

Труды МАИ. 2024. № 139
Trudy MAI. 2024. No. 139. (In Russ.)

Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>

EDN: [EDN: https://www.elibrary.ru/IFAFIA](https://www.elibrary.ru/IFAFIA)

ДЕЙСТВИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИЛЫ НА ШАРНИРНО ОПЕРТУЮ МОМЕНТНУЮ УПРУГУЮ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЛАСТИНУ (ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ)

**До Нгок Дат¹, Дмитрий Валентинович Тарлаковский^{2✉}, Григорий Валерьевич
Федотенков³**

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

^{2,3}НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

¹Ngocdatkts@mail.ru

²tdvhome@mail.ru ✉

³greghome@mail.ru

Аннотация. Рассматривается нестационарный изгиб моментной упругой прямоугольной пластины под действием сосредоточенной силы. Применяется простейшая модель, использующая гипотезу Кирхгофа-Лява и пренебрежение обжатием поперечного волокна. Начальные условия нулевые. На границе предполагается наличие обобщенного шарнирного опирания.

Решение задачи представляется в виде двойных тригонометрических рядов по пространственным координатам. Относительно их коэффициентов построена

начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Она интегрируется с помощью преобразования Лапласа по времени. Оригиналы находятся с помощью вычетов.

В качестве примера рассмотрена нагрузка в виде нормальной силы, изменяющейся по времени по закону Хевисайда, приложенной в центре квадратной пластины, выполненной из композита на основе алюминиевой дроби в эпоксидной матрице. Проведены результаты численных расчетов. Суммирование рядов проводится с заданной точностью по непрерывной норме.

Ключевые слова: моментная упругая пластина, гипотеза Кирхгофа-Лява, уравнения движения, физические соотношения, прогиб, угол поворота, внутренние силовые факторы, двойной тригонометрический ряд

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00389, <https://rscf.ru/project/23-29-00389/>

Для цитирования: До Нгок Дат, Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель) // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>

Original article

ACTION OF TRANSVERSE NON-STATIONARY FORCE ON A HINGED MOMENT ELASTIC RECTANGULAR PLATE (SIMPLIFIED MODEL)

Do Ngoc Dat¹, Tarlakovskii D.V.^{2✉}, Fedotenkov G.V.³

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia, Moscow,
Volokolamskoe Shosse, 4

^{2,3}Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow,
Michurinsky Prospect, 1

¹Ngocdatkts@mail.ru

²tdvhome@mail.ru ✉

³greghome@mail.ru

Abstract: The transient bending of a moment-elastic rectangular plate under a concentrated force is considered. A simplified model is applied, using the Kirchhoff-Love hypothesis and neglecting transverse shear deformation. The initial conditions are zero, indicating that the system is at rest at the moment the force is applied. Generalized hinge support is assumed at the boundaries, which sets the necessary boundary conditions.

To solve this problem, double trigonometric series in spatial coordinates are used. Such series allow the solution to be decomposed as a sum of modes with different frequency components, each describing an individual contribution to the deformation. The equation with respect to the coefficients of these series reduces to a system of ordinary differential equations in time. The Laplace transform is applied to integrate this system, allowing a transition to the time domain representation. The solution for the function's original form is recovered using the residue calculation in the complex plane, ensuring accurate and stable restoration of the temporal dependence.

As an example of loading, a normal force applied at the center of the square plate is

considered. The force's time variation follows the Heaviside function, modeling an instantaneous load application, characteristic of dynamic impact effects. The plate is made from a composite based on aluminum shot in an epoxy matrix, which provides high strength at relatively low weight and good damping properties.

For numerical calculations, a summation procedure for the series with a pre-specified accuracy in the continuous norm is implemented. This avoids the accumulation of errors and ensures result convergence. This method can be useful for modeling various cases of dynamic loading on composite plates, which is crucial for the aerospace industry, where accurate prediction of structural behavior under transient loads is of critical importance.

Keywords: moment elastic plate, Kirchhoff-Love hypothesis, equations of motion, physical relations, deflection, angle of rotation, internal force factors, double trigonometric series.

Funding: The research is supported by the Russian Science Foundation, grant No. 23-29-00389, <https://rscf.ru/project/23-29-00389/>.

For citation: Do Ngoc Dat, Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Action of Transverse Non-Stationary Force on a Hinged Moment Elastic Rectangular Plate (Simplified Model). *Trudy MAI*. 2024. No 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183451>

1. Введение

В последнее время достаточно много внимания уделяется неклассическим моментным средам в виде моделей, учитывающих независимый угол поворота. При этом, в основном используется модель Коссера [9, 10, 14]. Применительно к пластинам, в основном, рассмотрены задачи статики.

Число публикаций, посвященных нестационарным процессам в тонкостенных элементах конструкций, в силу сложности их исследования ограничено. Прежде всего отметим статью [2], где с использованием функционала Гамильтона построены начально-краевые задачи для произвольных моментных упругих оболочек. Уравнения движения таких сферических оболочек построены в [15]. При этом применяются методы, аналогичные использованным для классических оболочек в [3-5].

В статье [21] подробно рассмотрены вынужденные колебания прямоугольной трехслойной вязкоупругой пластины. Основная цель работы — разработка методов для определения резонансных частот и анализа вибраций, с применением численных методов (Maple). Было показано, что с увеличением модуля упругости возрастает как реальная, так и мнимая части собственных частот.

В работе [22] авторы исследуют распространение сдвиговых акустических волн (SH-ПАВ) в биморфной магнито-электроупругой пластине. Приведены дисперсионные уравнения и анализируются параметры, влияющие на фазовые скорости SH-ПАВ, что может быть полезным для разработки микро- и наноразмерных устройств.

В работе [23] обсуждается моментная асимметричная теория упругости и ее применение для анализа изгиба пластин. Проведен численный расчет изгиба прямоугольной пластины, что является важным шагом в создании новых теорий упругости для современных материалов.

Соавторы статьи [24] рассматривают поведение трехслойной круговой пластины под кольцевой нагрузкой в условиях нейтронного облучения. Используются функции Бесселя для аналитического решения, что позволяет оценить влияние нейтронного облучения на характеристики пластины.

В статье [25] решена задача о термоупругом изгибе трехслойной пластины с осесимметричной нагрузкой. Применение численного анализа позволяет исследовать влияние радиуса силовой окружности и температуры на перемещения.

В работе [26] предлагаются методики расчета ребристых пластин с перекрестными ребрами жесткости, оценивая их прочность и устойчивость. Методика включает использование Mathcad и Maple, и результаты сопоставляются с методом конечных элементов в MSC Patran/Nastran, демонстрируя хорошую корреляцию результатов.

В статье [27] исследуются несимметричные колебания анизотропной пластины с дополнительной массой. Используется метод компенсационных нагрузок и уравнение Нильсена, что позволяет точно рассчитать частоты собственных колебаний для различных условий.

В работе [28] рассматривается реакция пороупругого ледяного покрова на внешнюю нагрузку. Модель использует теорию гидроупругости, и учитывается параметр пористости, который приводит к затуханию колебаний на расстоянии от внешней нагрузки.

Статья [29] посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния при изгибе трехслойной круговой пластины с переменной толщиной.

Методология включает использование гипотез ломаной линии и применение гипотез Кирхгофа для анализа радиального перемещения и напряжений в пластине.

В работе [30] авторы представляют испытательный стенд для исследования колебаний тонкостенных оболочек. Стенд позволяет высоко точно измерять характеристики колебаний и исключить погрешности, что значительно улучшает качество измерений и является важным для дальнейших исследований колебаний в тонкостенных конструкциях.

Исследование [31] рассматривает проблему продольно-поперечной деформации и прочности ортотропной пластины под действием локальной поперечной силы и мембранных сил по контуру. Автором изучена оптимальная ориентация волокон, минимизирующая напряжения и прогибы, что полезно при проектировании структур с учетом концентрации напряжений в местах приложения нагрузки.

В работе [32] предлагается упрощенный метод решения задачи поперечного изгиба микрополярных пластин в рамках теории микрополярной упругости. Этот метод позволяет значительно упростить расчет напряженно-деформированного состояния пластин, что может быть полезно в инженерных расчетах микрополярных конструкций.

Статья [33] посвящена развитию двумерной модели анизотропной пластины второго порядка точности. Это исследование подходит для анализа статики и устойчивости многослойных пластин, а также впервые рассматривает модель ВПТ для общего вида анизотропии.

Работа [34] посвящена уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин с произвольной геометрией. Авторы предложили методику, учитывающую дополнительные напряжения, что позволяет более точно анализировать зоны искажения напряжений.

Авторы работы [35] исследовали задачи устойчивости пластин переменной жесткости. Приведены результаты расчета устойчивости для пластин с различной геометрией и свойствами, что имеет практическое применение для конструкций с переменной толщиной.

Исследование [36] касается отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие. Представлен гибридный численно-аналитический метод расчета, который демонстрирует высокое согласование с точными решениями и может применяться при проектировании авиационных конструкций.

Соавторы работы [37] исследовали изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины с жестким наполнителем. Авторы использовали вариационный принцип Лагранжа для получения уравнений равновесия, а также провели числовой анализ напряженно-деформированного состояния под действием локальных нагрузок.

Работа [38] посвящена осесимметричным колебаниям круговых трехслойных пластин на упругом основании. Авторами проведен численный анализ вынужденных колебаний, что имеет значение для инженерных расчетов конструкций на упругих основаниях.

В работе [39] построена математическая модель микрополярных упругих тонких пластин, которая учитывает особенности прочностных и жесткостных характеристик, используя асимптотические решения краевых задач. В модели учтены независимые поля перемещений и вращений, что позволяет учитывать поперечные сдвиговые деформации и обеспечивает высокие показатели прочности и жесткости. В другой работе [40] предложена общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин. Численный анализ выявил особенности свободных колебаний таких пластин, что дает возможность прогнозировать их динамическое поведение.

Исследование [41] касается цилиндрического изгиба трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой. Применяются гипотезы Кирхгофа для описания кинематики несущих слоев, а также анализируется влияние накладки на деформации.

В статье [42] исследуется напряженно-деформированное состояние микрополярных пластин, решая задачи изгиба для шарнирно-опертых пластин. В рамках численного анализа определены особенности НДС, что полезно при проектировании структур из микрополярного материала.

В работе [43] рассмотрены краевые задачи для тонких пластин в рамках несимметричной теории упругости. Автор строит несколько моделей для пластин в зависимости от физических параметров, что позволяет учитывать различные типы микрополярных пограничных слоев. В работе [44] представлены общие модели микрополярных упругих тонких пластин, основанные на асимптотическом анализе трехмерной статической теории упругости. Модели учитывают деформации сдвига и

вращения, что дает возможность адаптировать их для различных типов микрополярных пластин.

Исследование [45] посвящено расчету массы топлива и защитного экрана для межорбитальных переходов спутника, предназначенного для производства полупроводниковых пластин методом молекулярно-лучевой эпитаксии. Эта работа подчеркивает важность определения зависимостей массы от высоты орбиты для оптимизации расхода топлива.

Работа [46] посвящена исследованию усталостной долговечности перфорированных пластин и цилиндрических панелей под действием стационарного случайного давления. Авторы применяют гипотезу спектрального суммирования повреждений для оценки влияния конструктивных параметров на долговечность панелей. В исследовании рассматриваются макромодули и коэффициенты концентрации силовых факторов, что может быть полезным для проектирования и расчета прочности перфорированных конструкций.

Постановка и методы решения некоторых нестационарных задач для моментных упругих пластин приведены в [1, 12, 13]. Причем в последних двух публикациях тезисно представлен излагаемый ниже материал. Здесь используется простейшей модель, построенная с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява и пренебрежения обжатия поперечного волокна.

2. Постановка задачи

Полагаем, что срединная плоскость в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 пластины есть прямоугольник

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b \right\}.$$

Уравнения движения моментной упругой пластины толщиной h и физические соотношения имеют следующий вид [12, 13]:

$$\begin{aligned} \ddot{w} &= -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p, \\ \ddot{\omega}_1 &= \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\ddot{\omega}_2 = \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}, \theta_\omega = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2};$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), M_{22} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), M_{12} = M_{21} = -2\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ T_{13} = -T_{31} &= 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2 \right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1 \right), R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \\ R_{22} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих формулах и далее использованы следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в (1), (2) и последующем изложении опущен):

$$\begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, w' = \frac{w}{L}, r' = \frac{r}{L}, p' = \frac{pL}{h(\lambda + 2\mu)}, r^2 = \frac{I}{h}, I = \frac{h^3}{12}, \tilde{m}'_{Mi} = \frac{\tilde{m}_{Mi} L^2}{h}, \\
T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, M'_{kl} = \frac{M_{kl} L}{I(\lambda + 2\mu)}, R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, N'_\omega = \frac{N_\omega L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \\
\gamma_2^2 &= \frac{c_1^2}{c_3^2}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \\
\eta_1 &= \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}.
\end{aligned}$$

Здесь w нормальное перемещение; ω_i - координаты вектора угла вращения за счет моментных свойств среды; t - время; ρ и J - плотность и массовая мера инерции при вращении материала пластины; λ, μ - упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов; p - нормальное давление; \tilde{m}_{Mi} - координаты внешнего поверхностного момента; L - некоторый размер; h - толщина оболочки; T_{i3}, T_{3i} и M_{ij} - внутренние силовые и моментные характеристики, инициированные тензором напряжений, а R_{ij}, N_ω - аналогичные величины, соответствующие тензору моментных напряжений.

На границах пластины принимаем условия обобщенного шарнирного опирания

$$w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0, M_{11}|_{x_1=0,a} = 0, M_{22}|_{x_2=0,b} = 0, R_{12}|_{x_1=0,a} = 0, R_{21}|_{x_2=0,b} = 0 \quad (3)$$

Начальные условия полагаем нулевыми:

$$w|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \omega_1|_{\tau=0} = \dot{\omega}_1|_{\tau=0} = \omega_2|_{\tau=0} = \dot{\omega}_2|_{\tau=0} = 0 \quad (4)$$

3. Решение задачи

Для решения начально-краевой задачи (1) - (4) представляем искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b}, \\
 \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\
 \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Система $\{\sin a_m x_1 \sin b_n x_2\}$ образована собственными функциями краевой задачи.

$$\Delta w = \lambda w, w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0 \tag{6}$$

Из (2) и (5) следуют ряды для внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 M_{12} &= M_{21} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
 T_{13} &= -T_{31} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{13n0}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
 T_{23} &= -T_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0}(\tau) \sin a_m x_1 T_{230} + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega} &= \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{\omega m 0}(\tau) \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\omega 0 n}(\tau) \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\omega mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
N_{\omega} &= \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m 0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0 n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из (5) – (8) с учетом полноты систем тригонометрических функций [8]

получаем следующие равенства:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_{11mn} &= (a_m^2 + \kappa b_n^2) w_{mn}, M_{22mn} = (\kappa a_m^2 + b_n^2) w_{mn}, M_{12mn} = -2\gamma_1^{-2} a_m b_n w_{mn}, \\
T_{13mn} &= 2\alpha (a_m w_{mn} + \omega_{2mn}), T_{23mn} = 2\alpha (b_n w_{mn} - \omega_{1mn}); \\
\theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}, N_{\omega mn} = \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}), \\
R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn}, R_{22mn} = \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn};
\end{aligned} \tag{9}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
T_{23m0} &= -2\alpha \omega_{1m0}; \\
\theta_{\omega m 0} &= a_m \omega_{1m0}, R_{11m0} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m0}, R_{22m0} = \eta_2 a_m \omega_{1m0}, N_{\omega m 0} = \eta_2 \theta_{\omega m 0};
\end{aligned} \tag{10}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
T_{13n0} &= 2\alpha \omega_{20n}; \\
\theta_{\omega 0 n} &= b_n \omega_{20n}, R_{110n} = \eta_2 b_n \omega_{20n}, R_{220n} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{20n}, N_{\omega 0 n} = \eta_2 \theta_{\omega 0 n}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Далее раскладываем в ряды правые части уравнений (1):

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
\tilde{m}_{M2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда из (1) получаем такие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(3)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(3)} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} + \mathbf{B}_{mn}^{(3)}, \\
\mathbf{A}_{mn}^{(3)} &= (a_{mnij})_{3 \times 3}, \mathbf{X}_{mn}^{(3)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn})^T, \mathbf{B}_{mn}^{(3)} = (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn})^T,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{mn11} &= -(a_m^2 + b_n^2) [r^2 (a_m^2 + b_n^2) + 4\alpha], a_{mn12} = -4\alpha b_n, a_{mn13} = 4\alpha a_m, \\
a_{mn21} &= 4\alpha \nu b_n, a_{mn22} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu), a_{mn23} = a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, \\
a_{mn31} &= -4\alpha \nu a_m, a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu);
\end{aligned} \tag{13}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\ddot{\omega}_{1m0} = a_{m022} \omega_{1m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha \nu); \tag{14}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\ddot{\omega}_{20n} = a_{0n33} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{0n33} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu). \tag{15}$$

Эта уравнения совместно с вытекающими из (4) нулевыми начальными условиями

$$w_{mn}|_{\tau=0} = \dot{w}_{mn}|_{\tau=0} = \omega_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{1mn}|_{\tau=0} = \omega_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{2mn}|_{\tau=0} = 0$$

образуют задачи Коши

Решение последних двух задач не представляет сложностей. К начальным

задачам (9), (12) применяем преобразование преобразования Лапласа по времени [7, 11] (верхний индекс « L » указывает на изображение; s - параметр преобразования).

В результате получаем

$$\mathbf{X}_{mn}^{(3)L}(s) = -(\mathbf{A}_{mn}^{(3)} - \mathbf{E}s^2)^{-1} \mathbf{B}_{mn}^{(3)}.$$

Очевидно, элементы искомого столбца есть правильные дроби аргумента s со знаменателем – бикубическим многочленом. Их оригиналы находим с помощью вычетов [11]:

$$\mathbf{X}_{mn}^{(3)}(\tau) = \sum_{k=1}^6 \operatorname{res}_{s=s_k} \mathbf{X}_{mn}^{(3)L} e^{s\tau},$$

где s_k - нули знаменателя

4. Пример

Для примера рассмотрим сосредоточенную в точке (x_{10}, x_{20}) , где $0 < x_{10} < a, 0 < x_{20} < b$, и нагрузку следующего вида

$$p = \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau), \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = 0. \quad (16)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ и $H(\tau)$ - дельта-функция Дирака и функция Хевисайда [6, 7].

Ей соответствуют следующие коэффициенты рядов (9) [6]:

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4}{ab} H(\tau) \sin a_m x_{10} \sin b_n x_{20}, \tilde{m}_{M1mn} = \tilde{m}_{M2mn} = 0. \end{aligned}$$

При этих условиях начальные задачи, соответствующие уравнениям (14) и (15), однородные. Поэтому решения соответствующих начальных задач тривиальные

$$\omega_{1m0} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \omega_{20n} \equiv 0 \quad (n \geq 1).$$

Будем полагать, что материал - композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [9, 10]:

$$\lambda = 7,59 \text{ ГПа}; \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН};$$

$$J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; c_1 = 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с};$$

Плотность материала, скорости c_3, c_4 и необходимые в этой главе безразмерные параметры:

$$\rho = \mu/c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \beta + 2\gamma = 2,65 \text{ кН}; \gamma = 0,440 \text{ кН}; \beta = 1,77 \text{ кН},$$

$$\varepsilon = 2,20 \text{ кН}; \gamma - \varepsilon = -1,76 \text{ кН}; c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_4 = 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с};$$

$$\gamma_1 = 2,45; \gamma_2 = 0,919; \gamma_3 = 1,20; \gamma_0 = 0,917; \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3};$$

$$\upsilon = 5,1 \cdot 10^6; \kappa = 0,668; \eta = -0,667; \eta_1 = 0,167; \eta_2 = 0,670.$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L = 1 \text{ м}$. Считаем, что толщина пластины $h = 0,05 \text{ м}$, откуда, получаем $r^2 = 0,208 \cdot 10^{-3}$. В расчетах полагаем, что пластина квадратная: $a = b = 1$, а нагрузка приложена в ее центре: $x_{10} = x_{20} = 1/2$. При этом коэффициенты p_{mn} в (16) определяются так:

$$p_{mn} = 4H(\tau) \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k \text{ или } n = 2l, \\ (-1)^k (-1)^l & \text{при } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Ряды (5), (6) вида $f(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$ заменяются частичными

суммами $S_N(x_1, x_2, \tau) = \sum_{m,n=1}^N f_{mn}(x_1, x_2, \tau)$. Погрешность приближенного равенства

$f \approx S_N$ оценивается следующими величинами:

- при фиксированных x_1 и x_2

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau}}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_{\tau} = \max_{\tau \in [0, T]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|;$$

- при фиксированных x_2 и τ

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_1}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_1 = \max_{x_1 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|;$$

- при фиксированных x_1 и τ

$$\varepsilon = \frac{\|f_{N+1,N+1}(x_1, x_2, \tau)\|_2}{\|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2}, \|S_N(x_1, x_2, \tau)\|_2 = \max_{x_2 \in [0, 1]} |S_N(x_1, x_2, \tau)|,$$

где величина T определяет рассматриваемый диапазон изменения времени.

На Рис.1 - 24 приведены зависимости прогиба w и углов поворота ω_1, ω_2 , а также внутренних силовых факторов $M_{11} = M_{22}, M_{12} = M_{21}, T_{13} = -T_{31}, T_{23} = -T_{32}$ и $R_{11}, R_{22}, R_{12}, R_{21}, N_{\omega}$ от координат x_1, x_2 и времени соответственно при различных значениях τ и x_1, x_2 . Во всех вариантах погрешность ε составляла менее 5 % при $N = 30$.

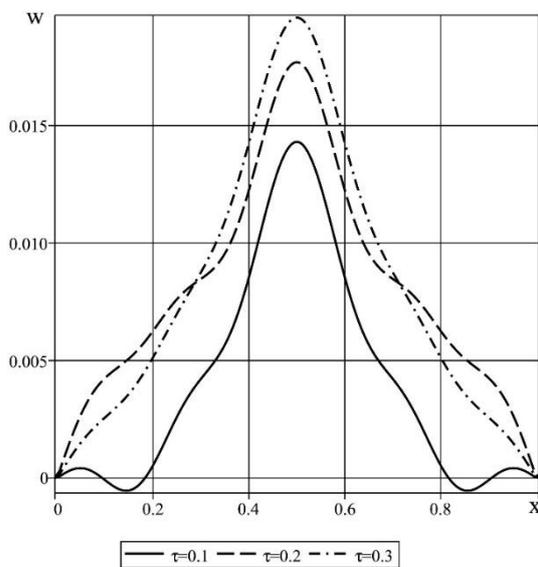


Рис.1

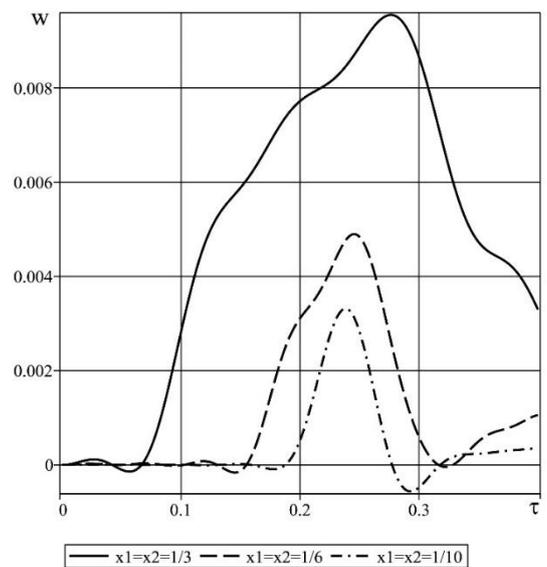


Рис.2

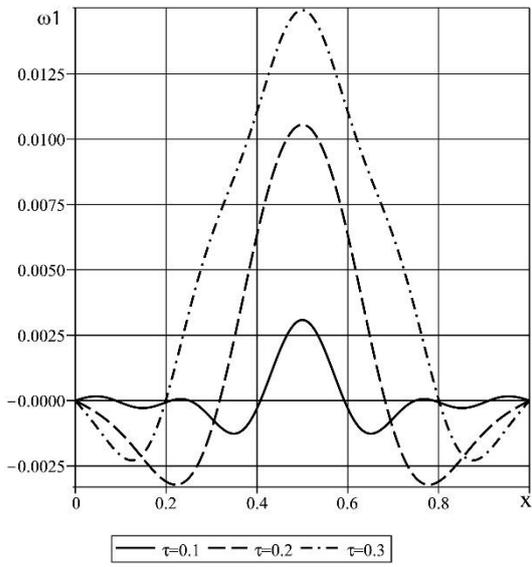


Рис.3

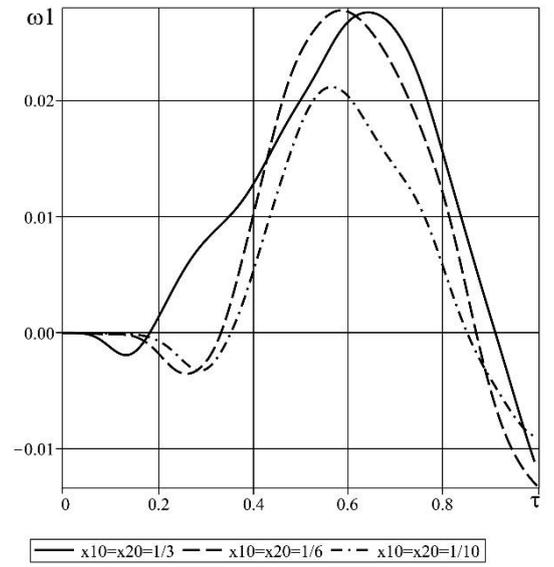


Рис.4

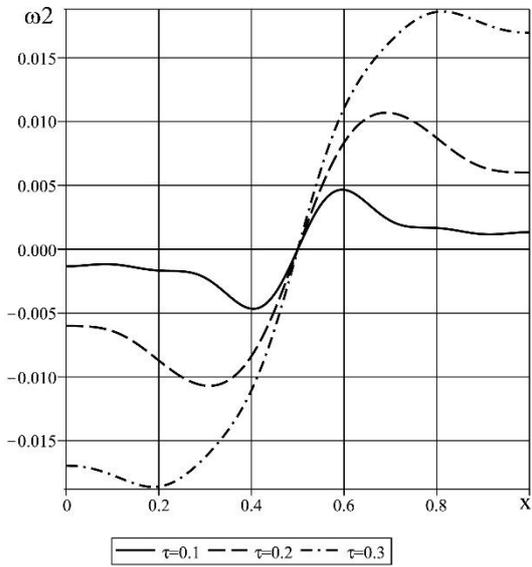


Рис.5

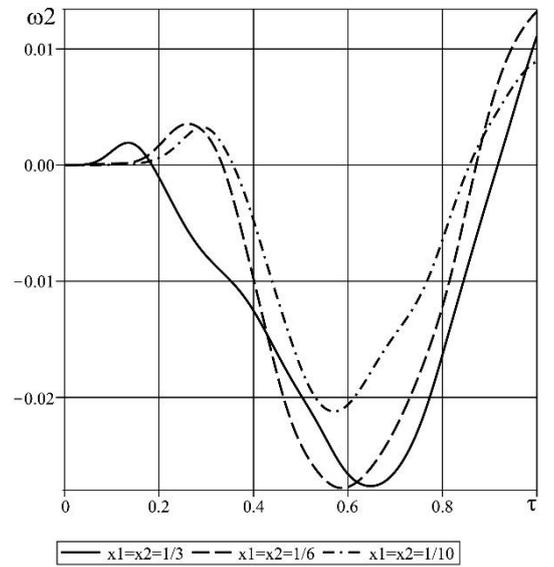


Рис.6

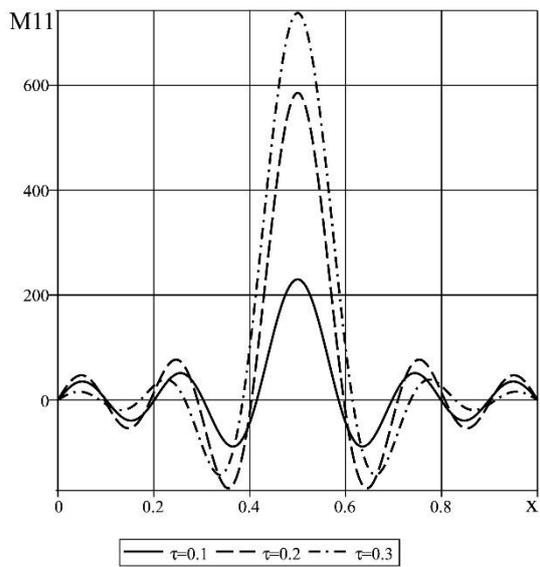


Рис.7

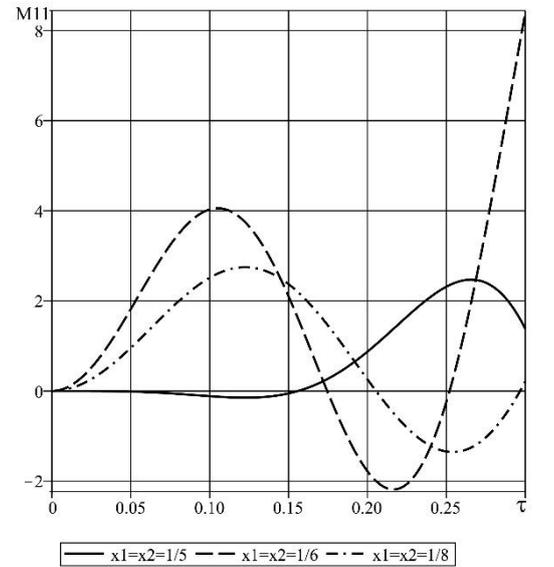


Рис.8

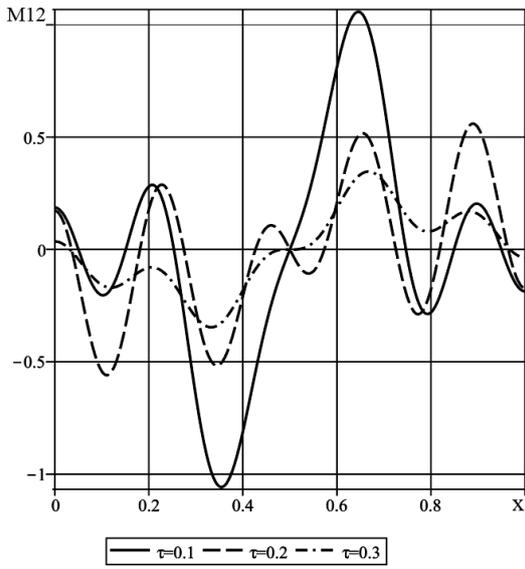


Рис.9

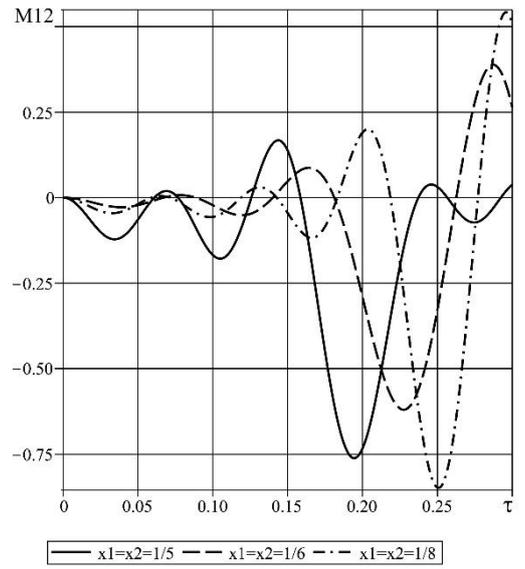


Рис.10

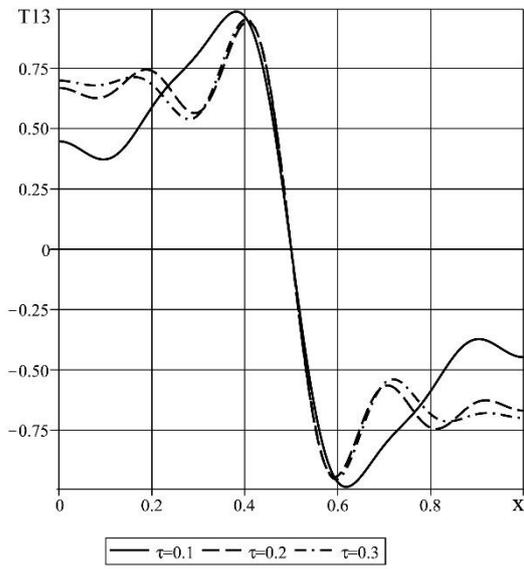


Рис.11

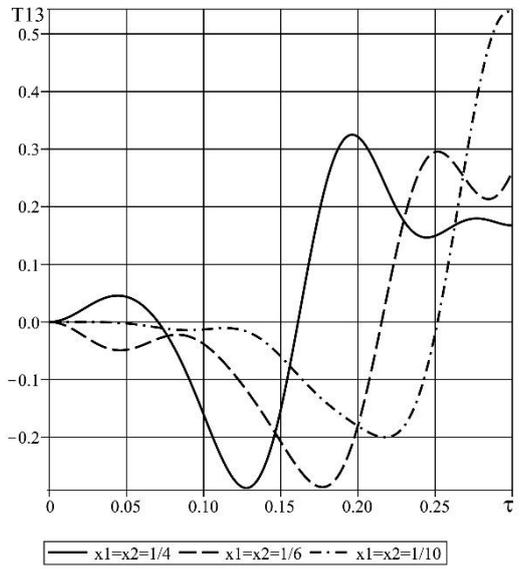


Рис.12

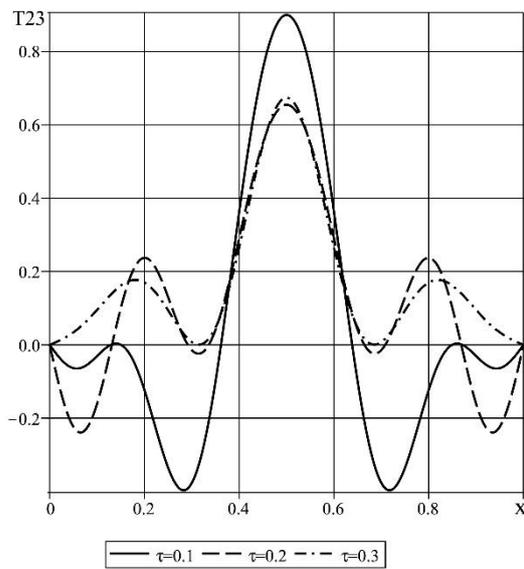


Рис.13

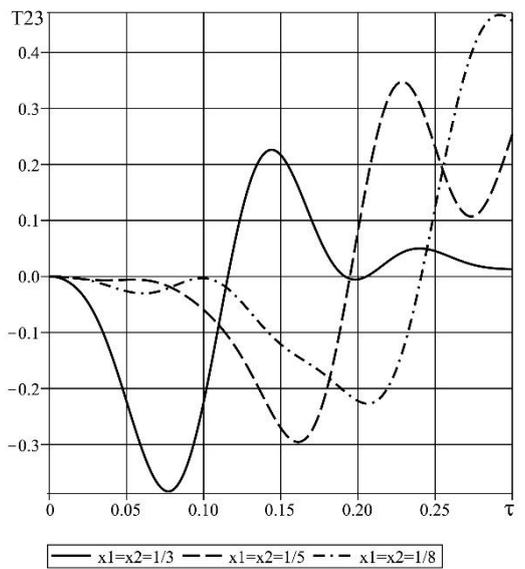


Рис.14

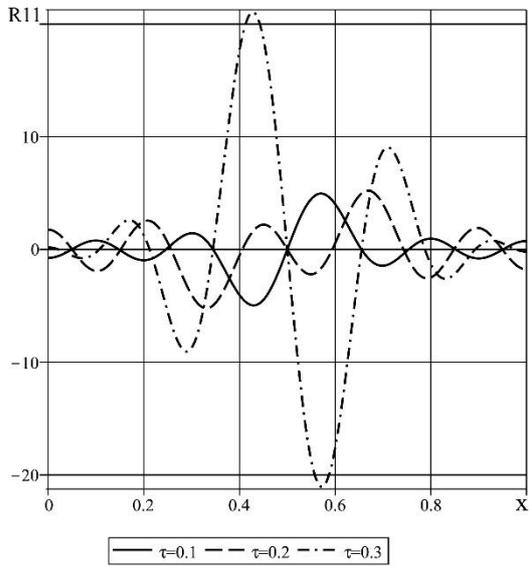


Рис.15

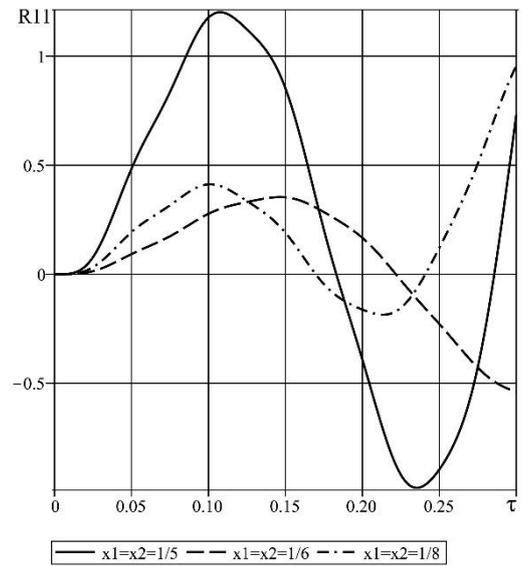


Рис.16

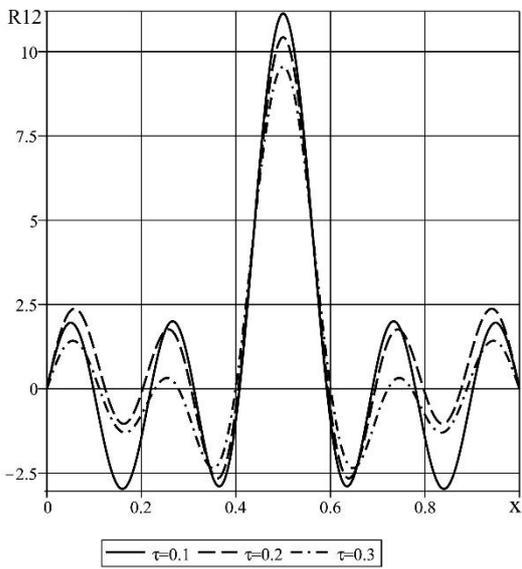


Рис.17

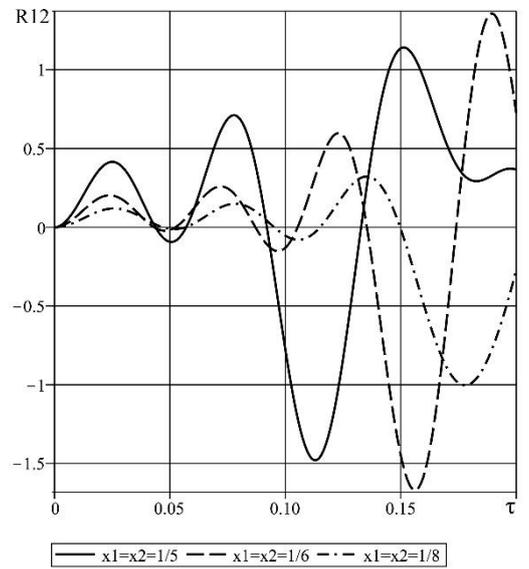


Рис.18

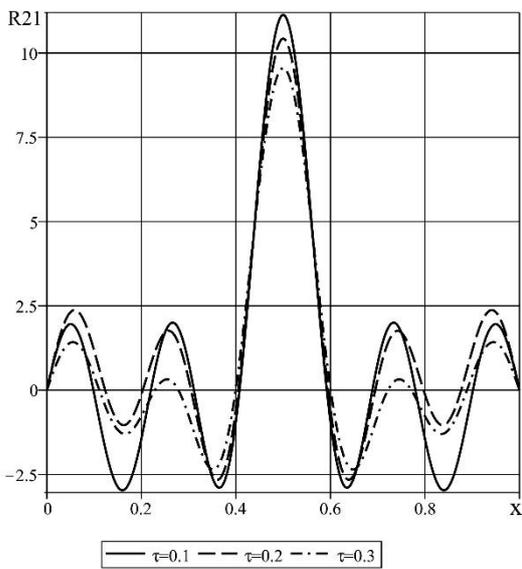


Рис.19

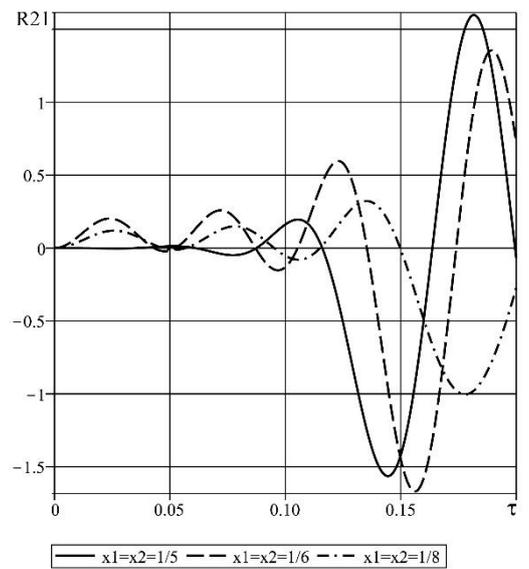


Рис.20

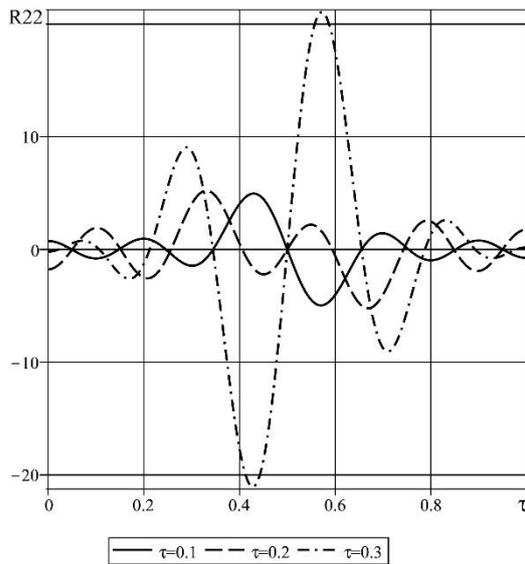


Рис.21

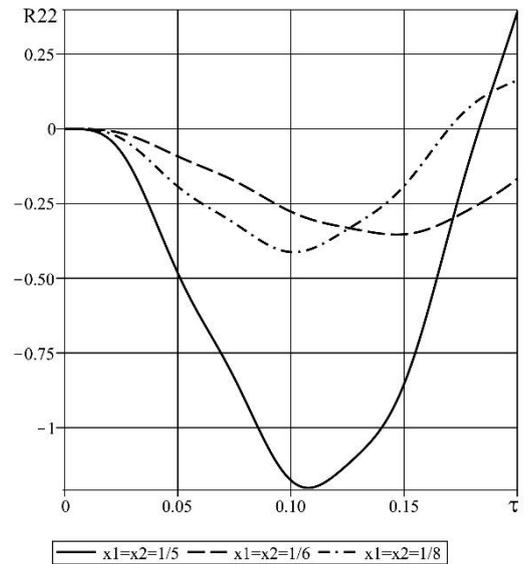


Рис.22

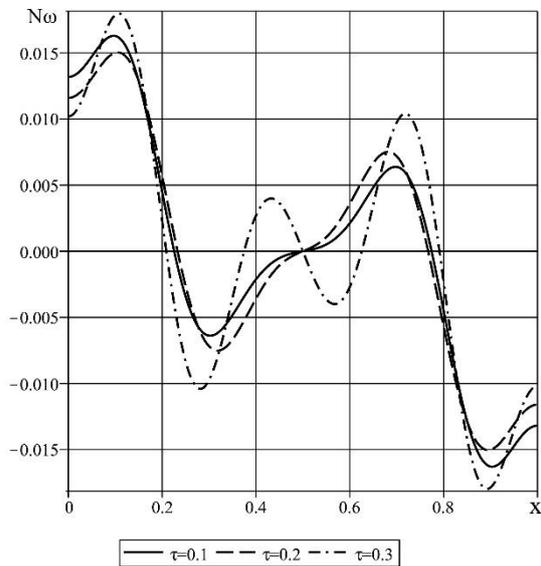


Рис.23

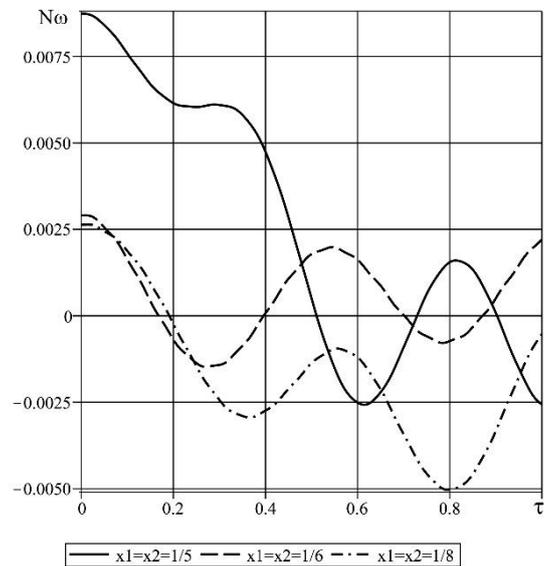


Рис.24

5. Заключение

Представлена модель нестационарного изгиба шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины. В ее основе лежит гипотеза Кирхгофа-Лява и пренебрежение обжатием поперечного волокна, что позволяет использовать минимально возможное число искомых функций.

Предложенный метод эффективно решает задачу. Численные расчеты для нагрузки в виде нормальной силы, изменяющейся по закону Хевисайда,

продемонстрировали точность предложенного метода и его применимость для анализа динамического поведения упругих пластин. Используемый подход может найти широкое применение в инженерной практике, особенно в тех областях, где требуется детальный анализ динамических характеристик конструкций, таких как аэрокосмическая и машиностроительная отрасли.

Список источников

1. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
2. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29269>
3. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>
4. Нгуен Тхань Тунг, Тарлаковский Д.В. Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104123>

5. Левицкий Д.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное деформированное состояние пластины Тимошенко // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168157>. DOI: [34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.26907/2541-7713.2022.125.05)
6. Тарлаковский Д.В., Май Куок Чиен. Начально-краевые задачи для моментных упругих пластин // Материалы XII Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте», посвященная 160-летию Бел. ж. д. (Гомель, 24–25 ноября 2022). – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2023. С. 262–263.
7. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells Advanced Structured Materials // Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading. Springer Nature. Switzerland AG, 2020. V. 186. P. 273–293. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11
8. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2018. Т. 160. № 3. С. 561–577.
9. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общая теория упругих оболочек. - М.: Изд-во МАИ, 2018. – 112 с.
10. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Упругие пластины и пологие оболочки. - М.: Изд-во МАИ, 2018. – 92 с.

11. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенные функции в механике деформируемого твердого тела. Интегральные преобразования и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2019. – 100 с.
12. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. II. – М.: Высшая школа, 1981. – 584 с.
14. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
15. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. - Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. - 260 с.
16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 610 с.
17. До Нгок Дат, Тарлаковский Д.В. Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины – простейшая модель // Материалы XXIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Кремёнки, 15–19 мая 2023). – М.: ООО "ТРП", 2023. – С. 102.
18. До Нгок Дат, Тарлаковский Д.В. Изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины при использовании двух упрощающих гипотез под действием нестационарной нагрузки // Материалы Международной научно-

практической конференции, посвящ. 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023). – Гомель: БелГУТ, 2023. Ч. 2. С. 156–158.

19. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.

20. Гарлаковский Д.В., Фарманян А.Ж., Гафуров У.С. Уравнения движения изотропной сферической моментной упругой оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2024. Т. 86. № 2. С. 168–181.

21. Мирзакабилов Н.Х. Методы расчета колебаний вязкоупругой многослойной (трехслойной) пластины // Universum: технические науки. 2024. № 7-2 (124). С. 39-43.

22. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Турчин А.С. SH-волны на поверхности биморфной магнито-электроупругой пластины // Наука Юга России. 2024. Т. 20. № 2. С. 3-15. DOI [10.7868/S25000640240201](https://doi.org/10.7868/S25000640240201)

23. Rogacheva N.N., Zheglova Yu.G. Problem of Plate Bending in the Moment Asymmetric Theory of Elasticity // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2023. V. 19, No. 2. P. 71-80. DOI: [10.22337/2587-9618-2023-19-2-71-80](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-2-71-80)

24. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Изгиб трехслойной круговой пластины кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке // Актуальные вопросы машиноведения. 2023. Т. 12. С. 47-51.

25. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Абдусаттаров А. Изгиб трехслойной пластины в температурном поле моментной нагрузкой // Механика. Исследования и инновации. 2023. № 16. С. 189-195.

26. Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)
27. Koreneva E.B. Unsymmetric Oscillations of Anisotropic Plate Having an Additional Mass // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17, No. 1. P. 48-54. DOI: [10.22337/2587-9618-2021-17-1-48-54](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-1-48-54)
28. Zavyalova K.N., Shishmarev K.A., Korobkin A.A. The Response of a Poroelastic Ice Plate to an External Pressure // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2021. Vol. 14, No. 1. P. 87-97. DOI: [10.17516/1997-1397-2021-14-1-87-97](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-87-97)
29. Leonenko D.V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness // Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials. 2021. No. 1 (54). P. 25-29. DOI: [10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29](https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29).
30. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
31. Sabirov R.A. Compound bending of an orthotropic plate // Siberian Journal of Science and Technology. 2020. Vol. 21, No. 4. P. 499-513. DOI: [10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513](https://doi.org/10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513)
32. Варданын С.В. Упрощенный метод решения задачи поперечного изгиба упругих микрополярных пластин // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 126-133. DOI: [10.1134/S0032823519010132](https://doi.org/10.1134/S0032823519010132)

33. Товстик П.Е. Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6. № 1. С. 157-169. DOI: [10.21638/11701/spbu01.2019.112](https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112)
34. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100589>
35. Елков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=100622>
36. Денисов С.Л., Медведский А.Л. Разработка и верификация численно-аналитического метода расчёта отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=75542>
37. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53018>
38. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием параболических нагрузок // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53490>

39. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2 (312). С. 148-156.
40. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 4. С. 461-469.
41. Протуро И.И. Цилиндрический изгиб трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой // Материалы, технологии, инструменты. 2011. Т. 16. № 3. С. 5-9.
42. Саркисян С.О. Особенности напряженно-деформированного состояния тонких пластин в рамках теории микрополярной упругости // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 1. С. 81-95. DOI: [10.7242/1999-6691/2009.2.1.6](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.1.6)
43. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. № 1. С. 129-147.
44. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. 2008. № 16. С. 111-120.
45. Ващенко А.В. Определение зависимости массы топлива, необходимого для межорбитальных переходов, и массы молекулярного защитного экрана от высоты рабочей орбиты спутника, предназначенного для получения полупроводниковых пластин методом молекулярно-лучевой эпитаксии // Труды МАИ. 2007. № 26. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34031>

46. Афанасьев А.А., Къи С. Исследование усталостной долговечности перфорированных пластин и цилиндрических панелей // Труды МАИ. 2005. № 19.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34159>

References

1. Lai Tkhan' Tuan, Tarlakovskii D.V. Propagation of Nonstationary Axisymmetric Disturbances from the Surface of a Sphere Filled with a Cosserat Pseudo-Elastic Medium. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267>
2. Nguen Ngok Khoa, Tarlakovskii D.V. Nonstationary Surface Influence Functions for an Elastic-Porous Half-Plane. *Trudy MAI*. 2012. No. 53. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29269>
3. Chan Le Tkhai, Tarlakovskii D.V. Moment Elastic Half-Plane Under the Action of Nonstationary Surface Normal Displacements. *Trudy MAI*. 2018. No. 102. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=99731>
4. Nguen Tkhan' Tung, Tarlakovskii D.V. Antiplane Nonstationary Motion of an Electromagnetic Elastic Half-Space Considering Piezoelectric Effects. *Trudy MAI*. 2019. No. 105. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104123>
5. Levitskii D.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Deformed State of the Timoshenko Plate. *Trudy MAI*. 2022. No. 125. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168157>. DOI: [34759/trd-2022-125-05](https://doi.org/10.26907/2541-7713.2022.125-05)
6. Tarlakovskii D.V., Mai Kuok Chien. Initial-Boundary Problems for Moment Elastic Plates. *Materialy XII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Problemy*

bezopasnosti na transportE», posvyashchennaya 160-letiyu Bel. zh. d. (November, 24–25, 2022, Gomel', Belarus). Gomel': Belorusskii gosudarstvennyi universitet transporta Publ., 2023. P. 262–263.

7. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized Linear Model of Dynamics of Elastic Moment Shells Advanced Structured Materials. *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Springer Nature. Switzerland AG, 2020. V. 186. P. 273–293. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11

8. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Generalized Linear Model of Dynamics of Thin Elastic Shells. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2018. V. 160, No. 3. P. 561–577. (In Russ.)

9. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchaya teoriya uprugikh obolochek* (General Theory of Elastic Shells: Textbook). Moscow: Izd-vo MAI Publ., 2018. 112 p.

10. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki* (Elastic Plates and Shallow Shells: Textbook). Moscow: Izd-vo MAI Publ., 2018. 92 p.

11. Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obobshchennye funktsii v mekhanike deformiruемого tverdogo tela. Integral'nye preobrazovaniya i differentsial'nye uravneniya* (Generalized Functions in the Mechanics of Deformable Solids. Integral Transforms and Differential Equations: Textbook). Moscow: Izd-vo MAI-PRINT Publ., 2019. 100 p.

12. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in Continuous Media). Moscow: Fizmatlit Publ., 2004. 472 p.
13. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza. V. II.* (Course of Mathematical Analysis V. II.). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1981. 584 p.
14. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoi.* Wave Processes in Solids with Microstructure. Moscow: Moscow State University Publishing, 1999. 328 p.
15. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh* (Wave Processes in Continuous Media). Sarov: Izd-vo RFYATS-VNIIEHF Publ., 2012. 260 p.
16. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable). Moscow - Leningrad: GITTL Publ., 1951. 610 p.
17. Do Ngok Dat, Tarlakovskii D.V. Nonstationary Bending of a Hinge-Supported Moment Elastic Rectangular Plate – The Simplest Model. *Materialy XXIX Mezhdunarodnogo simpoziuma «Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred» im. A.G. Gorshkova* (Kremenki, 15–19 May, 2023). Moscow: OOO "TRP" Publ., 2023. P. 102.
18. Do Ngok Dat, Tarlakovskii D.V. Bending of a Hinge-Supported Moment Elastic Rectangular Plate Using Two Simplifying Hypotheses Under the Influence of Nonstationary Loading. *Materialy Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, posvyashch. 70-letiyu BeLIIZH-Ta – BeLGUTa* (Gomel', 16–17 November, 2023). Gomel': BeLGUT Publ., 2023. Ch. 2. P. 156–158.

19. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* (Theory of Elasticity). Moscow: Mir Publ., 1975. 872 p.
20. Tarlakovskii D.V., Farmanyanyan A.Zh., Gafurov U.S. Equations of Motion for an Isotropic Spherical Moment Elastic Shell. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2024. V. 86, No. 2. P. 168–181. (In Russ.). DOI: [10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181)
21. Mirzakabilov N.Kh. Methods for calculating the oscillations of a viscoelastic multilayer (three-layer) plate. *Universum: tekhnicheskie nauki*. 2024. No. 7-2 (124). P. 39-43. (In Russ.)
22. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Turchin A.S. SH-waves on the surface of a bimorph magneto-electroelastic plate. *Nauka Yuga Rossii*. 2024. V. 20, No. 2. P. 3-15. (In Russ.). DOI: [10.7868/S25000640240201](https://doi.org/10.7868/S25000640240201)
23. Rogacheva N.N., Zheglova Yu.G. Problem of Plate Bending in the Moment Asymmetric Theory of Elasticity. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2023. V. 19, No. 2. P. 71-80. DOI: [10.22337/2587-9618-2023-19-2-71-80](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2023-19-2-71-80)
24. Pleskachevskii Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Bending of a three-layer circular plate with a ring load in a neutron flux. *Aktual'nye voprosy mashinovedeniya*. 2023. V. 12, P. 47-51. (In Russ.)
25. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Abdusattarov A. Bending of a three-layer plate in a temperature field under momentary load. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii*. 2023. No. 16. P. 189-195. (In Russ.)
26. Malinin G.V. Methods for calculating ribbed plates for strength and stability. *Trudy MAI*. 2021. No. 121. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162655>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)

27. Koreneva E.B. Unsymmetric Oscillations of Anisotropic Plate Having an Additional Mass. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. V. 17, No. 1. P. 48-54. DOI: [10.22337/2587-9618-2021-17-1-48-54](https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-1-48-54)
28. Zavyalova K.N., Shishmarev K.A., Korobkin A.A. The Response of a Poroelastic Ice Plate to an External Pressure. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2021. V. 14, No. 1. P. 87-97. DOI: [10.17516/1997-1397-2021-14-1-87-97](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-87-97)
29. Leonenko D.V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2021. No. 1 (54). P. 25-29. DOI: [10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29](https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-1-54-25-29)
30. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. Effective test stands for studying natural vibrations of open cylindrical shells and plates. *Trudy MAI*. 2020. No. 113. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
31. Sabirov R.A. Compound bending of an orthotropic plate. *Siberian Journal of Science and Technology*. 2020. V. 21, No. 4. P. 499-513. DOI: [10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513](https://doi.org/10.31772/2587-6066-2020-21-4-499-513)
32. Vardanyan S.V. Simplified method for solving the problem of transverse bending of elastic micropolar plates. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2019. V. 83, No. 1. P. 126-133. (In Russ.). DOI: [10.1134/S0032823519010132](https://doi.org/10.1134/S0032823519010132)
33. Tovstik P.E. Two-dimensional model of an anisotropic plate of second-order accuracy. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*. 2019. V. 6, No. 1. P. 157-169. (In Russ.). DOI: [10.21638/11701/spbu01.2019.112](https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112)

34. Firsanov V.V., Zoan K.KH. Study of the stress-strain state of symmetrical rectangular plates of arbitrary geometry based on an improved theory. *Trudy MAI*. 2018. No. 103. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100589>
35. Erkov A.P., Dudchenko A.A. On the stability of plates with variable rigidity. *Trudy MAI*. 2018. No. 103. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
36. Denisov S.L., Medvedskii A.L. Development and verification of a numerical-analytical method for calculating the response of plates to broadband acoustic impact. *Trudy MAI*. 2016. No. 91. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75542>
37. Starovoitov E.I., Lokteva N.A., Starovoitova N.A. Deformation of three-layer composite orthotropic rectangular plates. *Trudy MAI*. 2014. No. 77. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018>
38. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular three-layer plates on an elastic foundation under parabolic loads. *Trudy MAI*. 2014. No. 78. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53490>
39. Sarkisyan S.O. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and features of their strength and stiffness characteristics. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2012. V. 53, No. 2 (312). P. 148-156. (In Russ.)
40. Sarkisyan S.O., Sarkisyan A.A. General dynamic theory of micropolar elastic thin plates with free rotation and features of their free vibrations. *Akusticheskii zhurnal*. 2011. V. 57, No. 4. P. 461-469. (In Russ.)
41. Proturo I.I. Cylindrical bending of a three-layer orthotropic plate with a rigid overlay. *Materialy, tekhnologii, instrumenty*. 2011. V. 16, No. 3. P. 5-9. (In Russ.)

42. Sarkisyan S.O. Features of the stress-strain state of thin plates within the framework of micropolar elasticity theory. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred.* 2009. V. 2, No. 1. P. 81-95. (In Russ.). DOI: [10.7242/1999-6691/2009.2.1.6](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.1.6)
43. Sarkisyan S.O. Boundary problems of the asymmetric elasticity theory for thin plates. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 2008. V. 72, No. 1. P. 129-147. (In Russ.)
44. Sarkisyan S.O. General models of micropolar elastic thin plates. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov.* 2008. No.16. P. 111-120. (In Russ.)
45. Vashchenko A.V. Determining the dependence of fuel mass needed for interorbital transfers and the mass of a molecular protective screen on the height of the working orbit of a satellite intended for producing semiconductor plates by molecular beam epitaxy. *Trudy MAI.* 2007. No. 26. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34031>
46. Afanas'ev A.A., K'i S. Study of the fatigue life of perforated plates and cylindrical panels. *Trudy MAI.* 2005. No. 19. (In Russ.) URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34159>

Статья поступила в редакцию 03.09.2024

Одобрена после рецензирования 03.12.2024

Принята к публикации 25.12.2024

The article was submitted on 03.09.2024; approved after reviewing on 03.12.2024; accepted for publication on 25.12.2024