 июня 2014 г.). Ч. 1. - Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. - С. 90 - 93.
64. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругой полуограниченной среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. № 4. Ч. 4. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – С. 1423-1424.
65. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Действие на упругий шар нестационарных осесимметричных объемных сил // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике»: сборник тезисов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. - с. 125 - 128.
66. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Доклады академии наук. - 2015. - Т. 460, № 3 - С. 279 - 282. = Vestyakov V.A., Tarlakovsky D.V. Integrated Representation of the Characteristics of an Unsteady Electromagnetic Field in a Moving Half-Plane // Doklady Physics, 2015. 2015, Vol. 60, No. 1. - P. 1–4.
67. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестник Тверского государственного университета, № 1, 2014. Серия: Прикладная математика, Вып. 9. - С. 51 - 64.
68. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: ІМА-прес. – 2009. – Вип. 10. – С. 57 – 62.

69. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные объёмные функции Грина для упругого шара // Упругость и неупругость: Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 105-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (Москва 20-21 января 2016 г.).-М.: Издательство Московского Университета, 2016. – с.286-288.
70. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2016, №4.- С. 48-54.
71. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущемся шаре // Доклады академии наук. - 2015. - Т. 464, № 5. - С. 544–547. = Vestyak V.A., Tarlakovsky D.V. A Nonstationary Axially Symmetric Electromagnetic Field in a Moving Sphere // Doklady Physics. - 2015. - Vol. 60, No. 10. - P. 433–436.
72. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в деформирующейся сферической оболочке // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. - 2015. - Т. 157, кн. 4. - С. 90-95.
73. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные волны в электромагнитоупругой полуплоскости // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 16 – 25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2012. - С. 147-148.
74. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные колебания электромагнитоупругой толстостенной сферы // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. Конф. (17-21 авг. 2009). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. – С. 23 - 25.
75. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные объёмные возмущения в пространстве со сферической полостью // Методи

розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2010. – Вип. 11. – С. 49 – 56.

76. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для электромагнитоупругой полуплоскости // Материали XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. - М.: «Типография «ПАРАДИЗ», 2009. - С. 43 - 44.

77. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Объемные нестационарные функции Грина для упругой толстостенной сферы // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тез. докл. Междунар. научн. конф., 23-26 авг. 2013, г. Одесса. - Одеса: «Астропринт», 2013. – С. 37-38.

78. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 4. С. 16 – 21.

79. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Осесимметричные нестационарные объемные возмущения в упругой толстостенной сфере // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. - Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 23 – 25.

80. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Плоское нестационарное электромагнитное поле в движущемся полупространстве // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. IX Междунар. научн. конф. (15-19 авг. 2011). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2011. – С. 51-55.

81. Вестяк В.А., Тарлаковський Д.В. Распространение нестационарных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Матер. междунар. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко. – М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. – С. 270.

82. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой среде со сферическими границами // Матер. XVII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО «ТР-принт», 2011. – С. 19 - 20.
83. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Связанные нестационарные колебания электромагнитопругих тел со сферическими границами // XI Всерос. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. мех. Аннот. докл. (Казань, 20 – 24 авг. 2015 г.). – Казань: Изд-во АН РТ, 2015. – С. 62.
84. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Связанные нестационарные колебания электромагнитопругих тел со сферическими границами // XI Всерос. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. мех.: сб. трудов (Казань, 20 – 24 авг. 2015 г.). – Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2015. – С. 749 – 751.
85. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущейся толстостенной сфере // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2011. – Вип. 12. – С. 33 – 39.
86. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости под действием поверхностных возмущений // Проблеми обчислювальної механіки і міцності констр. зб. наук. праць. - Дніпропетровськ: Ліра, 2012. - Вип. 19. - С. 34-40.
87. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Филатов П.А. Нестационарные одномерные задачи для электромагнитоупругой среды // Вторая Всерос. научн. конф. по волновой динамике машин и констр. Тез. докл. – Н. Новгород, 2007. – С. 18.
88. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Филатов П.А. Нестационарные радиальные возмущения от сферической полости в электромагнитоупругой среде // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. VII Междунар.

научн. шк.-сем. (21-25 авг. 2007). - Николаев: КП «Николаевская областная типография», 2007. – С. 29-30.

89. Вестяк Владимир, Тарлаковский Дмитрий Нестационарные волны в электромагнитоупругих телах // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача. – 2012. - С. 22 – 25.

90. Вестяк Владимир, Тарлаковский Дмитрий Нестационарные функции Грина для электромагнитной толстостенной сферы // Математические проблемы механики неоднородных структур. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2014. – С. 26-28.

91. Вестяк В.А., Садков А.С., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ.- 2011.- № 2.- С. 130-140. Перевод: V.A. Vestyak, A.S. Sadkov, D.V. Tarlakovskii Propagation of Unsteady Bulk Perturbations in an Elastic Half-Plane // Mechanics of Solids, 2011, Vol. 46, No. 2, pp. 266–274.

92. Вестяк В.А., Федотенков Г.В. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со свёрткой // Прикладная математика и математическая физика, 2015, том 1, № 1, С. 67-76.

93. Вестяк В.А., Федотенков Г.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619484. Модифицированный метод численного обращения преобразования Лапласа. Заявка № 2014615555. Дата государственной регистрации 17.09.2014.

94. Власенко В.Д. Существование и единственность обобщенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости // Методы числ. анал./РАН. ДВО. ВЦ. Владивосток. 1993, С. 49-60.

95. Власенко В.Д. Численное моделирование электроупругих процессов в пьезопластине в режиме излучения // Методы числ. анал./РАН. ДВО. ВЦ.

Владивосток. 1993, С. 113-131.

96. Власенко В.Д. Численное решение вариационных задач электроупругости // 32-я Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова, Владивосток, 29 авг.-4 сент., 2007: Тезисы докладов. Владивосток: Дальнаука, – 2007, С.56.

97. Вовк Л.П., Динамические задачи теории упругости для тел сложной структуры // Ростов н/Д: Изд-во Рост. гос. строит. ун-та., – 2003. – 168 с.

98. Ворович Е. И., Зайцева И.А., Калинин В. В. Некоторые динамические связанные задачи для электроупругого слоя. // Современ. пробл. мех. сплош. среды: Тр. 4-й Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 27-28 окт., 1998. Т. 1. Ростов н/Д., – 1998. – С. 107-110.

99. Ворович Е.И., Пряхина О.Д., Селезнев А.В., Тукодова О.М., Хатникова Е.П. Об асимптотике решений связанных задач электроупругости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. н., – 2000, №2. – С.24-26.

100. Ворович Е.И., Тукодова О.М. Осесимметричная динамическая контактная задача для электроупругого слоя // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2006, N 1, С. 30-32, 96.

101. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С. Несущая способность электропроводящих элементов конической формы при действии электромагнитных импульсов. Несуча здатність електропровідних елементів канонічної форми за дії електромагнетних імпульсів // Фіз.-хім. мех. матер.. 2010, N 4, С. 92-97.

102. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.Б. Термоупругие напряжения электропроводной пластины под действием электромагнитного поля по закону затухающей синусоиды. Термопружний стан електропровідної пластини під час електромагнетної дії в режимі згасної синусоїди // Фіз.-хім. мех. матер.. 2003. 39, N 6, С. 25-30.

103. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковский Д.В. Термомеханика ферромагнитных электропроводных тел с эффектами импульсных электромагнитных полей с модуляцией амплитуды. Термомеханіка ферромагнітних

электропроводных тел за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди // Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.

104. Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Модели термомеханики намагнічених и поляризованных электропроводных деформируемых твердых тел. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформівних твердих тіл // Фіз.-хім. мех. матер.. 2004. 40, N 3, С. 19-37.

105. Гилев С. Д., Михайлова Т. Ю. Электромагнитное поле и токовые волны в проводнике, сжимаемом ударной волной в магнитном поле // Физ. горения и взрыва. 2000. 36, N 6, С. 153-163.

106. Голотина Л. А., Денисюк Е. Я., Клигман Е. П., Матвеев В. П., Пестренин В. М., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Связанные проблемы МТДТ: Учебное пособие. Ч. 3. Электровязкоупругость // Пермь: ПермГУ, – 2007, 39 с.

107. Горшков А.Г. Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов – М.: Наука, 2000. – 214 с.

108. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

109. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. // М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

110. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 264 с.

111. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

112. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.

113. Григорьева Л.О. Применение метода характеристик в одномерных задачах электроупругости // Прикл. мех.. 2009. 45, N 3, с. 116.

114. Григорьева Л.О. Численное решение начально-краевой задачи электроупругости для полого пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией. // Прикл. мех., – 2006, т. 42, №12. – С.67-75.
115. Григорьева Л.О., Колебания пьезокерамического цилиндра при нестационарном электрическом возбуждении // Прикл. мех., – 2007, Т.43, №3. – С.73-79.
116. Григоренко А.Я., Лоза И.А. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении. // Прикл. мех.,- 2011. 47, N 6, С. 118-124.
117. Григорян Э.Х., Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых электроупругих поверхностных волн на крае электропроводящего упругого слоя // Изв. Нац. АН Армении. Мех., – 1999, Т. 52, №1. – С.30-39.
118. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с.
119. Даноян З.Н. Электроупругие поверхностные волны Лява в пьезоэлектриках // Проблемы механики тонких деформируемых тел: Сборник: Посвящается 80-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ин-т мех. НАН Армении. Ереван: Гитутюн., – 2002. – С.177-187.
120. Даноян З.Н., Симонян А.М. Поверхностные магнитоупругие волны Рэлея при наличии поперечного магнитного поля // Изв. АН АрмССР. Мех.. 1985. 38, N 3, С. 37-46.
121. Дашко О.Г. Несвязанная задача магнитоупругости для ферромагнитного тела со сферической полостью // Прикл. мех.. 2007. 43, N 10, С. 42-48.
122. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.- 524 с.
123. Диткин В.А., Прудников А.П. - Справочник по операционному исчислению.- М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
124. Ерофеев В. И., Мальханов А. О. Формирование магнитоупругой волны

Римана в стержне. Современные технологии в кораблестроительном и авиационном образовании, науке и производстве: Доклады Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 75-летию факультета морской и авиационной техники Нижегородского государственного технического университета имени Р.Е. Алексеева // Нижний Новгород, 17-20 нояб., 2009. Н. Новгород. 2009, С. 397-400.

125. Жарий О.Ю. Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости // Прикл. мат. и мех.. 1990. 54, N 1, С. 109-115.

126. Жарий О.Ю. Разложения по собственным функциям в динамической электроупругости и их приложение к теории электромеханического преобразования энергии // 7 Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Москва, 15-21 авг., 1991: Аннот. докл.. М.. 1991, С. 152.

127. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн: Учеб. пособие для студ. ун-тов и втузов, обуч. по спец. Механика и Прикл. мат., Киев: Выща шк.. 1989, 184 с., ил..

128. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 287 с.

129. Калинин В.В. Эффективный метод исследования динамических связанных смешанных задач теории электроупругости и термоупругости, Современ. пробл. мех. сплош. среды: Тр. 4-й Междунар. конф. // Ростов-на-Дону, 27-28 окт., 1998. Т. 2. Ростов н/Д. 1999, с. 35-39.

130. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред М.: Физматлит. 2009. - 312 с.

131. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред – М.: ФИЗМАТЛИТ., 2006. – 273 с.

132. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике // М.: Мир, 1978, - 520 с.

133. Кирилюк В.С. О взаимосвязи решений статических контактных задач теории упругости электроупругости для полупространства. // Прикл. мех., – 2006, т. 42, №11. – С.69-84.
134. Кирилюк В.С. О перемещениях жесткого эллиптического диска в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом пространстве // Теор. и прикл. мех., - 2007, N 43, С. 16-21, 195-196.
135. Кирилюк В.С., Левчук О.И. Электроупругое напряженное состояние пьезокерамического тела с параболоидальной полостью // Прикл. мех., – 2006, т. 42, №9. – С.59-69.
136. Ковалев Ю.Д., Стативка Е.Н., Смешанная кососимметричная задача электроупругости для неоднородного цилиндра // Теор. и прикл. мех., – 2005, №41. – С.83-90, 208.
137. Ковальчук В.Ф. Влияние тока смещения на напряженное состояние упругого проводящего полупространства, под действием импульса электромагнитного поля // Функц. анализ и его прил. в мех. и теории вероятностей. М., 1984, С. 132-133.
138. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. – Москва: Изд-во МГУ, 1988. – 302 с.
139. Космодамианский А.С., Кравченко А.П. Распределение электроупругих полей прямого пьезоэффекта в кристаллической полуплоскости с эллиптическим отверстием, Теор. и прикл. мех. (Киев, Донецк). 1985, N 16, С. 66-70.
140. Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Магнитотермоупругость // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: ВИНТИ, 1981. – Т.4. – С. 3 - 59.
141. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Сенник Н.А. Механические модели пьезоэлектриков для электронного машиностроения // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформируем. тверд. тела. 1984. 17, С. 3-62.
142. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В. Явная форма решения плоской за-

дачи Лэмба // Матер. XII междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». Тез. докл. - М.: Изд-во МАИ, 2006.-С. 200 – 201.

143. Леви М.О., Агаян К.Л., Ворович Е.И. Антиплоская динамическая контактная задача для электромагнитоупругого слоя // Вестник Южного научно-го центра, т.10, №3, 2014, С. 10-17.

144. Мартиросян Э. В. Поверхностные сдвиговые магнитоупругие волны вдоль границы идеально проводящего полупространства // Изв. АН Армении. Мех.. 2004. 57, N 1, С. 63-69.

145. Мельник В.Н. О существовании и единственности обобщенных решений в связанных нестационарных задачах двумерной электроупругости // Динам. сплош. среды. 1990, N 99, С. 60-73.

146. Мельник В.Н. Существование и единственность обобщенных уравнений в связанных нестационарных задачах двумерной электроупругости // Вопр.вычисл.и прикл.мат. (Ташкент). 1990, N 88, С. 123-134.

147. Мельник В.Н. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для одного класса нестационарных задач связанной электроупругости // Изв. вузов. Мат.. 1991, N 4, С. 24-32.

148. Мельник В.Н., Москальков М.Н. Разностные схемы и анализ приближенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости // Дифференц. уравнения (Минск). 1991. 27, N 7, С. 1220-1229.

149. Мельник В.Н., Москальков М.Н. О связанных электроупругих нестационарных колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.. 1988. 28, N 11, С. 1755-1756.

150. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред // М., Мир, 1991, 560 с.

151. Мусій Р.С. Решение плоских динамических краевых задач электромагнитотермоупругости для цилиндрических тел. Розв'язування плоских динамічних крайових задач електромагнетотермопружності для циліндричних тіл // Фіз.-хім. мех. матер.. 2000. 36, N 3, С. 35-41.

152. Мусій Р.С. Динамические задачи магнитотермоупругости для много-

- слоиных электропроводных тел // Мех. неоднород. структур: Тез. докл. 3 Всес. конф., Львов, 17-19 сент., 1991. Ч. 2. Львов. 1991, С. 221.
153. Мустафаев Д.М. Особенности электроупругих полей и возбуждение кольцевыми электродами волн Лэмба в пьезокерамическом слое // 7 Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Москва, 15-21 авг., 1991: Аннот. докл.. М., 1991, С. 257.
154. Наседкин А.В. Исследование шаговых по времени схем метода конечных элементов для нестационарных задач электроупругости с классическими граничными условиями // Мех. деформируем. тел, Дон. гос. техн. ун-т. Ростов н/Д. 1994, с. 78-84.
155. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твёрдых телах. М., Мир, 1986, 126 с.
156. Партон В.З., Кудрявцев Б.А., Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М. Наука, 1988. – 470 с.
157. Петросян М.Р. К задаче трансформации при отражении магнитоупругой волны // Изв. Нац. АН Армении. Мех.. 1999. 52, N 2, С. 40-44.
158. Подильчук Ю.Н., Проценко Т.М. Общая задача электроупругости для трансверсально-изотропного однополостного гиперболоида вращения // Теор. и прикл. мех. (Киев), – 2001, №32. – С.16-27.
159. Подильчук Ю.Н., Точные аналитические решения статических задач электроупругости и термоэлектроупругости трансверсально-изотропного тела в криволинейных системах координат // Прикл. мех. (Киев), – 2003, Т.39, №2, – С.14-54.
160. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наукова думка, 1977. – 247 с.
161. Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В., Маслов Р.Г. Учет связности физических полей в динамических задачах для многослойных сред // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2010, N 1, С.54-60, 75.
162. Романов В.Г. Структура решения задачи Коши для системы уравнений

- электродинамики и упругости в случае точечных источников // Сиб. мат. ж.. 1995. 36, N 3, С.628-649.
163. Савин В.Г., Моргун И.О. Преобразование электрических импульсов в акустические экранированной сферической пьезокерамической оболочкой, Прикл. мех.. 2007. 43, N 2, С.133-142.
164. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об особенностях напряжений в двух задачах электроупругости для кусочно-однородного тела // Изв. Нац. АН Армении. Мех., – 1999, Т. 52, №1. – С.40-45.
165. Саркисян Л.В. Дифракция сдвиговых поверхностных волн на крае электропроводящего конечного упругого слоя // Изв. АН Армении. Мех., – 2000, Т.53, №3. – С.52-58.
166. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.
167. Селезов И. Некоторые волновые модели с активными и магнитомеханическими взаимодействиями // Фіз.-мат. моделюв. інф. технол.. 2006, N 3, С. 159-166.
168. Селезов И.Т., Селезова Л.В. Волны в магнетогидроупругих средах. – Киев: Наукова думка, 1975. – 163 с.
169. Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // Прикл. мат. и мех. (Москва). 1993. 57, N 1, С.116-122.
170. Сеницкий Ю.Э., Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1999, N 1, С. 78-87.
171. Слепьян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. - Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
172. Смородинский Я.Г. Упругие волны и магнитоакустические явления в намагниченной трансверсально-изотропной среде // Екатеринбург: Изд-во УрО РАН. 2003, 113 с.
173. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М., Изд-во Иностранной литера-

туры, 1955. – 667 с.

174. Солодяк М. Термомеханика многокомпонентных ферромагнитных тел при воздействии внешних электромагнитных полей. Термомеханіка багатоконпонентних ферромагнітних тіл при дії зовнішніх електромагнітних полів // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Зб. містить праці. Т. 1. Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України. Львів: Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, – 2000, Т. 1. – С.95-98.

175. Стащук М.Г. Оценка упругой деформации металлического цилиндра от электродного потенциала. Оцінка впливу пружної деформації на електричний потенціал металевого циліндра в середовищі // Фіз.-хім. мех. матер., – 2000, Т.36, №1. – С.47-50.

176. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А. Нестационарное напряженно-деформированное состояние в длинном стержне, вызванное импульсом электрического тока высокой плотности // Пробл. прочн.. 2004, N4, С. 60-67, 158-159.

177. Терлецкий Р.Ф. Напряженное состояние слоя из полупрозрачного материала при нагреве электромагнитным излучением // Мех. деформир. тверд. тела. Ереван. 1990, С. 335-340.

178. Торосян З.В. Исследование механических напряжений в упругих токонесущих пластинах с переменным током // Мех. деформир. тверд. тела. Ереван. 1990, С. 341-349.

179. Трипалин А. С., Шихман В. М., Жиров В. Е., Захарова С. В. Расчет пьезокерамических преобразователей методами трехмерной теории электроупругости //Акуст. эмиссия матер. и конструкций: 1 Всес. конф. Ч. 1 Сев.-Кавк. науч. центр высш. шк., Рост. гос. ун-т. Ростов н/Д. 1989, С. 95-99.

180. Турилов В. В. Разработка метода гранично-временных элементов для решения трехмерных нестационарных динамических задач магнитотермоупругости // Прикл. пробл. прочн. и пластич.. 1995, N 52, С. 47-58.

181. Фильштинский Л.А. Некоторые сингулярные решения в электроупру-

- гости // Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций: Сб. науч. ст. Ин-т мех. МГУ. М.: Изд-во МГУ, – 2000. – С. 316-328.
182. Фильштинский Л.А. Фундаментальные решения уравнений электроупругости для пьезокерамического слоя в R3 // Мех. композит. матер., – 2001, Т.37, №3. – С.377-388.
183. Фильштинский Л.А., Ковалев Ю. Д., Смешанная симметричная задача электроупругости для слоя, ослабленного сквозными туннельными полостями // Мех. композит. матер., – 2004, Т.40, №4. – С.549-554.
184. Хорошун Л. Построение динамических уравнений электромагнитомеханики диэлектриков и пьезоэлектриков на основе двухконтинуумной механики // Фіз.-мат. моделюв. інф. технол.. 2006, N 3, С.177-198.
185. Чебан В.Г., Форня Г.А. Решение задачи о распространении электроупругой волны в пьезокерамическом стержне // Изв. АН МССР. Математика. 1990, N 1, С. 55-59.
186. Чебан В.Г., Форня Г.А. Численное исследование электроупругой задачи для прямоугольных тел // Мат. исслед. (Кишинев). 1990, N 117, С. 122-131.
187. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2009, N 1, С. 73-82.
188. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией // Прикл. мех. и техн. физ.. 2009. 50, N 1, С. 12-21.
189. Шляхин Д.А., Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для пьезокерамической пластины // Труды 21-ой Международной конференции по теории оболочек и пластин, Саратов, 14-16 нояб., 2005. Саратов: Изд-во СГТУ., – 2005. – С.242-248.
190. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел // Киев: Наук. думка. 1990, 228 с.

191. Шульга Н.А., Григорьева Л.О. Анализ методом характеристик распространения электроупругих толщинных колебаний в пьезокерамическом слое при электрическом возбуждении // Прикл. мех.. 2008. 44, N 10, с. 23-27.
192. Шульга Н. А., Григорьева Л.О. Исследование методом характеристик электроупругого деформирования слоя при динамическом механическом нагружении // Прикл. мех.. 2009. 45, N 1, с. 82-89.
193. Шульга Н.А., Григорьева Л.О. К решению начально-краевых задач электроупругости // Прикл. мех.. 2008. 44, N 12, с. 62-69.
194. Шульга Н.А., Григорьева Л.О. Об электроупругих нестационарных колебаниях пьезокерамического слоя // Прикл. мех.. 2009. 45, N 3, с. 73-81.
195. Шульга Н.А., Ратушняк Т.В. О формах объемных волн в магнито-стрикционных диэлектрических периодически-неоднородных средах // Прикл. мех.. 2006. 42, N 7, с. 57-63.
196. Abate J. Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions // ORSA Journal on computing. - 1995. - V. 7, No. 1. - P. 36 - 43.
197. Allam Mohmed N., Elsibai Khaled A., Abouelregal Ahmed E. Термомагнитоупругое деформирование неограниченного тела со сферической полостью и переменными свойствами материала без диссипации энергии. Magneto-thermoelasticity for an infinite body with a spherical cavity and variable material properties without energy dissipation // Int. J. Solids and Struct.. 2010. 47, N 20, С. 2631-2638.
198. Aouadi M. Фундаментальное решение двумерной задачи электромагнитотермоупругости на коротком промежутке времени. Electromagneto-thermoelastic fundamental solutions in a two-dimensional problem for short time // Acta mech.. 2005. 174, N 3-4, С. 223-240.
199. Arai Masahiro, Adachi Tadaharu, Matsumoto Hiroyuki. Граничноэлементный анализ для решения задач нестационарной эластодинамики на основе преобразования Лапласа. Boundary element analysis for unsteady elastodynamic problems based on the Laplace transform, JSME Int. J. A. 1999. 42, N 4, С.

507-514.

200. Basu Animesh. Об улучшенном решении задачи магнетотермоупругости. An improved solution to a problem of magneto-thermo-elasticity // *Meccanica*. 1988. 23, N 2, С. 121-123.

201. Bytner S., Gambin B. Гомогенизация неоднородного упругого проводника в магнитном поле. Homogenization of heterogeneous elastic conductor in a magnetic field // *J. Techn. Phys.*. 1992. 33, N 2, С. 219-223.

202. Choudhuri S.K. Roy, Bhatta Nilima. О магнитотермоупругом взаимодействии в идеально проводящем упругом полупространстве. On magneto-thermo-elastic interactions in a perfectly conducting elastic half-space // *Proc. Nat. Acad. Sci., India*. 1984. 54, N 4, С. 325-340.

203. Choudhuri S.K. Roy. Electro-magneto-thermo-elastic plane waves in rotating media with thermal relaxation // *Int. J. Eng. Sci.*. 1984. 22, N 5, с. 519-530.

204. Dimitriy V. Tarlakovskii, V.A. Vestyak and A.V. Zemskov Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses*. V. 2. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – P. 1064-1071.

205. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Динамическая реакция пьезоэлектрической полый сферы на радиальную деформацию. Dynamic response of a piezoelectric hollow sphere under radial deformation // *Eur. J. Mech. A*. 2004. 22, N 4, С. 617-631.

206. Ding Haojiang, Liang Jian. Фундаментальные решения для задач трансверсально-изотропной теории пьезоэлектричества и метод граничных элементов. The fundamental solutions for transversely isotropic piezoelectricity and boundary element method, *Comput. and Struct.*. 1999. 71, N 4, С. 447-455.

207. Dmitriyev Valery P. Упругость и электромагнетизм. Elasticity and electromagnetism // *Meccanica (Netherlands)*. 2004. 39, N 6, С. 511-520.

208. Fox J.W., Goulbourne N.C. О динамическом электромеханическом нагружении диэлектрических эластомерных мембран. On the dynamic electro-

mechanical loading of dielectric elastomer membranes // *J. Mech. and Phys. Solids*. 2008. 56, N 8, с. 2669-2686.

209. Gao Cunfa, Cui Demi. Фундаментальные решения для плоской задачи в пьезоэлектрической среде. The fundamental solutions for the plane problem in piezoelectric medium // *Yingyong lixue xuebao=Chin. J. Appl. Mech.*. 1999. 16, N 1, С. 140-143.

210. Green Robert E. (Jr) Исследование распространения упругих волн с помощью электромагнитных волн. Electromagnetic wave study of elastic wave propagation, *Elast. Wave Propag.: Proc. 2nd IUTAM-IUPAP Symp., Galway, March 20-25, 1988. Amsterdam etc.. 1989, С. 581-586.*

211. Guo S.H. Полная динамическая теория пьезоэлектро-магнитоупругих волн. A fully dynamic theory of piezoelectromagnetic waves // *Acta mech.*. 2010. 215, N 1-4, С. 335-344.

212. Guo S.H. Термоэлектромагнитные волны в пьезоупругих телах. The thermo-electromagnetic waves in piezoelectric solids // *Acta mech.*. 2011. 219, N 3-4, С. 231-240.

213. Gupta Mange Ram. Симметричные колебания упругих полупроводников в форме сферической оболочки при воздействии механического, термического и электрического полей. Symmetric vibrations of an elastic semiconductor in the form of a spherical shell under mechanical, thermal and electric fields // *Indian J. Pure and Appl. Math.*. 1990. 21, N 6, С. 582-596.

214. He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yaping, Обобщенная электро-магнито-термоупругая задача для бесконечно длинного твердого цилиндра. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // *Eur. J. Mech. A.*, – 2005, Т.24, №2. – С.349-359.

215. Iesan D. О некоторых теоремах в теории термоэлектроупругости. On some theorems in thermopiezoelectricity // *J. Therm. Stresses*. 1989. 12, N 2, С. 209-223.

216. Kong Yan-ping, Guo Shu-qi, Liu Jin-xi. Распространение скрученных по толщине волн в неоднородной магнитно-электрической упругой пластине,

- Jisuan lixue хuebao=Chin. J. Comput. Mech., 2010. 27, N 5, С. 839-844.
217. Lukyanov A., Molokov S. Изгибные магнитоупругие колебания тонких металлических проводов. Flexural magneto-elastic vibrations of thin metal wires // J. Phys. D. 2004. 37, N 5, С. 784-793.
218. Majhi M. C. Разрывы при распространении обобщенных термоупругих волн в полубесконечном пьезоэлектрическом стержне. Discontinuities in generalized thermoelastic wave propagation in a semi-infinite piezoelectric rod // J. Techn. Phys.. 1995. 36, N 3, С. 269-278.
219. Matar Olivier, Gasmi Noura, Zhou Huan, Goueygou Marc, Talbi Abdelkrim О применении полиномов Лежандра и Лагерра описаний распространения волн в слоистой электромагнитоупругой среде. Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media // J. Acoust. Soc. Amer.. 2013. 133, N 3, с. 1415-1424.
220. Modelowanie procesów wytwórczych / V. Vestyak, O. Hachkevych, J. Szymczak, D. Tarlakovskiy/ Modelowanie procesów wytwórczych. - Warszawa: Politecnica Opolska, 2010. – S. 349-416.
221. Nandy Sm. Sanjukta. Проблема пьезоэлектрического полупространства с обобщенной термической связью. Piezoelectric half space problem with generalized thermal coupling // Acta phys. slov.. 1986. 36, N 6, С. 342-356.
222. Nicolet Andre, Movchan Alexander B., Guenneau Sebastien, Zolla Frederic Аналитическое решение задачи электроупругости для тела с начальным кручением. Asymptotic modelling of weakly twisted electrostatic problems. // С. r. Мес.. Acad. sci.. Paris, – 2006, т. 334, №2. – С.91-97.
223. Ootao Yoshihiro, Tanigawa Yoshinobu. Трехмерная нестационарная задача пьезотермоупругости для пьезоупругой прямоугольной пластинки при частичном нагреве. Three-dimensional transient piezothermoelasticity of a piezoelectric rectangular plate due to partial heating // Nihonikai gakkai ronbunshu. A=Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. 1998. 64, N 626, С. 2636-2644.
224. Othman Mohamed I. A., Kumar Rajneesh. Отражение магнитотермоупру-

гих волн в средах с характеристиками, зависящими от температуры, в рамках обобщенной теории термоупругости. Reflection of magneto-thermoelasticity waves with temperature dependent properties in generalized thermoelasticity // *Int. Commun. Heat and Mass Transfer*. 2009. 36, N 5, С. 513-520.

225. Premrov Miroslav. Итерационный метод решения гармонических задач эластодинамики в полупространстве. An iterative method for solving harmonic elastodynamics of a halfspace // *ICTAM 2000: 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, 27 Aug.-2 Sept., 2000: Abstr. Book. Urbana-Champaign (Ill.): IUTAM. 2000, С. 163-164.*

226. Rajapakse R.K.N.D., Chen Y., Senjuntichai T., Электроупругое поле пьезоэлектрического кругового цилиндра конечной высоты. Electroelastic field of a piezoelectric annular finite cylinder // *Int. J. Solids and Struct.*, – 2005, Т.42, №11-12. – С.3487-3508.

227. Rakshit M., Mukhopadhyay B., Задача электромагнито-термовязкоупругости для безграничной среды с цилиндрическим отверстием. An electro-magneto-thermo-visco-elastic problem in an infinite medium with a cylindrical hole // *Int. J. Eng. Sci.*, – 2005, Т.43, №11-12. – С.925-936.

228. Rice J. M., Sadd M.H. Propagation and scattering of SH-Waves in semi-infinite domains using a time-dependent boundary element method // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*. 1984. 51, N 3, С. 641-645.

229. Roy Choudhuri S.K., Bandyopadhyay Nupur. Магнитоупругие волны в идеально проводящем упругом полупространстве в термоупругости. III. Magneto-thermoelastic waves in a perfectly conducting elastic half-space in thermoelasticity III // *Int. J. Math. and Math. Sci.*. 2005. 2005, N 20, С. 3303-3318.

230. Sharma J.N., Chand Dayal. Нестационарные обобщенные магнитотермоупругие волны в полупространстве. Transient generalised magnetothermoelastic waves in a half-space // *Int. J. Eng. Sci.*. 1988. 26, N 9, С. 951-958.

231. Sharma J.N., Sharma K. K., Kumar Ashwani Поверхностные волны в композитной структуре "пьезоэлектрик-полупроводник". Surface waves in a piezoelectric-semiconductor composite structure // *Int. J. Solids and Struct.*. 2010. 47, N

6, С.816-826.

232. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Электроупругие двумерные нестационарные колебания пьезокерамического призматического тела при действии механических нагрузок. Electroelastic two-dimensional nonstationary vibrations of a piezoceramic prismatic body under mechanical loading // *Int. Appl. Mech.*. 2010. 46, N 5, С. 493-498.

233. Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V. Electromagnetic fields in moving space with spherical enclosure // *Materials physics and mechanics (MPM) – 2015.* - V. 23, No 1. - P. 31-35.

234. Von Ende Sven, Lammering Rolf Теоретическое и вычислительное моделирование генерации волн Лэмба в пьезоэлектрических пластинах. Modeling and simulation of lamb wave generation with piezoelectric plates // *Mech. Adv. Mater. and Struct.*. 2009. 16, N 3, С. 188-197.

235. Wang H.M., Zhao Z.C. Волны в двухслойных пьезоэлектрик/упругих композитных пластинах с несовершенной поверхностью раздела. Love waves in a two-layered piezoelectric/elastic composite plate with an imperfect interface // *Arch. Appl. Mech.*. 2013. 83, N 1, С. 43-51.

236. Wang X., Dong K. Магнитотермодинамические напряжения и возмущение вектора магнитного поля в неоднородном термоупругом цилиндре. Magnetothermodynamic stress and perturbation of magnetic field vector in a non-homogeneous thermoelastic cylinder // *Eur. J. Mech. A.* 2006. 25, N 1, С. 98-109.

237. Wang Xiaomin, Shen Yaping. Фундаментальная теория электромагнитотермоупругой среды. I. Динамическая теория. Some fundamental theory of electro-magneto-thermo-elastic media. I. The theory of dynamics // *Yingyong lixue xuebao=Chin. J. Appl. Mech.*. 1994. 11, N 3, С. 42-49.

238. Xiao Yu, Bhattacharya Kaushik. Континуальная теория ферроэлектрических деформируемых полупроводников. A continuum theory of deformable, semiconducting ferroelectrics // *Arch. Ration. Mech. and Anal.*. 2008. 189, N 1, С. 59-95.

239. Yang J.S. Уравнения растяжения и изгиба электроупругих пластин в сильных электрических полях. Equations for the extension and flexure of electro-elastic plates under strong electric fields // *Int. J. Solids and Struct.*, – 1999, Т.36, №21. – С. 3171-3192.
240. Zhu Lin-li, Zheng Xiao-jing. Исследование теплопередачи и термоэлектромагнитоупругости на основе уравнения Больцмана под электромагнитным внешним воздействием // *Lanzhou daxue xuebao. Ziran kexue ban*=J. Lanzhou Univ. Natur. Sci.. 2005. 41, N 2, С. 104-108.