

УДК 539.3

Динамическая термоупругость в проблеме теплового удара на основе обобщенного уравнения энергии

Э. М. Карташов, Е. В. Ненахов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) «МАИ», Москва;
e-mail: kartashov@mihht.ru, newnew94@mail.ru

Поступила в редакцию 10.10.2018

Исследована проблема теплового удара при резком охлаждении поверхности твердого (массивного) тела в терминах динамической термоупругости на основе обобщенного уравнения энергии – уравнения нестационарной теплопроводности гиперболического типа с учетом конечной скорости распространения теплоты. Изучены различные режимы внезапного охлаждения: температурный, тепловой, средой, приводящие к появлению во внутренних сечениях твердого тела напряжений растяжения, в отличие от аналогичных случаев внезапного нагрева, создающих напряжения сжатия. Найдены точные аналитические решения серии краевых задач динамической термоупругости, проведены численные эксперименты, описаны его особенности. Показано, что в твердом теле образуется два фронта волн – фронт упругой волны и фронт тепловой. В зависимости от соотношения скоростей их распространения упругая волна либо предшествует тепловой, либо отстает от нее. Проведено сравнение с классическим случаем динамической термоупругости при охлаждении. Показано, что в последнем случае наличие конечного теплообмена с поверхности твердого тела приводит к отсутствию разрывов температурных напряжений, в то время как для обобщенной динамической задачи характер напряжений остается таким же, как и при бесконечно большом значении коэффициента теплообмена (что означает наличие граничного условия первого рода – температурное охлаждение). При этом учет тепловой инерции в уравнении теплопроводности гиперболического типа и в граничном условии третьего рода приводит к уменьшению динамических температурных напряжений, но с увеличением теплообмена на поверхности твердого тела динамические температурные напряжения увеличиваются. Этим самым установлен наиболее опасный режим охлаждения – температурное охлаждение.

Ключевые слова: тепловой удар, конечная скорость распространения теплоты, динамические термоупругие напряжения, напряжения растяжения.

Введение

Проблема термического удара – одна из центральных в термомеханике, актуальность которой возросла в последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных твердых телах на основе классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах [1–3]

и в значительно меньшей степени с учетом конечной скорости распространения теплоты [4, 5]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрическими, магнитными) [4]; сформулированы определяющие соотношения линеаризированной теории с учетом тепловой памяти [6]; установлена связь микроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния и скоростью изменения их во времени [7]. Накоплено значительно количество публикаций, описывающих проблему теплового удара при резком нагреве твердых тел. Проведенные исследования этой проблемы выполнены

в основном для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. В соответствующих математических моделях в терминах динамических, квазистатических или статических задач термоупругости материал считается однородным и изотропным, термомеханические коэффициенты являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, и рассматриваемые разности температур не слишком велики, т. е. температура не превышает некоторого предельного значения, зависящего от материала, и напряжения не достигают границы текучести. Считается [3], что при относительно низком уровне температур и напряжений, поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в обзорах [8, 9] и книгах [3, 10]. В то же время практически открытым вопросом являются исследования термомеханической реакции твердых тел при резком охлаждении их поверхности, причем как в рамках уравнения теплопроводности параболического типа, так и на основе обобщенного уравнения энергии (уравнения гиперболического типа). Практическая ценность таких исследований очевидна, если учесть, например, что интенсивному тепловому воздействию (охлаждению и нагреву) подвергаются поверхности авиационно-космических аппаратов и пусковых установок. Настоящая публикация продолжает исследования в этой области и дает дальнейшее развитие указанной проблемы.

1. Математическая модель

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S , вектор, непрерывный на S ; $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M, t)$, $\xi_{ij}(M, t)$, $U_{ij}(M, t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}(M, t) &= \rho \ddot{U}_i(M, t), \\ \varepsilon_{ij}(M, t) &= (1/2) [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \\ \sigma_{ij}(M, t) &= 2G [\varepsilon_{ij}(M, t) + \nu / (1 - 2\nu) e(M, t) \delta_{ij} - \\ &\quad - (1 + \nu) / (1 - 2\nu) \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ij}], \end{aligned} \quad (1)$$

где $i, j = x, y, z$ и $e(M, t) = \varepsilon_{ij}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M, t) = \sigma_{ij}(M, t)$ соотношением

$$e(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (2)$$

К соотношениям (1) и (2) следует присоединить граничные условия $\sum_j \sigma_{ji}(M, t) n_j = f_i(M, t)^*$, $M \in S$, $t > 0$ на той части поверхности, где заданы напряжения, и граничные условия $U_i(M, t) = \varphi_i(M, t)$, $M \in S$, $t > 0$ на той части поверхности, где заданы перемещения. В (1) и (2) ρ – масса единицы объема материала; ν – коэффициент Пуассона; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; σ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль сдвига. Остановимся подробнее на температурной функции $T(M, t)$, входящей в (1). Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. В рамках классической феноменологии Фурье [2, 3] к ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи: температурный нагрев $T(M, t) = T_c (T_c > T_0)$, $M \in S$, $t > 0$; тепловой нагрев $\partial T(M, t) / \partial n = -(1/\lambda_T) q_0$, $M \in S$, $t > 0$ (λ_T – теплопроводность материала, q_0 – плотность теплового потока); нагрев средой $\partial T(M, t) / \partial n = h [T(M, t) - T_c]$, $M \in S$, $t > 0$ ($T_c > T_0$) (h – относительный коэффициент теплообмена). В равной степени могут быть рассмотрены и случаи (резкого) охлаждения. В последние годы усилился интерес к гиперболическим моделям теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты [3, 4, 6, 12–15]. В основе этого направления инженерной теплофизики лежит обобщенное феноменологическое соотношение Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта

$$\vec{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

приводящее к уравнению теплопроводности гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Краевые задачи для уравнения (4) получили название «обобщенные задачи нестационарной теплопроводности». Входящая в (4) величина τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты v_T соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Не останавливаясь подробно на теплофизических процессах, связанных с уравнением (4), заметим, что к их числу относятся высокоинтенсивные нестационарные процессы, время протекания которых сопоставимо со временем релаксации τ_r . Последнее как раз характерно для тепловых ударов, где инерционный эффект, отраженный в уравнении движения (1) и согласно [16] протекающий во времена микросекундной длительности, имеет существенное значение. В литературных источниках приводятся достаточно малые значения величины τ_r , в среднем для металлов, стекол и полимеров в интервале 10^{-11} – 10^{-5} с. Это вытекает из соотношения $\tau_r = a/v_T^2$, где под v_T понимается скорость распространения внутренней энергии в твердых телах, близкая к скорости звука. Считается, что опытные измерения τ_r во многих случаях не представляются возможными. Тем не менее, в последние десятилетия этому вопросу в теплофизике стало уделяться повышенное внимание, учитывая его большое значение для многих направлений науки и техники. Так, в работах [17, 18] приводятся опытные и расчетные данные, показывающие, что под v_T следует понимать скорость распространения тепловых волн, которая на несколько порядков меньше скорости звука. Тогда τ_r для твердых тел достигает значений от долей секунды до нескольких секунд. В работе [18] высказано предположение, что в телах с однородной структурой под v_T следует понимать скорость звука, а в телах с неоднородной – скорость распространения тепловых волн. По-видимому, вопрос о природе величины v_T требует продолжения исследования.

2. Уравнение совместности в напряжениях для динамических задач термоупругости. Постановка проблемы

Опуская длительные громоздкие выкладки (подробности в [10]), в соотношениях (1) для геометрических уравнений исключили компо-

ненты вектора перемещения, что дает уравнения совместности в деформациях; подставляя в эти уравнения соответствующие выражения деформаций через напряжения, получим основное уравнение совместности в напряжениях для динамических задач:

$$\begin{aligned} & (1 + \nu)\sigma_{ij,nn}(M,t) + \sigma_{nn,ji}(M,t) + \\ & + E\alpha_T \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (T(M,t) - T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T(M,t) - T_0)_{,ij} \right] = \\ & = \frac{(1+\nu)\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij}(M,t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{nn}(M,t) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(M,t) - T_0) \delta_{ij} \right], M \in D, t > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве применения соотношения (5) рассмотрим случай, имеющий большое значение для многих практических приложений [4–6, 10]. Упругое полупространство $z \geq 0$, первоначально находящееся при температуре T_0 , подвергается на границе различным режимам охлаждения, создающим тепловой удар, а именно: температурному охлаждению температурой T_c ($T_c < T_0$, температурная функция $T_1(z,t)$), либо тепловому охлаждению потоком теплоты q_0 (температурная функция $T_2(z,t)$), либо охлаждению средой температуры T_c ($T_c < T_0$, температурная функция $T_3(z,t)$). В этих условиях при одномерном движении величины $U_x = U_y = 0$; $U_z = U_z(z,t)$; $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$; $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z,t)$ напряжения $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z,t)$ для $i = j$. Уравнение (5) для свободной от напряжений границы тела приводит к следующей динамической задаче термоупругости

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$z > 0, t > 0, (i = 1, 2, 3);$$

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z,t)|_{z=\infty} = 0, \quad t > 0; \quad (8)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (9)$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (1) и (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(z,t) &= \sigma_{yy}(z,t) = \\ &= \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T}{1-\nu} [T_i(z,t) - T_0], \end{aligned} \quad (10)$$

при этом

$$\epsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T_i(z,t) - T_0]. \quad (11)$$

Уравнение (6) впервые получила В. И. Даниловская непосредственно из соотношений (1), (2) и независимо от нее Т. Мура (ссылки в [10]), который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской.

Температурная функция $T_i(z, t)$, входящая в (6)–(11), есть решение задачи:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad \left. \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0, \quad (13)$$

$$T_1(z, t)|_{z=0} = T_c, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \left. \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \left(\frac{1}{\lambda_T}\right) q_0, \quad t > 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \left. \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_r}, \quad \text{Bi}^* = h\sqrt{a\tau_r}, \quad \beta = \frac{\nu\rho}{\nu_T};$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z, t) - T_c}{T_0 - T_c}, & i = 1, 3, \\ \frac{T_i(z, t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}, & i = 2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T (T_0 - T_c)}, & i = 1, 3, \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}, & i = 2, \end{cases}$$

$$\text{где } S_T = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \alpha_T \frac{E}{(1-2\nu)},$$

и задача (6)–(8), (12)–(17) будет иметь вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \quad (i=1, 2, 3); \quad (18)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (19)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0, \quad \tau > 0; \quad |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \quad (i=1, 2, 3); \quad (21)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, & i=1; 3 \\ 0, & i=2 \end{cases}, \quad \left. \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (22)$$

$$W_1(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0, \quad \tau > 0, \quad (23)$$

$$\int_0^\tau \left. \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = 1, \quad \tau > 0, \quad (24)$$

$$\int_0^\tau \left. \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = \text{Bi}^* W_3(\xi, \tau)|_{\xi=0}, \quad \tau > 0, \quad (25)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (26)$$

3. Динамическая реакция твердого тела на охлаждение его поверхности

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W_i(\xi, \tau) d\tau,$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau$$

решение тепловой задачи (21)–(26) имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \frac{K_i}{p} - \bar{\varphi}_i(p) \exp\left[-\xi \sqrt{p(p+1)}\right], \quad (27)$$

$$\bar{\varphi}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & i=1 \quad (K_1=1), \\ \sqrt{p+1} / p^{3/2}, & i=2 \quad (K_2=0), \\ \frac{\text{Bi}^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + \text{Bi}^* \sqrt{p+1})}, & i=3 \quad (K_3=1). \end{cases} \quad (28)$$

Напряжение $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$ при найденном соотношении (27) записывается в виде:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \left\{ \exp[-\xi\sqrt{p(p+1)}] - \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\beta}\right)p\right] \right\}, \quad (29)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} -\frac{\gamma_1}{p + \gamma_2}, & i = 1 \end{cases} \quad (30)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} -\frac{\gamma_1\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p + \gamma_2)}, & i = 2 \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} -\frac{\gamma_1 \text{Bi}^* \sqrt{p+1}}{(\sqrt{p} + \text{Bi}^* \sqrt{p+1})(p + \gamma_2)}, & i = 3, \end{cases} \quad (32)$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{(\beta^2 - 1)}$, $\gamma_2 = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)}$.

При нахождении оригиналов в (29)–(32) следует обратить внимание на величину параметра $\beta = v_p/v_T$. Так, для органического стекла $\beta = 0.4$, для кварца и кремния $\beta = 0.7$, т.е. $\beta < 1$; для стали $\beta = 3.4$, кристалла и алюминия – $\beta = 1.8$, т.е. $\beta > 1$. Величина параметра β играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ и в выборе основных соотношений операционного исчисления при переходе к оригиналам в (29)–(32). Предварительно приведем полезные соотношения, отсутствовавшие в известных справочниках по операционному исчислению:

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p+b)} \Leftarrow \int_0^\tau \left[\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{1-b} \exp(-b\tau') \Phi(\sqrt{(1-b)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, \quad b < 1; \quad (33)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p-b)} \Leftarrow \int_0^\tau \left[\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{b+1} \exp(b\tau') \Phi(\sqrt{(b+1)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, \quad b > 0; \quad (34)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p+b)} \Leftarrow \int_0^\tau \left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} - \frac{2\sqrt{b-1}}{\sqrt{\pi}} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}} d\tau', \quad b > 1. \quad (35)$$

Здесь $F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(y^2) dy$ – вещественная функция, которая остается ограниченной при любых вещественных τ . При этом $F(\tau) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 2^n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!!}$, ($|\tau| < \infty$); $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция Лапласа. Заметим, что оригиналы изображений (29) (для $i=2, 3$) сводятся к (33)–(35).

Находим из (29)–(32) для напряжений: при $\beta < 1$:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & \xi < \tau < \xi/\beta, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi/\beta, \end{cases} \quad (36)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \left[f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + \xi/2 \int_\xi^\tau f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau' - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi), \quad (37)$$

$$f_1(\tau) = -\gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (38)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_1^*} \exp(\gamma_2^* \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}, \quad (39)$$

$$f_3(\tau) = -\left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\text{Bi}^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} d\tau' + \frac{\sqrt{\gamma_3^*} \gamma_1 \gamma_3^2}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'})}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{\gamma_1^* \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_2^* \tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) d\tau' - \left[\frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right] \Bigg\}, \quad (40)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta) \quad (i=1,2,3), \quad (41)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{\text{Bi}^{*2}}{1 - \text{Bi}^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3;$$

при $\beta > 1$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi / \beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \xi / \beta < \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}, & \tau > \xi, \end{cases} \quad (42)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \left[f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi / 2) + (\xi / 2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau' / 2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau' - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi), \quad (43)$$

$$f_1(\tau) = -\gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (44)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\tau \left[\frac{1}{\sqrt{\tau'}} - 2\sqrt{\gamma_1} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \quad (45)$$

$$f_3(\tau) = - \left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\text{Bi}^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^* \gamma_1 \gamma_3}}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'}) d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \frac{2\sqrt{\gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{\pi \text{Bi}^* (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') F(\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \left[\frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right] \right\}, \quad (46)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{\text{Bi}^{*2}}{1 - \text{Bi}^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3,$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta), \quad (i=1,2,3). \quad (47)$$

Приведем для сравнения соответствующие модельные представления в рамках классической феноменологии Фурье (в (12) $\tau_r = 0$, в (18) $\beta^2 = 1$) в условиях температурного охлаждения $T_1(z, t)|_{z=0} = T_c (T_c < T_0)$, $t > 0$, теплового охлаждения $[\partial T_2(z, t) / \partial z]_{z=0} = (q_0 / \lambda_T)$, $t > 0$, охлаждения средой $[\partial T_3 / \partial z]_{z=0} = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c]$, $(T_c - T_0)$, $t > 0$. В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \text{Bi} = \frac{ha}{v_p}, W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - T_c}{T_0 - T_c}, & i = 1, 3 \\ \frac{T(z, t) - T_c}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, & i = 2 \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_0 - T_c)}, & i = 1, 3 \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, & i = 2 \end{cases}$$

находим для напряжения в пространстве изображений

$$\overline{\sigma_{\xi\xi}}(\xi, p) = \overline{\varphi}_i(p) \left[\exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p) \right],$$

$$\overline{\varphi}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & i=1, \\ \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}, & i=2, \\ \frac{Bi}{(p-1)(Bi + \sqrt{p})}, & i=3, \end{cases}$$

в пространстве оригиналов

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi. \end{cases} \quad (48)$$

Здесь компоненты $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$ и $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ имеют значения:

– в случае температурного охлаждения ($i=1$)

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\exp(\tau - \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\exp(\tau - \xi); \end{cases} \quad (49)$$

– в случае теплового охлаждения ($i=2$)

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\exp(\tau - \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}); \end{cases} \quad (50)$$

– в случае охлаждения средой ($i=3$)

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\frac{Bi}{Bi+1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \frac{Bi}{Bi-1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\frac{Bi^2}{Bi^2-1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[1 - \frac{1}{Bi} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \exp[Bi^2(\tau - \xi)] \Phi^*(Bi\sqrt{\tau - \xi}) \right\}. \end{cases} \quad (51)$$

Здесь $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$.

Физический анализ решений

Как следует из (36), (42), напряжение $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ в фиксированной точке области $\xi > 0$ возникает спустя время $\tau = \xi$, если $\beta < 1$ ($v_p < v_\tau$) после воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье (48) соотношения (36), (42) показывают наличие двух скачков напряжения: один – на фронте тепловой, другой – на фронте упругой волны, идущих соответственно со скоростями v_τ и v_p . На рис. 1–3 приведены графики зависимости напряжения от безразмерного времени

в сечении $\xi=2$. Расчеты выполнены по формулам (36)–(47). На рис. 4 представлены соответствующие кривые динамических термоупругих напряжений, рассчитанные по формулам (48)–(51) на основе уравнения параболического типа. Расчеты выполнены для значений $\beta=0.4$ (органическое стекло), $\beta=0.7$ (кварц, кремний), $\beta=1.8$ (кристаллы, алюминий), $\beta=3.4$ (сталь).

Из графиков видно, что учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 4. Прежде всего образуется

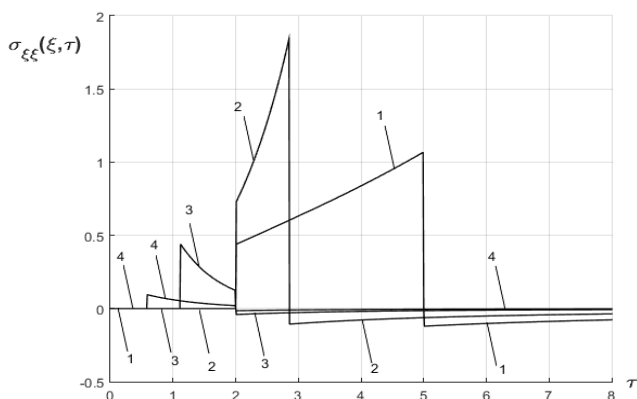


Рис. 1. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ от времени в сечении $\xi=2$ при температурном охлаждении: 1 – $\beta=0.4$; 2 – 0.7; 3 – 1.8; 4 – 3.4

два фронта волн. Рассмотрим фиксированное сечение внутри полупространства $\xi > 0$. При $\beta > 1$ напряжения в сечении равны нулю. В момент времени $\tau = \xi/\beta$ к этому сечению подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью v_p ; возникает скачком растягивающее напряжение, которое дальше уменьшается. В момент времени $\tau = \xi$ к этому сечению подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью v_T ; напряжение, изменяясь скачком, уменьшается и далее асимптотически стремится к нулю. При $\beta < 1$ рассматриваемое сечение в момент времени $\tau = \xi$ приходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью v_T ; возникает скачком растягивающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени $\tau = \xi/\beta$ к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение до нуля. Следует также отметить: если в классическом случае наличие конечного теплообмена на поверхности полупространства приводит к исчезновению разрывов температурных напряжений, то в случае обобщенной динамической задачи термоупругости характер напряжений остается таким же, как и при бесконечно большом значении теплообмена (граничное условие теплообмена первого рода). Как показывают данные на рис. 1–4, условия резкого охлаждения приводят к возникновению во внутренних сечениях твердого тела напряжений растяжения и являются более опасными по сравнению с режимом нагревания, вызывающим напряжения сжатия [10, 19].

На рис. 5 представлены кривые изменения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ в сечении $\xi=2$ при $\beta=0.7$, $Bi^*=0.3$, позво-

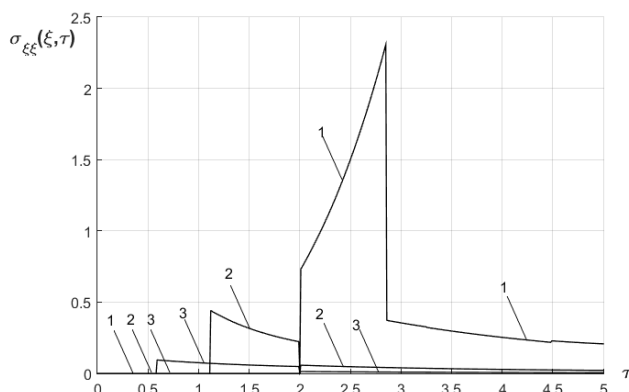


Рис. 2. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ от времени в сечении $\xi=2$ при тепловом охлаждении: 1 – $\beta=0.7$; 2 – 1.8; 3 – 3.4

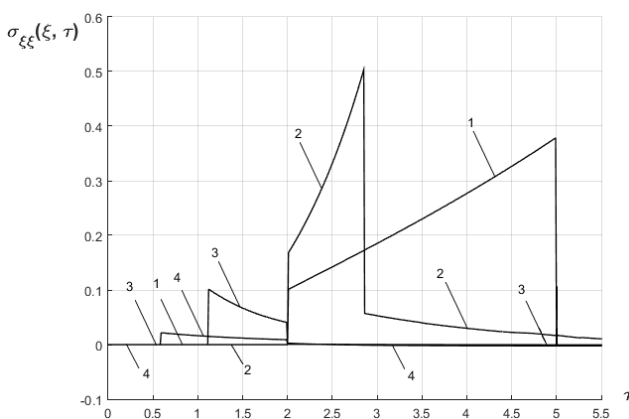


Рис. 3. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ от времени в сечении $\xi=2$ при охлаждении средой: $Bi^*=0.3$; 1 – $\beta=0.4$; 2 – 0.7; 3 – 1.8; 4 – 3.4

ляющие провести сравнительный анализ различных режимов охлаждения: температурного (23), теплового (24) и средой (25). Первый режим по сравнению со вторым и третьим связан с появлением как растягивающих, так и (в меньшей степени) сжимающих напряжений и является наиболее опасным по сравнению с остальными. Интересно отметить (см. рис. 4), что в классическом случае (48) при тепловом ударе наиболее

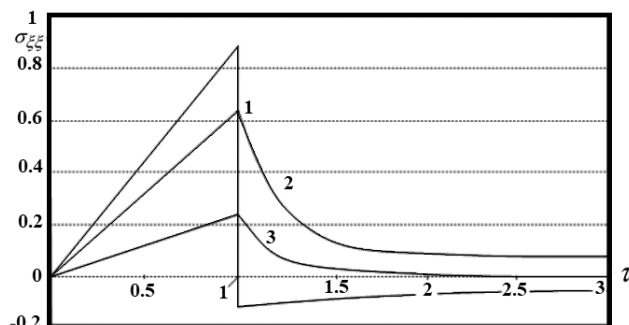


Рис. 4. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ от времени в сечении $\xi=1$: 1 – температурное охлаждение; 2 – тепловое охлаждение; 3 – охлаждение средой ($Bi=0.3$).

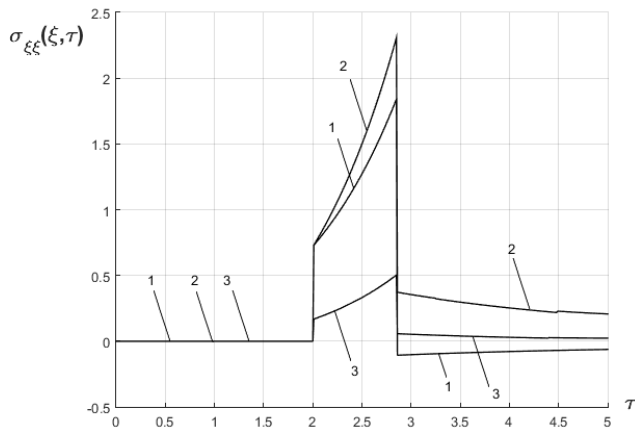


Рис. 5. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}$ от времени в сечении $\xi=2$: 1 – температурное охлаждение; 2 – тепловое охлаждение; 3 – охлаждение средой ($Bi^*=0.3$), ($\beta=0.7$)

опасным является именно режим внезапного температурного охлаждения.

Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений $\sigma_{\xi\xi}$ на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания [2]

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \leftarrow \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ f(t-t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке t_0 происходит скачок функции $f(t)$. Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{f}(p).$$

Находим, используя (30), (31):

$$|\Delta_i| = \begin{cases} \frac{1}{|\beta^2 - 1|}, & i = 1, 2, \\ \frac{Bi^*}{(1 + Bi^*)|\beta^2 - 1|}, & i = 3. \end{cases} \quad (52)$$

Выражения (52) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал, так как соотношения (52) можно считать верхней оценкой максимума $\sigma_{\xi\xi}$, величина которого определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. В то же время в (52) наглядно проявляется роль параметра β : при уменьшении разности скоростей распространения звука и теплоты в среде величина

скачка напряжений возрастает, что создает реальную опасность разрушения материала.

Выводы

Исследована термическая реакция твердого (массивного) тела на тепловой удар при резком охлаждении в терминах динамической термоупругости на основе обобщенного уравнения энергии – уравнения теплопроводности гиперболического типа с учетом конечной скорости распространения теплоты. Рассмотрены различные модели теплового воздействия в рамках первой, второй и третьей краевых задач для уравнения теплопроводности. Проведены численные эксперименты, описаны напряжения растяжения, установлен наиболее опасный режим теплового воздействия. Предложены практические соотношения для скачков напряжений на фронте термоупругой волны, дающие верхнюю оценку максимума соответствующих температурных напряжений при тепловом ударе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
2. **Каргашов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. 540 с.
3. **Каргашов Э.М., Кудинов В.В.** Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS, 2017. 1080 с.
4. **Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.** Обобщенная термомеханика. Киев: Н. Думка, 1976. 312 с.
5. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
6. **Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.** Волновые явления теплопроводности. Минск: Наука и Техника, 1993. 275 с.
7. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.К.** Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
8. **Каргашов Э.М., Бартенев Г.М.** Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии // Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 25. С. 3–88.
9. **Каргашов Э.М., Партон В.З.** Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформ. тв. тела. М.: ВИНТИ. 1991. Т. 22. С. 55–127.
10. **Каргашов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 670 с.
11. **Формалев В.Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. М.: Физматлит, 2015. 245 с.
12. **Боумейстер К., Хамилл Т.** Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112–119.

13. **Карташов Э. М.** Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // Инж-физич. журнал. 2014. Т. 87. № 3. С. 1072–1081.
14. **Карташов Э. М.** Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 4. С. 38–48.
15. **Карташов Э. М., Антонова И. В.** Гиперболические модели нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2016. Т. XI. № 2. С. 74–80.
16. **Боли Б., Уэйнер Дж.** Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1963. 520 с.
17. **Mura K., Kumar S., Vedavars A., Mjallemi M. K.** Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat // Heat Transf. ASME. 1995. V. 117. N 3. P. 568–573.
18. **Кирсанов Ю. А., Кирсанов А. Ю.** Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 1. С. 113–122.
19. **Стригунова А. Ю., Карташов Э. М.** Тепловой удар и динамическая термоупругость // Тонкие химические технологии. 2016. Т. XI. № 1. С. 67–71.

Dynamic thermoelasticity in the problem of heat shock based on the general energy equation

E. M. Kartashov, E. V. Nenakhov

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow
E-mail: kartashov@mitht.ru, newnew94@mail.ru*

The problem of heat shock was studied for the case of the solid body surface sharp cooling in terms of dynamic thermoelasticity based on the generalized energy equation, namely the equation of non-stationary heat conduction of a hyperbolic type with allowance for the finite velocity of heat propagation. Various modes of sudden cooling, such as temperature mode, thermal mode, cooling by medium, resulting in tensile stresses in the inner sections of the solid body, in contrast to the similar cases of sudden heating creating compression stresses were studied. Exact analytical solutions of a series of boundary-value problems of dynamic thermoelasticity were obtained, numerical experiments were performed, and their features were described. It is shown, that two wave fronts are formed in the solid – the elastic wave front, and the thermal wave front. Depending on the ratio of their propagation rates, the elastic wave either precedes the thermal wave, or lags behind it. A comparison with the classical case of dynamic thermoelasticity while cooling is made. It is shown, that in the latter case, the presence of finite heat transfer from the surface of a solid body leads to the absence of thermal stress ruptures. At the same time, for a generalized dynamic problem the nature of the stresses remains the same as for an infinitely large value of the heat transfer coefficient (which means the existence of a boundary condition of the first kind, i. e. temperature cooling). With this, the accounting for the thermal inertia in the hyperbolic type heat equation and in the boundary condition of the third kind leads to the dynamic temperature stresses decrease, but with heat transfer on the solid surface increasing the dynamic temperature stresses increase. This allowed determining the most dangerous cooling mode, which was the temperature cooling.

Keywords: heatstroke, the final velocity of heat propagation, dynamic thermoelastic stresses, tensile stress.

REFERENCES

1. **Lykov A. V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
2. **Kartashov E. M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
3. **Kartashov E. M., Kudinov V. V.** *Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenij* [Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications]. Moscow: URSS, 2017. 1080 p. In Russ.
4. **Podstrigach Ya. S., Kolyano Yu. M.** *Obobshchennaya termomekhanika* [Generalized thermomechanics]. Kiev: Naukova Dumka, 1978. 310 p. In Russ.
5. **Novatsky V.** *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Moscow: Mir, 1970. 256 p. In Russ.
6. **Shashkov A. G., Bubnov V. A., Yanovsky S. Yu.** *Volnovyye yavleniya teploprovodnosti*. [Heat conduction wave phenomena]. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1993. 275 p. In Russ.
7. **Zarubin V. S., Kuvyrkin G. K.** *Matematicheskie modeli termomekhaniki* [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 168 p. In Russ.
8. **Kartashov E. M., Bartenev G. M.** *Dinamicheskie efekty v tverdykh telakh v usloviyakh vzaimodejstviya s intensivnymi potokami energii* [Dynamic effects in solids under conditions of interaction with intense energy flows]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Khimiya i tekhnologiya vysokomolekulyarnykh soedinenij – Itogi nauki i tekhniki. Ser. Chemistry and technology of high-molecular compounds*, Moscow: VINITI, 1988, vol. 25, pp. 3–88. In Russ.
9. **Kartashov E. M., Parton V. Z.** *Dinamicheskaya termouprugost' i problemy termicheskogo udara* [Dynamic thermoelasticity and problems of thermal shock] // *Itogi*

- nauki i tekhniki. Ser. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela – Itogi nauki i tekhniki. Ser. Mechanics of a deformable solid*, Moscow: VINITI, 1991, vol. 22, pp. 55–127. In Russ.
10. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoj termouprugosti* [Analytical theory of heat conduction and thermoelasticity]. Moscow: URSS, 2013. 656 p. In Russ.
 11. **Formalev V.F.** *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh* [Heat transfer in anisotropic solids]. Moscow: Fizmatlit, 2015. 280 p. In Russ.
 12. **Baumejster K., Khamill T.** Giperbolicheskoe uravnenie teploprovodnosti. Reshenie zadachi o polubeskonechnom tele [Hyperbolic equation of heat conductivity. The solution of the problem of a semi-infinite body]. *Teploperedacha – Heat transfer*, 1969, no. 4, pp. 112–119. In Russ.
 13. **Kartashov E.M.** Analiticheskie resheniya giperbolicheskikh modelej teploprovodnosti [Analytical solutions of hyperbolic heat conduction models] // *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal – Engineering and physics journal*, 2014, vol. 87, no. 5, pp.1072–1082. In Russ.
 14. **Kartashov E.M.** Novye sootnosheniya dlya analiticheskikh reshenij giperbolicheskikh modelej perenosa [New relations for the analytic solution of the hyperbolic transport models]. *Izvestiya RAN, Ehnergetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2015, no. 4, pp. 38–48. In Russ.
 15. **Kartashov E.M., Antonova I.V.** Giperbolicheskije modeli nestatsionarnoj teploprovodnosti [Hyperbolic model of non-stationary thermal conductivity]. *Tonkie khimicheskie tekhnologii – Fine Chemical Technologies*, 2016 vol. 11, no. 2, pp. 74–80. In Russ.
 16. **Bruno A.B., Weiner J.H.** *Theory of Thermal Stresses*. John Wiley, New York (Chapman and Hall, London), 1960. 586 p.
 17. **Mura K., Kumar S., Vedavars A., Mjallemi M.K.** Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *Heat Transf. ASME*, 1995, vol. 117, no. 3, pp. 568–573.
 18. **Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu.** Ob izmerenii vremeni teplovoj relaksatsii tverdykh tel [On the measurement of the thermal relaxation time of solids]. *Izvestiya RAN, Ehnergetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2015, no. 1, pp. 113–122. In Russ.
 19. **Strigunova A.Yu., Kartashov E.M.** Teplovoj udar i dinamicheskaya termouprugost' [Thermal shock and dynamic thermoelasticity]. *Tonkie khimicheskie tekhnologii – Fine Chemical Technologies*, 2016 vol. 11, no. 1, pp. 67–71. In Russ.