УДК 539.3

Расчет колебаний составных оболочек вращения с соединительными шпангоутами по методу конечных элементов

Рей Чжунбум

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе 4, Москва, А-80, ГСП-3,125993, Россия

e-mail: joyfulife@hanmail.net

Аннотация

Разработан алгоритм расчета по методу конечных элементов (МКЭ) осесимметричных и неосесимметричных колебаний составных ортотропных оболочек вращения со шпангоутами. Упругая оболочка с учетом ее предварительного осесимметричного напряженно-деформированного состояния моделируется системой кольцевых конических полосок (КЭ). Шпангоут рассматривается как упругое кольцо с недеформируемым поперечным сечением, которое соединяет примыкающие к нему КЭ оболочки на одной, двух или более узловых окружностях.

Шпангоут с деформируемым контуром поперечного сечения рассматривается как упругая оболочка вращения, которая также представляется системой нескольких кольцевых конических КЭ.

В качестве примера рассмотрены свободные колебания цилиндрической оболочки с тонкостенным сферическим днищем, соединенных упругим шпангоутом. Оценено влияние параметров шпангоут на собственные частоты колебаний.

Ключевые слова: оболочка вращения, оболочки составные, шпангоута круговой, шпангоут тонкостенный, колебания упругие, метод конечных элементов

Введение

Расчету колебаний оболочек вращения с подкрепляющими шпангоутами (ребрами) посвящено большое количество работ. При этом используются различные расчетные модели: 1) при частом расположении ребер с достаточно малыми размерами их поперечных сечений по сравнению с радиусом они "размазываются" вдоль образующей, [1]; 2) дискретные шпангоуты заменяются эквивалентными упругими связями по перемещениям и углу поворота, распределенными вдоль окружности [2]; 3) шпангоуты рассматриваются как кольцевые стержни с недеформируемым поперечным сечениям, соединенные с оболочками на одной, двух или более окружностях [3, 4]; 4) при использовании метода конечных элементов (МКЭ) для оболочки вращения используются КЭ в виде кольцевых полосок, а для шпангоута с деформируемым поперечным сечением− в виде системы кольцевых оболочечных или объемных КЭ[5, 6].

В данной работе для расчета осесимметричных и неосесимметричных колебаний составных ортотропных оболочек вращения при использовании КЭ− модели упругие подкрепляющие и соединительные шпангоуты рассматриваются как отдельные кольцевые КЭ с недеформируемым поперечным сечением. Тонкостенные шпангоуты с произвольным открытым или замкнутым контуром поперечного сечения считаются деформируемыми и представляются в виде системы КЭ оболочки вращения.

Постановка задачи

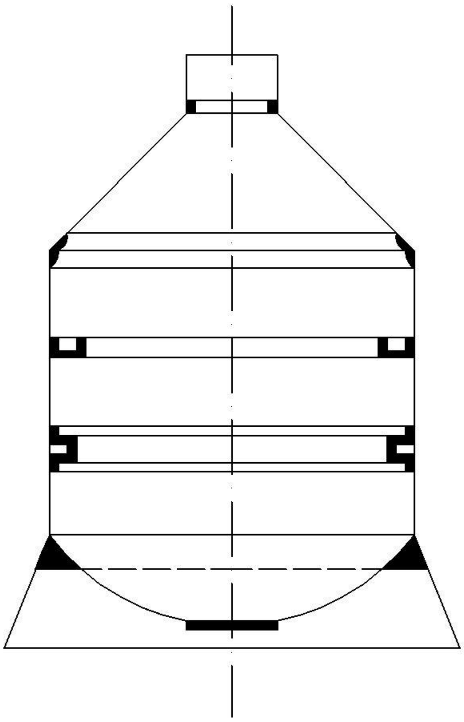

Рис. 1

Рассмотрим тонкую упругую ортотропную оболочку вращения, (рис.1), будем считать, что в окружном направлении, представляемом угловой координатой θ, все параметры оболочки являются постоянными и система находится в стационарном осесимметричном напряженно- деформированном состоянии. В этом случае все неизвестные функции линейной задачи гидроупругости можно представить в виде разложений в ряды Фурье по функциями $\cos n\theta$, $\sin n\theta$, при $n = 0,1,2,\ldots$. В силу ортогональности этих функций при $0 \le \theta \le 2\pi$ колебания системы распадаются на осесимметричные ($n = 0$) и неосесимметричные ($n = 1,2,3,\ldots$). Здесь будем рассматривать колебания по одной из гармоник ряда Фурье при заданном $n = 0,1,2,\ldots$.

При расчете колебаний оболочки будем использовать МКЭ, рассматривая в качестве КЭ узкие кольцевые полоски оболочки. Оболочки всех КЭ будем считать коническими ; в этом случае меридиан оболочки аппроксимируется ломаной линией, состоящей из прямолинейных участков малой длины. Деформации тонкой оболочки КЭ описываются на основании теории Кирхгофа-Лява .

Перемещения и деформации срединной поверхности, углы поворота нормали и изменения кривизн оболочки для n–ой гармоники запишем в виде

$$\{u, w, \varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \vartheta_s, \kappa_s, \kappa_\theta\} = \{U, W, \bar{\varepsilon}_s, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\vartheta}_s, \bar{\kappa}_s, \bar{\kappa}_\theta\}\cos n\theta,$$

$$\{v, \gamma_{s\theta}, \vartheta_\theta, \kappa_{s\theta}\} = \{V, \bar{\gamma}_{s\theta}, \bar{\vartheta}_\theta, \bar{\kappa}_{s\theta}\}\sin n\theta. \qquad (1)$$

Амплитудные значения (1) в случае конической оболочки КЭ связаны соотношениями [7]:

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{\partial U}{\partial s} + \vartheta_s^o \bar{\vartheta}_s, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{R}\left(U\cos\varphi + W\sin\varphi + nV\right),$$

$$\gamma_{s\beta} = \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\cos\varphi}{R}V - \frac{n}{R}U + \vartheta_s^o \bar{\vartheta}_\beta; \quad \vartheta_s^o = -\frac{\partial w^o}{\partial s} \qquad (2)$$

$$\bar{\vartheta}_s = -\frac{\partial W}{\partial s}, \quad \bar{\vartheta}_\beta = \frac{\sin\varphi}{R}V + \frac{n}{R}W; \quad \bar{\kappa}_s = -\frac{\partial^2 W}{\partial s^2},$$

$$\bar{\kappa}_\theta = \frac{n}{R^2}\sin\varphi \cdot V + \frac{n^2}{R^2}W - \frac{\cos\varphi}{R}\frac{\partial W}{\partial s},$$

$$\bar{\kappa}_{s\theta} = \frac{n}{R^2}(\sin\varphi \cdot U - \cos\varphi \cdot W) + \frac{n}{R}\frac{\partial W}{\partial s};$$

$\vartheta^o(s)$ – угол поворота нормали оболочки в предварительном осесимметричном напряженно-деформированном состоянии с усилиями $N_s^0(s)$, $N_\theta^0(s)$ и перемещениями $u^o(s), w^o(s)$.

Потенциальная энергия деформации ортотропной оболочки k–го КЭ (рис.2) для n-ой гармоники с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния записывается в виде

$$\Pi_o^{(k)} = \frac{1}{2}\delta_n\pi\int_0^{l_k}\Big[B_s\bar{\varepsilon}_s^2 + 2B_s\mu_\theta\bar{\varepsilon}_s\bar{\varepsilon}_\theta + B_\theta\bar{\varepsilon}_\theta^2 + B_{s\theta}\bar{\gamma}_{s\theta}^2 +$$
$$+D_s\bar{\kappa}_s^2 + 2D_s\mu_\theta\bar{\kappa}_s\bar{\kappa}_\theta + D_\theta\bar{\kappa}_\theta^2 + D_{s\theta}\bar{\kappa}_{s\theta}^2 + N_s^o\bar{\vartheta}_s^2 + N_\theta^o\bar{\vartheta}_\theta^2\Big]Rds\,, \qquad (3)$$

где

$$B_s = \frac{E_s h}{1-\mu_s\mu_\theta},\; B_\theta = \frac{E_\theta h}{1-\mu_s\mu_\theta},\; D_s = \frac{E_s h^3}{12(1-\mu_s\mu_\theta)},\; D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\mu_s\mu_\theta)},$$

$$B_{s\theta} = Gh,\; D_{s\theta} = \frac{Gh^3}{3};\; \frac{\mu_s}{B_s} = \frac{\mu_\theta}{B_\theta}, \frac{\mu_s}{D_s} = \frac{\mu_\theta}{D_\theta},\; R = R_{k-1}\left(1 - {s}/{l_k}\right) + R_k\left({s}/{l_k}\right);$$

h–толщина оболочки; E, G, μ –модуль нормальной упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона (индексы s и θ указывают на меридиональное и окружное направления); $\delta_n = 2$ при n=0, $\delta_n = 1$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Длина образующей $l_к$ k–го КЭ оболочки должна быть значительно меньше длины $l_{к,и}$ зоны изгибного краевого эффекта ($l_к << l_{к,и}$), которая имеет наименьшее значение $l_{к,и} \approx 3\sqrt{2}\left[D_s R_k^2 / B_\theta \sin^2\varphi_k\right]_k^{1/4}$ при $n = 0$ и постепенно возрастает при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Кинетическая энергия оболочки k–го КЭ для n-ой гармоники:

$$T_o^{(k)} = \frac{1}{2}\delta_n\pi\int_0^{l_k}\rho_o h\left(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2\right)Rds \qquad (4)$$

ρ_o – плотность материала оболочки.

Матрицы жесткости и инерции оболочки

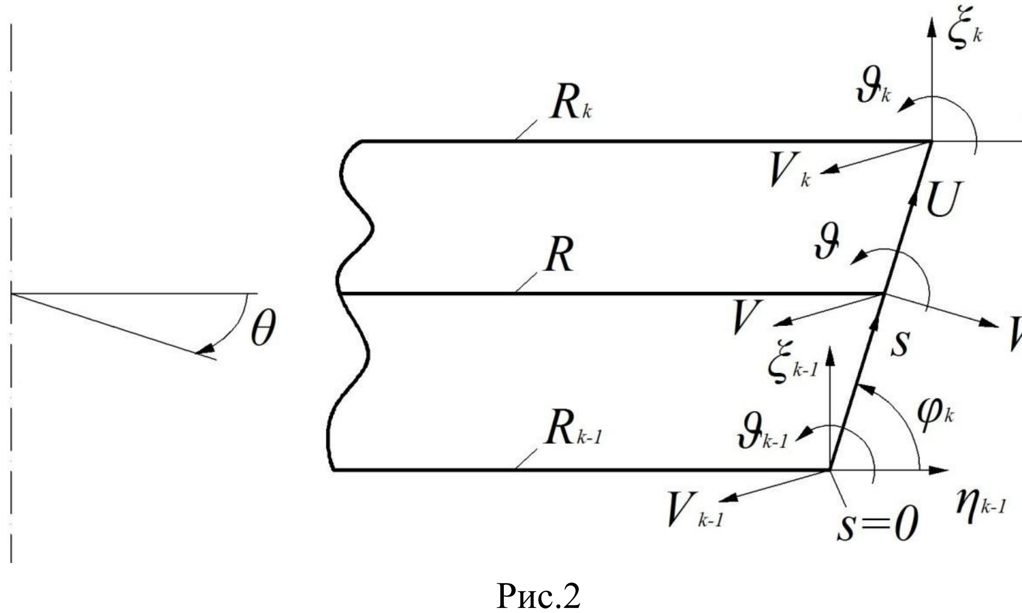

Рис.2

Амплитудные значения меридионального, нормального и окружного перемещений конического КЭ оболочки (рис.2) для n–ой гармоники аппроксимируются степенными функциями меридиональной координаты s с неизвестными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_8$, зависящими от времени t:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 s\,,\;\; W = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3\,,\quad V = \alpha_7 + \alpha_8 s\,. \tag{5}$$

Аппроксимации (5) удовлетворяют перемещениям КЭ как твердого тела при $n = 0{,}1$.

Соотношения (2) с учетом (5) записываются в матричном виде

$$\bar{\varepsilon}_s = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \varepsilon_{s,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s\,,\;\; \bar{\varepsilon}_\theta = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \varepsilon_{\theta,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\theta\;,\;\; \bar{\gamma}_{s\theta} = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \gamma_{s\theta,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\gamma}_{s\theta}\;,$$

$$\bar{\vartheta}_s = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \vartheta_{s,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\vartheta_s}\,,\;\; \bar{\vartheta}_\theta = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \vartheta_{\theta,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\vartheta_\theta}\;,\;\; \bar{\kappa}_s = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \kappa_{s,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\kappa}_s\,,$$

$$\bar{\kappa}_\theta = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \kappa_{\theta,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\kappa}_\theta\,,\;\; \bar{\kappa}_{s\theta} = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i \kappa_{s\theta,i} = \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\kappa}_{s\theta}\,, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\{\alpha_i\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\varepsilon}_s = \left\{\varepsilon_{s,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\varepsilon}_\theta = \left\{\varepsilon_{\theta,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\gamma}_{s\theta} = \left\{\gamma_{s\theta,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\vartheta_s} = \left\{\vartheta_{s,i}\right\}_8,$$

$$\boldsymbol{\vartheta_\theta} = \left\{\vartheta_{\theta,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\kappa}_s = \left\{\kappa_{s,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\kappa}_\theta = \left\{\kappa_{\theta,i}\right\}_8,\;\; \boldsymbol{\kappa}_{s\theta} = \left\{\kappa_{s\theta,i}\right\}_8; \tag{7}$$

$$\varepsilon_{s,1} = \varepsilon_{s,3} = \varepsilon_{s,7} = \varepsilon_{s,8} = 0\,,\;\; \varepsilon_{s,2} = 1\,,\;\; \varepsilon_{s,4} = -\vartheta_s^o\,,\;\; \varepsilon_{s,5} = -2\vartheta_s^o s\,,\;\; \varepsilon_{s,6} = -3\vartheta_s^o s^2\,;$$

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\cos\varphi}{R}\,,\;\; \varepsilon_{\theta,2} = \frac{\cos\varphi}{R} s\,,\;\; \varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sin\varphi}{R}\,,\;\; \varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sin\varphi}{R} s\,,\;\; \varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sin\varphi}{R} s^2\,,$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\sin\varphi}{R} s^3\,,\;\; \varepsilon_{\theta,7} = \frac{n}{R}\;,\;\; \varepsilon_{\theta,8} = \frac{n}{R} s;\;\; \gamma_{s\theta,1} = -\frac{n}{R}\,,\;\; \gamma_{s\theta,2} = -\frac{n}{R} s\,,$$

$$\gamma_{s\theta,3} = \vartheta_s^o \frac{n}{R}\,,\;\; \gamma_{s\theta,4} = \vartheta_s^o \frac{n}{R} s\,,\;\; \gamma_{s\theta,5} = \vartheta_s^o \frac{n}{R} s^2\,,\;\; \gamma_{s\theta,6} = \vartheta_s^o \frac{n}{R} s^3\,,$$

$$\gamma_{s\theta,7} = \vartheta_s^o \frac{\sin\varphi}{R} - \frac{\cos\varphi}{R}\,,\;\; \gamma_{s\theta,8} = 1 - \frac{\cos\varphi}{R} s + \vartheta_s^o \frac{\sin\varphi}{R} s\,;$$

$$\vartheta_{s,1} = \vartheta_{s,2} = \vartheta_{s,3} = \vartheta_{s,7} = \vartheta_{s,8} = 0\,,\;\; \vartheta_{s,4} = -1\,,\;\; \vartheta_{s,5} = -2s\,,\;\; \vartheta_{s,6} = -3s^2\,;$$

$$\vartheta_{\theta,1} = \vartheta_{\theta,2} = 0\,,$$

$$\vartheta_{\theta,3} = \frac{n}{R}\,,\;\; \vartheta_{\theta,4} = \frac{n}{R} s\,,\;\; \vartheta_{\theta,5} = \frac{n}{R} s^2\,,\;\; \vartheta_{\theta,6} = \frac{n}{R} s^3\,,\;\; \vartheta_{\theta,7} = \frac{\sin\varphi}{R}\;,\;\; \vartheta_{\theta,8} = \frac{\sin\varphi}{R} s;$$

$$\kappa_{s,1} = \kappa_{s,2} = \kappa_{s,3} = \kappa_{s,4} = \kappa_{s,7} = \kappa_{s,8} = 0\,,\;\; \kappa_{s,5} = -2\,,\;\; \kappa_{s,6} = -6s;$$

$$\kappa_{\theta,1} = \kappa_{\theta,2} = 0\,,\;\; \kappa_{\theta,3} = \frac{n^2}{R^2}\,,\;\; \kappa_{\theta,4} = \frac{n^2}{R^2} s - \frac{\cos\varphi}{R}\,,\;\; \kappa_{\theta,5} = \frac{n^2}{R^2} s^2 - 2\frac{\cos\varphi}{R} s\,,$$

$$\kappa_{\theta,6} = \frac{n^2}{R^2} s^3 - 3\frac{\cos\varphi}{R} s^2\,,\;\; \kappa_{\theta,7} = \frac{n}{R^2} \sin\varphi\,,\;\; \kappa_{\theta,8} = \frac{n}{R^2} \sin\varphi \cdot s\,;$$

$$\kappa_{s\theta,1}=\frac{n\sin\varphi}{R^2},\ \ \kappa_{s\theta,2}=\frac{n\sin\varphi}{R^2}s,\ \ \kappa_{s\theta,3}=-\frac{n\cos\varphi}{R^2},\ \ \kappa_{s\theta,4}=\frac{n}{R}-\frac{n\cos\varphi}{R^2}s,$$

$$\kappa_{s\theta,5}=2\frac{n}{R}s-\frac{n\cos\varphi}{R^2}s^2,\ \ \kappa_{s\theta,6}=3\frac{n}{R}s^2-\frac{n\cos\varphi}{R^2}s^3,\ \ \kappa_{s\theta,7}=\kappa_{s\theta,8}=0.$$

При осесимметричных продольно-радиальных колебаниях системы $n=0$ и $v=\gamma_{s\theta}=\vartheta_\theta=\kappa_{s\theta}=0$. Соответственно этому в выражениях (6),(7) следует положить $\alpha_7=\alpha_8=0$, $i=1,2,\ldots,6$; векторы (7) при этом будут иметь 6-ый порядок.

С учетом (1),(2),(5),(6) потенциальная энергия k–го КЭ оболочки (3) записывается в виде

$$\Pi_o^{(k)}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{K}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{\alpha};\tag{8}$$

$$\mathbf{K}_\alpha^{(k)}=\delta_n\pi\int_0^{l_k}\Big[B_s\boldsymbol{\varepsilon}_s\boldsymbol{\varepsilon}_s^T+B_s\mu_\theta\left(\boldsymbol{\varepsilon}_s\boldsymbol{\varepsilon}_\theta^T+\boldsymbol{\varepsilon}_\theta\boldsymbol{\varepsilon}_s^T\right)+B_\theta\boldsymbol{\varepsilon}_\theta\boldsymbol{\varepsilon}_\theta^T+B_{s\theta}\boldsymbol{\gamma}_{s\theta}\boldsymbol{\gamma}_{s\theta}^T+D_s\boldsymbol{\kappa}_s\boldsymbol{\kappa}_s^T+$$
$$+D_s\mu_\theta\left(\boldsymbol{\kappa}_s\boldsymbol{\kappa}_\theta^T+\boldsymbol{\kappa}_\theta\boldsymbol{\kappa}_s^T\right)+D_\theta\boldsymbol{\kappa}_\theta\boldsymbol{\kappa}_\theta^T+D_{s\theta}\boldsymbol{\kappa}_{s\theta}\boldsymbol{\kappa}_{s\theta}^T+N_s^o\boldsymbol{\vartheta}_s\boldsymbol{\vartheta}_s^T+N_\theta^o\boldsymbol{\vartheta}_\theta\boldsymbol{\vartheta}_\theta^T\Big]Rds$$

–матрица жесткости k–го КЭ для вектора $\boldsymbol{\alpha}$; в случае неосесимметричных колебаний ($n=1,2,\ldots$ и $\delta_n=1$) она имеет 8-й порядок, а в случае осесимметричных колебаний ($n=0$ и $\delta_n=2$)– 6-й порядок.

Кинетическая энергия k–го КЭ оболочки (4) с учетом (1),(5) будет

$$T_o^{(k)}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\alpha}}^T\mathbf{M}_\alpha^{(k)}\dot{\boldsymbol{\alpha}},\tag{9}$$

где матрица инерции $\mathbf{M}_\alpha^{(k)}$ k–го КЭ оболочки для вектора $\boldsymbol{\alpha}$ имеет 8-й порядок для неосесимметричных колебаний ($n=1,2,\ldots$ и $\delta_n=1$) и 6-й порядок – для осесимметричных колебаний ($n=0$ и $\delta_n=2$).

Для удобства соединения разных оболочек через упругие соединительные шпангоуты в качестве основных обобщенных координат k–го КЭ оболочки будем рассматривать амплитудные значения осевого $\xi=U\sin\varphi-W\cos\varphi$, радиального $\eta=U\cos\varphi+W\sin\varphi$ и окружного V перемещений и угла поворота нормали в меридиональной плоскости $\bar{\vartheta}_s\rightarrow\vartheta$ на краях $s=0$ и $s=l_k$, рис.2. Векторы основных обобщенных координат k–го КЭ для неосесимметричных и осесимметричных колебаний, соответственно, записываются в виде

$$\mathbf{q}^{(k)}=\begin{bmatrix}\xi_{k-1} & \eta_{k-1} & \vartheta_{k-1} & V_{k-1} & \xi_k & \eta_k & \vartheta_k & V_k\end{bmatrix}^T,\tag{10}$$

$$\mathbf{q}^{(k)}=\begin{bmatrix}\xi_{k-1} & \eta_{k-1} & \vartheta_{k-1} & \xi_k & \eta_k & \vartheta_k\end{bmatrix}^T.\tag{11}$$

При этом вектор $\boldsymbol{\alpha}$ выражается через $\mathbf{q}^{(k)}$ как

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}_k \mathbf{q}^{(k)}, \tag{12}$$

где матрица преобразования для неосесимметричных колебаний с учетом обозначений $\sin\varphi_k = s_k, \cos\varphi_k = c_k$ записывается в виде

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} s_k & c_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_k^{-1}s_k & -l_k^{-1}c_k & 0 & 0 & l_k^{-1}s_k & l_k^{-1}c_k & 0 & 0 \\ -c_k & s_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l_k^{-2}c_k & -3l_k^{-2}s_k & 2l_k^{-1} & 0 & -3l_k^{-2}c_k & 3l_k^{-2}s_k & l_k^{-1} & 0 \\ -2l_k^{-3}c_k & 2l_k^{-3}s_k & -l_k^{-1} & 0 & 2l_k^{-3}c_k & -2l_k^{-3}s_k & -l_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -l_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & l_k^{-1} \end{bmatrix}; \tag{13}$$

для осесимметричных колебаний в приведенной выше матрице (13) необходимо вычеркнуть последние две строки, соответствующие α_7, α_8, и 4-й и 8-й столбцы, соответствующие V_{k-1}, V_k.

С учетом преобразования (12) потенциальная и кинетическая энергии оболочки k–го КЭ имеют вид:

$$\Pi_o^{(k)} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{(k)^T}\mathbf{K}_o^{(k)}\mathbf{q}^{(k)}, \quad \mathbf{K}_o^{(k)} = \mathbf{G}_k^T\mathbf{K}_\alpha^{(k)}\mathbf{G}_k; \tag{14}$$

$$T_o^{(k)} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{(k)^T}\mathbf{M}_o^{(k)}\dot{\mathbf{q}}^{(k)}, \quad \mathbf{M}_o^{(k)} = \mathbf{G}_k^T\mathbf{M}_\alpha^{(k)}\mathbf{G}_k,$$

где $\mathbf{K}_o^{(k)}, \mathbf{M}_o^{(k)}$– матрицы жесткости и инерции k–го КЭ оболочки для основных обобщенных координатах (10) или (11).

Для упрощения вычислений кинетической энергии узкой кольцевой полоски k–го КЭ, а также вариации работы действующего на нее давления, амплитудное значение нормального перемещения W можно аппроксимировать линейной функцией (как и тангенциальных перемещений U,V):

$$W = W_{k-1}^{(k)}\left(1 - s/l_k\right) + W_k^{(k)}\left(s/l_k\right).$$

Тогда для матрицы инерции $\mathbf{M}^{(k)}$ будем иметь следующее приближенное выражение для случая неосесимметричных колебаний ($n = 1, 2, \ldots$ и $\delta_n = 1$):

$$\mathbf{M}^{(k)} = \delta_n \frac{\pi\rho_o h l_k}{12} \times$$

$$\times\begin{bmatrix} 3R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+R_k \\ R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+3R_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+3R_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+R_k & 0 & 0 & 0 & R_{k-1}+3R_k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для случая осесимметричных колебаний ($n=0$ и $\delta_n=2$) в этой матрице необходимо вычеркнуть 4-ю и 8-ю строки и 4-й и 8-й столбцы, соответствующие V_{k-1} и V_k.

Дно оболочки с полюсом, где $R\to 0$, при численном решении можно заменить отверстием достаточно малого радиуса R_o со свободным краем $k=0$ (на этом краю $\xi_o,\eta_o,\vartheta_o,V_o$ считаются неизвестными) или абсолютно жесткой пластиной радиуса R_o Тогда при абсолютно жестком соединении пластины и первого ($k=1$) КЭ на краю $k=0$ необходимо выполнить условия: $\eta_o=\vartheta_o=0$ при $n=0$; $\xi_o=R_o\vartheta_o, V_o=-\eta_o$ при $n=1$; $\xi_o=\eta_o=\vartheta_o=V_o=0$ при $n=2,3,\ldots$.

Матрицы жесткости и инерции шпангоута

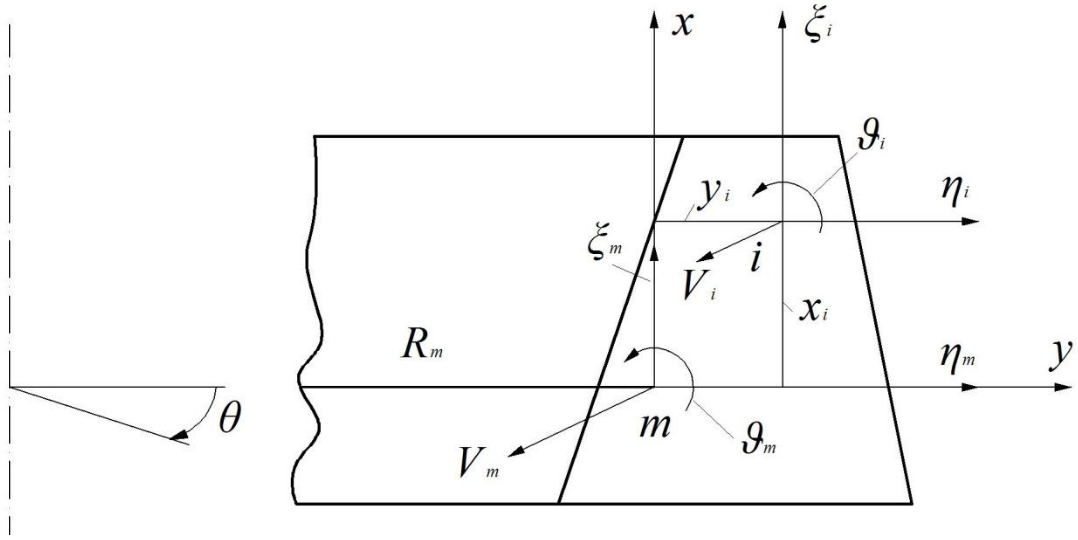

Рис. 3

Рассмотрим m–ый кольцевой шпангоут с произвольной формой недеформируемого поперечного сечения, рис.3; начало координат x, y поперечного сечения шпангоута располагается в его произвольной точке m, расстояние от которой до оси (радиус шпангоута) обозначается через R_m. Размеры поперечного сечения шпангоута будем считать малыми по сравнению с R_m; поперечными сдвигами поперечных сечений шпангоута будем пренебрегать. Осевое и радиальное перемещения на окружности радиуса R_m и угол закручивания поперечного сечения представляются в виде $\xi_m \cos n\theta$, $\eta_m \cos n\theta$, $\vartheta_m \cos n\theta$, а окружное перемещение – как $V_m \sin n\theta$; $n = 0,1,2,\ldots$. Амплитудные значения $\xi_m^{(t)}$, $\eta_m^{(k)}, \vartheta_m^{(k)}$ и $V_m^{(t)}$ принимаются за обобщенные координаты m–го шпангоута, векторы которых для неосесимметричных ($n = 1,2,3,\ldots$) и осесимметричных ($n = 0$) колебаний будем обозначать соответственно как

$$\mathbf{X}_m = [\xi_m \quad \eta_m \quad \vartheta_m \quad V_m]^T, \ \mathbf{X}_m = [\xi_m \quad \eta_m \quad \vartheta_m]^T. \tag{16}$$

Потенциальная и кинетическая энергии рассматриваемого шпангоута записываются также как для тонкостенного кольцевого шпангоута с недеформируемым в своей плоскости поперечным сечением [3, 4], пренебрегая его депланацией ($\omega(s) \approx 0$) и изменяя на обратные направления θ, V_m и ϑ_m. С учетом этого потенциальная и кинетическая энергии m–го шпангоута записываются в виде:

$$\varPi_{ш}^{(m)} = \frac{1}{2}\mathbf{X}_m^T \mathbf{K}_{ш}^{(m)} \mathbf{X}_m, \ T_{ш}^{(m)} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}_m^T \mathbf{M}_{ш}^{(m)} \dot{\mathbf{X}}_m; \tag{17}$$

$$\mathbf{K}_{ш}^{(m)} = [k_{ij}], \ \mathbf{M}_{ш}^{(m)} = [m_{ij}]$$

– матрицы жесткости и инерции m–го шпангоута.

В общем случае для неосесимметричных колебаний ($n = 1,2,3,\ldots$; $\delta_n = 1; i, j = 1,2,3,4$) будем иметь следующие выражения для коэффициентов обобщенных жесткостей и обобщенных масс m–го шпангоута:

$$k_{11} = \delta_n \pi E R_m^{-3} n^2 \left(n^2 I_y + \gamma J_{кр}\right),$$

$$k_{12} = \delta_n \pi E R_m^{-3} n^2 \left\langle (n^2 - 1) I_{xy} + S_y R_m \right\rangle,$$

$$k_{13} = -\delta_n \pi E R_m^{-2} n^2 \left(I_y + \gamma J_{кр}\right),$$

$$k_{14} = \delta_n \pi E R_m^{-2} n^3 S_y,$$

$$k_{22} = \delta_n \pi E R_m^{-3} \left\langle F R_m^2 + (2n^2 - 1) S_x R_m + (n^2 - 1)^2 I_x \right\rangle,$$

$$k_{23} = -\delta_n \pi E R_m^{-2} \left\langle (n^2 - 1) I_{xy} + S_y R_m \right\rangle,$$

$$k_{24} = \delta_n \pi E R_m^{-2} n \left(F R_m + n^2 S_x\right),$$

$$k_{33} = \delta_n \pi E R_m^{-1} n \left(I_y + n^2 \gamma J_{кр}\right),$$

$$k_{34} = -\delta_n \pi E R_m^{-1} n S_y$$

$$k_{44} = \delta_n \pi E R_m^{-2} n^2 \left(F R_m + S_x\right), \ k_{ij} = k_{ji}; \tag{18}$$

$$m_{11}=\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}\left(FR_m^2+S_xR_m+n^2I_x\right)$$
$$m_{12}=\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}n^2I_{xy},$$
$$m_{13}=\delta_n\pi\rho_o\left(I_x+S_xR_m\right),$$
$$m_{14}=\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}n\left(2I_{xy}+S_yR_m\right),$$
$$m_{22}=\delta_n\pi\rho_o\left(FR_m+S_x\right),$$
$$m_{23}=-\delta_n\pi\rho_o\left(I_{xy}+S_yR_m\right),$$
$$m_{24}=\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}n\left(2I_x+S_xR_m\right),$$
$$m_{33}=-\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}\left(I_x+I_y\right),$$
$$m_{34}=-\delta_n\pi\rho_o nS_y,$$
$$m_{44}=\delta_n\pi\rho_o R_m^{-1}\left(FR_m^2+3I_x+3S_xR_m\right),\quad m_{ij}=m_{ji}\,. \tag{19}$$

Здесь $F,S_x,S_y,I_x,I_y,I_{xy}-$ площадь, статические моменты и моменты инерции площади поперечного сечения в общепринятых обозначениях; $\gamma=G/E$, $J_{кр}-$ приведенный момент инерции поперечного сечения на кручение ($GJ_{кр}-$ крутильная жесткость). В случае осесимметричных колебаний в выражениях (18),(19) следует положить : $n=0,\delta_n=2,\ i,j=1,2,3$.

Условия соединения шпангоута с оболочками

Амплитудные значения перемещений в точке i m-го шпангоута (рис.3) выражаются через его перемещения в начале координат m как

$$\xi_i=\xi_m+\vartheta_m y_i,\quad \eta_i=\eta_m-\vartheta_m x_i,\quad V_i=V_m\frac{R_i}{R_m}+\xi_m\frac{n}{R_m}x_i+\eta_m\frac{n}{R_m}y_i\,. \tag{20}$$

Эти соотношения с учетом $\vartheta_i=\vartheta_m$ записываются в матричном виде в зависимости от вектора X_m:

$$\mathbf{X}_{m,i}=\mathbf{C}_{m,i}\mathbf{X}_m;\quad \mathbf{X}_m=\begin{bmatrix}\xi_m\\ \eta_m\\ \vartheta_m\\ V_m\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}_{m,i}=\begin{bmatrix}\xi_i\\ \eta_i\\ \vartheta_i\\ V_i\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_{m,i}=\begin{bmatrix}1&0&y_i&0\\ 0&1&-x_i&0\\ 0&0&1&0\\ n\dfrac{x_i}{R_m}&n\dfrac{y_i}{R_m}&0&\dfrac{R_i}{R_m}\end{bmatrix}. \tag{21}$$

В случае осесимметричных колебаний (n=0): $V_m=V_i=0$, $\mathbf{X}_m=\left[\xi_m\quad\eta_m\quad\vartheta_m\right]^T,\mathbf{X}_{m,i}=\left[\xi_i\quad\eta_i\quad\vartheta_i\right]^T$; соответственно в матрице $\mathbf{C}_{m,i}$ следует приравнять нулю четвертую строку и четвертый столбец.

Пусть k-ый КЭ оболочки, характеризуемый вектором обобщенных координат (10) или (11), который можно представить в виде $\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{X}_{k-1} \end{bmatrix}$, жестко соединяется на узловой окружности k с окружностью i m-го шпангоута. Тогда

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{C}^{+}_{m,i} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{+}_{m,i} = \begin{bmatrix} C_{m,i} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Если k-ый КЭ оболочки жестко соединяется на узловой окружности k-1 с окружностью i m-го шпангоута ($X_{k-1} = X_{m,i}$), то

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{C}^{-}_{m,i} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-}_{m,i} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & C_{m,i} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Для подкрепляющего шпангоута, соединенного с оболочкой однорядным заклепочным или сварным швом, можно считать, что это соединение осуществляется только на одной окружности i этого шпангоута. В случае силового шпангоута, соединяющего края различных оболочек на различных окружностях i, необходимо учитывать эксцентриситеты этих соединений, т.е. координаты x_i, y_i. Таким образом m–ый шпангоут может быть соединен на одной, двух или более окружностях с различными оболочками. При этом векторы обобщенных координат на краях этих оболочек выражаются через вектор обобщенных координат $\mathbf{X}_m$ m–го шпангоута на основании соотношений (22),(23).

Если шпангоут является тонкостенным и имеет деформируемый открытый или замкнутый контур поперечного сечения, то он рассматривается как упругая оболочка вращения. Путем деления контура на отрезки такой шпангоут представляется в виде системы нескольких кольцевых конических КЭ, которые соединяются на узловых окружностях с соответствующими КЭ основной оболочки.

Потенциальная и кинетическая энергии, а также вариация работы внешних нагрузок, системы оболочек вращения со шпангоутами получается путем суммирования (14), (17) по всем КЭ и шпангоутам с учетом условий их соединения (22), (23) и условий закрепления

$$\Pi = \sum_k \Pi_o^{(k)} + \sum_m \Pi_ш^{(m)}, \quad T = \sum_k T_o^{(k)} + \sum_m T_ш^{(m)}, \quad \delta A = \sum_k \delta\mathbf{q}_k \mathbf{Q}_k + \sum_m \delta\mathbf{X}_m \mathbf{Q}_m . \tag{24}$$

Уравнения колебаний системы в обобщенных координатах записывается в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t). \tag{25}$$

Вектор обобщенных координат КЭ- модели для случая неосесимметричных колебаний незакрепленной оболочки со шпангоутами и со свободными краями

$k = 0, k = r$ имеет вид

$$q = \left[\xi_0 \quad \eta_0 \quad \vartheta_0 \quad V_0 \quad \xi_1 \quad \eta_1 \quad \vartheta_1 \quad V_1 \quad \cdots \quad \xi_m \quad \eta_m \quad \vartheta_m \quad V_m \quad \cdots \quad \xi_r \quad \eta_r \quad \vartheta_r \quad V_r\right]^T;$$

для осесимметричных колебаний (n=0) здесь следует опустить все компоненты V.

Для решения системы уравнений (25) высокого порядка их следует преобразовать к нормальным координатам, представляющим некоторое число s низших собственных форм колебаний [4]:

$$q(t) = \sum_{p=1}^{s} f_p(t) Y_p;$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}]\mathbf{Y} = 0 \to \omega_p^2, Y_p;$$

$$m_p(\ddot{f}_p + \omega_p^2 f_p) = F_p(t), \ \ (p = 1, 2, \ldots, s); \ \ m_p = \mathbf{Y}_p^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_p, \ \ F_p = \mathbf{Y}_p^T \mathbf{Q}. \tag{26}$$

Пример расчета

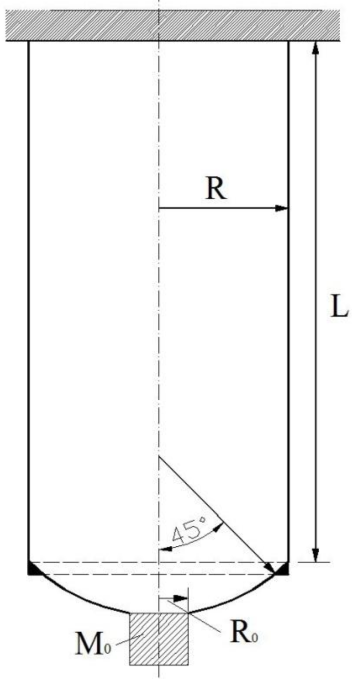

Рис.4

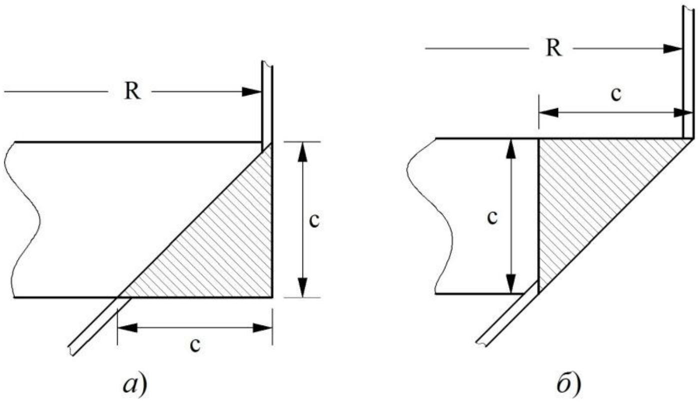

Рис.5

В качестве примера рассмотрим расчет собственных осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, соединенной упругим шпангоутом со сферическим днищем, к которому на окружности радиуса R_0 жестко присоединен груз с массой $\mathbf{M}_o$, рис.4. Шпангоут, жестко соединенный с оболочками, имеет сплошное недеформируемое поперечное сечение в виде равнобедренного прямоугольного треугольника в вариантах а и б, показанных на рис.5а, б. Цилиндрическая и сферическая оболочки являются изотропными, имеют одинаковую толщину h и коэффициент Пуассона μ=0.3. Модуль упругости E и плотность материала ρ_o оболочек и шпангоута одинаковы. Масса груза $M_o = R^3\rho_o$ кг. Исходные данные: $L = 4R$, $h = 0.0025R$, $c = 0.05R$, $R_o = 0.2R$.

В таблице приведены безразмерные значения квадратов трех низших собственных частот колебаний $\lambda_p^2 = E^{-1}(1-\mu^2)\rho_o R^2\omega_p^2$, $p = 1,2,3$ для двух вариантов шпангоута.

Таблица 1

вар	λ_1^2	λ_2^2	λ_3^2
а	0.00027154	0.08647651	0.28286304
б	0.00028381	0.08425886	0.30118976

Отсюда видно, что несмотря на то, что площадь поперечного сечения шпангоута в вариантах а и б одинакова, его расположение относительно соединяемых оболочек оказывает существенное влияние на собственные частоты колебаний. При этом еще большее влияние форма поперечного сечения соединительного шпангоута и его расположение оказывают на краевые изгибы оболочек.

Выводы

Разработан алгоритм расчета по методу конечных элементов осесимметричных и неосесимметричных колебаний составных ортотропных оболочек вращения с подкрепляющими и соединительными шпангоутами. Оболочки и тонкостенные шпангоуты с деформируемым контуром поперечного сечения моделируются кольцевыми коническими конечными элементами. Кроме этого рассматривается модель шпангоута в виде кольца с недеформируемым поперечным сечением с учетом эксцентриситетов его соединений с оболочками.

На примере цилиндрической оболочки со сферическим днищем, соединенных через упругий шпангоут, оценено влияние параметров шпангоута на собственные частоты колебаний.

Библиографический список

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. −М.:Машиностроение.1988. −272с.

2. Шмаков В.П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. −М.:Изд−во МГТУ им.Н.Э.Баумана,2011. −287с.

3. Сафронова Т.Д., Шклярчук Ф.Н. Применение метода отсеков к расчету колебаний круговых цилиндрических оболочек с тонкостенными шпангоутами// МТТ,1992, №2.-с.151-159.

4. Гришанина Т.В., Тютюнников Н.П., Шклярчук Ф.Н. Метод отсеков в расчетах колебаний конструкций летательных аппаратов. −М.:Изд−во МАИ, 2010.-180с.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. −М.:Мир,1975. −542с.

6. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник/ В.И.Мяченков, В.П.Мальцев, В.П.Майборода и др. – М.: Машиностроение,1989.–520с.

7. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение,1977.– 488с.