

Труды МАИ. 2021. № 121

Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 531.62; 539.2

DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)

## МЕТОДИКИ РАСЧЕТА РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН НА ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

**Георгий Владиславович Малинин**

ПАО «Туполев»,

Москва, Россия

[malinin2002@yandex.ru](mailto:malinin2002@yandex.ru)

**Аннотация.** В данной работе предлагаются две методики расчета ребристых пластин, подкрепленных перекрестной системой ребер жесткости: методика расчета на прочность при определении напряженно-деформированного состояния (НДС) и методика расчета на устойчивость при определении критической нагрузки. Для реализации алгоритмов расчета применялись математические пакеты *Mathcad* и *Maple*. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных по предлагаемым методикам, с результатами, полученными методом конечных элементов в программном комплексе *MSC Patran/Nastran*. Анализ показал хорошее соответствие результатов расчета, как по НДС, так и по критической нагрузке.

**Ключевые слова:** прямоугольная ребристая пластина, аналитические методы, напряженно-деформированное состояние, прочность, устойчивость

*Для цитирования:* Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость // Труды МАИ. 2021.№ 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)

## METHODS OF CALCULATION OF RIBBED PLATES FOR STRENGTH AND STABILITY

**Georgy V. Malinin**

JSC Tupolev,

Moscow, Russia

[malinin2002@yandex.ru](mailto:malinin2002@yandex.ru)

*Abstract.* The desire to increase the reliability of structures forces engineers and designers not only to turn to new materials, in particular composite materials, but also to the introduction of additional reinforcing elements that do not significantly affect the change in the weight of the structure. As such effective means is the use of stiffeners, which have become widespread in engineering practice. The foundations of analytical methods of structural mechanics applied to the problems of calculating ribbed plates and shells were laid by Russian scientists S.P. Timoshenko, I.G. Bubnov, P.F. Papkovich, V.V. Novozhilov, A.I. Birger. Currently, many scientists are also engaged in the calculation of ribbed plates and shells for strength and stability. In this paper, two analytical methods for calculating ribbed plates supported by a cross system of stiffeners are proposed: a method for calculating strength in determining the stress-strain state and a method for calculating stability in determining the critical load. The calculation of the stress-strain state and stability of the structures under consideration is associated with significant mathematical difficulties that an engineer can currently overcome with the help of modern mathematical

packages. In this paper, the technique of strength analysis of the stress-strain state of a ribbed plate is implemented in the Mathcad package, and the stability problem is successfully solved in the Maple package. The calculation of the strength and stability of ribbed plates reinforced with ribs placed crosswise or parallel to one of the sides of the plate is considered. The proposed computational mathematical model is based on the replacement of the original ribbed plate with an equivalent flat isotropic plate. The stiffness characteristics of the equivalent plate are calculated taking into account the contribution of the reinforcing elements of the ribbed plate. It is assumed that the thin-walled structure is supported by a sufficiently large number of ribs located at a sufficiently small distance from each other, which allows their "smearing" relative to the median surface of the plate. Control examples of calculation according to the proposed methods are given. The results of analytical calculations are in good agreement with the results of numerical analysis performed by the finite element method in the MSC.Nastran/Patran package. The proposed methods will allow the engineer at the stage of preliminary calculation and design of the structure to identify the features of its stress-strain state, such as stress concentration sites where it is necessary to reduce the size of the finite element grid during the refinement calculation in industrial packages of finite element analysis.

**Keywords:** rectangular ribbed plate, analytical methods, stress-strain state, strength, stability

**For citation:** Malinin G.V. Methods of calculation of ribbed plates for strength and stability.

*Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-08](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-08)

## Введение

Стремление повысить надежность конструкций заставляет инженеров и конструкторов не только обращаться к новым материалам, в частности к композиционным материалам, но и к введению дополнительных укрепляющих элементов, не значительно влияющих на изменение веса конструкции. В качестве таких эффективных средств является применение ребер жесткости, получивших широкое распространение в инженерной практике (рис. 1). Основы аналитических методов строительной механики применительно к задачам расчета ребристых пластин и оболочек были заложены русскими учеными С.П. Тимошенко, И.Г. Бубновым, П.Ф. Папковичем, В.В. Новожиловым, А.И. Биргер.

В настоящее время многие ученые также занимаются расчетом ребристых пластин и оболочек на прочность и устойчивость [1] – [10].

Расчет НДС и устойчивости рассматриваемых конструкций связан со значительными математическими трудностями, которые в настоящее время инженер может преодолеть при помощи современных математических пакетов [11-14].

В данной работе предложенная методика прочностного анализа НДС ребристой пластины реализуется в пакете *Mathcad*, а задача устойчивости успешно решается в пакете *Maple*.

## Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную пластину, подкрепленную системой перекрестных ребер (рис. 1).

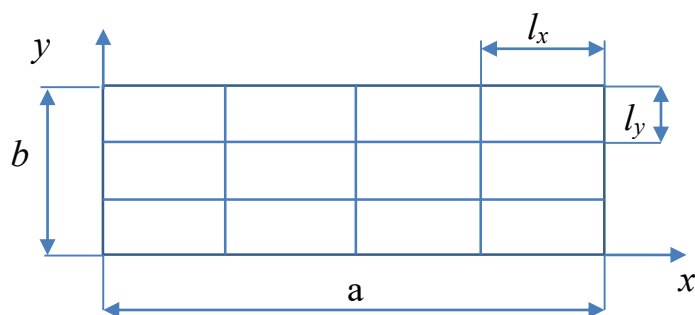


Рис. 1. Ребристая пластина

Заданы: материал, размеры пластины  $a$  и  $b$ , толщина  $h$ , количество ребер параллельных осям  $X$  и  $Y$ . Ребра имеют прямоугольную форму поперечного сечения, заданную толщиной  $b_p$  и высотой  $h_p$ . Предполагается равномерное распределение ребер вдоль осей. Пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой, перпендикулярной к срединной плоскости. Необходимо рассчитать максимальные перемещения и напряжения, возникающие в пластине.

### Методика расчета на прочность

Методика расчета ребристой пластины основана на приведении ребристой пластины к эквивалентной изотропной пластине в предположении примерно одинакового числа ребер в направлении обеих осей. Для решения задачи изгиба изотропной пластины предлагается методика, основанная на комбинации уравнений Э. Рейснера для пластин средней толщины ( $h/a > 1/5$ ) и определения НДС по теории тонких пластин Киргофа-Лява.

Система дифференциальных уравнений Э. Рейснера для изгиба пластин средней толщины при  $q=const$  имеет вид:

$$\begin{cases} D \nabla^2 \nabla^2 w = q \\ D \nabla^2 \chi = q \end{cases} \quad (1)$$

где  $w(x,y)$  – функция прогиба,  $\chi(x,y)$  – функция сдвига,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Поставленная задача имеет аналитическое решение только при условии, если два противоположных края пластины свободно оперты.

Для прямоугольной пластины, два противоположных края которой свободно оперты (рис. 2), функции  $w(x,y)$  и  $\chi(x,y)$  раскладываются в следующие ряды:

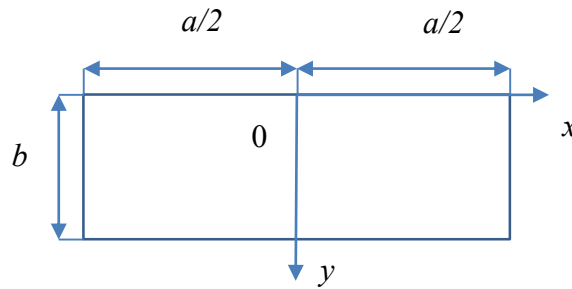


Рис. 2. Система координат для расчета пластины

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b} + \frac{8-3\mu}{1-\mu} \cdot \frac{h^2}{40} \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{y(b-y)}{2}, \quad (2)$$

$$\chi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (3)$$

При шарнирном закреплении по всему контуру пластины решение системы дифференциальных уравнений (1) представлено формулами:

$$w(x,y) = \frac{qb^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{k^5 \pi^5} - \left( \frac{2(\alpha_k \operatorname{th} \alpha_k + 2)}{k^5 \pi^5 \operatorname{ch} \alpha_k} - \frac{8-3\mu}{10(1-\mu)} \times \frac{1}{k^3 \pi^3 \operatorname{ch} \alpha_k} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \right) \times \operatorname{ch} \frac{2\alpha_k}{a} + \right. \\ \left. + \frac{2}{k^5 \pi^5 \operatorname{ch} \alpha_k} \cdot \frac{2\alpha_k}{a} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_k x}{a} + \frac{8-3\mu}{10(1-\mu)} \frac{1}{\pi^3 k^3} \left( \frac{h}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (4)$$

$$\chi(x,y) = \frac{qb^4}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{k^3 \pi^3 b^2 \operatorname{ch} \alpha_k} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_k x}{a} - \frac{4}{k^3 \pi^3 b^2} \right] \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b}, \quad (5)$$

здесь  $\alpha_k = k\pi a / 2b$ .

## Алгоритм расчета ребристой пластины на прочность

- 1) Определение цилиндрических жесткостей  $D_x$ ,  $D_y$  в направлении  $x$  и  $y$ , жесткости на кручение  $D_K$  и суммарной жесткости  $D$ :

$$D_x = \frac{E J_p}{l_y} + \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad \text{и} \quad D_y = \frac{E J_p}{l_x} + \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_K = \frac{G h^3}{12}, \quad D = D_x + D_y. \quad (6)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала пластины;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu$  – коэффициент

Пуассона;  $J_p = \frac{b_p h_p^3}{12}$  – момент инерции ребра относительно его центра тяжести;  $h_p$  и

$b_p$  – толщина и высота ребра, соответственно;  $h$  – толщина пластины;  $l_x$  и  $l_y$  – расстояния между ребрами параллельными осям  $Y$  и  $X$ , соответственно.

- 2) Определение приведенной толщины пластины по формуле:

$$h = h + \frac{n_1 h_p b_p b + n_2 h_p b_p a}{ab}, \quad (7)$$

здесь  $a$  и  $b$  – размеры пластины;  $n_1$  и  $n_2$  – количество ребер параллельных осям  $Y$  и  $X$ , соответственно.

- 3) Расчет прогиба по формуле (4).

- 4) Определение напряженного состояния по известным формулам для расчета тонких пластин по модели Киргофа-Лява.

### Контрольный пример расчета

Исходные данные:

Длина пластины $a$ , мм.....	760
Ширина пластины $b$ , мм .....	780
Толщина пластины $h$ , мм .....	3,3

Количество ребер $n_1$ , параллельных оси Y .....	3
Количество ребер $n_2$ , параллельных оси X .....	5
Высота ребра $h_p$ , мм .....	31,7
Толщина ребра $b_p$ , мм.....	7
Модуль упругости материала $E$ , МПа.....	7200
Коэффициент Пуассона .....	0,3
Модуль сдвига $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ , МПа.....	2769

Расчет выполнен в среде математического пакета *MathCad*.

Результаты расчета представлены в таблице 1.

#### Результаты расчета ребристой пластины на прочность

Таблица 1

Аналитический расчет по предлагаемой методике		Расчет МКЭ в MSC Patran / Nastran	
Максимальный прогиб $w$ , мм	Максимальные эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{экв, max}}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	Максимальный прогиб $w$ , мм	Максимальные эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{экв, max}}$ , кгс/мм <sup>2</sup>
8,0	21,9	8,6	22

Полученные результаты расчета ребристой пластины на прочность по предлагаемой методике хорошо согласуются с результатами численного расчета методом конечных элементов (Таблица 1). По данной методике было просчитано семь ребристых пластин, подкрепленных перекрестной системой ребер с разным количеством ребер и разным расстоянием между ними. Во всех случаях были получены хорошие результаты по перемещениям и хорошие /удовлетворительные результаты по напряжениям. Необходимо отметить, что хороших результатов от



предлагаемой методики можно ожидать при достаточно большом количестве ребер как в направлении оси X так и в направлении оси Y.

### Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную тонкостенную пластину, подкрепленную системой перекрестных ребер. Пластина находится в состоянии чистого сдвига и деформируется усилиями  $t$ , равномерно распределенными по всем четырем сторонам; все стороны шарнирно оперты (рис. 3). Требуется определить усилия  $t_{kp}$ , при которых пластина теряет устойчивость.

### Методика расчета на устойчивость

Рибристую пластину приводим к эквивалентной ортотропной пластине по формулам:

$$D_x = \frac{E J_p}{l_y} + \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad \text{и} \quad D_y = \frac{E J_p}{l_x} + \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_K = \frac{G h^3}{12}, \quad (8)$$

здесь  $E$  – модуль упругости материала пластины;  $G$  – модуль сдвига;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $J_p$  – момент инерции ребра относительно его центра тяжести;  $h$  – толщина пластины;  $l_x$  и  $l_y$  – расстояния между ребрами параллельными осям Y и X, соответственно.

Расчет на устойчивость полученной ортотропной пластины проведем энергетическим методом Ритца-Тимошенко. Потенциальная энергия упругой деформации изгиба ортотропной пластины имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 4D_K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2. \quad (9)$$

Работа касательных сил, соответствующая малым прогибам равна:

$$A = t \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (10)$$

Приравнявая потенциальную энергию упругой деформации к работе касательных сил получаем:

$$t = \frac{\int_0^a \int_0^b D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2}{2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy}. \quad (11)$$

Задача отыскания минимума дроби (11) равносильна задаче отыскания минимума функционала:

$$U = \int_0^a \int_0^b D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2t \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (12)$$

В зависимости от формы пластинки и закрепления ее краев зададимся подходящим выражением для определения прогиба в виде суммы с неопределенными коэффициентами:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{i,j} \phi(x, y), \quad (13)$$

где  $\phi(x, y)$  – непрерывные функции, удовлетворяющие всем условиям на контуре.

С учетом шарнирного закрепления пластины базисные функции можно принять в следующем виде:

$$\phi(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (14)$$

Таким образом, функция, аппроксимирующая прогиб будет выглядеть так:

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{i,j} \phi(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{i,j} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (15)$$

Коэффициенты  $C_{i,j}$  следует подобрать так, чтобы параметр  $t$ , входящий в формулу (12), принял наименьшее значение.

Подставляем аппроксимирующую функцию (15) в функционал (12); находим производные  $\partial U / \partial C_{i,j}$  и приравниваем их к нулю. В результате получаем однородную систему линейных уравнений, количество которых равно количеству неизвестных  $C_{i,j}$ . Для отыскания нетривиальных решений этой системы приравниваем определитель коэффициентов при неизвестных  $C_{i,j}$  к нулю и получаем уравнение для определения критической силы  $t_{кр}$ .

Данный метод легко распространяется на пластину с жестким закреплением краев; в этом случае достаточно только заменить аппроксимирующую функцию. Указанный алгоритм удобно реализовать в виде набора процедур в программе *Maple*.

### **Алгоритм расчета ребристой пластины на устойчивость**

- 1) Определяем геометрические характеристики поперечного сечения подкрепляющего набора рёбер: площадь, координаты центра тяжести, момент инерции относительно центра тяжести.
- 2) Определяем цилиндрические жесткости  $D_x$ ,  $D_y$  и  $D_K$  по формулам (8).
- 3) Используя язык *Maple*, составляем подпрограммы, определяющие аппроксимирующую функцию (14) и (15).
- 4) При помощи аналитической системы *Maple* находим производные  $\partial U / \partial C_{i,j}$  для каждого члена ряда и приравниваем полученные выражения к нулю. Нахождение

производных и составление системы линейных однородных уравнений также реализуется в виде процедуры на языке *Maple*.

- 5) Составляется определить коэффициентов системы при неизвестных  $C_{i,j}$  и приравняется к нулю. Раскрывая определитель, получаем нелинейное уравнение относительно неизвестного параметра нагрузки  $t$ .
- 6) Решаем полученное уравнение и находим его корни. Наименьший по модулю корень и будет искомой критической нагрузкой  $t_{кр}$ .
- 7) Делим критическую нагрузку на толщину пластины и находим критическое напряжение  $\tau_{кр}$ .

### Контрольный пример расчета

Исходные данные (рис. 3, 4):

Длина пластины $a$ , мм.....	840
Ширина пластины $b$ , мм .....	815
Толщина пластины $h$ , мм .....	3,0
Количество ребер $n$ параллельных оси X .....	5
Расстояние между ребрами $L$ , мм .....	140
Ширина верхней полки ребра $b_1$ , мм.....	29
Толщина верхней полки ребра $h_1$ , мм .....	3
Высота стенки ребра $b_2$ , мм .....	44
Толщина стенки ребра $h_2$ , мм .....	3
Ширина нижней полки ребра $b_3$ , мм .....	29
Толщина нижней полки ребра $h_3$ , мм.....	3

Модуль упругости материала  $E$ , МПа..... 7200

Коэффициент Пуассона ..... 0,3

Модуль сдвига  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , МПа..... 2769

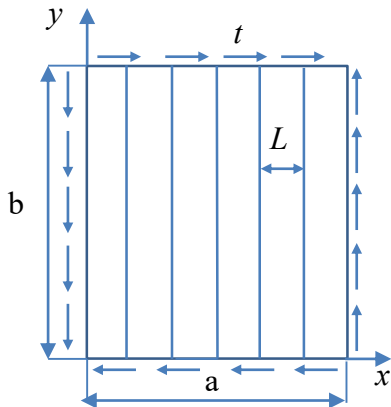


Рис. 3. Расчетная схема ребристой пластины

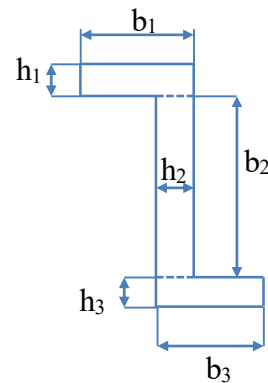


Рис. 4. Размеры профиля

Конечно-элементная модель ребристой пластины приведена на рис. 5.

На рис.6 – результаты расчета критической нагрузки и форма потери устойчивости, найденные методом конечных элементов в программном комплексе *MSC.Nastran/Patran*.

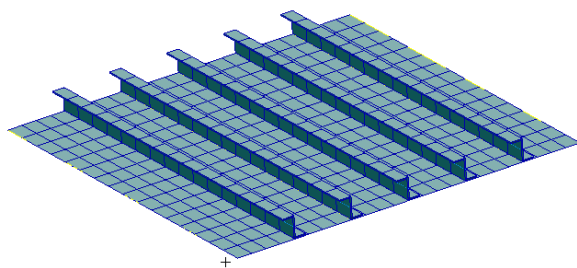


Рис. 5. Конечно-элементная модель ребристой пластины

Fringe: Ust, A2:Mode 6 : Factor = 80.211, Eigenvectors, Translational, Magnitude, (NON-LAYERED)

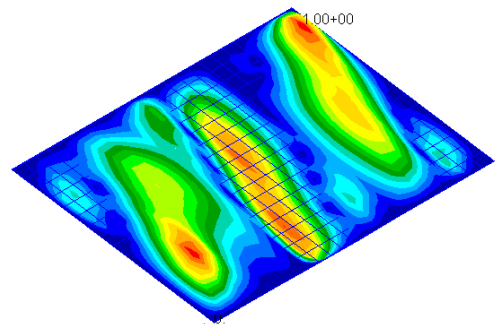


Рис. 6. Критическая нагрузка  $q_{кр}=80$  кгс/мм и форма потери устойчивости

В Таблице 2 представлены результаты расчета, выполненные по предлагаемому алгоритму, реализованному в пакете *Maple* и методом конечных элементов в *MSC.Nastran/Patran*.

#### Результаты расчета ребристой пластины на устойчивость

Таблица 2

Критическое напряжение $\tau_{кр}$ , кгс/мм <sup>2</sup>	
Аналитический расчет по предлагаемой методике	Расчет МКЭ в MSC Patran / Nastran
84	80

#### Заключение

Предлагаемые методики позволят инженеру на этапе предварительного расчета конструкции выявить особенности ее напряженно деформированного состояния такие как места концентрации напряжений, где необходимо сгущать конечно-элементную сетку для дальнейшего уточняющего расчета МКЭ.

#### Список источников

1. Кушнарченко И.В. Учёт подкреплений при расчёте оболочек вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 57-62.
2. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкреплённых конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 3. С. 63-71.
3. Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкреплённой дискретным набором шпангоутов // Вестник Пермского

национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 78-98.

4. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 6 (8). С. 16-24.

5. Нерубайло Б.В., Ву С.Д. Дифференциальные уравнения физически ортотропных и изотропных цилиндрических оболочек при действии продольных нагрузок // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 3. С. 173-185.

6. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

7. Ерков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100622>

8. Фирсанов В.В., Во А.Х., Чан Н.Д. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102130>

9. Карпов В.В., Игнатъев О.В., Семенов А.А. Напряженно-деформированное состояние ребристых оболочечных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 6 (74). С. 147-160.

10. A. John Wilson, S. Rajasekaran. Elastic stability of all edges clamped stepped and stiffened rectangular plate under uni-axial, bi-axial and shearing forces // *Meccanica*, 2013, vol. 48, no. 10, pp. 2325 – 2337. DOI:[10.1007/s11012-013-9751-6](https://doi.org/10.1007/s11012-013-9751-6)
11. Голоскоков Д.П. К аналитическому расчету пластины, подкрепленной ребрами жесткости // Материалы III международной конференции «Устойчивость и процессы управления» (Санкт-Петербург, 5 – 9 октября 2015) - СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. С. 351-352.
12. Goloskokov D.P. Numerical-analytical method of calculating of the shallow shell rectangular in plane reinforced by ribs of variable stiffness // *Materials Physics and Mechanics (MPM)*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 66 – 69.
13. Goloskokov D.P. Calculation of the ribbed plate in the mixed form “deflection - function of efforts” // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP), 2015, pp. 386-388. DOI:[10.1109/SCP.2015.7342170](https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342170)
14. Голоскоков Д.П. К аналитическому расчету пологой оболочки, подкрепленной ребрами переменной жесткости // XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций»: тезисы докладов (Санкт–Петербург, 28 – 30 сентября 2015). - СПб.: ИД «ФАРМиндекс», 2015. С. 108–110.
15. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. - М.: Физматлит, 2010. Ч. 1. - 285 с.



16. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. - М.: Физматлит, 2011. Ч. 2. - 248 с.
17. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // International Journal of Solids and Structures, 2018, no. 146, pp. 117-135.  
DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024)
18. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.R. An Analytical Procedure for Buckling Load Determination of an Axisymmetric Cylinder with Non-Uniform Thickness Using Shear Deformation Theory // Journal of Mechanical Engineering, 2017, vol. 1, no. 2, pp. 211–218.  
DOI:[10.22060/mej.2017.12557.5364](https://doi.org/10.22060/mej.2017.12557.5364)
19. Kipiani G. Definition of critical loading on three-layered plate with cuts by transition from static problem to stability problem // Contemporary Problems in Architect and Construction: Selected peer reviewed papers the 6th International Conference on Contemporary Problems of Architect and Construction, June 24-27, 2014, Ostrava, Czech Republic / Ed. by D. Kubečková, Trans. Tech. Publications, Switzerland, pp. 143-150.  
DOI:[10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.143](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.143)
20. Пухлий В.А., Пухлий К.В. Применение теории трехслойных конструктивно-ортотропных оболочек к расчету НДС рабочих лопаток газотурбинных и комбинированных установок // Теория механизмов и машин. 2019. Т. 17. № 3 (43). С. 86-98.

## References

1. Kushnarenko I.V. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2014, no. 2, pp. 57-62.
2. Ovcharov A.A., Brylev I.S. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 3, pp. 63-71.
3. Dudchenko A.A., Sergeev V.N. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2017, no. 2, pp. 78-98.
4. Zhgutov V.M. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2009, no. 6 (8), pp. 16-24.
5. Nerubailo B.V., Vu S.D. *Aerospace MAI Journal*, 2013, vol. 20, no. 3, pp. 173-185.
6. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100589>
7. Erkov A.P., Dudchenko A.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
8. Firsanov V.V., Vo A.Kh., Chan N.D. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102130>
9. Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Semenov A.A. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2017, no. 6 (74), pp. 147-160.
10. A. John Wilson, S. Rajasekaran. Elastic stability of all edges clamped stepped and stiffened rectangular plate under uni-axial, bi-axial and shearing forces, *Meccanica*, 2013, vol. 48, no. 10, pp. 2325–2337. [DOI:10.1007/s11012-013-9751-6](https://doi.org/10.1007/s11012-013-9751-6)
11. Goloskokov D.P. *Materialy III mezhdunarodnoi konferentsii «Ustoichivost' i protsessy upravleniya»* Saint Petersburg, Izdatel'skii Dom Fedorovoi G.V., 2015, pp. 351-352.

12. Goloskokov D.P. *Materials Physics and Mechanics (MPM)*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 66–69.
13. Goloskokov D.P. Calculation of the ribbed plate in the mixed form “deflection - function of efforts”, *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 386-388. DOI:[10.1109/SCP.2015.7342170](https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342170)
14. Goloskokov D.P. *XXVI Mezhdunarodnaya konferentsiya «Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie v mekhanike deformiruemykh sred i konstruktsii»: tezisy dokladov*, Saint Petersburg, ID «FARMindeks», 2015, pp. 108–110.
15. Karpov V.V. *Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya: Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya* (Strength and stability of reinforced shells of rotation: Models and algorithms for the study of strength and stability of reinforced shells of rotation), Moscow, Fizmatlit, 2010, Part. 1, 285 p.
16. Karpov V.V. *Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. Vychislitel'nyi eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeistvii* (Strength and stability of reinforced shells of rotation. Computational experiment under static mechanical action), Moscow, Fizmatlit, 2011, Part. 2. 248 p.
17. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts, *International Journal of Solids and Structures*, 2018, no. 146, pp. 117-135. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024)
18. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.R. An Analytical Procedure for Buckling Load Determination of an Axisymmetric Cylinder with Non-Uniform Thickness Using Shear

Deformation Theory, *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, vol. 1, no. 2, pp. 211–218.

DOI:[10.22060/mej.2017.12557.5364](https://doi.org/10.22060/mej.2017.12557.5364)

19. Kipiani G. Definition of critical loading on three-layered plate with cuts by transition from static problem to stability problem, *Contemporary Problems in Architect and Construction: Selected peer reviewed papers the 6th International Conference on Contemporary Problems of Architect and Construction*, June 24-27, 2014, Ostrava, Czech Republic / Ed. by D. Kubečková, Trans. Tech. Publications, Switzerland, pp. 143-150.

DOI:[10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.143](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1020.143)

20. Pukhlii V.A., Pukhlii K.V. *Teoriya mekhanizmov i mashin*, 2019, vol. 17, no. 3 (43), pp. 86-98.

Статья поступила в редакцию 23.11.2021; одобрена после рецензирования 01.12.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 23.11.2021; approved after reviewing on 01.12.2021; accepted for publication on 21.12.2021.