УДК: 539.123.17

Дефекты общей теории поля

Р.И.Храпко

Показано, что процедура Белинфанте – Розенфельда некорректна. Стандартное применение лагранжевого формализма в общей теории поля привело к ошибочному выводу об отсутствии спина. Представлено выражение для тензорной плотности спина в электродинамике.

1. Общая теория поля

Общепринято, что главными составляющими общей теории поля являются уравнения движения и сохраняющиеся величины, которые получаются из лагранжевой плотности через теорему Нетер, несмотря на то, что и лагранжиан, и определения сохраняющихся величин не однозначны и их интерпретация затруднена. Давайте, следуя Корсону [1] рассмотрим эти сохраняющиеся величины.

Предполагается, что лагранжиан является функцией только полевых компонент A_α и их первых производных (К. 19.2)

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(A_\alpha(x), \partial_\lambda A_\alpha(x)). \tag{1}$$

[(К. 19.2) означает номер формулы по Корсону]. Уравнения поля представляемой теории, (К. 19.3)

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} = 0\,, \tag{2}$$

выводятся из вариационного принципа при использовании инвариантности действия (К. 19.4)

$$I = \int_\Omega \mathscr{L} d\Omega = \text{invariant}. \tag{3}$$

Таким образом, используя уравнения поля (2), мы получаем каноническую тензорную плотность энергии-импульса (К. 19.16*a*)

$${}_cT^{\lambda\mu} = \partial^\lambda A_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - g^{\lambda\mu}\mathscr{L}, \tag{4}$$

и каноническую тензорную плотность полного углового импульса (К. 19.20*c*, 22.18*a*)

$${}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} = {}_cM^{\lambda\mu\nu} + {}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu}, \tag{5}$$

где (К. 22.13)

$${}_cM^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda}\,{}_cT^{\mu]\nu} \tag{6}$$

и (К. 22.15*a*)

$${}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta^{\mu]}_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \tag{7}$$

суть канонические тензорные плотности орбитального и спинового углового импульса (К. 19.20*b*)

Плотности энергии-импульса и полного углового импульса «сохраняются», т.е. они бездивергентны *в случае свободных полей* (К. 19.16*b*, 19.20*a*)

$$\partial_\mu({}_cT^{\lambda\mu}) = 0, \tag{8}$$

$$\partial_\mu({}_c\mathscr{I}^{\lambda\mu\nu}) = 0. \tag{9}$$

Следовательно,

$${}_cT^{[\lambda\mu]} = \partial_\nu({}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu}/2). \tag{10}$$

Важно, что, вообще говоря, каноническая плотность ${}_cT^{\lambda\mu}$ может быть несимметричной и даже не положительно определенной. Кроме того, разложение (5) плотности полного углового импульса на орбитальную и спиновую части не однозначно и даже физически бессмысленно. Каноническая плотность энергии-импульса не дает распределения энергии и импульса в поле. Больше того, Корсон утверждает, что для выполнения закона сохранения углового импульса требуется симметрия плотности энергии-импульса. Следуя этому, физики строят симметричную плотность энергии-импульса, которая считается соответствующей распределению энергии и импульса в поле. Первоочередной проблемой, поэтому является модификация плотности ${}_cT^{\lambda\mu}$ за счет прибавления к ней бездивергентной тензорной плотности ${}_ct^{\lambda\mu}$, такой, что полная плотность энергии-импульса, определенная как

$$\Theta^{\lambda\mu} = {}_cT^{\lambda\mu} + {}_ct^{\lambda\mu}, \tag{11}$$

оказывается опять бездивергентной. Здесь ${}_ct^{\lambda\mu}$ удовлетворяет двум условиям

$$\partial_\mu({}_ct^{\lambda\mu}) = 0, \tag{12}$$

$${}_ct^{[\lambda\mu]} = -{}_cT^{[\lambda\mu]}. \tag{13}$$

Условие (12) удовлетворяется, если

$${}_ct^{\lambda\mu} = \partial_\nu\psi^{\lambda\mu\nu}, \quad \psi^{\lambda\mu\nu} = \psi^{\lambda[\mu\nu]}, \tag{14}$$

условия (12) и (13) выполняются, если

$$\psi^{\lambda\mu\nu} = -{}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}/2, \quad {}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = {}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu} - {}_c\Upsilon^{\mu\nu\lambda} + {}_c\Upsilon^{\nu\lambda\mu}, \tag{15}$$

так как для любого

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = \Upsilon^{[\lambda\mu]\nu} \tag{16}$$

мы имеем [2, 3] (К. 19.24, 22.15*b*)

$${}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = {}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda[\mu\nu]}, \quad {}_c\tilde{\Upsilon}^{[\lambda\mu]\nu} = \Upsilon^{\lambda\mu\nu}. \tag{17}$$

Поэтому (К. 22.16, 22.17)

$${}_ct^{\lambda\mu} = -\partial_\nu({}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}/2), \quad \Theta^{\lambda\mu} = {}_cT^{\lambda\mu} - \partial_\nu({}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}/2.) \tag{18}$$

Модификация канонической плотности энергии-импульса

$${}_cT^{\lambda\mu} \to \Theta^{\lambda\mu} = {}_cT^{\lambda\mu} - \partial_\nu({}_c\tilde{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}/2) \tag{19}$$

сопровождается модификацией канонической плотности полного углового импульса таким образом, чтобы сохранить ее бездивергентность в случае свободного поля (К. 19.26, 22.18*b*)

$$ {}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} \to {}_{\mathrm{mod}}\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} = {}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} - 2\partial_\kappa (x^{[\lambda}\; {}_c\widetilde{\Upsilon}^{\mu]\nu\kappa}/2) = {}_{\mathrm{mod}}M^{\lambda\mu\nu} + {}_{\mathrm{mod}}\Upsilon^{\lambda\mu\nu} \tag{20} $$

где

$$ {}_{\mathrm{mod}}M^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda}\Theta^{\mu]\nu} \tag{21} $$

есть модифицированная плотность орбитального углового импульса, т.е. момент модифицированной плотности энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$, и

$$ {}_{\mathrm{mod}}\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = {}_{\mathrm{c}}\Upsilon^{\lambda\mu\nu} + {}_{\mathrm{c}}s^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{22} $$

есть модифицированная плотность спина, равная нулю. Этот нуль является следствием формулы (20), однако он может быть получен и иначе, потому что добавки ${}_c t^{\lambda\mu}$ и ${}_c s^{\lambda\mu\nu}$ к каноническим плотностям удовлетворяют равенству (10)

$$ {}_c t^{[\lambda\mu]} = \partial_\nu ({}_c s^{\lambda\mu\nu}/2). \tag{23} $$

Действительно, из (18) и (17) получается

$$ {}_c t^{[\lambda\mu]} = -\partial_\nu ({}_c\widetilde{\Upsilon}^{[\lambda\mu]\nu}/2) = -\partial_\nu ({}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu}/2), \quad \text{и} \quad {}_c s^{\lambda\mu\nu} = -{}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu}. \tag{24} $$

2. Критика

Концепция свободного поля, которая лежит в основе уравнений (2), (4), (7), некорректна; а полученные величины (4), (7) не наблюдаемы и физически бессмысленны. Следует признать, что, поскольку эти тензорные плотности получены из лагранжевого формализма для свободного поля, они не соответствуют *наблюдаемым* величинам. Любое наблюдение предполагает взаимодействие между полем и источниками этого поля. Поэтому критерием соответствия между этими плотностями и наблюдаемыми величинами служат дивергенции этих плотностей. Нам нужны не плотности, «сохраняющиеся» в условиях свободного поля, а плотности с правильными дивергенциями. Именно дивергенции определяют 4-импульс и угловой импульс, которые получает поле от источников внутри инфинитезимального 4-объема $d\Omega$,

$$ dP^\lambda = \partial_\mu T^{\lambda\mu} d\Omega, \quad dJ = \partial_\nu \mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} d\Omega, \tag{25} $$

и эти дивергенции со знаком минус являются плотностью 4-силы, f^μ, и плотностью момента 4-силы, которые испытывают источники поля со стороны самого поля

$$ -\partial_\mu T^{\lambda\mu} = f^\mu, \quad -\partial_\nu \mathscr{J}^{\lambda\mu\nu}. \tag{26} $$

Интеграл от выражения (25) может быть записан как интеграл по границе 4-области в поле:

$$ P^\lambda = \oint_{\partial\Omega} T^{\lambda\mu} dV_\mu = \int_\Omega \partial_\mu T^{\lambda\mu} d\Omega, \quad J^{\lambda\mu} = \oint_{\partial\Omega} \mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} dV_\nu = \int_\Omega \partial_\nu \mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} d\Omega. \tag{27} $$

Формулы (27) выражают 4-импульс и угловой импульс, который передается от источников поля к границе области через поле.

Если мы ограничимся формулами (25) – (27), мы должны будем согласиться, что плотности энергии-импульса и углового импульса не однозначны, они допускают добавление бездивергентных членов типа

$$\partial_\nu \psi^{\lambda\mu\nu}, \quad \partial_\kappa \psi^{\lambda\mu\nu\kappa}, \quad \psi^{\lambda\mu\nu} = -\psi^{\lambda[\mu\nu]}, \quad \psi^{\lambda\mu\nu\kappa} = -\psi^{\lambda\mu[\nu\kappa]}. \tag{28}$$

Однако мы должны признать, что могут наблюдаться не только импульс и угловой импульс, полученные целой замкнутой гиперповерхностью, но и величины, полученные элементом гиперповерхности dV_μ. Поэтому следует потребовать, чтобы истинные тензорные плотности удовлетворяли локальным формулам

$$dP^\lambda = T^{\lambda\mu} dV_\mu, \quad dJ^{\lambda\mu} = \mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} dV_\nu. \tag{29}$$

Это означает, что

$$d\mathscr{F}^j = T^{ji} da_i, \quad d\tau^{jk} = \mathscr{J}^{jki} da_i \tag{30}$$

являются силой $d\mathscr{F}^j$ и моментом силы $d\tau^{jk}$, которые испытывает элемент поверхности da_i, ограничивающий поле, и

$$dP^j = T^{j0} dV, \quad dJ^{ik} = \mathscr{J}^{ik0} dV. \tag{31}$$

есть импульс и угловой импульс, содержащиеся внутри объема dV.

Тензорные плотности, присутствующие в локальных формулах (29) – (31), не допускают добавления никаких членов, поскольку такое добавление повлечет расхождение между величинами, подсчитанными по формулам (29) – (31) и наблюдаемыми величинами.

Однако модификация плотностей ${}_cT^{\lambda\mu}$ и ${}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu}$ с помощью добавления бездивергентных выражений (28) не допустима не только по этой причине. Такая модификация бессмысленна, потому что, вообще говоря, вопреки (8), (9), (10), (К. 19.16*b*, 19.20*a*),

$$\partial_\mu({}_cT^{\lambda\mu}) \neq 0, \quad \partial_\kappa({}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\kappa}) \neq 0, \quad {}_cT^{[\lambda\mu]} \neq \partial_\nu({}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu}), \quad \partial_\mu \Theta^{\lambda\mu} \neq 0, \quad \partial_\kappa({}_{\mathrm{mod}}\mathscr{J}^{\lambda\mu\kappa}) \neq 0. \tag{32}$$

Например, в случае электродинамики

$${}_cT^{\lambda\mu} = -\partial^\lambda A_\sigma F^{\mu\sigma} + g^{\lambda\mu} F_{\sigma\kappa} F^{\sigma\kappa}/4, \quad \partial_\mu({}_cT^{\lambda\mu}) = \partial^\lambda A_\sigma \partial_\kappa F^{\sigma\kappa}, \tag{33}$$

$${}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda}\, {}_cT^{\mu]\nu} - 2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}, \quad \partial_\nu({}_c\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu}) = 2x^{[\lambda} \partial_\nu({}_cT^{\mu]\nu}) - 2A^{[\lambda} \partial_\nu F^{\mu]\nu}. \tag{34}$$

$$\Theta^{\lambda\mu} = -F^{\lambda\sigma} F^{\mu\kappa} g_{\sigma\kappa} + g^{\lambda\mu} F_{\sigma\kappa} F^{\sigma\kappa}/4 + A^\lambda \partial_\sigma F^{\mu\sigma}, \quad \partial_\mu \Theta^{\lambda\mu} = \partial_\mu({}_cT^{\lambda\mu}). \tag{35}$$

3. Тензор спина электродинамики

Модифицированные плотности $\Theta^{\lambda\mu}$ и ${}_{\mathrm{mod}}\mathscr{J}^{\lambda\mu\kappa}$ физически бессмысленны. В случае электродинамики истинной тензорной плотностью энергии-импульса является максвелловская плотность

$$T^{\lambda\mu} = -F^{\lambda\sigma} F^{\mu\kappa} g_{\sigma\kappa} + g^{\lambda\mu} F_{\sigma\kappa} F^{\sigma\kappa}/4. \tag{36}$$

Она может быть получена прибавлением плотности

$$t^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu} - {}_cT^{\lambda\mu} = \partial_\sigma A^\lambda F^{\mu\sigma} \tag{37}$$

к канонической плотности ${}_cT^{\lambda\mu}$.

И тут возникает волнующий вопрос, какое выражение $s^{\lambda\mu\nu}$ следует прибавить к канонической плотности спина

$${}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu}, \tag{38}$$

чтобы превратить ее в неизвестную истинную плотность спина электродинамики?

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = {}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu} + s^{\lambda\mu\nu}\ ? \tag{39}$$

По нашему мнению, добавочные члены должны удовлетворять соотношению (10)

$$t^{[\lambda\mu]} = \partial_\nu s^{\lambda\mu\nu}/2, \quad \text{то есть} \quad \partial_\sigma A^{[\lambda}F^{\mu]\sigma} = \partial_\nu s^{\lambda\mu\nu}/2. \tag{40}$$

Уравнению (40) удовлетворяет простое решение

$$s^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda}\partial^{\mu]}A^\nu. \tag{41}$$

Используя его, мы получаем для истинной плотности спина электродинамики выражение

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = {}_c\Upsilon^{\lambda\mu\nu} + s^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]}. \tag{42}$$

Этот результат был направлен в журнал «Письма в ЖЭТФ» 14 мая 1998года.

Тензорная плотность спина (42) является явной функцией векторного потенциала A_μ и калибровочно не инвариантна. Мы приветствуем этот факт. Как было показано, A^μ должен удовлетворять условию Лоренца, $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Выражение (42) не является окончательным. Дело в том, что электродинамика несимметрична. Магнитная индукция замкнута, напряженность магнитного поля имеет источником электрический ток:

$$\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0, \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu. \tag{43}$$

Поэтому магнитный векторный потенциал существует, но, вообще говоря, электрический векторный потенциал не существует. Однако когда токи отсутствуют, симметрия восстанавливается, и появляется возможность ввести электрический мультивекторный потенциал $\Pi^{\lambda\mu\nu}$. Этот потенциал удовлетворяет уравнению

$$\partial_\nu \Pi^{\lambda\mu\nu} = F^{\lambda\mu}. \tag{44}$$

Ковариантный вектор, дуальный по отношению к этому мультивекторному потенциалу,

$$\Pi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}\Pi^{\lambda\mu\nu}, \tag{45}$$

является аналогом магнитного векторного потенциала A_α. Мы называем его электрическим векторным потенциалом.

Симметрия электродинамики заставляет нас предложить симметричное выражение для плотности спина, состоящей из двух частей, электрической и магнитной,

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = {}_e\Upsilon^{\lambda\mu\nu} + {}_m\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]} + \Pi^{[\lambda}\partial^{|\nu|}\Pi^{\mu]}. \tag{46}$$

Таким образом, плотность полного углового импульса электродинамики дается выражением

$$\mathscr{J}^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda}T^{\mu]\nu} + \Upsilon^{\lambda\mu\nu}. \tag{47}$$

Этот результат был направлен в «ЖЭТФ» 27 января 1999 года. Применение выражения (46) можно найти в работах [4, 5, 6].

Заключение

Электродинамика Максвелла не полна. Следует ввести тензорную плотность спина в современную электродинамику. Теоретики не заметили классического спина, потому что отрицали локализацию энергии и импульса и в силу распространенного мнения о неоднозначности плотности энергии-импульса. Значение лагранжевого формализма было переоценино.

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за публикацию моего вопроса [7], а также профессору Тимо Ниеминену за плодотворную дискуссию в интернете (Newsgroups: sci.physics.electromag). Также я благодарен Эгону Марксу, обратившему мое внимание на монографию Корсона [1].

Список литературы

1. E. M. Corson E.M. Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations – NY: Hafner, 1953.- 634 p.

2. F.J. Belinfante F.J. // Physica. - 1939, v. 6.- p. 887.

3. Rosenfeld L. Sur le tenseur d'impulsion-energie. // Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Belgiques. – 1940, v. 18, No 6.

4. R. I. Khrapko. physics/0102084, 0105031; mp_arc 03-307, 03-311, 03-315.

5. Khrapko R.I. Experimental verification of Maxwellian electrodynamics. // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4.- p.317.

6. Khrapko R.I. Classical spin in space with and without torsion. // Gravitation & Cosmology – 2004, **10**, No. 1-2.- p.91.

7. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, **69.-** p.405.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (Государственного технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: *khrapko_ri@hotmail.com*

121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312