

УДК 536.2

## Температурное поле прозрачного для излучения твердого тела с поглощающим сферическим включением

А. В. Аттетков, И. К. Волков, К. А. Гайдаенко

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва;  
e-mail: fn2@bmstu.ru, kseniyagaydaenko@gmail.com*

Поступила в редакцию 3.05.2018

Рассмотрена задача об определении температурного поля прозрачного для излучения твердого тела, содержащего поглощающее включение. Разработана иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели процесса теплопереноса в изучаемой системе, включающая «уточненную модель сосредоточенной емкости», модель «сосредоточенная емкость» и «усеченную модель сосредоточенной емкости». Каждая из математических моделей иерархии представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие сферического включения в изучаемой системе.

С применением интегрального преобразования Лапласа и стандартной техники вычисления интеграла Меллина в аналитически замкнутом виде найдены решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности при воздействии на объект исследований потока излучения постоянной плотности мощности. Подробно проанализирована модель «сосредоточенная емкость», базирующаяся на гипотезе о предельно большой теплопроводности поглощающего включения. Показано, что ее реализация позволяет представить решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности в аналитическом виде, более удобном с точки зрения как его практического применения, так и нахождения условий применимости упрощенных аналогов базовой математической модели.

Определены достаточные условия, при удовлетворении которых упрощенные аналоги базовой математической модели позволяют с заданной точностью идентифицировать температурное поле анализируемой системы. Представлены теоретические оценки максимально возможной погрешности в определении температурного поля объекта исследований при применении упрощенных аналогов базовой модели.

Ключевые слова: изотропное твердое тело, лазерное излучение, поглощающее сферическое включение, температурное поле, интегральное преобразование Лапласа.

### Введение

В теоретических исследованиях по проблеме лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов специфическое положение занимает математическая модель процесса теплопереноса в прозрачном для излучения изотропном твердом теле с поглощающим сферическим включением (в дальнейшем – сферическим очагом разогрева) [1–11]. Отмеченная специфика заключается в относительной простоте

исходной математической модели и трудностях, возникающих при нахождении решения соответствующей смешанной задачи для системы уравнений в частных производных параболического типа. Решение этой задачи, представленное в аналитически замкнутом виде, авторам неизвестно.

В работах [1, 4, 5] анализируется упрощенный аналог рассматриваемой математической модели, базирующийся на стандартном предположении об идеальности теплового контакта в из-

учаемой системе и гипотезе [12–14] о «предельно большой теплопроводности очага разогрева», что фактически означает возможность реализации математической модели термически тонкого тела [14].

Возможна другая трактовка анализируемой модели, базирующаяся на гипотезе о возможности приравнивания среднеинтегральной температуры поглощающего сферического включения температуре границы изучаемой системы, т. е. на реализации идеи «сосредоточенная емкость» [15]. Данный подход позволяет дать математическую интерпретацию и развивать саму идею «сосредоточенная емкость». В частности, известна «уточненная модель сосредоточенной емкости» [15], обеспечивающая весьма качественную аппроксимацию исходной математической модели процесса теплопереноса (см., например, [16, 17]) и позволяющая теоретически обосновать условие применимости модели «сосредоточенная емкость».

Цель проведенных исследований – разработка иерархии упрощенных аналогов базовой математической модели процесса теплопереноса в прозрачном для изучения изотропном твердом теле с поглощающим сферическим включением и идентификация условий их реализации.

### Постановка задачи и базовая математическая модель

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное пространство с инертным включением сферической формы радиуса  $r_0$ . На объект исследований воздействует поток излучения с плотностью мощности  $q$ , для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться сферическим включением. В результате разогрева поглощающего включения и отвода теплоты внутрь изотропного пространства за счет теплопроводности происходит разогрев объекта исследований.

В предположении, что тепловой контакт в анализируемой системе является идеальным [13, 14, 18], исходная (базовая) модель изучаемого процесса может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} &= \chi \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} + \Lambda f(\rho, Fo) \right\}, \\ 0 &\leq \rho < 1, Fo > 0; \\ \theta(\rho, 0) &= 0; \\ \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1-0} &= \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1+0}; \\ \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1-0} &= \Lambda \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1+0}; \\ \theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} &\in L^2_{\rho^2} [0, +\infty), \end{aligned} \quad (1)$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном значении  $Fo \geq 0$  функция  $\theta(\rho, Fo)$  интегрируема с квадратом и весом  $\rho^2$  по радиальному переменному  $\rho \in [0, +\infty)$ .

В математической модели (1) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$Fo = \frac{\alpha_1 t}{r_0^2}; \quad \rho = \frac{r}{r_0}; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}; \quad \chi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

$$f = \frac{qr_0}{\lambda_1 (T_* - T_0)},$$

где  $r$  – радиус;  $t$  – время;  $T$  – температура;  $\lambda$  – теплопроводность;  $\alpha$  – температуропроводность;  $T_*$  – масштабная температура; индексы: 1 – изотропное пространство; 2 – сферический очаг разогрева; 0 – начальное значение.

### Иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели

Для достижения основной цели исследований введем в рассмотрение среднеинтегральную температуру

$$\langle \theta(Fo) \rangle = 3 \int_0^1 \theta(\rho, Fo) \rho^2 d\rho \quad (2)$$

и воспользуемся допущением, что «механизм» теплообмена в системе «твердое тело–очаг разогрева» может быть аппроксимирован законом Фурье–Ньютона–Рихмана [13, 18]:

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1+0} = \mu \left[ \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1+0} - \langle \theta(Fo) \rangle \right] \quad (3)$$

с безразмерным коэффициентом теплоотдачи  $\mu$ , подлежащим идентификации. Заметим, что используемое допущение фактически означает принятие гипотезы о допустимости реализации

идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости» [15].

Умножив левую и правую часть второго уравнения в (1) на три с последующим интегрированием по радиальному переменному  $\rho$  в пределах от 0 до 1, воспользовавшись условиями сопряжения при  $\rho = 1$ , условием принадлежности искомой функции заданному классу функций и равенствами (2), (3), преобразуем базовую математическую модель (1) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0; \\ \theta(\rho, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} &= \\ &= \varepsilon \left\{ \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right|_{\rho=1} - \mu^{-1} \left. \frac{\partial^2 \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} \right|_{\rho=1} \right\} - Q(Fo); \\ \theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} &\in L^2_{\rho^2} [1, +\infty), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$Q(Fo) \triangleq \int_0^1 f(\rho, Fo) \rho^2 d\rho;$$

$\varepsilon = (3\chi\Lambda)^{-1} = (3c_1\rho_1)^{-1} (c_2\rho_2)$  – определяющий безразмерный параметр;  $c$  – удельная массовая теплоемкость;  $\rho_k, k \in \{1, 2\}$  – плотность.

По сложившейся терминологии (см., например, [15–17]) упрощенный аналог (4) базовой модели (1) будем называть «уточненной моделью сосредоточенной емкости».

При  $\mu = +\infty$  математическая модель (4) формально трансформируется в модель «сосредоточенная емкость»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0; \\ \theta(\rho, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} &= \varepsilon \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right|_{\rho=1} - Q(Fo); \\ \theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} &\in L^2_{\rho^2} [1, +\infty). \end{aligned} \tag{5}$$

Ее реализация базируется на допущении, что среднеинтегральная температура очага разогрева равна температуре контактной границы анализируемой системы, т. е.

$$\theta(1-0, Fo) = \langle \theta(Fo) \rangle = \theta(1+0, Fo), \quad Fo \geq 0.$$

Рассматриваемую модель можно ассоциировать с принятием гипотезы, что поглощающее включение является термически тонким. Наличие такого включения в реализуемой модели фактически учитывается краевым условием при  $\rho = 1$ , явно содержащим производную безразмерной температуры по переменному  $Fo$ .

Дальнейшее упрощение этой модели связано с допущением

$$\varepsilon \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right|_{\rho=1} \ll 1,$$

что позволяет трансформировать математическую модель (5) в «усеченную модель сосредоточенной емкости»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0; \\ \theta(\rho, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} &= -Q(Fo); \\ \theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} &\in L^2_{\rho^2} [1, +\infty). \end{aligned} \tag{6}$$

Базовая математическая модель (1) и три ее упрощенных аналога (4)–(6) представляют собой иерархию математических моделей процесса теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим сферическим включением.

### Температурное поле

Для достижения основной цели исследований дальнейший анализ температурного поля изучаемой системы будем проводить с применением упрощенных аналогов (4)–(6) базовой математической модели (1). С целью упрощения дальнейших рассуждений воспользуемся стандартным приемом [12] и введем функцию

$$V(\rho, Fo) \triangleq \rho \theta(\rho, Fo). \tag{7}$$

Используемая подстановка (7) позволяет трансформировать математическую модель (4) к виду:

$$\frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 V(\rho, Fo)}{\partial \rho^2}, \quad \rho > 1, Fo > 0;$$

$$\begin{aligned}
 & V(\rho, 0) = 0; \\
 & \left. \frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = -Q(Fo) + V(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1} + \\
 & + \varepsilon \left\{ \left(1 + \mu^{-1}\right) \left. \frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right|_{\rho=1} - \mu^{-1} \left. \frac{\partial V^2(\rho, Fo)}{\partial Fo \partial \rho} \right|_{\rho=1} \right\}; \quad (8) \\
 & V(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2[1, +\infty),
 \end{aligned}$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном значении  $Fo \geq 0$  функция  $V(\rho, Fo)$  интегрируема с квадратом по радиальному переменному  $\rho \in [1, +\infty)$ .

Задача (8) имеет единственное решение [19], для нахождения которого воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по переменному  $Fo$ , задаваемым парой линейных операторов [13, 18]:

$$\begin{aligned}
 L[\cdot] &= \int_0^{\infty} \cdot \exp(-sFo) dFo; \\
 L^{-1}[\cdot] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \cdot \exp(sFo) ds. \quad (9)
 \end{aligned}$$

При этом естественно предполагать, что функция  $Q(Fo)$  является оригиналом используемого интегрального преобразования.

В пространстве изображений используемого интегрального преобразования (9) решение задачи (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u(\rho, s) &\equiv L[V(\rho, Fo)] = c(s) \exp(-\rho\sqrt{s}), \\
 &\quad \rho \geq 1; \\
 c(s) &= \Pi(s) \exp(\sqrt{s}) \left\{ \sqrt{s} \left[ (\varepsilon\mu^{-1})s + 1 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + s\varepsilon(1 + \mu^{-1}) + 1 \right\}^{-1}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где  $\Pi(s) = L[Q(Fo)]$ .

Для завершения процедуры решения задачи (4), полагая

$$\begin{aligned}
 V(\rho, Fo) &= L^{-1}[u(\rho, s)]; \\
 Q(Fo) &= L^{-1}[\Pi(s)],
 \end{aligned}$$

где  $L^{-1}[\cdot]$  – оператор обращения интегрального преобразования Лапласа, достаточно воспользоваться теоремой о свертках [13, 18], что с учетом равенства (7) приводит к следующему результату:

$$\theta(\rho, Fo) = \frac{1}{\rho} \int_0^{Fo} \varphi(\rho, \tau) Q(Fo - \tau) d\tau, \quad \rho \geq 1, Fo \geq 0, \quad (11)$$

где

$$\varphi(\rho, \tau) \equiv L^{-1} \left[ \frac{\exp\{-(\rho-1)\sqrt{s}\}}{\sqrt{s} \left[ (\varepsilon\mu^{-1})s + 1 \right] + s\varepsilon(1 + \mu^{-1}) + 1} \right]. \quad (12)$$

Таким образом, если в (11) конкретизирован вид функции  $Q(Fo)$ , то для определения температурного поля объекта исследований достаточно лишь найти оригинал  $\varphi(\rho, \tau)$  используемого интегрального преобразования (9). При этом, как видно из равенства (12), непосредственное обращение интегрального преобразования Лапласа с использованием его свойств и таблиц «изображение–оригинал» [18] в рассматриваемом случае не представляется возможным. Для преодоления возникших трудностей можно пойти различными путями [17]:

- непосредственное вычисление интеграла Меллина в формуле обращения (12);
- представление решения задачи (8) в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа (9) в виде суммы равномерно сходящегося функционального ряда и последующий переход к оригиналам с использованием различных теорем операционного исчисления [13, 18].

Для иллюстрации полученных результатов и нахождения условий применимости упрощенных аналогов реализуемой математической модели рассмотрим простейшую ситуацию  $Q(Fo) = Q_0 - \text{const}$ , ассоциируемую с воздействием на объект исследований потока излучения постоянной плотности мощности.

В рассматриваемом случае изображение (10) используемого интегрального преобразования принимает вид

$$u(\rho, s) = \frac{Q_0 \exp\{-(\rho-1)\sqrt{s}\}}{s \left\{ (\varepsilon\mu^{-1})s\sqrt{s} + \varepsilon(1 + \mu^{-1})s + \sqrt{s} + 1 \right\}}, \quad \rho \geq 1 \quad (13)$$

и имеет единственную особую точку в начале координат комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , являющуюся точкой ветвления. Воспользовавшись стандартной техникой вычисления интегралов Меллина [18] и ориентированным контуром, представленным, например, в [12, 18], с учетом равенства (7) решение задачи (4) можно представить в следующем виде:

$$\theta(\rho, Fo) = \frac{Q_0}{\rho} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\rho, v) \exp(-v^2 Fo) dv \right\}, \quad (14)$$

$$\rho \geq 1, Fo \geq 0,$$

где

$$f(\rho, v) = \frac{1}{vg(v)} [1 - \varepsilon(1 + \mu^{-1})v^2] \sin[(\rho - 1)v] + v(1 - \varepsilon\mu^{-1}v^2) \cos[(\rho - 1)v]; \quad (15)$$

$$g(v) = [1 - \varepsilon(1 + \mu^{-1})v^2]^2 + (1 - \varepsilon\mu^{-1})^2 v^2.$$

При  $\mu = +\infty$  (модель «сосредоточенная емкость» (5)) функция  $\theta(\rho, Fo)$ , определяющая температурное поле объекта исследований, также определена равенством (14), где согласно (15)

$$f(\rho, v) = \frac{[1 - \varepsilon v^2] \sin[(\rho - 1)v] + v \cos[(\rho - 1)v]}{vg(v)} \quad (16)$$

$$g(v) = (1 - \varepsilon v^2)^2 + v^2.$$

Решение для функции  $\theta(\rho, Fo)$ , определяемое «усеченной моделью сосредоточенной емкости» (6), известно [12] и формально может быть найдено согласно равенствам (14), (16) при  $\varepsilon = 0$ . В частности,

$$\theta(1, Fo) = Q_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-v^2 Fo)}{1 + v^2} dv \right\} =$$

$$= Q_0 [1 - \exp(Fo) \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo})], \quad (17)$$

$$Fo \geq 0$$

и справедлива следующая асимптотическая оценка при больших значениях числа Фурье:

$$\theta(1, Fo) \sim Q_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \right) \xrightarrow{Fo \rightarrow +\infty} Q_0,$$

где  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  – дополнительная функция ошибок Гаусса [18].

Следует заметить, что при  $\mu = +\infty$  изображение (13) допускает непосредственное обращение интегрального преобразования Лапласа (9) с учетом его свойств и таблиц «изображение–оригинал» [18]. Это позволяет найти эквивалентное представление решения (14), (16), более удобное с точки зрения его практической реализации.

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначение

$$d^2 \triangleq 1 - 4\varepsilon$$

и преобразуем изображение (13) для функции  $V(\rho, Fo)$  при  $\mu = +\infty$  к виду

$$u(\rho, s) = Q_0 \frac{\exp\{-(\rho - 1)\sqrt{s}\}}{s\{\varepsilon s + \sqrt{s} + 1\}} =$$

$$= \frac{Q_0}{sd} \left( \frac{1}{\sqrt{s} + \gamma_1} - \frac{1}{\sqrt{s} + \gamma_2} \right) \times \quad (18)$$

$$\times \exp\{-(\rho - 1)\sqrt{s}\}, \rho \geq 1,$$

где  $\gamma_k = (2\varepsilon)^{-1} [1 + (-1)^k d]$ ,  $k \in \{1, 2\}$ .

При переходе к оригиналу возможны три варианта представления функции  $V(\rho, Fo)$  в зависимости от корней квадратного уравнения  $z^2 + \varepsilon^{-1}(z + 1) = 0$ , каждое из которых может быть найдено по таблицам «изображение–оригинал» [18]. При  $d^2 > 0$  ( $0 < \varepsilon < 0.25$ ) с учетом равенства (7) и таблиц «изображение–оригинал» [18] температурное поле объекта исследований определяется как

$$\theta(\rho, Fo) = \frac{Q_0}{\rho} \left[ \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\rho - 1}{2\sqrt{Fo}} \right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [1 - (-1)^k d] \exp\{\gamma_k(\rho - 1) + \gamma_k^2 Fo\} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\rho - 1}{2\sqrt{Fo}} + \gamma_k \sqrt{Fo} \right\} \Big], \rho \geq 1, Fo \geq 0; \quad (19)$$

$$\theta(1, Fo) = Q_0 \left[ 1 + \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [1 - (-1)^k d] \exp\{\gamma_k^2 Fo\} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{erfc} \left\{ \gamma_k \sqrt{Fo} \right\} \right], Fo \geq 0;$$

$$\theta(1, Fo) \sim Q_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \right) \xrightarrow{Fo \rightarrow +\infty} Q_0.$$

При  $d^2 = 0$  ( $\varepsilon = 0.25$ )

$$\theta(1, Fo) = 4Q_0 L^{-1} \left[ \frac{1}{s(\sqrt{s} + 2)^2} \right] =$$

$$= Q_0 \left[ 1 - 4\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} + (8Fo - 1) \exp\{4Fo\} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{erfc} \left\{ 2\sqrt{Fo} \right\} \right], Fo \geq 0;$$



$$\theta(1, Fo) \sim Q_0 \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}} \right) \xrightarrow{Fo \rightarrow +\infty} Q_0.$$

При  $d^2 < 0$  ( $\varepsilon > 0.25$ ) представление для функции  $\theta(\rho, Fo)$  также может быть найдено с использованием таблиц «изображение–оригинал» для определенного равенством (18) изображения функции  $V(\rho, Fo)$ , в котором

$$\gamma_1 = \alpha - i\beta; \gamma_2 = \bar{\gamma}_1 = \alpha + i\beta; \alpha = (2\varepsilon)^{-1}; \beta = (2\varepsilon)^{-1}|d|;$$

$i$  – «мнимая» единица [18]. Нахождение оригинала в данном случае приводит к необходимости учета свойств функции Гаусса мнимого аргумента.

### Условия применимости упрощенных аналогов базовой математической модели

Идентифицируем условия, при удовлетворении которых упрощенные аналоги (4)–(6) базовой математической модели (1) позволяют находить функцию  $\theta(\rho, Fo)$  при  $\rho \geq 1, Fo \geq 0$  с заданной точностью  $\delta > 0$ . Для этого введем в рассмотрение множество моделей  $G_\delta^k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , где  $k=0$  соответствует базовой модели,  $k=1$  – «уточненной модели сосредоточенной емкости»,  $k=2$  – модели «сосредоточенная емкость»,  $k=3$  – «усеченной модели сосредоточенной емкости». Можно утверждать, что параметрическая идентификация множеств  $G_\delta^k$  иерархии упрощенных аналогов базовой модели эквивалентна факту установления условий применимости этих моделей.

Каждый этап упрощения базовой модели сопровождается ростом погрешности в определении температурного поля объекта исследований, поэтому  $G_\delta^3 \subset G_\delta^2 \subset G_\delta^1$ . При этом, поскольку у всех найденных решений для функции  $\theta(1, Fo)$  иерархии упрощенных аналогов базовой модели асимптотические значения совпадают и при  $Fo = +0$ , и при  $Fo = +\infty$ , то абсолютная погрешность

$$\Delta_k \triangleq |\theta_k(1, Fo) - \theta_0(1, Fo)|, k \in \{1, 2, 3\}$$

имеет максимум при некотором фиксированном значении  $Fo \in (0, +\infty)$ .

Если ввести в рассмотрение вектор определяющих параметров  $\Pi = [\varepsilon, Q]^T \in \mathbb{R}^2$  и функцию

$$E_k(\Pi) = \max_{Fo} |\theta_k(1, Fo) - \theta_{k-1}(1, Fo)|,$$

которая при каждом фиксированном значении  $k \in \{1, 2, 3\}$  равна максимально возможной по-

грешности в определении температурного поля, обусловленной  $k$ -м этапом упрощения реализуемой модели, то можно считать, что

$$G_\delta^1 \triangleq \{\Pi | E_1(\Pi) < \delta\}; G_\delta^2 \triangleq \{\Pi | E_1(\Pi) + E_2(\Pi) < \delta\}; \\ G_\delta^3 \triangleq \{\Pi | E_1(\Pi) + E_2(\Pi) + E_3(\Pi) < \delta\}.$$

Идентификация допустимых множеств  $G_\delta^k$  иерархии упрощенных аналогов базовой модели и устанавливает условия применимости реализуемых моделей.

Непосредственный анализ представленных результатов позволяет сделать вывод, что в общем случае идентификация допустимых множеств  $G_\delta^k$  вряд ли возможна без привлечения вычислительного эксперимента.

Для иллюстрации результатов проведенных исследований вновь обратимся к простейшей ситуации  $Q(Fo) = Q_0 - \text{const}$ , позволяющей аналитически оценить максимально возможные погрешности в определении температурного объекта исследований при применении упрощенных аналогов базовой модели. В качестве примера представим теоретическую оценку функции  $E_3(\Pi)$ , определяющей максимально возможную погрешность при переходе от модели «сосредоточенная емкость» (5) к «усеченной модели сосредоточенной емкости» (6).

Введем обозначение  $v(Fo) \triangleq |\theta_3(1, Fo) - \theta_2(1, Fo)|$  и, воспользовавшись равенствами (17) и (19) (случай  $d^2 < 0$ ), запишем представление функции  $v(Fo)$  в виде:

$$v(Fo) = Q_0 \left\{ \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} [1 - (-1)^k d] \exp\{\gamma_k^2 Fo\} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc}\{\gamma_k \sqrt{Fo}\} - \exp\{Fo\} \operatorname{erfc}\{\sqrt{Fo}\} \right\}, Fo \geq 0, \quad (20)$$

справедлива асимптотическая оценка  $v(Fo) \rightarrow +0$  при  $Fo \rightarrow +\infty$ .

При известной плотности потока излучения  $Q_0$  функция  $E_3(\Pi)$  зависит лишь от безразмерного параметра  $\varepsilon$  и определяется из решения задачи одномерной оптимизации

$$E_3(\Pi) = \max_{Fo} v(Fo).$$

При этом точка максимума  $Fo^*$  унимодальной функции  $v(Fo)$  (рисунок), определяемой равенством (20), может быть найдена как решение уравнения  $v'(Fo) = 0$ :

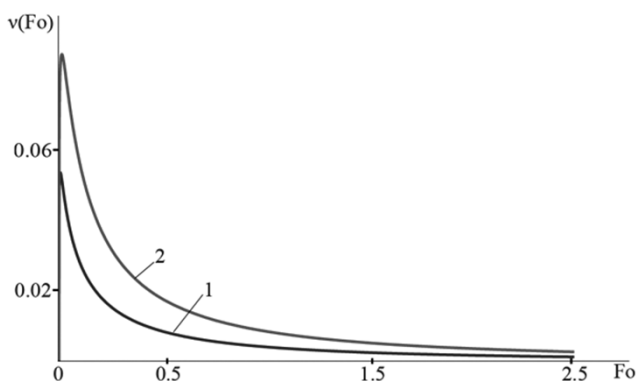


График функции  $v(Fo)$  при  $Q_0=1$  и различных значениях параметра  $\varepsilon$ : 1 – 0.1; 2 – 0.2

$$d^{-1} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \exp\{\gamma_k^2 Fo\} \operatorname{erfc}\{\gamma_k \sqrt{Fo}\} - \exp\{Fo\} \operatorname{erfc}\{\sqrt{Fo}\} + (\pi Fo)^{-1/2} = 0.$$

### Заключение

1. Практическое использование гипотезы о допустимости реализации идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости» приводит к необходимости решения задачи идентификации безразмерного параметра  $\mu$ . Относительно значения этого параметра могут быть высказаны различные соображения. Например, его выбор можно проводить из решения задачи минимаксной оптимизации – задачи нахождения минимума максимального отклонения безразмерной температуры границы поглощающего сферического включения, определяемой математической моделью (4), от ее истинного значения, определяемого базовой моделью (1).

2. При произвольном законе  $Q(Fo)$  воздействующего потока излучения решение задач идентификации допустимых множеств  $G_\delta^k, k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , устанавливающих условия применимости иерархии упрощенных аналогов базовой математической модели, предполагает корректное задание рабочей области значений вектора  $\Pi$  максимально возможных погрешностей  $E_k(\Pi)$  в определении температурного поля объекта исследований и вряд ли возможно без привлечения вычислительного эксперимента.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ассовский И. Г.** Физика горения и внутренняя баллистика. М.: Наука, 2005. 357 с.

2. **Страковский Л. Г.** Об очаговом механизме зажигания в некоторых вторичных ВВ монохроматическим световым импульсом // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21. № 1. С. 58–61.
3. **Александров Е. И., Вознюк А. Г., Ципилев В. П.** Влияние поглощающих примесей на зажигание ВВ лазерным излучением // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25. № 1. С. 3–9.
4. **Черный А. В.** О механизме зажигания конденсированных вторичных ВВ лазерным импульсом // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32. № 1. С. 11–19.
5. **Буркина Р. С., Морозова Е. Ю., Ципилев В. П.** Иницирование реакционно-способного вещества потоком излучения при его поглощении оптическими неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 5. С. 95–105.
6. **Кригер В. Г., Каленский А. В., Ананьева М. В., Звекков А. А., Зыков И. Ю.** Физико-химические основы микроочаговой модели взрывного разложения энергетических материалов // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 9–3. С. 175–180.
7. **Кригер В. Г., Каленский А. В., Звекков А. А., Зыков И. Ю., Никитин А. П.** Процессы теплопереноса при лазерном разогреве включений в инертной матрице // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 375–382.
8. **Kalenskii A. V., Kriger V. G., Zykov I. Yu., Anan'eva M. V.** Modern microcenter heat explosion model // Journal of Physics: Conference Series. 2014. V. 552. N 1. P. 012037.
9. **Адуев Б. П., Ананьева М. В., Звекков А. А., Каленский А. В., Кригер В. Г., Никитин А. П.** Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 92–99.
10. **Каленский А. В., Звекков А. А., Никитин А. П.** Микроочаговая модель с учетом зависимости коэффициента эффективности поглощения лазерного импульса от температуры // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 4. С. 43–49.
11. **Каленский А. В., Звекков А. А., Галкина Е. В., Нурмухаметов Д. Р.** Критические параметры микроочаговой модели импульсного лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 9. С. 45–52.
12. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
13. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
14. **Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.** Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 512 с.
15. **Пудовкин М. А., Волков И. К.** Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
16. **Аттетков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С.** Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранной стенке при осесимметричном тепловом воздействии // Изв. РАН. Энергетика. 2003. № 5. С. 75–88.
17. **Аттетков А. В., Волков И. К.** «Уточненная модель сосредоточенной емкости» процесса теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 2. С. 92–96.

18. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
19. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
20. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Сингулярные интегральные преобразования как метод решения одного класса задач нестационарной теплопроводности // Изв. РАН. Энергетика. 2016. № 1. С. 148–156.

## Temperature field of transparent for radiation solid with absorbing spherical inclusion

**A. V. Attetkov, I. K. Volkov, K. A. Gaydaenko**

*Bauman Moscow State Technical University(National Research University), Moscow  
e-mail: fn2@bmstu.ru; kseniya.gaydaenko@gmail.com*

The article considers the problem of the temperature field determining of a transparent to radiation solid containing absorbing inclusions. A hierarchy of simplified analogues of the basic mathematical model of the heat transfer process in the system under study was developed, including “refined capacitance model”, “concentrated capacity” model and “truncated concentrated capacitance model”. Each of the mathematical models of the hierarchy represents a mixed problem for a parabolic type partial differential equation with a specific boundary condition actually accounting for the presence of a spherical inclusion in the system under study.

Solutions for corresponding problems of non-stationary heat conductivity under the impact of a radiation flow of constant power density on the subject under study were obtained applying Laplace integral transformation and the standard technique for Mellin integral calculating in an analytical closed form. The “concentrated capacitance model” based on the hypothesis of the extreme high heat conductivity of the absorbing inclusion was analyzed in detail. It was shown, that its realization allowed representing the solution of non-stationary heat conductivity in the analytical form more convenient from the view point of both its practical application and obtaining applicability conditions of simplified analogs of the basic model.

Sufficient conditions are established at which satisfaction the simplified analogues of the basic model allow identify the temperature field of the analyzed system with a specified accuracy. The article presents theoretical evaluations of the possible error in determining the temperature field of an object under study while applying the simplified analogs of the basic model.

Keywords: isotropic solid, laser radiation, absorbing spherical inclusion, temperature field, Laplace’s integrated transformation.

### REFERENCES

1. **Assovskij I. G.** *Fizika goreniya i vnutrennyaya ballistika* [Combustion physics and internal ballistics]. М.: Nauka, 2005, 357 p. In Russ.
2. **Strakovskij L. G.** Ob ochagovom mekhanizme zazhiganiya v nekotorykh vtorychnykh VV monokhromaticheskimi svetovym impul’som [On the focal mechanism of ignition in some secondary explosives by a monochromatic light pulse] *Fizika goreniya i vzryva – Physics of combustion and explosion*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 41–45. In Russ.
3. **Aleksandrov E. I., Voznyuk A. G., Tsipilev V. P.** Vliyanie pogloshhayushhikh primesej na zazhiganie VV lazernym izlucheniem [Effect of absorbing impurities on the ignition of explosive by laser radiation]. *Fizika goreniya i vzryva – Physics of combustion and explosion*, 1989, vol. 25, no.1, pp. 3–9. In Russ.
4. **Chernaj A. V.** O mekhanizme zazhiganiya kondensirovannykh vtorychnykh VV lazernym impul’som [On the mechanism of ignition of condensed secondary explosives by a laser pulse]. *Fizika goreniya i vzryva – Physics of combustion and explosion*, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 11–19. In Russ.
5. **Burkina R. S., Morozova E. Y., Tsipilev V. P.** Initiation of a reactive material by a radiation beam absorbed by optical heterogeneities of the material. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 581–590.
6. **Kruger V. G., Kalenskij A. V., Anan’eva M. V., Zvekov A. A., Zykov I. S.** Fiziko-khimicheskie osnovy mikroochagovoj modeli vzryvnogo razlozheniya ehnergeticheskikh materialov [Physico-chemical basis of microfocal model of explosive decomposition of energy materials]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*, 2013, vol. 56, no. 9–3, pp. 175–180. In Russ.
7. **Kruger V. G., Kalenskii A. V., Zvekov A. A., Zykov I. Yu., Nikitin A. P.** Heat-transfer processes upon laser heating of inert-matrix-hosted inclusions. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2013, no. 3, pp. 367–374.
8. **Kalenskii A. V., Kruger V. G., Zykov I. Yu., Anan’eva M. V.** Modern microcenter heat explosion model. *Journal of Physics: Conference Series*, 2014, vol. 552, no. 1, pp. 012037.
9. **Aduv B. P., Anan’eva M. V., Zvekov A. A., Kalenskii A. V., Kruger V. G., Nikitin A. P.** Miro-hotspot model for the laser initiation of explosive decomposition of energetic materials with melting taken into account. *Com-*



- bustion, Explosion, and Shock Waves*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 704–710. <https://doi.org/10.1134/S0010508214060112>
10. **Kalenskii, A. V., Zvekov, A. A., Nikitin, A. P.** Micro-hot-spot model taking into account the temperature dependence of the laser pulse absorption efficiency factor. *Russ. J. Phys. Chem. B*, 2017, vol. 11, issue 2, pp. 282–287. <https://doi.org/10.1134/S199079311702018X>
  11. **Kalenskii A. V., Zvekov A. A., Galkina E. V., Nurmuhametov D. R.** Critical parameters of a micro-hotspot model of the laser-pulse initiation of the explosive decomposition of energetic materials. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2017, vol.11, issue 5, pp. 820–827. <https://doi.org/10.1134/S1990793117050050>.
  12. **Karlsru G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvyordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
  13. **Kartashov E. M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
  14. **Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N.** *Matematicheskie modeli mekhaniki i ehlektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continua]. Moscow: Publishing house Bauman, 2008. 512 p. In Russ.
  15. **Pudovkin M. A., Volkov I. K.** *Kraevye zadachi matematicheskoy teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polej v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary-value problems of the mathematical theory of heat conduction in application to calculations of temperature fields in oil reservoirs in water flooding]. Kazan: Publishing house of Kazan University, 1978. 188 p. In Russ.
  16. **Attetkov A. V., Volkov I. K., Tverskaya E. S.** Matematicheskoe modelirovanie protsessa teploperenosa v ekran-noj stenke pri osesimmetrichnom teplovom vozdeystvii [The mathematical modeling of the heat transfer process at screening wall with the symmetrical heat flow influenced in it]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2003, no.5, pp. 75–88. In Russ.
  17. **Attetkov A. V., Volkov I. K.** «Utochnennaya model' sosredotochennoj emkosti» protsessa teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushhim pokrytiem [«A refined model of concentrated capacity» of heat transfer in a solid with coated spherical hot spot]. *Teplovy protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 92–96. In Russ.
  18. **Lykov A. V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
  19. **Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.** *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. In Russ.
  20. **Attetkov A. V., Volkov I. K.** Singulyarnye integral'nye preobrazovaniya kak metod resheniya odnogo klassa zadach nestatsionarnoj teploprovodnosti [The singular integral transformations as a method of solution for one class of non stationary heat conduction problems] *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2016, no. 1, pp. 148–156. In Russ.