

Равновесие элемента тонкостенной оболочки вращения с криволинейной осью

Р.Г. Тазетдинов

С использованием безмоментной теории выведена система уравнений равновесия элемента тонкостенной металлической или мягкой (тканевой, полимерно-пленочной и др.) оболочки вращения с криволинейной осью.

В некоторых практических задачах возникает необходимость расчета напряжений и деформаций, образующихся в тонкостенных (металлических, мягких (тканевых, полимерно-пленочных и др.) оболочках вращения, имеющих в общем случае искривленную ось вращения. Например, такая задача встречается при расчете противоперегрузочных или высотно-компенсирующих костюмов, снабженных герметичными камерами, обжимающими тело летчика при наддуве их воздухом. [1]

Тонкостенные оболочки обладают ничтожно малой изгибной жесткостью и при их анализе обычно пренебрегают напряжениями изгиба (безмоментная, или мембранная теория). Это значительно упрощает расчеты, особенно для оболочек вращения. Однако система уравнений равновесия для последних выведена только для случая прямой оси вращения [2]. В настоящей работе также на основе безмоментной теории получена система уравнений для тонкостенных оболочек вращения в более общем виде, когда сама ось вращения произвольно искривлена. При этом предполагается, что хотя оболочка нагружена в общем случае несимметрично, однако условия нагружения таковы, что морщины в ней не образуются.

Поверхность оболочки образуется из окружностей, центры которых лежат на криволинейной оси вращения O_1O_2 с текущим радиусом кривизны R (рис.1), касательная $L_1 L_2$ к которой, проведенная через данный центр E , перпендикулярна к соответствующему кругу. Элемент оболочки вырежем двумя смежными плоскостями, включающими касательную к оси вращения в заданной точке (меридианные сечения), и двумя смежными кругами, плоскости которых пересекают соответствующие центры кривизны оси вращения D_1 и D_2 . Положение текущего меридиана определяется углом θ , отсчитываемым для выбранной точки оси от некоторой заданной меридианной плоскости, например, проходящей через текущий центр кривизны оси вращения. Положение самого круга зададим углом $\tilde{\varphi}$ между нормалью к поверхности оболочки и касательной к оси вращения, проведенной через центр круга. Меридианная плоскость и плоскость, перпендикулярная к меридиану, являются плоскостями главных кривизн в некоторой точке O поверхности оболочки, а r_2 и r_1 - главные радиусы кривизны; r_0 - радиус круга.

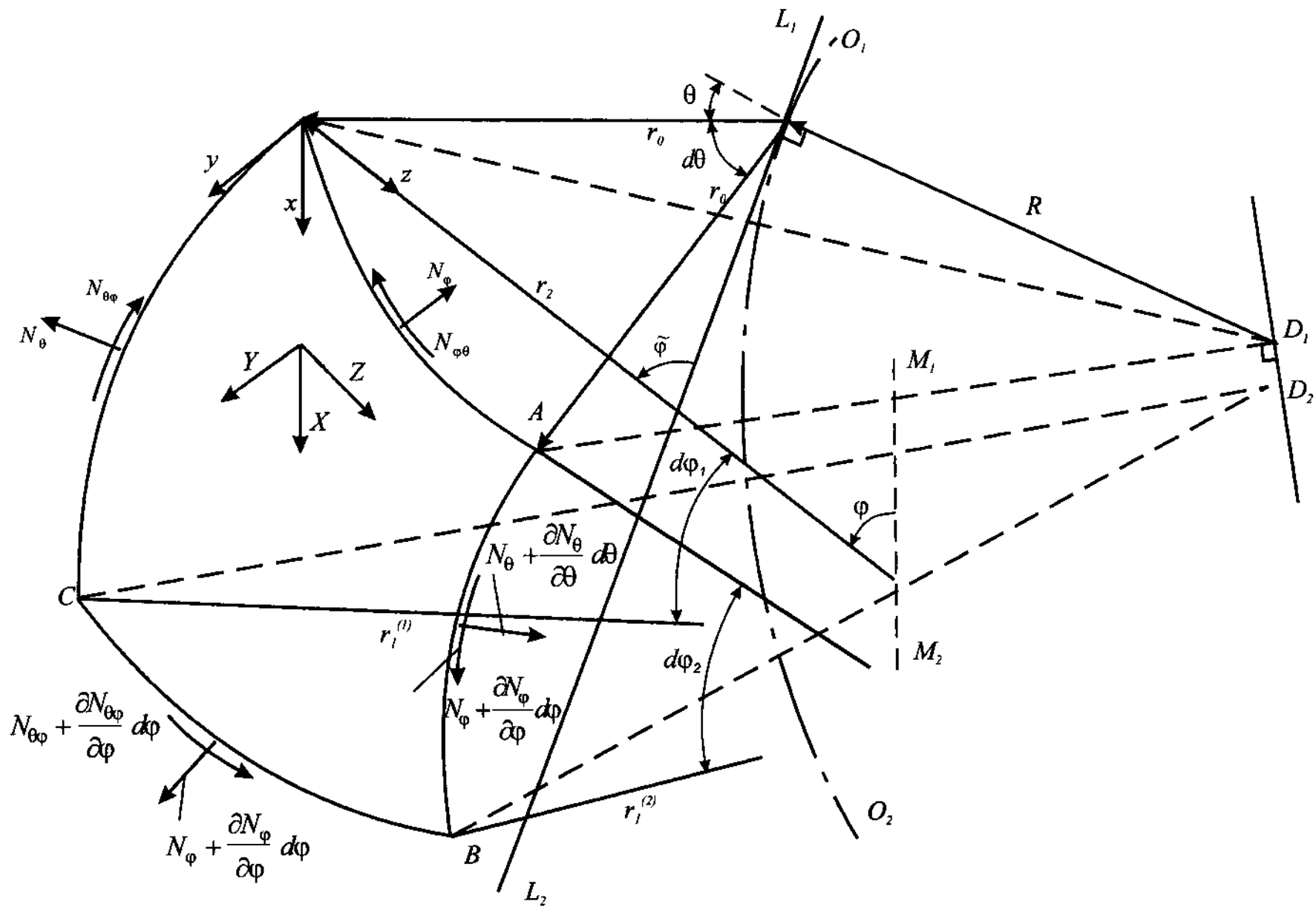


Рис. 1. Равновесие сил, действующих на элемент оболочки

$$\left. \begin{aligned} l_{OA} &= r_0 d\theta = r_2 \sin \tilde{\varphi} d\theta ; \\ l_{BC} &= (r_0 + dr_0) d\theta = (r_2 + dr_2) \sin(\tilde{\varphi} + d\tilde{\varphi}) d\theta ; \\ l_{OC} &= r_1^{(1)} d\varphi_1 ; \\ l_{AB} &= r_1^{(2)} d\varphi_2 , \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $d\varphi_1, d\varphi_2$ - элементарные углы, охватываемые дугами OC и AB , соответственно. Сам угол φ отсчитывается от некоторой заданной, например, вертикальной, оси до нормали к поверхности. В общем случае элемент $d\varphi$ не совпадает с элементом угла $d\tilde{\varphi}$. Только для случая прямой оси ($R \rightarrow \infty$) $d\varphi = d\tilde{\varphi}$ и можно принять $\varphi = \tilde{\varphi}$. Угол φ условно назовем меридианным углом.

Длины l_{OC} и l_{AB} боковых граней отличаются друг от друга из-за криволинейности оси вращения. Соотношение между l_{OC} и l_{AB} найдем из следующих соображений. Длину прямолинейного отрезка между точками O и C (рис.2)

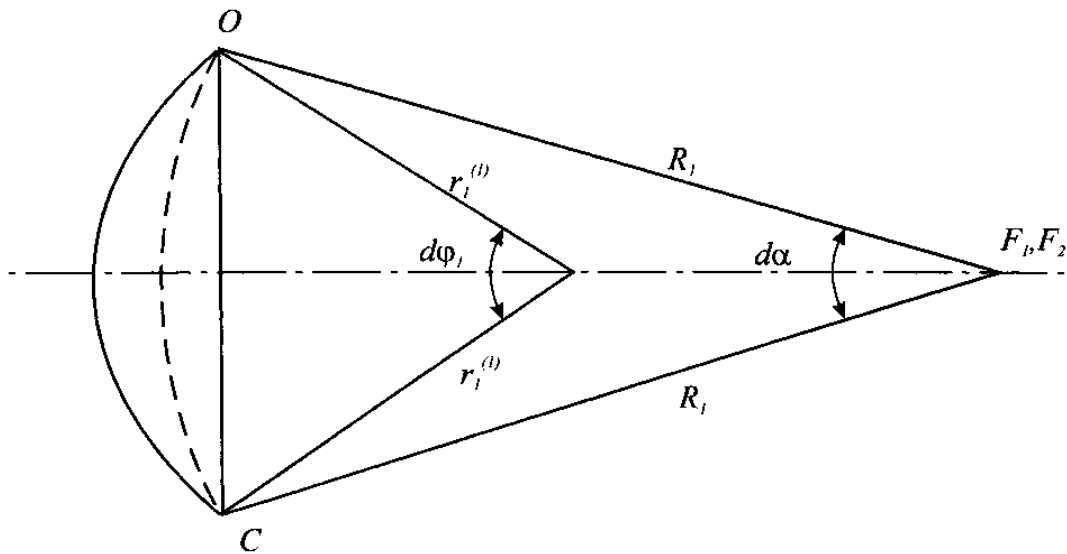


Рис. 2. Схема к расчету элемента меридианного угла

можно рассматривать одновременно как хорду двух дуг: дуги грани OC элемента оболочки и дуги окружности радиуса R_1' , проведенной от прямой F_1F_2 , проходящей через центр кривизны и перпендикулярной одновременно и к оси вращения, и к отрезку OC (рис.3)

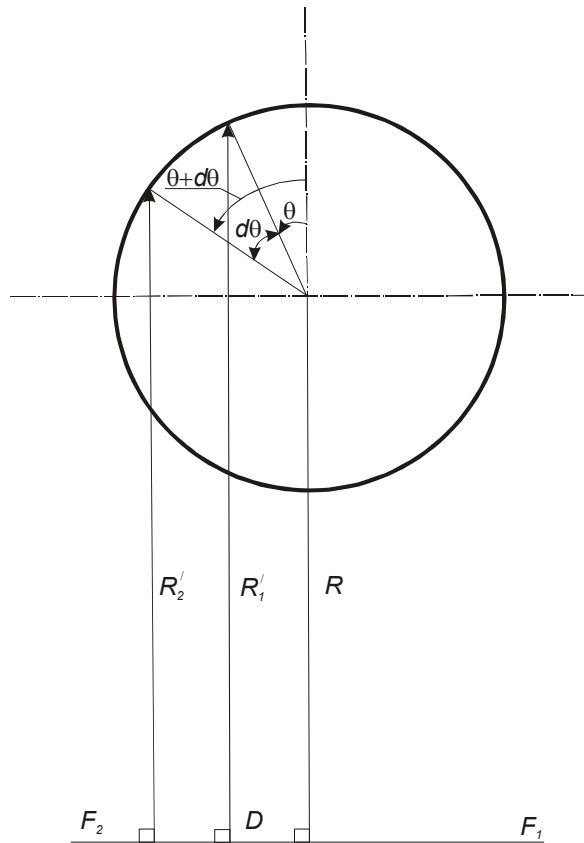


Рис. 3. Схема к определению величин R' R'

При этом принимаем, что при повороте оси центр ее кривизны изменяется по плавной кривой. Поэтому точки D_1 и D_2 бесконечно близки друг к другу и можно считать, что прямая F_1F_2 проходит через один центр кривизны $D(\delta l_{D_1D_2} \approx 0)$. Тогда можно написать соотношение

$$r_1^{(1)} \sin \frac{d\varphi_1}{2} = R_1' \sin \frac{d\alpha}{2},$$

где $d\alpha$ - элементарный угол между плоскостями двух смежных кругов.

Подобное соотношение можно написать и для элемента дуги AB :

$$r_1^{(2)} \sin \frac{d\varphi_2}{2} = R_2' \sin \frac{d\alpha}{2},$$

где R_2' определяется аналогично R_1' . Из последних двух равенств получаем

$$\frac{l_{OC}}{l_{AB}} = \frac{r_1^{(1)} \sin \frac{d\varphi_1}{2}}{r_1^{(2)} \sin \frac{d\varphi_2}{2}} = \frac{R_1'}{R_2'}$$

или, учитывая что

$$\lim_{d\varphi \rightarrow 0} \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2},$$

$$\frac{l_{OC}}{l_{AB}} = \frac{r_1^{(1)} d\varphi_1}{r_1^{(2)} d\varphi_2} = \frac{R'_1}{R'_2} \quad (2)$$

Величины R'_1 и R'_2 можно найти с помощью рис.3. Для сечения с углом θ можно записать

$$R'_1 = R + r_0 \cos \theta ,$$

а для сечения с углом $\theta + d\theta$ -

$$R'_2 = R + r_0 \cos(\theta + d\theta) .$$

Подставляя эти соотношения в (2) и учитывая, что

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \cos(\theta + d\theta) = \cos \theta - \sin \theta d\theta ,$$

получим

$$\frac{r_1^{(1)} d\varphi_1}{r_1^{(2)} d\varphi_2} = 1 - \frac{r_0 \sin \theta d\theta}{R + r_0 \cos \theta} \quad (3)$$

В расчетах удобнее пользоваться не величинами напряжений в материале, а погонными силами, равными произведениям соответствующих напряжений и толщины оболочки. Это позволяет не использовать в расчетах толщину, точное определение которой для материала, находящегося под нагрузкой (особенно для ткани) не всегда возможно. В материале оболочки действуют следующие погонные силы:

- нормальные (в направлении срединной поверхности) N_φ и N_θ в двух взаимно перпендикулярных плоскостях – меридианном и перпендикулярном к нему;
- тангенциальные (перерезывающие) $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$.

Эти три независимые силы составляют совокупность так называемых мембранных сил, которыми пользуются в теории тонких (гибких) оболочек. Интенсивность внешней нагрузки, действующей в оболочке, разложим в общем случае на три составляющие по осям прямоугольной системы координат, связанной с элементом оболочки: X и Y – касательные к поверхности, по осям x и y , соответственно, и Z – нормальную к поверхности, по оси z .

Для составления уравнений равновесия спроецируем все силы, действующие на элемент $OABC$ на направления x, y, z .

1. Ось x :

$$- N_\theta r_1^{(1)} d\varphi_1 + \left(N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) r_1^{(2)} d\varphi_2 + \left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) \frac{r_1^{(1)} d\varphi_1 - r_1^{(2)} d\varphi_2}{r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi} -$$

$$- N_{\varphi\theta} r_0 d\theta + \left(N_{\varphi\theta} + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta + N_\varphi r_1^{(1)} d\varphi_1 \cos \tilde{\varphi} \sin \frac{d\theta}{2} +$$

$$\text{где } - \left(N_{\theta\varphi} d\varphi_1 + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} d\theta \right) r_1^{(2)} d\varphi_2 \cos \tilde{\varphi} \sin \frac{d\theta}{2} + N_{\varphi\theta} r_0 d\theta = 0 ,$$

Появление члена с N_{φ} в уравнении равновесия связано с наличием малого угла между гранями OA и CB элемента $OACB$ (рис.4).

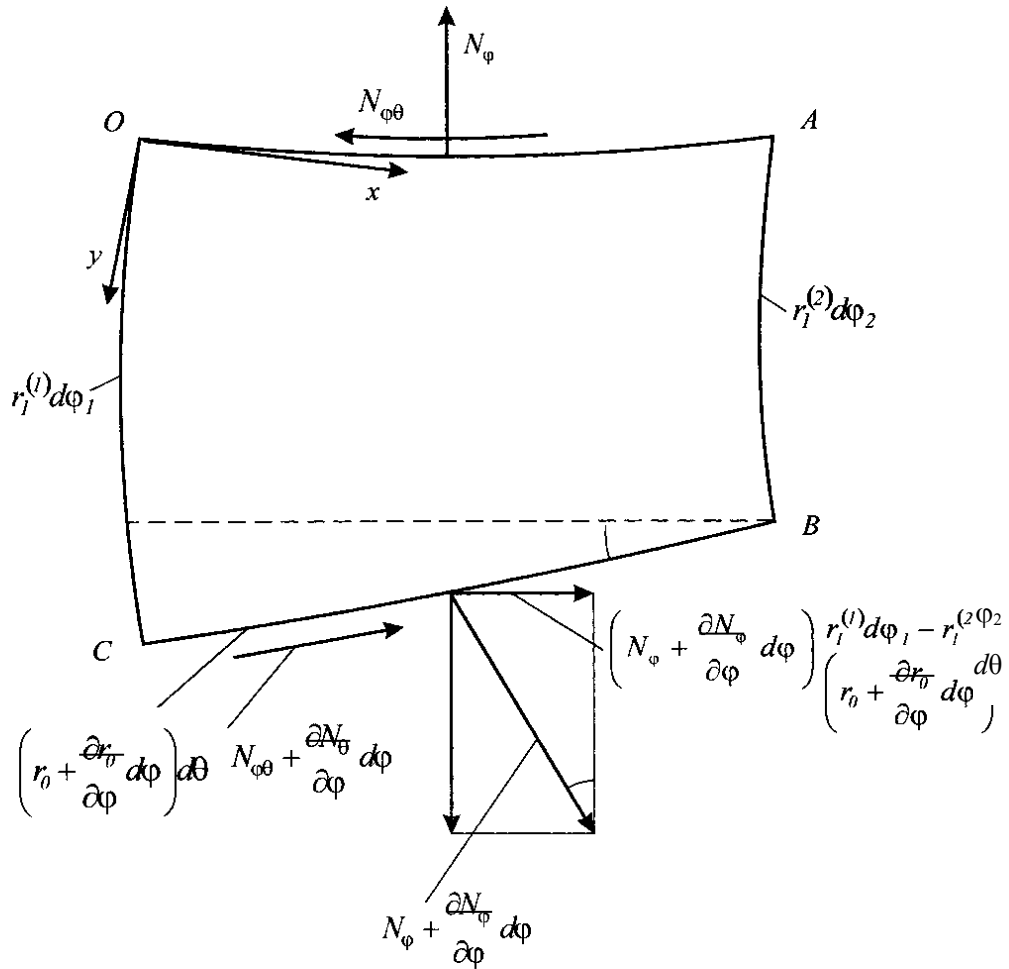


Рис. 4. Схема к определению проекции силы

$$N_{\varphi} + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \text{ на ось } x$$

Поэтому третий член в уравнении является проекцией силы, действующей перпендикулярно к грани CB на направление x . Появление же членов с N_{φ} в данном уравнении вызвано наличием малого угла $\cos \tilde{\varphi} d\theta$ между направлениями сил сдвига, действующих по боковым граням элемента (рис.5).

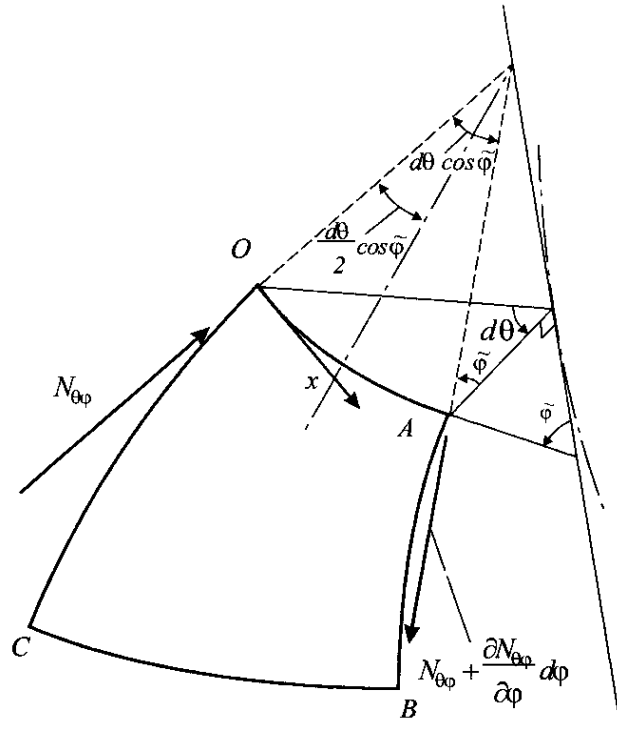


Рис. 5. Схема к определению проекции сил

$$N_{\theta\varphi} \text{ и } N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \text{ на ось } x$$

Учитывая, что

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2} \quad (4)$$

и пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка малости, преобразуем приведенное уравнение равновесия к виду

$$N_{\theta} (r_1^{(1)} d\varphi_1 - r_1^{(2)} d\varphi_2) + N_{\varphi} (r_1^{(1)} d\varphi_2 - r_1^{(2)} d\varphi_1) \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} r_1^{(2)} d\varphi_2 d\theta + \\ + \frac{\partial N_{\varphi\theta} r_0}{\partial \varphi} d\varphi r_0 d\theta + N_{\theta\varphi} \bar{r}_1 d\varphi_1 \cos \tilde{\varphi} + X \bar{r}_0 \bar{r}_1 d\theta d\varphi = 0.$$

Деля все члены данного уравнения на $r_1^{(1)} d\varphi_1$ и учитывая соотношение (3), получим

$$\left(N_{\varphi} - N_{\theta} \right) \frac{r_0 \sin \theta d\theta}{R + r_0 \cos \theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta \left(1 - \frac{r_0 \sin \theta d\theta}{R + r_0 \cos \theta} \right) + \\ + \frac{1}{\bar{r}_1} \left(\frac{\partial (N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} r_2 \cos \tilde{\varphi} d\theta + X \bar{r}_0 \bar{r}_1 d\theta \right) \left(1 - \frac{r_0 \sin \theta d\theta}{R + r_0 \cos \theta} \right) = 0.$$

Наконец, деля все члены последнего уравнения на $d\theta$, пренебрегая бесконечно малой величиной в скобках во втором и третьем членах уравнения и принимая во внимание, что

$$\lim_{d\varphi \rightarrow 0} \bar{r}_0 = r_0 \quad ; \quad \lim_{d\varphi \rightarrow 0} \bar{r}_1 = r_1, \quad (5)$$

где r_0 и r_1 – текущие значения соответствующих радиусов, получаем первое уравнение равновесия:

$$(N_\varphi - N_\theta) \frac{r_0 r_1 \sin \theta}{R + r_0 \cos \theta} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + \frac{\partial (N_{\varphi\theta} r_0)}{\partial \varphi} + N_{\theta\varphi} r_2 \cos \tilde{\varphi} + X \bar{r}_0 \bar{r}_1 = 0 . \quad (6)$$

2. Ось y :

$$\begin{aligned} & -N_\varphi r_0^{(1)} d\theta + \left(N_\varphi + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\theta + N_\theta r_1^{(1)} \cos \theta \\ & - \left(N_\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) r_1^{(2)} \cos \tilde{\varphi} d\varphi_2 \sin \frac{d\theta}{2} - N_{\theta\varphi} r_1^{(1)} d\varphi_1 + \left(N_{\theta\varphi} + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \\ & + \left(N_{\varphi\theta} + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi \right) \frac{r_1^{(1)} d\varphi_1 - r_1^{(2)} d\varphi_2}{r_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} d\varphi} + Y \bar{r}_0 \end{aligned}$$

Третий и четвертый члены данного уравнения учитывают вклад поперечных нормальных сил N_θ в равновесие по оси y . Определение этих сил, например, для боковой грани OC элемента иллюстрирует рис. 6. Появление в уравнении члена с $N_{\varphi\theta}$ связано опять с наличием малого угла между гранями OA и CB элемента (см. рис. 4)

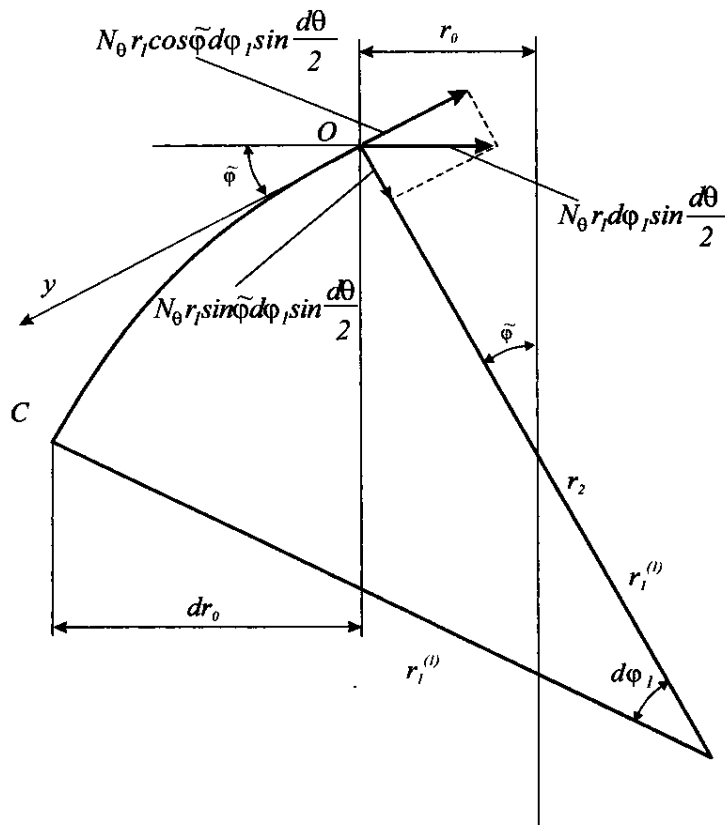


Рис. 6. Схема к определению проекции силы N_θ на ось y

С учетом (4) и также пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка малости, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(N_{\varphi}r_0)}{\partial\varphi}d\theta d\varphi - N_{\theta} \cos\tilde{\varphi}d\theta \frac{r_1^{(1)}d\varphi_1 + r_1^{(2)}d\varphi_2}{2} + N_{\theta\varphi}(r_1^{(1)}d\varphi_2 - r_1^{(2)}d\varphi_1) + \\ & + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta}d\theta r_1^{(2)}d\varphi_2 + N_{\varphi\theta}(r_1^{(1)}d\varphi_1 - r_1^{(2)}d\varphi_2) + Y\bar{r}_0 \bar{r}_1 d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, деля все члены на $r_1^{(1)}d\varphi_1d\theta$, и учитывая формулу (3), находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial(N_{\varphi}r_0)}{\partial\varphi} - N_{\theta} \cos\tilde{\varphi} + Y\bar{r}_0 \right) \left(1 - \frac{r_0 \sin\theta d\theta}{2(R+r_0 \cos\theta)} \right) + (N_{\varphi\theta} - N_{\theta\varphi}) \frac{r_0 \sin\theta}{R+r_0 \cos\theta} + \\ & + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} \left(1 - \frac{r_0 \sin\theta d\theta}{R+r_0 \cos\theta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Также учитывая, что $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$, формулы (5) и пренебрегая бесконечно малой величиной

$\frac{r_0 \sin\theta d\theta}{R+r_0 \cos\theta}$, получаем второе уравнение равновесия:

$$\frac{\partial(N_{\varphi}r_0)}{\partial\varphi} - N_{\theta}r_1 \cos\tilde{\varphi} + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + Yr_0 r_1 = 0. \quad (7)$$

3. Ось z:

$$\begin{aligned} & N_{\varphi}r_0^{(1)}d\theta \sin\frac{d\varphi_1}{2} + \left(N_{\varphi} + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial\varphi}d\varphi \right) r_0 d\theta \sin\frac{d\varphi_2}{2} + N_{\theta}r_1^{(1)} \sin\tilde{\varphi}d\varphi_1 \sin\frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial\theta}d\theta \right) \sin\tilde{\varphi}d\varphi_2 r_1^{(2)} + Z\bar{r}_0 \bar{r}_1 d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, используя тот же подход, что и при выводе уравнений (6), (7) и учитывая, что

$$\lim_{d\varphi \rightarrow 0} \sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2},$$

получаем третье уравнение равновесия

$$N_{\varphi}r_0 + N_{\theta}r_1 \sin\tilde{\varphi} + Zr_0 r_1 = 0. \quad (8)$$

Деля все члены данного уравнения на $r_0 r_1$ и используя соотношение $r_0 = r_2 \sin\varphi$, можно его представить в виде

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = -Z. \quad (8')$$

Сравнивая полученные уравнения с известными уравнениями равновесия для оболочки вращения с прямой осью вращения [2], можно увидеть различие в первом уравнении (уравнение (6)), которое заключается в появлении члена, учитывающего кривизну оси вращения, т.е.

величину R . Второе и третье уравнения для обоих типов оболочек идентичны. При $R \rightarrow \infty$ уравнение (6) переходит в соответствующее уравнение оболочки с прямолинейной осью.

Список литературы

1. Аверьянов А.А., Зотов В.А., Тазетдинов Р.Г. Математическая модель расчета напряжений и давлений на тело человека в тканевых чехлах надутых газом камер высотной компенсирующей (ВКО) и противоперегрузочной (ППО) одежды летчика // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. IX Международный симпозиум, Ярополец (М.О). 2003: Матер.- М.: МАИ,2003. - с. 162.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966.-634с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Тазетдинов Рустем Галятдинович, профессор кафедры технологии материалов Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.