

На правах рукописи



ВЕСТЯК Владимир Анатольевич

**ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ  
В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ТЕЛАХ  
С ПЛОСКИМИ ИЛИ СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

01.02.04 Механика деформируемого твёрдого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» Министерства образования и науки Российской Федерации

**Научный консультант:**

доктор физико-математических наук, профессор **Тарлаковский Дмитрий Валентинович.**

**Официальные оппоненты:**

**Бабешко Владимир Андреевич**, доктор физико-математических наук, академик Российской академии наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое моделирование» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кубанский государственный университет»;

**Димитриенко Юрий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»;

**Ерофеев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения РАН – филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук».

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва.

Защита диссертации состоится 21 декабря 2016 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д. 212.125.05 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте [http://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT\\_ID=72060](http://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=72060).

Автореферат разослан « \_\_\_\_\_ » октября 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета, к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_



Федотенков Г.В.

## Общая характеристика работы

Современная техника предъявляют повышенные требования к элементам конструкций, находящихся под воздействием полей различной природы. Это обстоятельство приводит к необходимости создания новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих свойства реальных материалов и процессы, происходящие в них. Именно поэтому за последние годы внимание исследователей стали привлекать нестационарные динамические задачи электроупругости и электромагнитоупругости. При этом, если в первой из них в настоящее время известно относительно большое количество законченных результатов (как для статических, так и для динамических задач), то в электромагнитоупругости число таких работ ограничено.

Различные аспекты постановок и методов решения задач электромагнитоупругости в последние десятилетия рассматривались в работах Амбарцумяна С.А., Бабаева А.Э., Бабешко В.А., Баженова В.Г., Бардзокаса Д.И., Бурака Я.И., Ватульяна А.О., Гачкевича А.Р., Гринченко В.Т., Зобнина А.И., Игумнова Л.А., Ильюшина А.А., Калинчука В.В., Кудрявцева Б.А., Партона В.З., Подстригача Я.С., Пряхиной О.Д., Седова Л.И., Сеника Н.А., Улитко А.Ф., Фильштинского Л.А., Фильштинского М.Л., Шульги Н.А., Можена Ж., Новацкого В., Guo S.H., Wang'a X., Sharma J.N. и других авторов.

Из приведенного в работе анализа публикаций следует, что в настоящее время наименее исследованными являются задачи нестационарной динамики упругих проводящих тел, находящихся под действием механических и электромагнитных полей.

В диссертации дана постановка нестационарных задач связанной термоэлектромагнитоупругости, в том числе, ее двумерных частных случаев: электромагнитоупругость полуплоскости, пространства со сферической полостью, толстостенной сферы и шара. С помощью аппарата поверхностных и объёмных функций влияния разработаны и реализованы методы решения класса двумерных задач для тел и областей указанной геометрии.

**Целью работы** является развитие направления механики нестационарного взаимодействия электромагнитных и механических полей в упругих проводящих телах, включающее постановки и исследование новых задач, а так же совершенствование некоторых известных методов решения нестационарных связанных задач электромагнитоупругости.

**Актуальность работы** в теоретическом плане связана с малой исследованностью проблемы. С практической точки зрения она объясняется широким распространением в различных областях авиационной, космической и других видах техники проводящих материалов и покрытий, подвергающихся воздействию как механических, так и электромагнитных полей. С целью совершен-

ствования работы устройств, выполненных из проводящих материалов, и увеличения их долговечности возникает необходимость в уточнении имеющихся приближённых постановок и методов решения проблемы взаимодействия механических и электромагнитных полей.

**Методы исследования.** Использовался аппарат линейной теории упругости в совокупности с уравнениями электродинамики Максвелла. Для построения решений применялся метод малого параметра, преобразования Лапласа и Фурье, аппараты функций Грина и обобщённых функций. Для нахождения оригиналов преобразования Лапласа использовались методы компьютерной алгебры.

**Научная новизна работы** состоит в постановке и построении решений нового класса двумерных связанных нестационарных задач электромагнитоупругости проводящих тел канонической формы, находящихся под действием поверхностных и объёмных нагрузок. Впервые предложен и реализован основанный на использовании малого параметра метод решения этих задач.

Получены решения новых нестационарных связанных плоских и осесимметричных задач электромагнитоупругости в прямоугольной декартовой и сферической системах координат. Впервые построены нестационарные поверхностные и объёмные функции Грина для электромагнитной и упругой полуплоскостей для произвольных точек по глубине.

Доказаны новые утверждения о структуре нестационарных осесимметричных объёмных функций Грина в сферической системе координат. С их помощью построены нестационарные объёмные функции Грина для электромагнитных и упругих толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара. Впервые получено решение нестационарных двумерных задач для тел указанной геометрии о деформировании под действием объёмных сил и об определении электромагнитного поля по заданным перемещениям.

**Достоверность и обоснованность результатов** подтверждается тем, что все результаты получены на базе модификации известных моделей механики деформируемого твёрдого тела и электродинамики с использованием апробированных методов решения начально-краевых задач и строго доказанных утверждений. Кроме того, систематически использовалась проверка результатов с помощью предельных переходов от общих случаев к частным. Для одномерных задач в сферической системе координат проведено сравнение аналитических результатов с численным решением. В совокупности с известными численными методами интегрирования это подтверждает достоверность результатов и полученных аналитических решений.

**Практическая значимость работы** состоит в возможности использовать результаты работы для уточнения функционирования различных электронных

устройств, использующих в своей работе проводящие элементы, которые подвергаются экстремальным воздействиям полей различной природы, а в части объёмных сил, действующих на упругое тело - в моделировании сейсмических волн в земной коре, возникающих под действием глубинных возмущений.

Кроме того, полученные точные результаты могут служить эталонными и тестовыми решениями для дальнейших перспективных разработок в области нестационарной электромагнитоупругости.

**Апробация результатов исследования.** Все основные результаты работы были предметом докладов, обсуждений и дискуссий на российских и международных конференциях, симпозиумах и съездах:

- Вторая Всероссийская научная конференция по волновой динамике машин и конструкций (Нижний Новгород, 2007);
- VII Международная научная школа – семинар «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2007);
- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская область, Ярополец, Кремёнки, 2007 – 2016);
- Международная конференция «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения» (Санкт-Петербург, 2008);
- Международная научная конференция «Современные проблемы механики и математики» (Львов, 2008, 2013)
- Международная научная конференция «Импульсные процессы в механике сплошных сред» (Николаев, 2009, 2011, 2013);
- Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций (Ялта, Запорожье, 2009-2012);
- Международная конференция, посвящённая 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко «Современные проблемы математики, механики и их приложений» (Москва 2009);
- Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львов, 2010, 2014);
- Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород 2011; Казань, 2015);
- V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твёрдого тела (Астрахань, 2011);
- Международная научная конференция «Математичні проблеми технічної механіки» (Днепропетровск, Днепродзержинск, 2011);

- Украинско-российский научный семинар «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленных воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2012, 2016 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, 2013);

- Международная научная конференция «Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (Минск, 2013);

- VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары 2014);

- IV Международная научно-практическая конференция «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2015);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва 2016);

- XI Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Краснодарский край, Дивноморское, 2016);

- Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённая 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева (Москва, 2016);

- III Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования», СКТеММ'16 (Москва, 2016);

- 24-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Montreal, 2016).

На различных этапах работа поддерживалась грантами РФФИ (коды проектов 09-08-00470, 10-08-90412, 12-08-00928, 12-08-90409, 15-08-00788).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложений и списка использованных источников, включающего 240 наименований. Общий объем диссертации составляет 343 страницы, включая 80 рисунков.

#### **Основное содержание работы.**

**Во введении** приведено краткое содержание по главам, обоснованы актуальность, новизна и практическая значимость работы, сформулированы основные цели, а также описаны методы исследования.

**В первой главе** представлен аналитический обзор основных работ по тематике диссертационного исследования с обоснованием его необходимости. Далее приводится вывод связанной замкнутой системы линейных уравнений

движения однородной термоэлектромагнитоупругой среды. Механическая часть модели включает в себя линейные уравнения движения сплошной среды в напряжениях и соотношения Коши для деформаций (начальное состояние недеформированное). В термодинамическую составляющую включены линеаризованные уравнение баланса энтропии и закона теплопроводности Фурье, а также записанное с точностью до членов второго порядка малости уравнение изменения свободной энергии. Электромагнитная часть модели состоит из уравнений Максвелла, линеаризованных относительно ненулевого начального состояния обобщенного закона Ома (к классическому варианту добавляется зависимость плотности тока от скорости движения и теплового потока), выражений для силы Лоренца и притока тепловой и электромагнитной энергии. Физические соотношения строятся для среды с произвольной анизотропией с использованием квадратичного приближения свободной энергии как функции деформаций, изменения температуры и компонент векторов электрической и магнитной индукций.

От общей модели осуществлен переход к рассматриваемому в работе частному случаю изотермических процессов в изотропных проводниках, под которыми понимается изотропная среда при отсутствии зависимости напряжений от напряженностей электрического и магнитного полей. Эта модель описывается упомянутыми выше соотношениями Коши, уравнениями движения с правой частью в виде силы Лоренца, законом Гука (по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 3)

$$\rho \mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i = \rho_{e0} \mathbf{E} + \rho_e \mathbf{E}_0 + \frac{\mu_e}{c} ([\mathbf{j}_0, \mathbf{H}] + [\mathbf{j}, \mathbf{H}_0]), \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1 g_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad I_1 = \varepsilon_i^i = \text{div} \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

и уравнениями электродинамики

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu_e}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_e, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{\mu_e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]) + \rho_{e0} \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ , - векторы перемещения и скорости;  $\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и  $\varepsilon = \varepsilon^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  - тензоры напряжений и деформаций;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  - базис некоторой криволинейной системы координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ ;  $\rho$  - плотность среды;  $\lambda$  и  $\mu$  - упругие постоянные Ламе;  $g_{ij}$  - компоненты метрического тензора;  $\mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{H} = H^i \mathbf{e}_i$  - векторы напряженностей электрического и магнитного полей;  $t$  - время;  $\mathbf{j} = j^i \mathbf{e}_i$  - вектор плотности тока;  $c$  - скорость света;  $\rho_e$  - плотность зарядов;  $\sigma$  - коэффициент электропроводности;  $\varepsilon$  и  $\mu_e$  - коэффициенты диэлектрической и магнитной

проницаемости; дополнительный нижний индекс «0» указывает на параметры электромагнитного поля в начальном состоянии.

Система уравнений (1.3), (1.4) сводится к двум уравнениям ( $\Delta$  - оператор Лапласа):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_e \right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c_e^2 \Delta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{c}{\mu_e} \text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{w}), \quad \gamma_e = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}, \quad c_e^2 = \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon}, \quad (1.5)$$

$$\frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_e = -\text{div} \mathbf{f}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{w}) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{\mu_e \sigma}{c} [\mathbf{w}, \mathbf{H}_0] + \rho_{e0} \mathbf{w} \right). \quad (1.6)$$

Показано, что (1.5) может быть заменено уравнением относительно вектора напряженности электрического поля.

Приводятся также уравнение движения в перемещениях, уравнения относительно потенциалов полей перемещений и напряженности электрического поля, используемые в приложении, а также уравнения для объемного расширения и вектора вращения.

Сформулированы начальные условия и основные типы граничных условий.

Для исследования рассматриваемых в работе двумерных процессов из векторных соотношений выводятся скалярные уравнения в декартовой и сферической системах координат.

В *прямоугольной декартовой системе координат*  $\xi^1 = x, \xi^2 = y, \xi^3 = z$  предполагается, что процессы являются плоскими:

$$u_1 = u(x, z, t), \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = w(x, z, t), \quad E_1 = E_1(x, z, t), \quad E_2 \equiv 0, \quad E_3 = E_3(x, z, t), \\ H_1 = H_3 \equiv 0, \quad H_2 = H(x, z, t), \quad j_1 = j_1(x, z, t), \quad j_2 \equiv 0, \quad j_3 = j_3(x, z, t), \quad \rho_e = \rho_e(x, z, t).$$

Далее везде используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускается):

$$x' = \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u' = \frac{u}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad H' = \frac{H \mu_e c_1}{c E_*}, \quad \rho'_e = \frac{4\pi \rho_e L}{\varepsilon E_*}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \\ \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \eta_e = \frac{c_1}{c_e}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma = \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon c_1}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \\ \sigma'_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\lambda + 2\mu}, \quad E'_k = \frac{E_k}{E_*}, \quad j'_k = \frac{j_k}{\sigma E_*}, \quad F'_k = \frac{F_k L}{\lambda + 2\mu} \quad (k, l = 1, 3),$$

где  $L$  и  $E_*$  - некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

Соответствующие безразмерные уравнения движения, а также соотношения (1.5) и (1.6) имеют вид (точками обозначаются производные по времени  $\tau$ ):



$$\ddot{u} = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial I_1}{\partial x} + \eta^{-2} \Delta u + F_1, \quad \ddot{w} = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial I_1}{\partial z} + \eta^{-2} \Delta w + F_3, \quad I_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.7)$$

$$F_1 = \alpha [\rho_{e0} E_1 + \rho_e E_{01} - \gamma (j_{03} H + j_3 H_0)], \quad F_3 = \alpha [\rho_{e0} E_3 + \rho_e E_{03} + \gamma (j_{01} H + j_1 H_0)];$$

$$\eta_e^2 (\ddot{H} + \gamma \dot{H}) = \Delta \dot{H} + \eta_e^2 \left[ \frac{\partial(\rho_{e0} \ddot{u})}{\partial z} - \frac{\partial(\rho_{e0} \ddot{w})}{\partial x} \right] - \gamma \eta_e^2 \left[ \frac{\partial(H_0 \ddot{u})}{\partial x} + \frac{\partial(H_0 \ddot{w})}{\partial z} \right], \quad (1.8)$$

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = - \frac{\partial(\rho_{e0} \dot{u})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_{e0} \dot{w})}{\partial z} - \gamma \left[ \frac{\partial(H_0 \dot{u})}{\partial z} - \frac{\partial(H_0 \dot{w})}{\partial x} \right]. \quad (1.9)$$

Формулы для компонент вектора плотности тока следуют из (1.4):

$$j_1 = E_1 - H_0 \dot{w} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_3 = E_3 + H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{w} / \gamma. \quad (1.10)$$

Выражения для координат вектора напряженности электрического поля получены в главе 2.

В сферической системе координат  $\xi^1 = r, \xi^2 = \theta, \xi^3 = \vartheta$  ( $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \vartheta \leq \pi$ ) рассматриваются осесимметричные процессы:

$$u_r = u(r, \theta, t), \quad u_\theta = v(r, \theta, t), \quad u_\vartheta \equiv 0, \quad E_r = E_r(r, \theta, t), \quad E_\theta = E_\theta(r, \theta, t), \quad E_\vartheta \equiv 0, \\ H_r = H_\theta \equiv 0, \quad H_\vartheta = H(r, \theta, t), \quad j_r = E_r(r, \theta, t), \quad j_\theta = j_\theta(r, \theta, t), \quad j_\vartheta \equiv 0, \quad \rho_e = \rho_e(r, \theta, t).$$

В этом случае аналоги соотношений (1.7) - (1.10) записываются так (введены дополнительные безразмерные величины  $r' = r/L, v' = v/L$ ):

$$\ddot{u} = (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial I_1}{\partial r} + \eta^{-2} \left\{ \Delta u - \frac{2}{r^2} [l_\theta (v \sin \theta) + u] \right\} + F_r, \quad l_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

$$\ddot{v} = \frac{1}{r} (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + \eta^{-2} \left[ \Delta v + \frac{1}{r^2} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) \right] + F_\theta,$$

$$F_{er} = \alpha [\rho_{e0} E_r + \rho_e E_{0r} + \gamma (j_{0\theta} H + j_\theta H_0)], \quad F_{e\theta} = \alpha [\rho_{e0} E_\theta + \rho_e E_{0\theta} - \gamma (j_{0r} H + j_r H_0)],$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + l_\theta \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right], \quad I_1 = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + 2u + v \operatorname{ctg} \theta \right);$$

$$\eta_e^2 (\ddot{H} + \gamma \dot{H}) = \Delta \dot{H} - \frac{\dot{H}}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ + \frac{\eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r \rho_{e0} \ddot{v})}{\partial r} - \frac{\partial(\rho_{e0} \ddot{u})}{\partial \theta} \right] - \frac{\gamma \eta_e^2}{r} \left[ \frac{\partial(r \dot{u} H_0)}{\partial r} + \frac{\partial(\dot{v} H_0)}{\partial \theta} \right]; \quad (1.12)$$

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho_{e0} \dot{u} + \gamma H_0 \dot{v})] - r^{-1} l_\theta [(\rho_{e0} \dot{v} - \gamma H_0 \dot{u}) \sin \theta]; \quad (1.13)$$

$$j_r = E_r + H_0 \dot{v} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_\theta = E_\theta - H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{v} / \gamma. \quad (1.14)$$

Выражения для координат вектора напряженности электрического поля получены в главе 3.

Во **второй главе** рассматривается плоское движение электромагнитоупругой полуплоскости  $z \geq 0$  под действием нестационарных поверхностных возмущений вида:

$$u|_{z=0} = U_0(x, \tau), w|_{z=0} = W_0(x, \tau), E_1|_{z=0} = e_0(x, \tau) \text{ (или } E_3|_{z=0} = e_{30}(x, \tau)). \quad (2.1)$$

Предполагается, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  полуплоскость находится в невозмущённом состоянии, а начальное электромагнитное поле имеет вид:  $E_{01} \equiv 0, E_{03} = E_0(z), H_0 \equiv 0$ . Эти условия совместно с соотношениями (1.7) - (1.10), уравнениями Максвелла относительно ненулевых компонент вектора напряженности электрического поля и условиями ограниченности всех функций образуют начально-краевую задачу.

Для ее решения используются преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по координате  $x$  (индексы  $L$  и  $F$  обозначают изображения по Лапласу и по Фурье соответственно;  $s$  и  $q$  - параметры этих преобразований). Уравнения относительно изображений следуют из (1.7) - (1.9) ( $\text{Re} \sqrt{\cdot} > 0$ ):

$$\begin{aligned} s^2 u^{LF} &= l_{11q}(u^{LF}) + l_{12q}(w^{LF}) + \alpha g_{1q}(E_1^{LF}, H^{LF}), \quad g_{1q}(E_1, H) = \rho_{e0} E_1 - \gamma E_0 H, \\ s^2 w^{LF} &= l_{21q}(u^{LF}) + l_{22q}(w^{LF}) + \alpha g_{3q}(E_3^{LF}, \rho_e^{LF}), \quad g_{3q}(E_3, \rho_e) = \rho_{e0} E_3 + E_0 \rho_e, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} l_{11q}(u) &= \eta^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - q^2 u, \quad l_{22q}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta^{-2} q^2 u, \quad l_{12q}(u) = l_{21q}(u) = -iq(1 - \eta^{-2}) \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H^{LF} &= -\eta_e^2 s l_+^F(u^{LF}, w^{LF}), \quad k_e(q, s) = \sqrt{s_e^2 \eta_e^2 + q^2}, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(s + \gamma) \rho_e^{LF} = -s l_-^F(w^{LF}, u^{LF}), \quad l_{\pm}^F(w, u) = \frac{\partial(\rho_{e0} w)}{\partial z} \pm iq \rho_{e0} u. \quad (2.4)$$

Формулы для изображений координат вектора напряженности электрического поля вытекают из скалярного аналога уравнений Максвелла:

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_1^{LF} = -\frac{\partial H^{LF}}{\partial z} - s \eta_e^2 u^{LF}, \quad \eta_e^2 (s + \gamma) E_3^{LF} = -s \eta_e^2 w^{LF} - iq H^{LF}. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.2) – (2.5) вместе с изображением граничных условий (2.1) и требованием ограниченности искомых функций образуют краевую задачу.

Показано, что даже для одномерного варианта оригиналы решения этой задачи аналитически найти невозможно. Поэтому используется разложения в ряды по малому параметру  $\alpha$ , характеризующему связь механических и электромагнитных полей ( $k = 1, 3$ ):

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \alpha^m, \quad w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \alpha^m, \quad E_k = \sum_{m=0}^{\infty} E_{km} \alpha^m, \quad H = \sum_{m=0}^{\infty} H_m \alpha^m, \quad \rho_e = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \alpha^m \dots \quad (2.6)$$

Подстановка их в исходную задачу приводит к рекуррентной последовательности краевых задач относительно ограниченных изображений коэффициентов рядов ( $\delta_{lm}$  - символ Кронекера):

$$s^2 u_0^{LF} = l_{11q} (u_0^{LF}) + l_{12q} (w_0^{LF}), \quad s^2 w_0^{LF} = l_{21q} (u_0^{LF}) + l_{22q} (w_0^{LF}), \quad (2.7)$$

$$u_0^{LF} \Big|_{z=0} = U_0^{LF} (q, s), \quad w_0^{LF} \Big|_{z=0} = W_0^{LF} (q, s);$$

$$s^2 u_m^{LF} = l_{11q} (u_m^{LF}) + l_{12q} (w_m^{LF}) + g_{1q} (E_{1,m-1}^{LF}, H_{m-1}^{LF}), \quad (2.8)$$

$$s^2 w_m^{LF} = l_{21q} (u_m^{LF}) + l_{22q} (w_m^{LF}) + g_{3q} (E_{3,m-1}^{LF}, \rho_{m-1}^{LF}), \quad w_m^{LF} \Big|_{z=0} = u_m^{LF} \Big|_{z=0} = 0 \quad (m \geq 1);$$

$$\frac{\partial^2 H_m^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 H_m^{LF} = -\eta_e^2 s l_+^F (u_m^{LF}, w_m^{LF}) \quad (m \geq 0), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H_m^{LF}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\delta_{0m} \eta_e^2 h_0^{LF} (q, s) \quad (\text{или} \quad H_0^{LF} \Big|_{z=0} = \delta_{0m} i \eta_e^2 q^{-1} h_{30}^{LF} (q, s)),$$

$$h_0^{LF} (q, s) = (s + \gamma) e_0^{LF} (q, s) + s U_0^{LF} (q, s), \quad h_{30}^{LF} (q, s) = (s + \gamma) e_{30}^{LF} (q, s) + s W_0^{LF} (q, s),$$

где функции  $E_{1m}^{LF}$  и  $\rho_m^{LF}$  определяются с помощью соотношений (2.4) и (2.5).

Решение задач (2.7) и (2.8) представляется так:

$$u_0^{LF} (q, z, s) = G_{u01}^{LF} (q, z, s) U_0^{LF} (q, s) + G_{u02}^{LF} (q, z, s) W_0^{LF} (q, s), \quad (2.10)$$

$$w_0^{LF} (q, z, s) = G_{w01}^{LF} (q, z, s) U_0^{LF} (q, s) + G_{w02}^{LF} (q, z, s) W_0^{LF} (q, s);$$

$$u_m^{LF} (q, z, s) = \sum_{k=1,3} \int_0^\infty G_{uk}^{LF} (q, z, \xi, s) f_{k,m-1}^{LF} (q, \xi, s) d\xi, \quad f_{1m}^{LF} = g_{1q} (E_{1m}^{LF}, H_{1m}^{LF}), \quad (2.11)$$

$$w_m^{LF} (q, z, s) = \sum_{k=1,3} \int_0^\infty G_{wk}^{LF} (q, z, \xi, s) f_{k,m-1}^{LF} (q, \xi, s) d\xi, \quad f_{3m}^{LF} = g_{3q} (E_{3m}^{LF}, \rho_m^{LF}).$$

Коэффициенты в (2.10) и ядра в (2.11) – функции Грина, т.е. ограниченные решения следующих краевых задач:

$$s^2 G_{u0k}^{LF} = l_{11q} (G_{u0k}^{LF}) + l_{12q} (G_{w0k}^{LF}), \quad (2.12)$$

$$s^2 G_{w0k}^{LF} = l_{21q} (G_{u0k}^{LF}) + l_{22q} (G_{w0k}^{LF}), \quad G_{u0k}^{LF} \Big|_{z=0} = \delta_{1k}, \quad G_{w0k}^{LF} \Big|_{z=0} = \delta_{2k} \quad (k = 1, 2);$$

$$s^2 G_{uk}^{LF} = l_{11q} (G_{uk}^{LF}) + l_{12q} (G_{wk}^{LF}) + \delta_{1k} \delta(z - \xi), \quad (2.13)$$

$$s^2 G_{wk}^{LF} = l_{21q} (G_{uk}^{LF}) + l_{22q} (G_{wk}^{LF}) + \delta_{3k} \delta(z - \xi), \quad G_{uk}^{LF} \Big|_{z=0} = G_{wk}^{LF} \Big|_{z=0} = 0 \quad (k = 1, 3),$$

где  $\delta(z)$  - дельта-функция Дирака.

Аналогичным образом записывается решение задачи (2.9) (для примера используется первое из граничных условий):

$$H_m^{LF} (q, z, s) = \int_0^\infty G_H^{LF} (q, z, \xi, s) f_{Hm}^{LF} (q, \xi, s) d\xi - \delta_{0m} \eta_e^2 G_{H0}^{LF} (q, z, s) h_0^{LF} (q, s), \quad f_{Hm}^{LF} = -\eta_e^2 s l_+^F (u_m^{LF}, w_m^{LF}). \quad (2.14)$$

Здесь  $G_{H0}^{LF}$  и  $G_H^{LF}$  - функции Грина, т.е. ограниченные решения следующих краевых задач:

$$\frac{\partial^2 G_{H0}^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 G_{H0}^{LF} = 0, \quad \left. \frac{\partial G_{H0}^{LF}}{\partial z} \right|_{z=0} = 1. \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 G_H^{LF}}{\partial z^2} - k_e^2 G_H^{LF} = \delta(z - \xi), \quad \left. \frac{\partial G_H^{LF}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.16)$$

С использованием полученных в приложении таблиц оригиналы последних двух функций Грина найдены в явном виде:

$$G_{H0}(x, z, \tau) = -2f(x, z, \tau), \quad G_H(x, z, \xi, \tau) = -f(x, z + \xi, \tau) - f(x, |z - \xi|, \tau),$$

$$f(x, z, \tau) = \frac{e^{-\gamma\tau/2}}{2\pi} (\tau^2 - \eta_e^2 r^2)_+^{-1/2} \operatorname{ch} \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{\tau^2 - \eta_e^2 r^2} \right). \quad (2.17)$$

С помощью оригиналов интегрального представления (2.14) получено решение задачи об определении параметров электромагнитного поля в движущейся по заданному закону  $u(x, z, \tau)$  и  $w(x, z, \tau)$  полуплоскости  $z \geq 0$ . На рис. 1 и 2 представлены полученные с помощью численного интегрирования зависимости от времени напряженности  $H$  магнитного и координаты  $E_3$  вектора напряженности электрического поля для полуплоскости, материал которой характеризуется параметрами  $\eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma = 5,06$ , со следующими начальным состоянием и граничным условием:  $\rho_{e0}(z) = (z + 1)^{-1}$  и  $e_0(x, \tau) = 0$ .

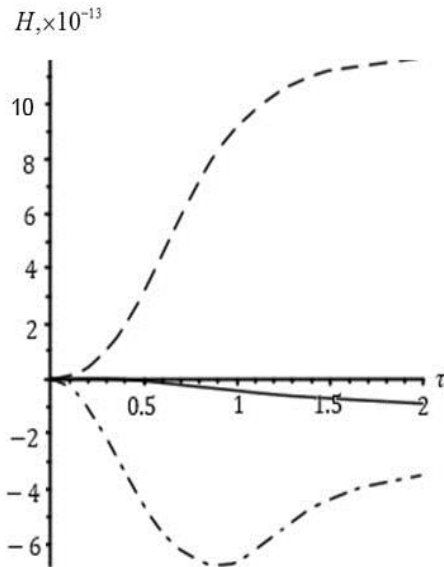


Рис. 1

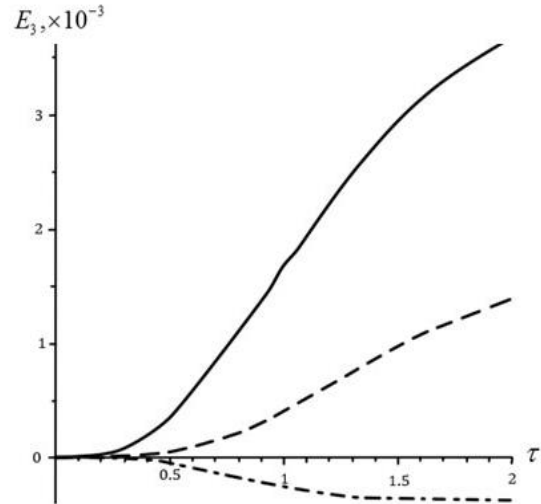


Рис. 2

Поле перемещений принималось в виде:  $w=0, u = xze^{-z}\tau_+$ . Сплошные кривые соответствуют  $x=z=0$ ; штриховые -  $x=z=0,5$ ; штрихпунктирные -  $x=z=1$ .

Задача об определении функций Грина (2.12) и (2.13) гораздо более сложная. Построение решения этих краевых задач достаточно громоздко, но реализуется с помощью стандартных методов. Все сложности связаны с построением оригиналов. В качестве примера приведем некоторые из изображений:

$$G_{u02}^{LF} = G_{u0}^{LF} = iqG_{130}^{LF}, G_{130}^{LF} = G_{131}^{LF} + G_{132}^{LF}, G_{131}^{LF} = -\frac{k_2}{R} e^{-k_1 z}, G_{132}^{LF} = \frac{k_2}{R} e^{-k_2 z},$$

$$k_1 = k_1(q^2, s^2) = \sqrt{s^2 + q^2}, k_2 = k_2(q^2, s^2) = \sqrt{s\eta^2 + q^2}, \operatorname{Re} \sqrt{\cdot} > 0, \quad (2.18)$$

$$R = R(q^2, s^2) = q^2 - k_1 k_2.$$

$$G_{u1}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{110}^{LF}(q, z, \xi, s) + G_{111}^{LF}(q, z, \xi, s)H(\xi - z) +$$

$$+ G_{111}^{LF}(q, \xi, z, s)H(z - \xi), \quad (2.19)$$

$$G_{110}^{LF} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 G_{110j}^{LF}, G_{1101}^{LF} = -\frac{q^2 P_1}{s^2 k_1} e^{-(z+\xi)k_1}, P_1 = \frac{R_1^2}{s^2 P}, P_3 = \frac{2R_1}{s^2 P},$$

$$G_{1102}^{LF} = -s^{-2} k_2 P_1 e^{-(z+\xi)k_2}, G_{1103}^{LF} = s^{-2} q^2 k_2 P_3 e^{-zk_1 - \xi k_2}, G_{1104}^{LF}(q, z, \xi, s) = G_{1103}^{LF}(q, \xi, z, s),$$

$$P = P(q^2, s^2) = (1 + \eta^2)q^2 + \eta^2 s^2, R_1 = R_1(q^2, s^2) = q^2 + k_1 k_2,$$

$$G_{111}^{LF} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 G_{111j}^{LF}, G_{1111}^{LF} = -\frac{q^2}{s^2 k_1} e^{-(\xi-z)k_1}, G_{1112}^{LF} = \frac{k_2}{s^2} e^{-(\xi-z)k_2}.$$

Оригиналы некоторых из составляющих этих функций Грина находятся последовательным обращением преобразований. Для остальных же используется алгоритм совместного обращения преобразований Лапласа и Фурье, основанный на использовании аналитического представления оригинала. В результате все оригиналы представлены в явном виде, который в силу громоздкости здесь не приводится.

На рис. 3 и 4 представлены графики распределения функций Грина по координате  $x$ . Первый из них изображает функцию  $G_{130}$  при  $z=1$  и  $\eta=1.87$  в разные моменты времени: сплошная линия соответствует  $\tau=1.1$ , точечная -  $\tau=1.5$ , а пунктирная -  $\tau=2$ . На втором - при  $\tau=3$ ,  $z=2$ ,  $\xi=1$  и  $\eta=1.73$  сплошная кривая соответствуют  $G_{u1}$ , штриховая -  $G_{w3}$ , штрихпунктирная  $G_{u3}$ , штрихпунктирная с двойным пунктиром -  $G_{w1}$ .

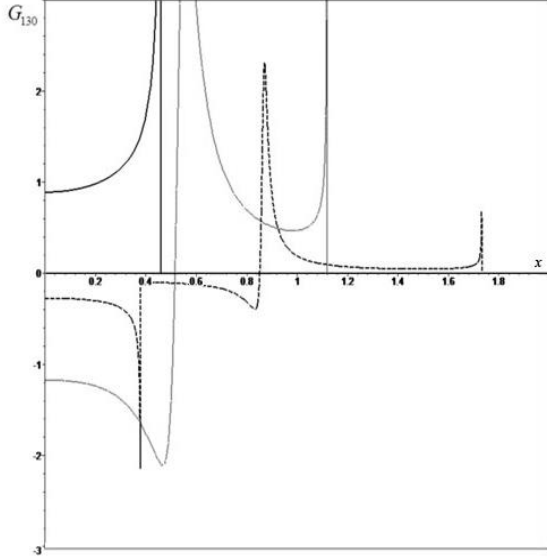


Рис. 3

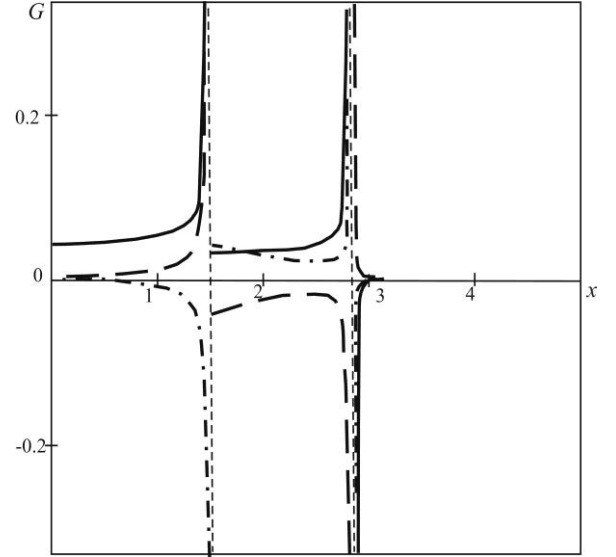


Рис. 4

С использованием оригиналов интегральных представлений (2.11) дано решение ещё одной составляющей общей связанной задачи - задачи о движении упругой полуплоскости под действием заданных объемных сил с координатами  $F_1(x, z, \tau)$  и  $F_3(x, z, \tau)$ . В общем случае реализация этой задачи сводится к вычислению соответствующих интегралов. В качестве примера рассмотрен простейший вариант сил, равномерно распределенных вдоль прямой  $z = z_0$ :  $F_1 = p_1 \delta(z - z_0) \delta(\tau)$ ,  $F_3 = p_3 \delta(z - z_0) \delta(\tau)$ , где  $p_1, p_3 = \text{const}$ . Он приводит к аналитическому решению (здесь приведены только нормальные перемещения):

$$2w(x, z, \tau) = p_3 \left\{ H[\tau - (z_0 - z)] - H[\tau - (z + z_0)] \right\} H(z_0 - z) + \\ + p_3 \left\{ H[\tau - (z - z_0)] - H[\tau - (z + z_0)] \right\} H(z - z_0).$$

Суммированием всех предыдущих результатов этой главы является общий алгоритм решения связанной задачи для полуплоскости. В качестве примера рассматривается частный случай граничных условий (2.1) при  $U_0 = W_0 = 0$  и  $e_0(x, \tau) \neq 0$ . Показано, что нулевое приближение ( $m = 0$ ) в этом случае имеет вид:

$$u_0 = w_0 \equiv 0, H_0 = -\eta_e^2 G_{H0} ** (\gamma e_0 + \dot{e}_0), E_{10} = G_{e10} ** (\gamma e_0 + \dot{e}_0), \\ E_{30} = G_{e30} ** (\gamma e_0 + \dot{e}_0), \rho_0 \equiv 0.$$

При  $m \geq 1$  должны быть использованы оригиналы интегральных представлений (2.11) и (2.14) и их аналоги для компонент вектора напряженности электрического поля (соответствующие ядра найдены в диссертации). Соответствующий плотности зарядов коэффициент ряда в (2.6) определяется вытекающим из (2.4) равенством (звездочка обозначает свертку по времени):

$$\rho_m = -l_- \left[ w_{ms}(x, z, \tau), u_{ms}(x, z, \tau) \right], u_{ms} = u_m - \gamma e^{-\gamma \tau} * u_m, w_{ms} = w_m - \gamma e^{-\gamma \tau} * w_m. \quad (2.20)$$

При этом плотность тока находится по формуле (1.10).

Для устранения необходимости дифференцирования по координате  $x$  в (2.20) и в интегральном представлении для компонент вектора напряженности электрического используется следующее преобразование:

$$\begin{aligned} l_+(u_m, w_m) &= \rho'_{e0} u_m + \rho_{e0} \omega_m, \quad l_-(w_m, u_m) = \rho'_{e0} w_m + \rho_{e0} \chi_m, \\ \omega_m &= \omega(u_m, w_m), \quad \chi_m = \chi(u_m, w_m), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\chi$  и  $\omega$  - операторы, соответствующие объемному расширению и ненулевой компоненте вектора вращения.

Для замыкания алгоритма получены дополнительные интегральные представления функций  $\chi_m$  и  $\omega_m$ , и найден явный вид их ядер.

Аналогичным образом построен алгоритм решения связанной задачи для полуплоскости для следующего варианта граничных условий:  $U_0 = e_{30} = 0$  и  $W_0(x, \tau) \neq 0$ . В качестве примера рассмотрен случай  $W_0 = W_0(\tau)$ . В качестве примера рассмотрена алюминиевая полуплоскость с физическими параметрами  $\alpha = 0,0806$ ;  $\gamma = 5,06$  при  $W_0 = H(\tau)$  и начальным полем следующего вида:

$\rho_{e0} = 1/(2\sqrt{z})$ ,  $E_0 = \sqrt{z}$ . На рисунке 5 приведены графики изменения перемещения по времени  $\tau$  для различных значений  $z$ : сплошная линия соответствует  $z=9$ , пунктирная  $z=6$ , штрихпунктирная  $z=3$ , штрихпунктирная с двумя точками  $z=0.1$ . На рисунке 6 приведены графики изменения напряжённости электрического поля по времени  $\tau$  для различных значений  $z$ : сплошная линия соответствует  $z=3$ , пунктирная  $z=6$ , штрихпунктирная  $z=9$ , штрихпунктирная с двумя точками  $z=0.1$ .

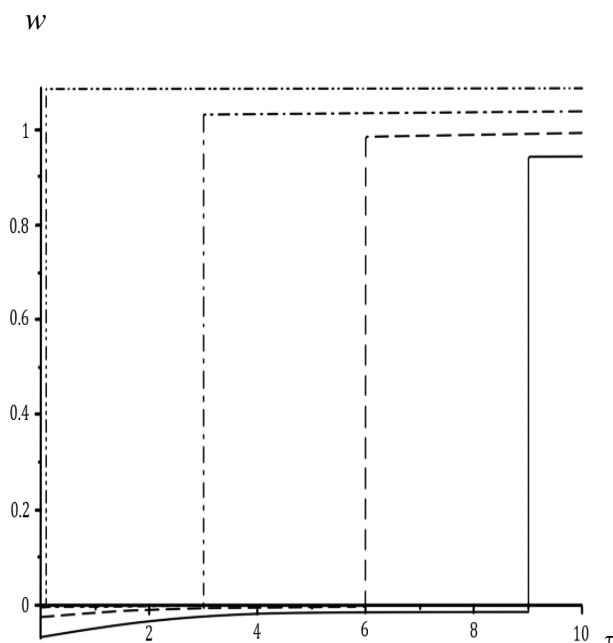


Рис.5

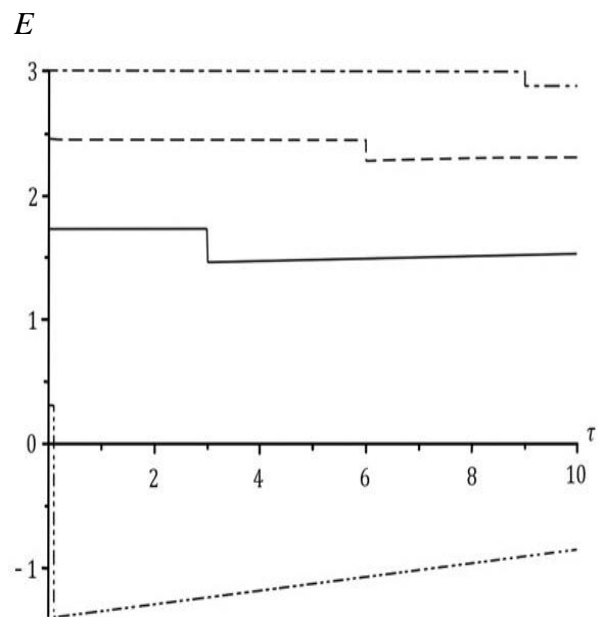


Рис. 6

**Третья глава** посвящена исследованию процесса распространения нестационарных осесимметричных волн в электромагнитоупругой толстостенной сфере с внутренним  $r_0$  и внешним  $r_1$  радиусами под действием нестационарных поверхностных возмущений вида ( $k = 0, 1$ ):

$$u|_{r=r_k} = U_k(\tau, \theta), v|_{r=r_k} = V_k(\tau, \theta), E_0|_{r=r_k} = e_{0k}(\tau, \theta) \text{ (или } E_r|_{r=r_k} = e_{r0k}(\tau, \theta)). \quad (3.1)$$

Предполагается, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  сфера находится в невозмущённом состоянии, а начальное электромагнитное поле имеет вид:  $E_{0r} = E_0(r)$ ,  $E_{0\theta} \equiv 0$ ,  $H_0 \equiv 0$ . Эти условия совместно с соотношениями (1.11) - (1.14) и уравнениями Максвелла относительно ненулевых компонент вектора напряжённости электрического поля аналогично главе 2 образуют начально-краевую задачу.

Для ее решения функции  $u, E_r, \rho_e, F_r, j_r, U_k, e_{r0k}$  раскладываются в ряды по полиномам Лежандра  $P_n(\cos \theta)$ , а функции  $v, E_\theta, H, F_\theta, j_\theta, V_k, e_{0k}$  - в ряды по полиномам Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$ . В пространстве преобразований Лапласа по времени уравнения относительно изображений коэффициентов рядов (дополнительный нижний индекс « $n$ » - их номер) следуют из (1.11) - (1.13):

$$s^2 u_n^L = l_{11n}(u_n^L) + l_{12n}(v_n^L) + \alpha g_u, \quad g_u = \rho_{e0} E_{rn}^L + E_0 \rho_n^L \quad (n \geq 0), \quad (3.2)$$

$$s^2 v_n^L = l_{21n}(u_n^L) + l_{22n}(v_n^L) + \alpha g_v, \quad g_v = \rho_{e0} E_{\theta n}^L - \gamma E_0 H_n^L \quad (n \geq 1);$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_n^L = \Delta_n H_n^L + \eta_e^2 s l_H(u_n^L, v_n^L), \quad l_H(u, v) = l_{r1}(r \rho_{e0} v) + r^{-1} \rho_{e0} u \quad (n \geq 1); \quad (3.3)$$

$$(s + \gamma) \rho_n^L = -s l_{np}(u_n^L, v_n^L), \quad l_{np}(u, v) = r^{-1} [l_{r1}(r^2 \rho_{e0} u) + n(n+1) \rho_{e0} v], \quad (3.4)$$

где

$$l_{11n}(u) = l_{r2}(u) - r^{-2} [n(n+1)\eta^{-2} + 2]u, \quad l_{12n}(v) = -n(n+1) [l_{21n}(v) + (3 + \eta^{-2})r^{-2}v],$$

$$l_{21n}(u) = -(1 - \eta^{-2})r^{-1} l_{r1}(ru) - (1 + \eta^{-2})r^{-2}u, \quad l_{22n}(v) = \eta^{-2} l_{r2}(v) - n(n+1)r^{-2}v,$$

$$\Delta_n = l_{r2} - n(n+1)r^{-2}, \quad l_{r2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad l_{r1} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Формулы для изображений координат вектора напряжённости электрического поля вытекают из скалярного аналога уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \eta_e^2 (s + \gamma) E_{rn}^L &= n(n+1)r^{-1} H_n^L - \eta_e^2 s \rho_{e0} u_n^L \quad (n \geq 0), \\ \eta_e^2 (s + \gamma) E_{\theta n}^L &= -l_{r1}(r H_n^L) - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_n^L \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Коэффициенты рядов для координат вектора плотности тока следуют из (1.14):

$$j_{rn} = E_{rn} + \rho_{e0} \dot{u}_n / \gamma, \quad j_{\theta n} = E_{\theta n} + \rho_{e0} \dot{v}_n / \gamma. \quad (3.6)$$

Из граничных условий (3.1) при этом получаем следующие равенства:



$$u_n^L \Big|_{r=r_k} = U_{kn}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad v_n^L \Big|_{r=r_k} = V_{kn}^L(s), \quad l_{r1}(rH_n^L) \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_{0k}^L \quad (n \geq 1), \quad (3.7)$$

$$l_{r1}(rH_n^L) \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_{0k}^L \quad (n \geq 1) \quad (\text{или } n(n+1)r^{-1}H_n^L \Big|_{r=r_k} = -\eta_e^2 h_{r0}^L \quad (n \geq 1)), \quad (3.8)$$

$$h_{0k}^L = s\rho_{e0}V_{kn}^L(s) + (s+\gamma)e_{0kn}^L(s), \quad h_{r0k}^L = s\rho_{e0}U_{kn}^L(s) - (s+\gamma)e_{r0kn}^L(s).$$

Соотношения (3.2) – (3.5) и (3.8) образуют краевые задачи при каждом  $n$ . Их решения представляются в виде рядов вида (2.6). Тогда приходим к рекуррентным по  $m$  последовательностям уравнений

$$s^2 u_{00}^L = l_{110}(u_{00}^L); \quad (3.9)$$

$$s^2 u_{0m}^L = l_{110}(u_{0m}^L) + g_u(E_{r0,m-1}^L, \rho_{0,m-1}^L) \quad (m \geq 1); \quad (3.10)$$

$$s_e^2 E_{r0m}^L = -s^2 \rho_{e0} u_{0m}^L, \quad (s+\gamma)\rho_{0m}^L = -sl_{r2}(\rho_{e0} u_{0m}^L) \quad (m \geq 0); \quad (3.11)$$

- при  $n \geq 1$

$$s^2 u_{n0}^L = l_{11n}(u_{n0}^L) + l_{12n}(v_{n0}^L), \quad s^2 v_{n0}^L = l_{21n}(u_{n0}^L) + l_{22n}(v_{n0}^L); \quad (3.12)$$

$$s^2 u_{nm}^L = l_{11n}(u_{nm}^L) + l_{12n}(v_{nm}^L) + g_u(E_{rn,m-1}^L, \rho_{n,m-1}^L), \quad (3.13)$$

$$s^2 v_{nm}^L = l_{21n}(u_{nm}^L) + l_{22n}(v_{nm}^L) + g_v(E_{\theta n,m-1}^L, H_{n,m-1}^L) \quad (m \geq 1);$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_{nm}^L = \Delta_n H_{nm}^L + \eta_e^2 sl_H(u_{nm}^L, v_{nm}^L); \quad (3.14)$$

$$\eta_e^2 (s+\gamma) E_{\theta nm}^L = -r^{-1} l_{r1}(rH_{nm}^L) - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_{nm}^L, \quad (3.15)$$

$$\eta_e^2 (s+\gamma) E_{rnm}^L = n(n+1)r^{-1}H_{nm}^L - \eta_e^2 \rho_{e0} u_{nm}^L; \quad (s+\gamma)\rho_{nm}^L = -sl_{np}(u_{nm}^L, v_{nm}^L). \quad (3.16)$$

Соответствующие им граничные условия ( $k=0,1$ )

$$u_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = \delta_{0m} U_{kn}^L(s) \quad (n \geq 0), \quad v_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = \delta_{0m} V_{kn}^L(s) \quad (n \geq 1); \quad (3.17)$$

$$l_{r1}(rH_{n0}^L) \Big|_{r=r_k} = -\delta_{0m} \eta_e^2 h_{0k}^L \quad (\text{или } n(n+1)H_{n0}^L \Big|_{r=r_k} = -\delta_{0m} \eta_e^2 r_k h_{r0k}^L \quad (n \geq 1)). \quad (3.18)$$

Задачи (3.9), (3.12) и (3.17) при  $m=0$  – чисто упругие. Их решение достаточно подробно исследовано. Поэтому далее везде, кроме последнего параграфа этой главы, положим что  $U_k(\theta, \tau) \equiv 0$ ,  $V_k(\theta, \tau) \equiv 0$ , что в силу однородности задач приводит к тривиальному результату:  $u_{n0}(r, \tau) \equiv 0$ ,  $v_{n0}(r, \tau) \equiv 0$  ( $n \geq 0$ ). Решение задачи (3.10), (3.13) и (3.17) при  $m \geq 1$  аналогично главе 2 представляется в интегральном виде:

$$u_{0m}^L(r, s) = \int_{r_0}^{r_1} G_{uu0}^L(r, \xi, s) f_{u0,m-1}^L(\xi, s) d\xi; \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
u_{nm}^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\eta_1} G_{uun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\eta_1} G_{uvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \\
v_{nm}^L(r, s) &= \int_{r_0}^{\eta_1} G_{vun}^L(r, \xi, s) f_{un, m-1}^L(\xi, s) d\xi + \int_{r_0}^{\eta_1} G_{vvn}^L(r, \xi, s) f_{vn, m-1}^L(\xi, s) d\xi, \\
f_{uun}^L(\xi, s) &= g_u \left[ E_{rnm}^L(\xi, s), \rho_{nm}^L(\xi, s) \right], \quad f_{vvn}^L(\xi, s) = g_v \left[ E_{\theta nm}^L(\xi, s), H_{nm}^L(\xi, s) \right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ядра этих представлений - функции Грина, т.е. решения краевых задач:

$$s^2 G_{uu0}^L = l_{110} (G_{uu0}^L) + \delta(r - \xi), \quad G_{uu0}^L \Big|_{r=r_k} = 0; \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
s^2 G_{uun}^L &= l_{11n} (G_{uun}^L) + l_{12n} (G_{vun}^L) + \delta(r - \xi), \quad s^2 G_{vun}^L = l_{21n} (G_{uun}^L) + l_{22n} (G_{vun}^L), \\
G_{uun}^L \Big|_{r=r_k} &= G_{vun}^L \Big|_{r=r_k} = 0;
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
s^2 G_{uvn}^L &= l_{11n} (G_{uvn}^L) + l_{12n} (G_{vvn}^L), \quad s^2 G_{vvn}^L = l_{21n} (G_{uvn}^L) + l_{22n} (G_{vvn}^L) + \delta(r - \xi), \\
G_{uvn}^L \Big|_{r=r_k} &= G_{vvn}^L \Big|_{r=r_k} = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Аналогичным образом записывается решение задачи (3.14), (3.18) (для примера используется первое граничное условие):

$$\begin{aligned}
H_{nm}^L(r, s) &= -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\eta_1} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H \left[ u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s) \right] - \\
&\quad - \delta_{0m} \eta_e^2 (s + \gamma) \sum_{k=0}^1 G_{Hnk}^L(r, s) e_{0kn}^L(s).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь  $G_{Hn}^L$  и  $G_{Hnk}^L$  - функции Грина, а именно, решения следующих краевых задач ( $k = 0, 1$ ):

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), \quad l_{r1} (r G_{Hn}^L) \Big|_{r=r_k} = 0; \tag{3.25}$$

$$\Delta_n G_{Hnk}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hnk}^L = 0, \quad l_{r1} (r G_{Hnk}^L) \Big|_{r=r_k} = \delta_{kl} \quad (l = 0, 1). \tag{3.26}$$

Последние функции с использованием построенной в приложении фундаментальной системы решений уравнений, ее связи с элементарными функциями и доказанного там же утверждения об обобщенной симметрии функций Грина найдены в явном виде, а также построены их оригиналы. Показано, что при  $\eta_e \ll 1$  (что соответствует реальным материалам) нахождение их значений приводит к значительным вычислительным трудностям.

Поэтому функции Грина заменяются их квазистатическими аналогами при  $\eta_e = 0$ , построение которых приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned}
G_{Hn}^L(r, \xi, s) &= G_{Hn}^c(r, \xi) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c(\xi, r) H(r - \xi) \right], \\
\tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi) \beta_n(r_0, r)}{(2n+1) \xi^{n+1} A_n}, \quad A_n = n(n+1) r^{n+1} \alpha_n(r_1, r_0);
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$G_{Hn0}^L(r, \xi, s) = G_{Hn0}^c(r) = -r_0^{n+2} \beta_n(r_1, r) / A_n, \quad G_{Hn1}^L = G_{Hn1}^c(r) = r_1^{n+2} \beta_n(r_0, r) / A_n, \tag{3.28}$$

где  $\alpha_n(x, y) = x^{2n+1} - y^{2n+1}$ ,  $\beta_n(x, y) = (n+1)x^{2n+1} + ny^{2n+1}$ .

Тогда равенства (3.24) существенно упрощаются в том смысле, что при переходе к оригиналам отпадает необходимость в интегрировании по времени.

Этот факт, в том числе, использован при исследовании составляющей общую проблему задачи об определении электромагнитного поля по заданному полю перемещений  $u(r, \theta, \tau)$  и  $v(r, \theta, \tau)$  толстостенной сферы. Построены решения трех вариантов задач: 1) сфера неподвижна при разных вариантах задания напряженности электрического поля на границах; 2) задан радиальный закон перемещений сферы при отсутствии напряженности поля; 3) сфера движется поступательно сфера  $u = \tau_+ \cos \theta$ ,  $v = -\tau_+ \sin \theta$ , напряженность на ее границах отсутствует, а плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид  $\rho_{e0}(r) = \rho_*/r$ . Найдены все компоненты электромагнитного поля. Например, в последней задаче плотность зарядов определяется так:

$$\rho_e(r, \theta, \tau) = -\frac{e^{-\gamma\tau} - 1}{\gamma r^2} \rho_* H(\tau) \cos \theta.$$

Гораздо более сложной и громоздкой задачей является построение объемных функций Грина (3.21) - (3.23). С использованием доказанного в приложении утверждения об обобщенной симметрии этих функций они представляются следующим образом:

$$G_{uum}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uum}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \quad (3.29)$$

$$G_{vun}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right];$$

$$G_{uvn}^L(r, \xi, s) = \xi^2 n(n+1) \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right], \quad (3.30)$$

$$G_{vvn}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],$$

Для определения коэффициентов этих равенств уравнения (3.22) и (3.23) сводятся к системам первого порядка, находятся их частные решения, записываются общие решения, а затем удовлетворяются граничные условия. При этом используется построенная в приложении фундаментальная матрица, найденные там же ее миноры и определитель, а также доказанные свойства функций, входящих в фундаментальную систему решений (ФСР). Структура коэффициентов равенств (3.29) и (3.30) идентична. Например, функция  $\tilde{G}_{uum}^L$  имеет вид:

$$\begin{aligned} |Z_n(s)| \tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) = & -\xi^{-1} \left[ R_{um1}(rs, r_0s, r_1s) R_{uum*}(r_1s, \xi s) + \right. \\ & \left. + n(n+1) R_{um2}(rs, r_0s, r_1s) R_{vun*}(r_1s, \xi s) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $|\mathbf{Z}_n(s)|$  - определитель матрицы граничных условий, который так же, как и остальные функции, входящие в эту формулу, выражаются через функции из ФСР.

Кроме того, независимо построена функция  $G_{uu0}^L$ . Показано, что при  $n=0$  она совпадает с  $G_{uum}^L$ .

Для определения оригиналов функций Грина (3.22) и (3.23) используется полученные в приложении выражения функций из ФСР и их комбинаций через элементарные функции. Например,  $\tilde{G}_{uum}^L$  записывается так:

$$\tilde{G}_{uum}^L(r, \xi, s) = -\frac{(-1)^n}{2\eta^{2n+1} r^{n+2} \xi^{n+2} s^{2n+3}} \frac{F_{uum}(s)}{L_{zn}(r_0 s, r_1 s)}, \quad (3.32)$$

где  $F_{uum}(s)$  и  $L_{zn}(r_0 s, r_1 s)$  - экспоненциальные многочлены параметра  $s$ .

Подобная структура позволяет разложить функцию  $L_{zn}^{-1}(r_0 s, r_1 s)$  в сходящийся в некоторой правой полуплоскости  $\text{Re } s > \alpha_*$  ряд по экспонентам и затем методами компьютерной алгебры привести правую часть равенства (3.32) к ряду с членами в виде произведения правильных рациональных дробей параметра  $s$  на экспоненты вида  $\exp[-s\tau_\alpha(r, \xi)]$ , что позволяет находить их оригиналы стандартными методами операционного исчисления. Кроме того, отметим, что вопросов о сходимости рядов в пространстве оригиналов не возникает, поскольку для конечного момента времени ряду из изображений в силу теоремы запаздывания соответствует конечная сумма.

На рис. 7 и 8 приведены графики распределения по радиусу функций влияния  $G_{uum}$  и  $G_{vvn}$ : сплошные кривые соответствуют  $n=1$ , а штриховые -  $n=2$ . В расчетах приняты следующие значения параметров:  $\eta=2,04$ ,  $r_0=1$ ,  $r_1=2$ ,  $\xi=0.5$ ,  $\tau=1.5$ .

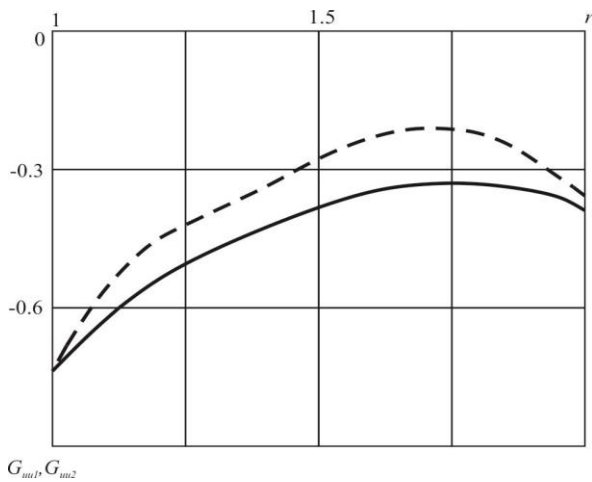


Рис. 7

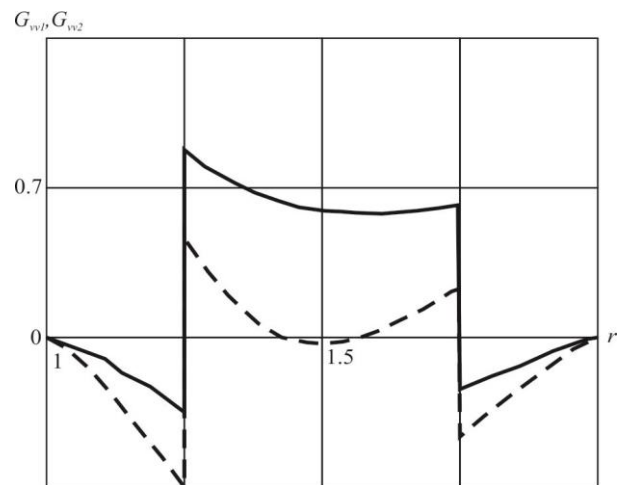


Рис. 8

С использованием оригиналов интегральных представлений (3.19) и (3.20) получено решение ещё одной составляющей общей связанной задачи - задачи о движении толстостенной сферы под действием заданных объемных сил. В качестве примера рассмотрены силы  $F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau) \cos \theta$ ,  $F_\theta(r, \theta, \tau) = -H(\tau) \sin \theta$ , что соответствует поступательному движению:  $u(r, \theta, \tau) = u_1(r, \tau) \cos \theta$ ,  $v(r, \theta, \tau) = v_1(r, \tau) \sin \theta$ . Графики распределения функций  $u_1(r, \tau)$  и  $v_1(r, \tau)$  по радиусу при  $\eta = 2,04$ ,  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = 2$  представлены на рис. 9 и 10. Номера кривых отвечают следующим моментам времени: 1 -  $\tau = 0.5$ ; 2 -  $\tau = 1$ ; 3 -  $\tau = 1.5$ ; 4 -  $\tau = 2$ .

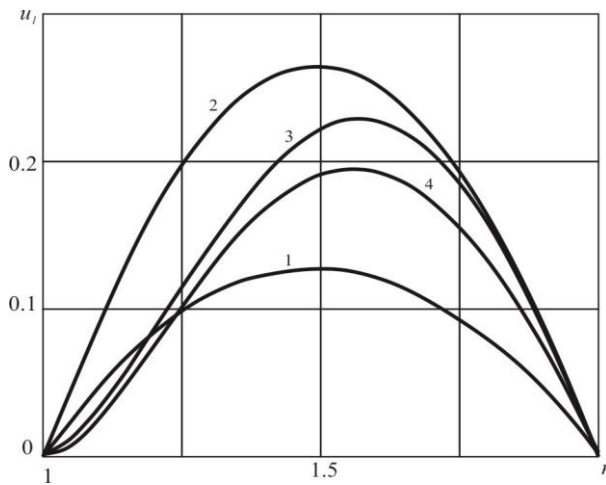


Рис. 9

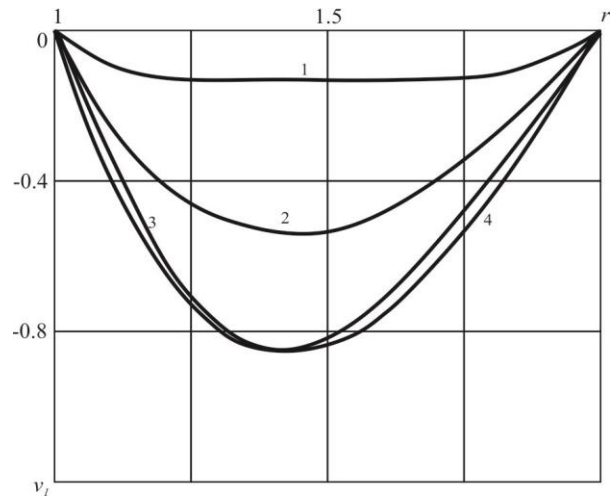


Рис. 10

Далее, в общем, аналогично главе 2 строится алгоритм решения связанной задачи для электромагнитоупругой толстостенной сферы. При этом в граничных условиях в (3.1) полагается  $U_k = V_k \equiv 0$  и  $e_{0k} \neq 0$ . Тогда рекуррентные соотношения (3.19) и (3.20) совместно с (3.15) и (3.16) приводят к тривиальным равенствам при любом  $m \geq 0$ :

$$u_{0m}(r, \tau) = \rho_{0m}(r, \tau) = E_{r0m}(r, \tau) \equiv 0. \quad (3.33)$$

При  $n \geq 1$  в рекуррентную систему входят оригиналы представлений (3.19), (3.19) и (3.24). В подынтегральную функцию последнего из них входит производная от перемещения по радиусу. Для устранения этого формула модифицируется с помощью интегрирования по частям. А уже из нее с помощью (3.15) находятся интегральные представления для коэффициентов, соответствующих компонентам напряженности электрического поля. При этом, как следует из (3.16), коэффициенты для плотности зарядов определяются так:

$$\rho_{nm} = -l_{np} [u_{nms}(r, \tau), v_{nms}(r, \tau)], \quad u_{nms} = u_{nm} - \gamma e^{-\gamma \tau} * u_{nm}, \quad v_{nms} = v_{nm} - \gamma e^{-\gamma \tau} * v_{nm} \quad (3.34)$$

При этом плотность тока находится по формуле (3.6).

Для устранения необходимости дифференцирования по координате  $x$  в формуле (3.34) она преобразовывается следующим образом:

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r)u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0}\chi_{nms}(r, \tau), \chi_{nms} = \chi_{nm} - \gamma e^{-\gamma\tau} * \chi_{nm}, \quad (3.35)$$

$$l_+(u_m, w_m) = \rho'_{e0}u_m + \rho_{e0}\omega_m, l_-(w_m, u_m) = \rho'_{e0}w_m + \rho_{e0}\chi_m, \quad (3.36)$$

$$\omega_m = \omega(u_m, w_m), \chi_m = \chi(u_m, w_m),$$

где  $\chi_{nm} = \chi_n(u_{nm}, v_{nm})$ , а  $\chi_n$  - коэффициент разложения в ряд по полиномам Лежандра коэффициента объемного расширения  $\chi = \chi(u, v)$ .

Поэтому в алгоритм дополнительно вводится подобное (3.20) интегральное представление для  $\chi_{nm}$ , сопровождаемое построением соответствующих ядер. Кроме того, строятся интегральные представления для скоростей  $\dot{u}_{nm}, \dot{v}_{nm}$ . Структура изображений ядер этих представлений, а также представления для  $\chi_{nm}$ , подобна (3.32) с той разницей, что здесь степени числителей и знаменателей рациональных функций могут совпадать. Соответствующие особенности типа дельта-функций выделяются методами компьютерной алгебры и учитываются при интегрировании.

С помощью общего алгоритма подробно проанализирована связанная задача о радиальных колебаниях электромагнитоупругой толстостенной сферы. На рис. 11 и 12 представлены распределения перемещений и напряженности  $E = E_r$  электрического поля по координате  $r$  в различные моменты времени при следующих значениях параметров:

$$r_0 = 1, r_1 = 2, \alpha = 0,5, \gamma = 0,566, U_0 = H(\tau), U_1 \equiv 0, E_0 = \sqrt{r}, \rho_{e0}(r) = 2/\sqrt{r}. \quad (3.37)$$

Сплошные кривые соответствуют учету шести первых членов ряда разложений (2.6) (они практически не отличаются от построенных при учете пяти членов рядов), а штриховые – нулевым членам  $u_0$  и  $e_0 = E_{r0}$ . Отметим, что результаты, полученные с учетом только нулевых членов рядов, соответствуют несвязанной задаче электромагнитоупругости. При этом на рис. 12 в момент времени  $\tau = 0.7$  наблюдается следующий эффект: в случае несвязанной задачи перемещения перед фронтом волны, находящимся в этот момент в точке  $r = 1.7$ , отсутствуют, в то время как в случае связанной задачи они не равны нулю. Это объясняется индуцированием их электромагнитным полем. Кроме того, следует отметить существенное количественное различие результатов для связанной и несвязанной задач.

Для сравнения построен алгоритм решения задачи о радиальных колебаниях электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа. Сравнение этих результатов с аналитическим решением показало их практическое совпадение.

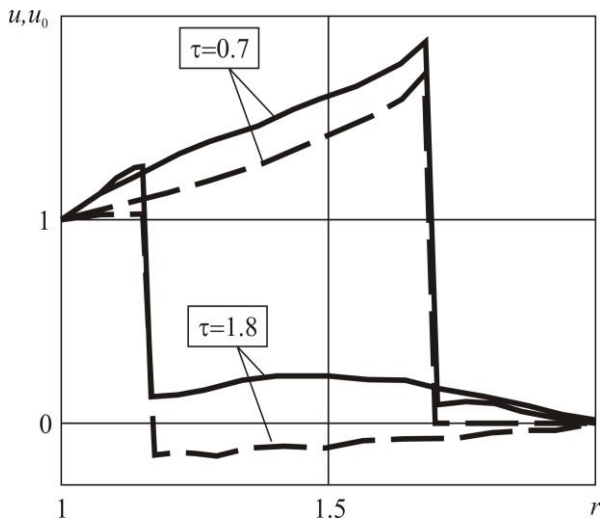


Рис. 11

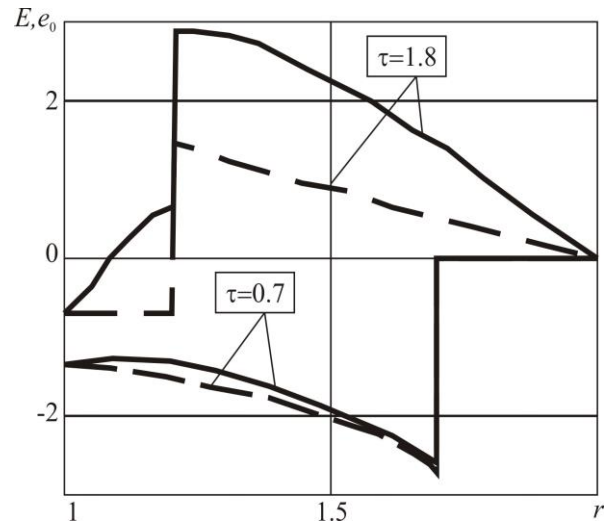


Рис. 12

В главах 4 и 5 рассматриваются геометрически частные случаи исследованной в главе 3 задачи – нестационарное осесимметричное движение электромагнитоупругих пространства со сферической полостью и шара радиусов  $r_0$  и  $r_1$  соответственно. Принципиально решение для этих двух вариантов может быть получено предельными переходами от результатов главы 3 при  $r_0 \rightarrow \infty$  и  $r_1 \rightarrow 0$ . Однако, как оказалось, этот подход очень громоздок и в силу этого не гарантирует достоверные результаты. Поэтому задачи для пространства с полостью и для шара рассматриваются независимо. Соответствующие предельные переходы выполняются по ходу решений для проверки правильности результатов. Подходы к решению этих двух задач подобны использованным методам для толстостенной сферы. Поэтому далее акцентируем внимание, в основном, на специфических моментах.

В главе 4 поверхностные возмущения принимаются следующими:

$$u|_{r=r_0} = U_0(\tau, \theta), v|_{r=r_0} = V_0(\tau, \theta), E_\theta|_{r=r_0} = e_{00}(\tau, \theta) \text{ (или } E_r|_{r=r_0} = e_{r00}(\tau, \theta)). \quad (4.1)$$

Так же, как и ранее, предполагается, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  среда находится в невозмущённом состоянии, а начальное электромагнитное поле имеет вид:  $E_{0r} = E_0(r)$ ,  $E_{0\theta} \equiv 0$ ,  $H_0 \equiv 0$ . Граничное условие на внешней поверхности сферы заменяется требованием ограниченности решения.

Для решения соответствующей начально-краевой задачи используются те же разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и по полиномам Гегенбауэра, а также преобразование Лапласа по времени. Остаются в силе соотношения (3.2) – (3.6). Добавляется требование ограниченности изображений, и изменяются граничные условия (3.7), (3.8):

$$u_n^L|_{r=r_0} = U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0), v_n^L|_{r=r_0} = V_{0n}^L(s), l_{r1}(rH_n^L)|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_{00}^L \quad (n \geq 1), \quad (4.2)$$

$$l_{r1} \left( rH_n^L \right) \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_{00}^L \quad (n \geq 1) \quad (\text{или } n(n+1)r^{-1}H_n^L \Big|_{r=r_0} = -\eta_e^2 h_{r0}^L \quad (n \geq 1)), \quad (4.3)$$

Далее решения краевых задач при каждом  $n$  также представляются в виде рядов по малому параметру вида (2.6). В результате приходим к рекуррентным по  $m$  последовательностям уравнений (3.9) - (3.16) для ограниченных функций с граничными условиями

$$u_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = \delta_{0m} U_{0n}^L(s) \quad (n \geq 0), v_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = \delta_{0m} V_{0n}^L(s) \quad (n \geq 1); \quad (4.4)$$

$$l_{r1} \left( rH_{n0}^L \right) \Big|_{r=r_0} = -\delta_{0m} \eta_e^2 h_{00}^L \quad (\text{или } n(n+1)H_{n0}^L \Big|_{r=r_0} = -\delta_{0m} \eta_e^2 r_0 h_{r00}^L \quad (n \geq 1)). \quad (4.5)$$

По аналогичным соображениям полагаем  $U_0(\theta, \tau) \equiv 0, V_0(\theta, \tau) \equiv 0$ , что приводит к тривиальному решению при  $m=0$ . Для коэффициентов перемещений используются интегральные представления (3.19) и (3.20), в которых под верхним пределом интегрирования понимается  $\infty$ . При этом их ядра - функции Грина, т.е. ограниченные решения краевых задач:

$$s^2 G_{uu00}^L = l_{110} \left( G_{uu0k}^L \right) + \delta(r - \xi), G_{uu0}^L \Big|_{r=r_0} = 0; \quad (4.6)$$

$$s^2 G_{uum}^L = l_{11n} \left( G_{uum}^L \right) + l_{12n} \left( G_{vum}^L \right) + \delta(r - \xi), s^2 G_{vum}^L = l_{21n} \left( G_{uum}^L \right) + l_{22n} \left( G_{vum}^L \right), \quad (4.7)$$

$$G_{uum}^L \Big|_{r=r_0} = G_{vum}^L \Big|_{r=r_0} = 0;$$

$$s^2 G_{uvn}^L = l_{11n} \left( G_{uvn}^L \right) + l_{12n} \left( G_{vvn}^L \right), s^2 G_{vvn}^L = l_{21n} \left( G_{uvn}^L \right) + l_{22n} \left( G_{vvn}^L \right) + \delta(r - \xi), \quad (4.8)$$

$$G_{uvn}^L \Big|_{r=r_0} = G_{vvn}^L \Big|_{r=r_0} = 0.$$

Также модифицируются равенства (3.24): (здесь используется первое граничное условие в (4.5)):

$$H_{nm}^L(r, s) = -\eta_e^2 s \int_{r_0}^{\infty} G_{Hn}^L(r, \xi, s) l_H \left[ u_{nm}^L(\xi, s), v_{nm}^L(\xi, s) \right] - \delta_{0m} \eta_e^2 (s + \gamma) G_{Hn0}^L(r, s) e_{00n}^L(s). \quad (4.9)$$

Здесь функции Грина - ограниченные решения следующих краевых задач:

$$\Delta_n G_{Hn}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn}^L = \delta(r - \xi), l_{r1} \left( rG_{Hn}^L \right) \Big|_{r=r_0} = 0; \quad (4.10)$$

$$\Delta_n G_{Hn0}^L - s_e^2 \eta_e^2 G_{Hn0}^L = 0, l_{r1} \left( rG_{Hn0}^L \right) \Big|_{r=r_0} = 1. \quad (4.11)$$

По таким же соображениям, как и в главе 3, далее используются квазистатические аналоги этих функций (3.27) и (3.28), в которых необходимо провести следующие замены:

$$\tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) = -\frac{\beta_n(r_0, r)}{n(2n+1)\xi^{n+1}r^{n+1}}, G_{Hn0}^c(r) = -\frac{r_0^{n+2}}{nr^{n+1}}. \quad (4.12)$$

Показано, что эти же результаты также следуют из (3.27) и (3.28) при  $r_1 \rightarrow \infty$ .



Построены решения тех же, как и в главе 3, трех вариантов задач об определении электромагнитного поля в пространстве со сферической полостью по заданному полю перемещений. Дополнительно рассмотрен вариант равноускоренного поступательного движения среды.

Объемные функции Грина для перемещений имеют те же структуры (3.29), (3.30). Метод определения коэффициентов этих равенств, в основном, сохраняется. Но дополнительно используются доказанные в приложении асимптотические свойства ФСР при  $r \rightarrow \infty$ . Проверка правильности решения проведена с помощью рассмотрения частного случая при  $n = 0$ , а также предельным переходом от функций Грина для толстостенной сферы при  $r_1 \rightarrow \infty$ .

Определение оригиналов функций Грина проводится подобно главе 3. Существенное упрощение заключается в том, что в равенствах типа (3.32) знаменатель является не экспоненциальным, а обычным многочленом.

В качестве примера рассмотрена полость радиуса  $r_0 = 1$ . Результаты расчетов при  $\eta = 2,04$  приведены на рис. 13 и 14. На первом из них изображены графики распределения функций влияния  $G_{uu1}$ ,  $G_{vu1}$ ,  $G_{uv1}$  и  $G_{vv1}$  по радиусу  $r$  при  $\xi = 1,5$ ,  $\tau = 2$ : сплошная кривая соответствует функции  $G_{uu1}$ , штриховая -  $G_{uv1}$ , штрихпунктирная -  $G_{vu1}$ , штрихпунктирная с двумя точками -  $G_{vv1}$ . Второй из них иллюстрирует зависимость функции  $G_{uu1}$  от времени при  $r = 2$ ,  $\xi = 1,5$  и различных значениях  $n$ : сплошная кривая соответствует  $n = 0$ , штриховая -  $n = 1$ , штрихпунктирная -  $n = 2$ , штрихпунктирная с двумя точками -  $n = 3$ .

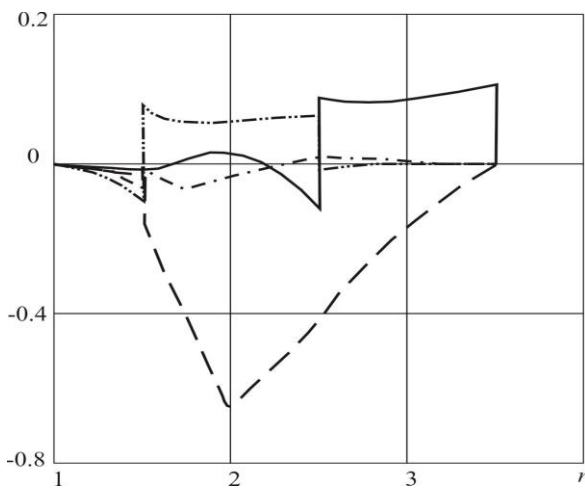


Рис. 13

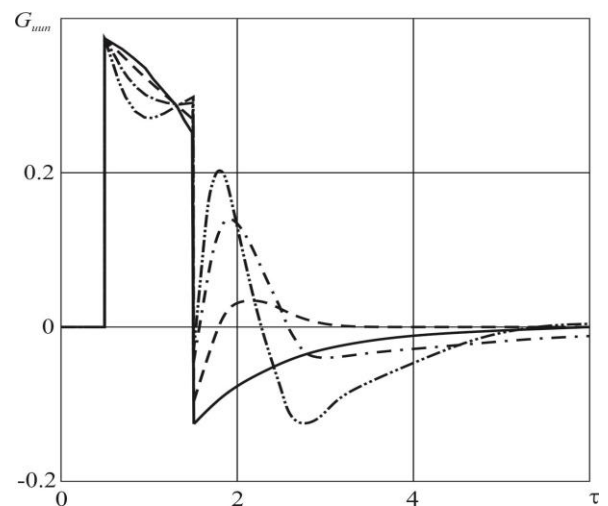


Рис. 14

Далее получено решение вспомогательной задачи об осесимметричном движении упругого полупространства со сферической полостью под действием объемных сил. Рассмотрен пример для сил вида

$$F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau)\delta(r - r_*)\cos\theta, \quad F_\theta(r, \theta, \tau) = -H(\tau)\delta(r - r_*)\sin\theta,$$

что, как показано, соответствует поступательному движению  $u = u_1(r, \tau) \cos \theta$ ,  $v = v_1(r, \tau) \sin \theta$ .

Результаты расчетов при  $r_* = 3$  для тех же механических и геометрических характеристик, как и выше, приведены на рис. 15 и 16. На первом из них представлены графики распределения функций  $u_1$  и  $v_1$  по радиусу: сплошная и пунктирная кривые соответствуют перемещениям  $u_1(r, 3)$  и  $v_1(r, 3)$ , а штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками -  $u_1(r, 5)$  и  $v_1(r, 5)$  соответственно. Второй из них иллюстрирует зависимость  $u_1$  и  $v_1$  от времени: сплошная и пунктирная кривые соответствуют перемещениям  $u_1(2, \tau)$  и  $v_1(2, \tau)$ , а штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками -  $u_1(5, \tau)$  и  $v_1(5, \tau)$  соответственно.

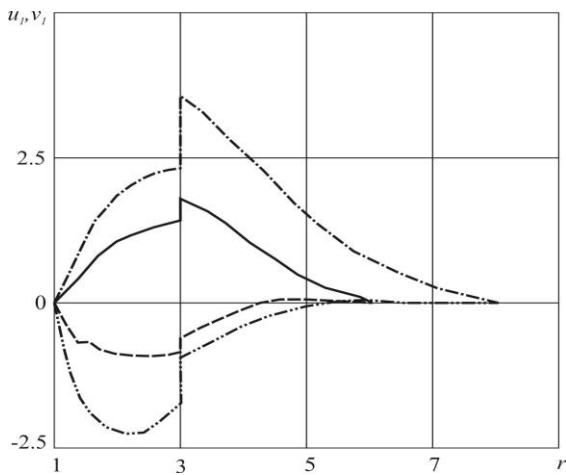


Рис. 15

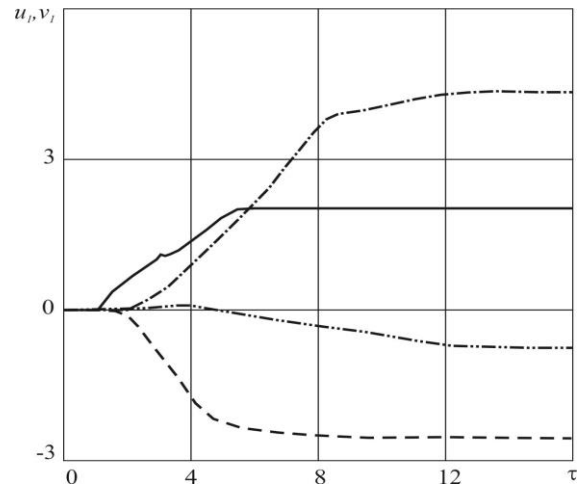


Рис. 16

Последние два параграфа этой главы посвящены решению связанной задачи для электромагнитоупругого пространства со сферической полостью. В целом, алгоритм решения аналогичен тому, что разработан в главе 3.

В качестве примера осесимметричной задачи рассмотрено полупространство с полостью радиуса  $r_0 = 1$ , материал которого характеризуется параметрами  $\eta = 2,04$ ;  $\eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma = 5,06$ ;  $\alpha = 0,0806$ , под действием следующего начального электрического поля:  $E_0 = 1$ ,  $\rho_{0e} = 2/r$ . На границе полости напряженность электрического поля имеет вид:  $e_{00} = -\tau_+ \sin \theta$ .

Распределение по радиусу нетривиальных коэффициентов рядов по полиномам при  $n = 1$  для нормального перемещения и напряженности магнитного поля представлены на рис. 17, 18: сплошные кривые соответствуют  $\tau = 1$ , пунктирные -  $\tau = 3$ , а штрихпунктирные  $\tau = 5$ . Расчеты проводились с учетом первых трех членов рядов (2.6). Вычисление последующего члена практически не приводило к изменению результатов.

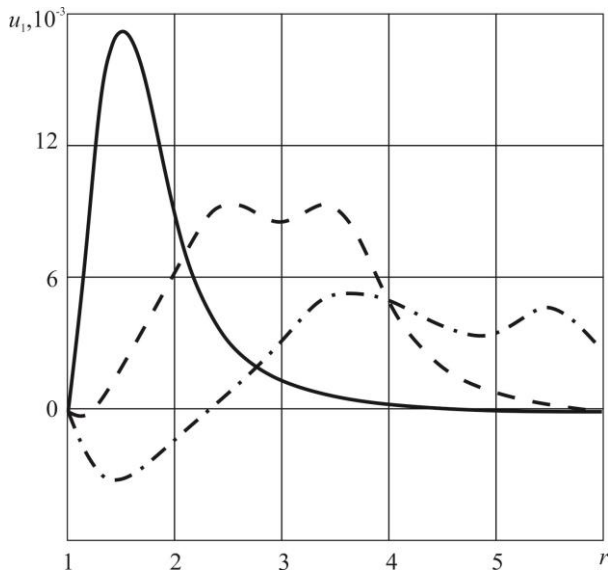


Рис. 17

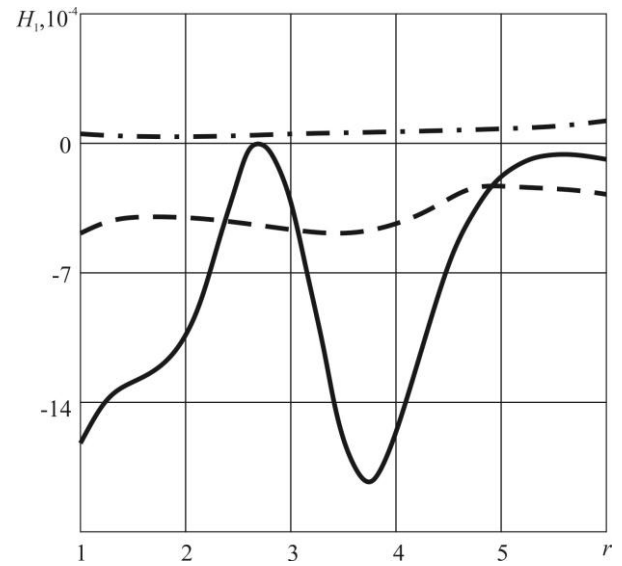


Рис. 18

На рис. 19, 20 приведены результаты расчетов для варианта радиальных колебаний пространства с полостью с параметрами из (3.37) в виде зависимостей радиального перемещения от времени соответственно при  $r = 1,5$  и  $r = 2$ : сплошные кривые отвечают нулевому приближению, штриховые – двум членам ряда по малому параметру, штрихпунктирные – трем членам. Вычисление последующих членов ряда приводит к практическому совпадению последующих кривых со штрихпунктирной кривой.

В главе 5 исследуются связанные осесимметричные электромагнитно-упругие процессы в шаре радиуса  $r_1$ . Материал главы методически за исключением рассмотрения радиальных колебаний практически соответствует главе 4. При этом граничные условия (4.1) заменяются равенствами

$$u|_{r=r_1} = U_1(\tau, \theta), v|_{r=r_1} = V_1(\tau, \theta), E_\theta|_{r=r_1} = e_{01}(\tau, \theta). \quad (5.1)$$

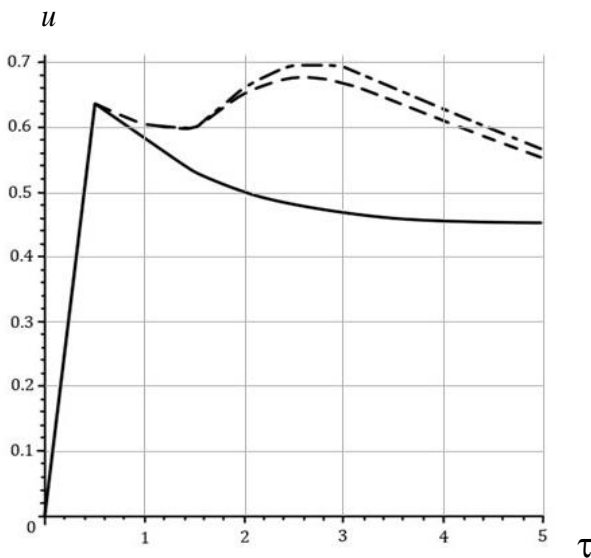


Рис. 19

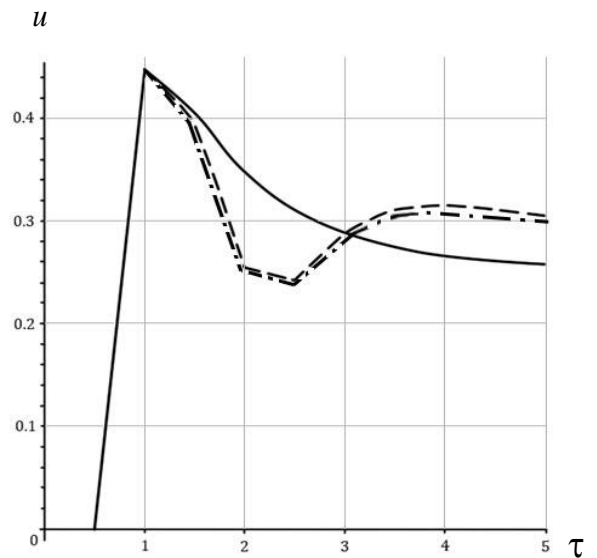


Рис. 20

Остается в силе требование ограниченности решения. В соответствующих интегральных представлениях интегрирование ведется от 0 до  $r_1$ . На протяжении всей главы проводится сравнение с предельным переходом при  $r_0 \rightarrow 0$  для результатов, полученных в главе 3.

Аналогично главам 3 и 4 получено аналитическое решение задачи об определении электромагнитного поля в шаре по заданному полю перемещений. Приведены примеры для различных законов движения.

Объемные функции Грина для перемещений имеют структуры (3.29), (3.30). Вызванное геометрией области отличие состоит в необходимости использования доказанных в приложении асимптотических свойств ФСР при  $r \rightarrow 0$ . При оригиналов функций Грина аналогично главе 3 используется разложения в ряды по экспонентам. Однако структура результата здесь значительно проще, чем в главе 3. Однако здесь возникает вопрос о значениях функций Грина как ядер интегральных представлений в центре шара и при  $\xi = 0$ . Показано, что имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} G_{uum}(0, \xi, \tau) &= G_{vum}(0, \xi, \tau) = G_{uvm}(0, \xi, \tau) = G_{vvm}(0, \xi, \tau) = \\ &= G_{uum}(r, 0, \tau) = G_{vum}(r, 0, \tau) = G_{uvm}(r, 0, \tau) = G_{vvm}(r, 0, \tau) = 0 \quad (n \neq 1); \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$G_{uu1}(0, \xi, \tau) = -G_{vu1}(0, \xi, \tau) = \xi^2 \tilde{G}_{u1}(\xi, \tau), \quad (5.3)$$

$$G_{uv1}(0, \xi, \tau) = -G_{vv1}(0, \xi, \tau) = 2\xi^2 \tilde{G}_{v1}(\xi, \tau).$$

Последние равенства объясняются тем, что шар может двигаться как абсолютно твердое тело.

Найден явный вид функций  $\tilde{G}_{u1}$  и  $\tilde{G}_{v1}$ . С его помощью доказаны равенства

$$\begin{aligned} G_{uu1}(0, 0, \tau) &= G_{vu1}(0, 0, \tau) = G_{uv1}(0, 0, \tau) = G_{vv1}(0, 0, \tau) = 0, \\ \tilde{G}_{u1}^L(\xi, s), \tilde{G}_{v1}^L(\xi, s) &= O(\xi^{-1}), \quad \xi \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

которые используются при вычислении интегралов в представлении перемещений.

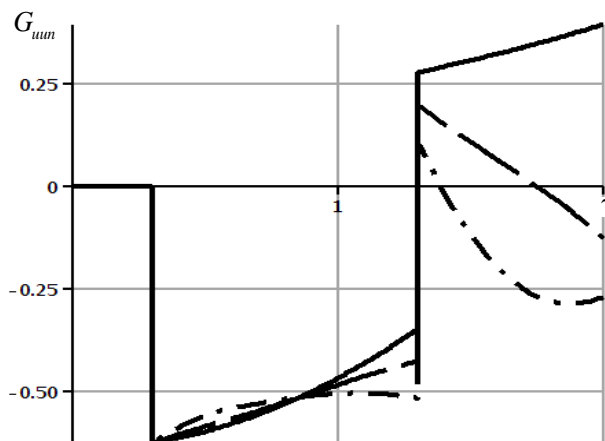


Рис. 21

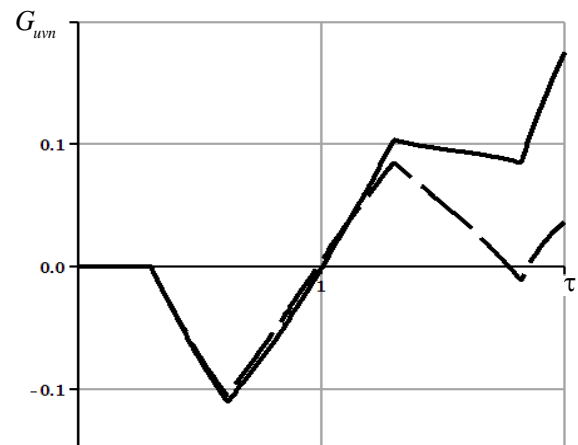


Рис. 22

На рис. 21 и 22 приведены зависимости функций  $G_{u_{nn}}$  и  $G_{v_{nn}}$  от времени при  $\eta = 2,04$ ,  $r_* = 2$ ,  $\xi = 1,5$  и  $r = 1,2$ : на рис. 21 сплошная кривая соответствует  $n = 0$ , штриховая -  $n = 1$ , штрихпунктирная  $n = 2$ ; на рис. 22 сплошная кривая соответствует  $n = 1$ , штриховая -  $n = 2$ .

Построено также решение задачи об осесимметричном движении упругого шара под действием объемных сил при наличии абсолютно жесткой ободки на поверхности. Рассмотрены примеры для трех вариантов сил: а) сосредоточенная на внутренней сфере радиальная сила; б) равномерно распределенная по радиусу радиальная сила; в) сила направлена по оси  $\theta = 0$ :  $F_r = H(\tau)\cos\theta$ ,  $F_\theta = -H(\tau)\sin\theta$ .

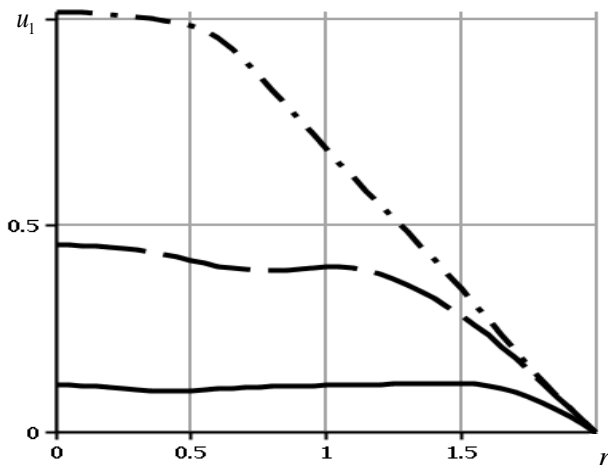


Рис. 23

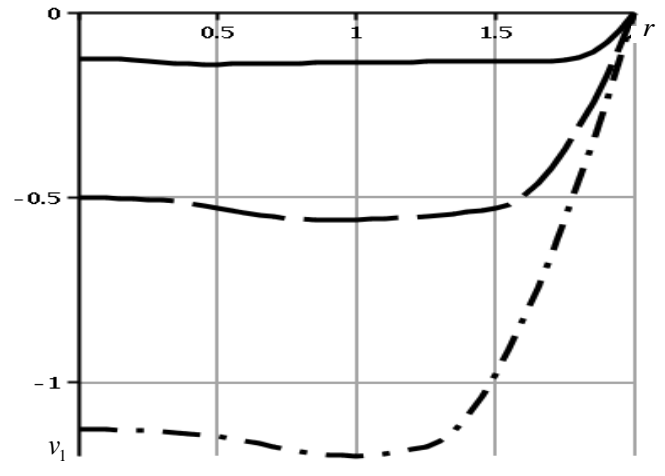


Рис. 24

Последний вариант соответствует поступательному движению  $u = u_1(r, \tau)\cos\theta$ ,  $v = v_1(r, \tau)\sin\theta$ . Для него на рис. 23 и 24 при  $\eta = 2,04$  и  $r_* = 2$  представлены распределения по координате  $r$  функции  $u_1$  и  $v_1$ : сплошная кривая соответствует моменту времени  $\tau = 0.5$ , штриховые -  $\tau = 1$ , а штрихпунктирные -  $\tau = 1.5$ .

В последнем параграфе этой главы исследована связанная задача для электромагнитоупругого шара. В целом, алгоритм решения аналогичен разработанным в главах 3 и 4. В качестве примера рассмотрен шар радиуса  $r_1 = 2$ , материал которого характеризуется параметрами  $\eta = 2,04$ ;  $\eta_e = 0,111 \cdot 10^{-4}$ ;  $\gamma = 5,06$ ;  $\alpha = 0,0806$ , под действием следующего начального электрического поля:  $E_0 = 1$ ,  $\rho_{0e} = 2/r$ . На границе полости напряженность электрического поля имеет вид:  $e_{00} = -\tau_+ \sin\theta$ .

Результаты расчетов представлены на рис. 25 и 26. На них изображены графики коэффициентов радиальных перемещений и радиальной компоненты напряжённости электрического поля в зависимости от радиуса. При этом

сплошная линия отвечает моменту  $\tau = 0,2$ , штриховая -  $\tau = 0,3$ , штрихпунктирная -  $\tau = 0,4$ .

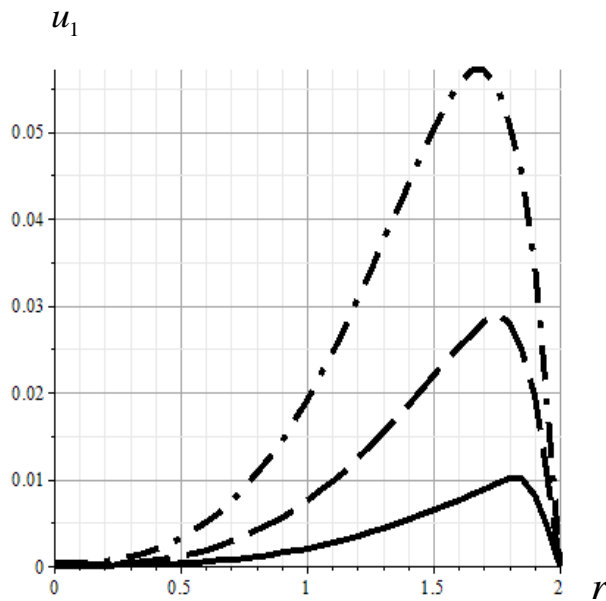


Рис. 25

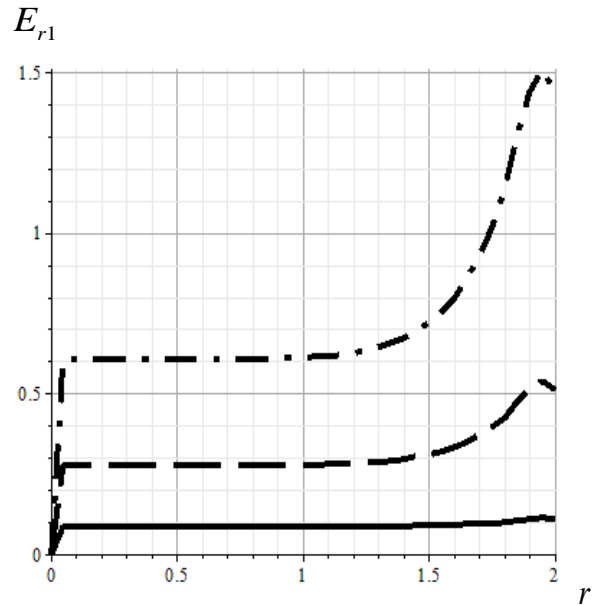


Рис. 26

В приложении приведены таблицы некоторых не вошедших в широко известные справочники оригиналов изображений преобразований Лапласа, одномерного экспоненциального преобразования Фурье и совместного преобразования Лапласа и Фурье. Все формулы сопровождается необходимыми выкладками. В том числе, обнаружены неточности в строке № 29.144 книги Диткин В.А., Прудников А.П. - Справочник по операционному исчислению.- М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.

Приведены ФСР нестационарных уравнений электродинамики и теории упругости в пространстве преобразований Лапласа по времени в сферической системе координат для осесимметричного движения и в прямоугольной декартовой системе координат. Найдена связь общих решений уравнений теории упругости в перемещениях с решениями уравнений для объемного расширения и ненулевой компоненты вектора вращения.

Для осесимметричного движения установлена связь функций из ФСР с элементарными функциями. Изучены свойства вронскианов нестационарных уравнений электродинамики и теории упругости, в том числе их выражения через элементарные функции. С использованием этих результатов получены явные формулы для миноров используемой в диссертации матрицы граничных условий для упругой части связанной задачи. Изучены асимптотические свойства функций из ФСР в окрестности нуля и бесконечности.

Доказаны утверждения об обобщенной симметрии функций Грина для электродинамики и теории упругости, из которых вытекают их структуры (3.27), (3.29) и (3.30).

**Следствие П.6.1.** Функция Грина  $G(r, \xi)$  как решение краевой задачи ( $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}$ )

$$r^{-2} \left[ (r^2 G')' + \beta G \right] + \alpha G = \delta(r - \xi),$$

$$(a_k u + b_k u') \Big|_{r=r_k} = 0, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad a_k^2 + b_k^2 \neq 0 \quad (k = 0, 1),$$

обладает следующей симметрией:

$$G(r, \xi) = \xi^2 G_*(r, \xi), \quad G_*(r, \xi) = G_*(\xi, r).$$

**Утверждение П.6.2.** Пусть матрица

$$\mathbf{G}_n(r, \xi, s) = \begin{pmatrix} G_{uun}^L(r, \xi, s) & G_{uvn}^L(r, \xi, s) \\ G_{vun}^L(r, \xi, s) & G_{vvn}^L(r, \xi, s) \end{pmatrix}$$

есть решение краевой задачи ( $s \in \mathbb{C}$ )

$$(\mathbf{L}_n - s^2 \mathbf{E}) \mathbf{G}_n + \mathbf{E} \delta(r - \xi) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_n \Big|_{r=r_0, r_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{L}_n = (l_{ijn})_{2 \times 2},$$

где  $l_{ijn}$  - определенные в (3.4) операторы,  $\mathbf{E}$  - единичная матрица.

Тогда ее элементы она обладают следующей симметрией:

$$\xi^2 G_{uun}(\xi, \zeta, s) = \zeta^2 G_{uun}(\zeta, \xi, s), \quad \xi^2 G_{vvn}(\xi, \zeta, s) = \zeta^2 G_{vvn}(\zeta, \xi, s),$$

$$\xi^2 G_{uvn}(\xi, \zeta, s) = m \zeta^2 G_{vun}(\zeta, \xi, s).$$

### Заключение

1. Дана общая математическая постановка задач нестационарной связанной термоэлектромагнитоупругости анизотропных тел. Из нее как частный случай получены начально-краевые задачи для изотропных проводников.

2. Предложен и реализован основанный на использовании малого параметра метод решения класса нестационарных связанных двумерных задач в прямоугольной декартовой и сферической системе координат.

3. Получены решения новых нестационарных связанных плоских задач электромагнитоупругости для полупространства.

4. Получены решения новых нестационарных связанных осесимметричных задач электромагнитоупругости для толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара.

5. Построены нестационарные поверхностные и объемные функции Грина для электромагнитной и упругой полуплоскостей.

6. Доказаны утверждения о структуре нестационарных осесимметричных объемных функций функции Грина в сферической системе координат.

7. Построены нестационарные объемные функции Грина для электромагнитных и упругих толстостенной сферы, пространства со сферической полостью и шара.

8. Получено решение нестационарных двумерных задач для тел указанной геометрии о деформировании под действием объемных сил и об определении электромагнитного поля по заданным перемещениям.

### **Основные публикации по теме диссертации**

#### **Публикации в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК**

1. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое. // Доклады РАН, 2009. - Т. 426, №6 - С. 747 - 749. = Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskiy D.V. One-dimensional time-dependent waves in an electromagnetoelastic half-space or in a layer // DOKLADY PHYSICS. — 2009. — V. 54. — Issue 6. — P. 262—264.
2. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Доклады РАН, 2010. - Т. 434, № 2 - С. 186 - 188. = Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii, D. V. The propagation of time-dependent radial perturbations from a spherical cavity in an electromagnetoelastic space // DOKLADY PHYSICS. — 2010. — V. 55. — Issue 9. — P. 468 — 470.
3. Вестяк В.А., Садков А.С., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ, 2011.- № 2.- С. 130-140. Перевод: V.A. Vestyak, A.S. Sadkov, D.V. Tarlakovskii Propagation of Unsteady Bulk Perturbations in an Elastic Half-Plane // Mechanics of Solids, 2011, Vol. 46, No. 2, pp. 266–274.
4. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 4. С. 16 – 21.
5. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругой полуограниченной среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. № 4. Ч. 4. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – С. 1423-1424.
6. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Терлецкий Р.Ф., Тарлаковский Д.В. Упругая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных кинематических возмущений // Математические методы и физико-механические поля - 2013.- Т.56, № 2. – С. 164 -172. = Vestyak V.A., Nachkevych A.R., Tarlakovskii D.V., Terletskii. R.F. Elastic Half Plane Under the Action of Nonstationary Surface Kin-



ematic Perturbations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 203, Issue 2. - P. 202-214.

7. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Вып. 9. – 2014, № 1. - С. 51 - 64.

8. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Доклады академии наук. - 2015. - Т. 460, № 3 - С. 279 - 282. = Vestyak V.A., Tarlakovsky D.V. Integrated Representation of the Characteristics of an Unsteady Electromagnetic Field in a Moving Half-Plane // Doklady Physics. - 2015, Vol. 60, No. 1. - P. 1–4.

9. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущемся шаре // Доклады академии наук. - 2015. - Т. 464, № 5. - С. 544–547. = Vestyak V.A., Tarlakovsky D.V. A Nonstationary Axially Symmetric Electromagnetic Field in a Moving Sphere // Doklady Physics. – 2015, Vol. 60, No. 10. - P. 433–436.

10. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в деформирующейся сферической оболочке // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. - 2015. - Т. 157, кн. 4. - С. 90-95.

11. Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovsky D.V. Electromagnetic fields in movings space with spherical enclosure // Materials physics and mechanics (MPM), 2015, V. 23, No 1. P. 31-35.

12. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56, № 6. – С. 59-69. =: V.A. Vestyak, D.V. Tarlakovskii Unsteady Axisymmetric Deformation of an Elastic Thick-Walled Sphere Undter the Action of Volume Forces // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. - 2015, Vol. 56, No. 6. - P. 984–994.

13. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2016, №4.- С. 48-54.

#### **Публикации в других изданиях**

1. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Филатов П.А. Нестационарные одномерные задачи для электромагнитоупругой среды // Вторая Всерос. научн. конф. по волновой динамике машин и констр. Тез. докл. – Н. Новгород, 2007. - С. 18.

2. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Филатов П.А. Нестационарные радиальные возмущения от сферической полости в электромагнитоупругой среде // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. VII Междунар. научн. шк.-сем. (21-25 авг. 2007). - Николаев: КП «Николаевская областная типография», 2007. – С. 29-30.
3. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Распространение нестационарных радиальных возмущений от цилиндрической полости в электромагнитоупругой среде. // Материалы XIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, 2008, Том 1, С. 59-60.
4. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Плоские нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Сучасні проблеми механіки та математики. Т.1. – Львів, 2008. – С. 65 - 67.
5. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды Междунар. конф. Т. 2. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. - С. 58 - 65.
6. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для электромагнитоупругой полуплоскости // Материалы XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. - М.: «Типография «ПАРАДИЗ», 2009. – С. 43 - 44.
7. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные колебания электромагнитоупругой толстостенной сферы // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. Конф. (17-21 авг. 2009). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. – С. 23 - 25.
8. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Радиальные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Материалы XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. - М.: «Типография «ПАРАДИЗ», 2009. - С. 43.
9. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций – Днепропетровский национальный университет. – Днепропетровск: ІМА-пресс, 2009. – Вып. 13. – С.24-30.
10. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Импульсные

- процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. (17-21 авг. 2009). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2009. – С. 26 - 27.
11. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: ІМА-прес. – 2009. – Вип. 10. – С. 57 – 62.
12. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных возмущений в электромагнитоупругой полуплоскости // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Матер. междунар. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ В.А. Садовниченко. – М.: Изд-во «Университетская книга», 2009. – С. 270.
13. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные объемные возмущения в пространстве со сферической полостью // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2010. – Вип. 11. – С. 49 – 56.
14. Вестяк А.В., Вестяк В.А., Садков А.С., Терлецкий Р.Ф. Обращение совместного преобразования Фурье и Лапласа в задачах о распространении волн в упругом изотропном пространстве или полупространстве // Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. - Чебоксары.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. - С. 25 - 27.
15. Вестяк В., Гачкевич О., Мусій Р., Тарлаковский Д., Шимчак Ю. Проблеми математичного моделювання фізико-механічних процесів в електропровідних тілах за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. - Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 21 – 23.
16. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. - Чебоксары.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010. - С. 27 - 29.
17. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Осесимметричные нестационарные объемные возмущения в упругой толстостенной сфере // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. - Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 23 – 25.
18. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой среде со сферическими границами // Матер. XVII Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – М.: ООО «ТР-принт», 2011. - С. 19 - 20.

19. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Плоское нестационарное электромагнитное поле в движущемся полупространстве // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. IX Междунар. научн. конф. (15-19 авг. 2011). - Николаев: КП «Мколаївська обласна друкарня», 2011. – С. 51-55.
20. Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарные процессы в электромагнитоупругих и термодиффузионных средах // V сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела: тез. докл. Всеросс. конф. 31 мая - 5 июня 2011 г., Астрахань, Россия. - Астрахань: Изд-во АГТУ, 2011. - С. 41-42.
21. Вестяк В.А., Мусий Р.С., Тарлаковский Д.В. Электромагнитоупругая полуплоскость под действием заданного на границе нестационарного электрического поля // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки - 2011». Матеріали конференції. Т. 1. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ. – 2011. – С. 117 – 119.
22. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущейся толстостенной сфере // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2011. – Вип. 12. – С. 33 – 39.
23. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные волны в электромагнитоупругой полуплоскости // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 16 – 25 апреля 2012, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2012. - С. 147-148.
24. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных объемных возмущений в толстостенной упругой сфере // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТР-принт", 2012.- С. 18-19.
25. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости под действием поверхностных возмущений // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. - Дніпропетровськ: Ліра, 2012. - Вип. 19. - С. 34-40.
26. Вестяк Владимир, Тарлаковский Дмитрий Нестационарные волны в электромагнитоупругих телах // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача. – 2012. - С. 22 – 25.
27. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Нестационарные процессы в электромагнитоупругой полуплоскости // – Материалы XIX Международ-

ного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО "ТР-принт", 2013. - С. 17-18.

28. Вестяк В.А., Гачкевич А.Р., Тарлаковский Д.В. Интегральное представление нестационарного электромагнитного поля в движущейся толстостенной сфере // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. X Междунар. научн. конф. (19-22 авг. 2013). - Николаев: КП «Миколаївська обласна друкарня», 2013. – С. 32-35.

29. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Объемные нестационарные функции Грина для упругой толстостенной сферы // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тез. докл. Междунар. научн. конф., 23-26 авг. 2013, г. Одесса. - Одеса: «Астропринт», 2013. – С. 37-38.

30. Вестяк В.А., Малашкин А.В., Тарлаковский Д.В. Применение численного обращения преобразования Лапласа при исследовании нестационарных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы // Сучасні проблеми механіки та математики. Т. 1. – Львів, ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – С. 80 - 82.

31. Вестяк В.А., Малашкин А.В., Тарлаковский Д.В., Терлецкий Р.Ф. Исследование осесимметричных нестационарных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферической оболочки с использованием численного обращения преобразования Лапласа // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: материалы междунар. науч. конф., 16-20 сент. 2013 г., г. Минск, Беларусь. - Минск: Изд. центр БГУ, 2013. С. 67-69.

32. Вестяк Владимир, Тарлаковский Дмитрий Нестационарные функции Грина для электромагнитной толстостенной сферы // Математические проблемы механики неоднородных структур. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2014. – С. 26-28.

33. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Возбуждение нестационарного электромагнитного поля в движущемся плоскопараллельно полупространстве // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (Чебоксары, 16-21 июня 2014 г.). Ч. 1. - Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2014. - С. 90 - 93.

34. Вестяк В.А., Федотенков Г.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619484. Модифицированный метод численного обращения преобразования Лапласа. Заявка № 2014615555. Дата государственной регистрации 17.09.2014.

35. Dimitriy V. Tarlakovskii, V.A. Vestyak and A.V. Zemskov Dynamic Processes in Thermoelastomagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // In: Encyclope-

dia of Thermal Stresses. V. 2. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – P. 1064-1071.

36. Вестяк В.А. Нестационарные колебания упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // Строительство и восстановление искусственных сооружений : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2015. - С. 376 - 378.

37. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Связанные нестационарные колебания электромагнитопругих тел со сферическими границами // XI Всерос. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. мех. Аннот. докл. (Казань, 20 – 24 авг. 2015 г.). – Казань: Изд-во АН РТ, 2015. – С. 62.

38. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Связанные нестационарные колебания электромагнитопругих тел со сферическими границами // XI Всерос. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. мех.: сб. трудов (Казань, 20 – 24 авг. 2015 г.). – Казань: Изд-во Казанского (Приволжского) федерального ун-та, 2015. – С. 749 – 751.

39. Вестяк В.А., Федотенков Г.В. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщённых функций, образующих алгебру со свёрткой // М., Прикладная математика и математическая физика, 2015, том 1, № 1, С. 67-76.

40. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарные объёмные функции Грина для упругого шара // Упругость и неупругость: Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 105-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (Москва 20-21 января 2016 г.). – М.: Издательство Московского Университета, 2016. – С. 286-288.

41. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Действие на упругий шар нестационарных осесимметричных объёмных сил // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике»: сборник тезисов. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. - С. 125 - 128.