

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

На правах рукописи



НУРИМБЕТОВ АЛИБЕК УСИПБАЕВИЧ

**СТЕРЖНЕВЫЕ И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ В
ПОЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант – д.т.н., профессор Дудченко А.А.

Москва – 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| Введение | 7 |
| ГЛАВА I Построение аналитических моделей для расчета стержневых деталей и рабочих лопаток компрессоров газотурбинных двигателей (ГТД) | 27 |
| 1.1 Требования к материалам, используемым в стержневых деталях и лопатках компрессора | 29 |
| 1.2 Расчетная модель и методы определения упругих постоянных композиционного материала | 33 |
| 1.3 Расчетные формулы для определения упругих свойств слоя из композиционных материалов | 39 |
| 1.4 Расчетные формулы композиционной многослойной структуры.... | 49 |
| 1.5 Определение физико-геометрических характеристик многослойных структур закрученного анизотропного стержня..... | 51 |
| 1.5.1 Математическая модель предварительно закрученного многослойного стержня произвольного сечения | 51 |
| 1.5.2 Определение слоистой структуры по длине многослойного стержня | 54 |
| 1.5.3 Расчет физико-геометрических характеристик сечений анизотропного слоистого стержня | 57 |
| 1.5.4 Формулы обобщенного кручения композиционного стержня... | 63 |
| 1.6 Постановка граничных условий | 65 |
| 1.6.1 Условия на боковой поверхности многослойного стержня..... | 65 |
| 1.6.2 Условия на поверхностях контакта анизотропных слоев многослойного стержня | 67 |
| 1.6.3 Условия на торцевых поверхностях контакта многослойного стержня | 69 |
| 1.7 Разработка метода решения полученных уравнений | 71 |

| | |
|---|------------|
| 1.8 Кручение многослойного призматического стержня прямоугольного сечения, составленного из материалов ортотропных слоев | 76 |
| 1.9 Анализ зависимости жесткости на кручение анизотропного стержня от количества слоев | 96 |
| ГЛАВА II Разработка конечно-элементной модели расчета задачи о кручении многослойных анизотропных стержней произвольного сечения | 108 |
| 2.1 Рациональные способы разбиения на треугольные элементы поперечного сечения слоистых анизотропных стержней | 114 |
| 2.2 Матрица жесткости треугольного элемента многослойных анизотропных стержней | 115 |
| 2.3. Формирование матрицы жесткости системы в узловой точке и способ ее решения | 119 |
| 2.4 Численные решения МКЭ задачи о кручении слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Анализ результатов расчета | 122 |
| ГЛАВА III Расчет закрученных многослойных композиционных стержней при совместном действии кручения, изгиба и растяжения | 134 |
| 3.1 Геометрия и кинематические соотношения закрученных слоистых анизотропных стержней | 138 |
| 3.2 Равновесие закрученных многослойных анизотропных стержней.... | 143 |
| 3.3 Напряженно деформированное состояние закрученных анизотропных составных стержней произвольной конфигурации сечения | 148 |
| 3.4 Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими расчетами кручения, изгиба и растяжения естественно- закрученных стержней | 151 |

| | |
|--|------------|
| 3.5 Исследование естественно закрученных слоистых анизотропных стержней из армированных материалов | 157 |
| 3.6 Напряженно-деформированное состояние лопаток и стержней из композиционного материала в поле центробежных сил | 166 |
| ГЛАВА IV Сравнение расчетов на прочность армированной лопатки компрессора в поле центробежных сил аналитическим методом (глава 3) и средствами пакета ANSYS | 189 |
| 4.1 Основные соотношения | 190 |
| 4.2 Условия равновесия и расчетные формулы | 195 |
| 4.3 Соотношения для частных теорий и вариантов задачи | 199 |
| 4.4 Численное определение напряженно-деформированное состояние композиционных лопаток компрессора в поле центробежных сил средствами пакета ANSYS | 203 |
| Глава V Исследование динамики многослойных многослойных анизотропных стержней и лопаток компрессора | 217 |
| 5.1 Основные уравнения динамической упругости многослойных армированных тел | 217 |
| 5.2 Основная энергетическая теорема и принцип виртуальных работ динамической упругости многослойных армированных тел | 220 |
| 5.3 Обобщенный принцип Гамильтона для динамической упругости многослойных армированных анизотропных тел | 223 |
| 5.4 Единственность решения дифференциальных уравнений динамической упругости многослойных армированных сред.. | 224 |
| 5.5 Собственные частоты колебаний многослойного стержня с переменными физико-геометрическими параметрами..... | 226 |
| 5.6 Влияние взаимодействия компонентов многослойной композиции на свободные колебания слоистых армированных тел | 231 |
| 5.7 Собственные частоты колебаний неподвижных и вращающихся многослойных анизотропных стержней и лопаток | 236 |

Глава VI Расчет закрученных многослойных анизотропных

| | |
|---|-----|
| стержней | 241 |
| 6.1 Современное состояние вопроса анализа собственных частот и форм колебаний стержневых конструкции и лопадки компрессора из композиционных материалов | 241 |
| 6.2 Общие сведения | 255 |
| 6.3 Геометрические соотношения закрученного многослойного стержня..... | 258 |
| 6.4 Основные соотношения закрученных стержней несимметричного поперечного сечения..... | 261 |
| 6.5 Уравнения равновесия закрученных стержней несимметричного поперечного сечения | 265 |
| 6.6 Некоторые энергетические характеристики многослойного стержня..... | 267 |
| 6.7 Расчет многослойных композиционных стержней на статическую прочность | 269 |
| 6.8 Влияния вращения на колебания многослойного стержня | 275 |
| 6.9 Колебания закрученного многослойного стержня несимметричного поперечного сечения | 279 |
| 6.10 Собственные частоты колебаний неподвижных и вращающихся закрученных стержней произвольного сечения..... | 292 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 297 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 299 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Алгоритм программы раскроя слоистого сечения | 323 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Вывод формулы | 336 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Свидетельство о государственной регистрации «Программы для ЭВМ» в Федеральную службу на Интеллектуальную собственность РФ..... | 338 |

| | |
|---|-----|
| ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Определения центра изгиба произвольного слоистого сечения | 339 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Инновационный патент. Удостоверение автора..... | 342 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Акт внедрения | 343 |

ВВЕДЕНИЕ

Развитие машиностроения, авиа-, ракето-, судостроения и строительства во многом определяется применением новых материалов и элементов конструкций с требованием высоких прочностных, жесткостных и других свойств при минимальном их весе, объема и стоимости. Большие возможности в этом направлении предоставляет использование композиционных материалов (КМ). Широкое внедрение новых КМ и элементов конструкций из них – одна из наиболее сложных и актуальных проблем научно – технического прогресса, связанная с фундаментальными исследованиями в области механики анизотропных тел.

В настоящее время, при создании конкурентоспособной продукции из КМ необходимо использовать новые эффективные методы исследования, позволяющие моделировать и обосновывать любые конструктивные изменения, вносимые в объект для улучшения его характеристик при минимизации временных затрат на моделирование.

Среди большого многообразия конструктивных элементов в практике широко встречаются конструкции в виде призматических стержней, испытывающие упругие деформации и работающие на растяжение, кручение и изгиб. Для призматических стержней, изготовленных из однородного изотропного материала, решение задачи растяжения, кручения и изгиба основано на теории, разработанной Б. Сен-Венаном, А. Клебшом и В.Фойхтом, где задача сводится к нахождению гармонической, в области поперечного сечения стержня, функции по заданному значению ее нормальной производной на контуре этого сечения. Эта функция называется функцией кручения Сен-Венана или функцией перемещений и с точностью до постоянного множителя она определяет осевое перемещение в скручиваемом стержне или деформацию его сечения. Пользуясь этой функцией, Сен-Венан применил в решении задач кручения свой полуобратный метод. Сущность этого метода заключается в том, что заранее задаются формой решения рассматриваемой задачи, оставляя эти решения настолько общими, чтобы в дальнейшем можно было полностью удовлетворить всем уравнениям теории упругости. Последующие авторы вносили лишь упрощения и дополнения в его исследо-

вания, указывали и давали новые приемы для определения функции кручения, введенной Сен-Венаном. Это теория нашла отражение в известных монографиях и курсах теории упругости. Большое число работ посвящено исследованию задач для однородных анизотропных стержней. Среди них особое место занимают работы Власова З.В., С.Г. Лехницкого, Васильева В.В., Л.С. Лейбензона, Б.М. Саркисяна, Б.Л. Абрамяна и Н.Х. Арутюняна, К.И. Савина, С.Г. Михлина, В.Д. Шермана, и многих других. До настоящего времени проведенные исследования не позволяют оценить влияние свойств многослойной структуры на НДС, с учетом формы, размеров каждого слоя и закрученностью стержня.

Поэтому целью настоящей работы является дальнейшее развитие известных методов решения задач кручения многослойных анизотропных призматических стержней, с учетом факторов слоистости произвольного сечения с использованием вариационных принципов и разработки на их основе инженерных методов решения новых задач с применением конечно-элементной интерпретации.

Применительно к проблеме обеспечения прочности воздушных винтов, лопастей вентиляторов, лопаток паровых турбин и т.д. чрезвычайную практическую важность имеет исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) стержней с естественной закрученностью. Наиболее подробно исследование НДС естественно – закрученных стержней из однородных материалов было проведено в работах И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра, Г.Ю. Джанелидзе, П.М. Риза, В.Л. Бердичевского, Л.Д. Магомаева, О.Б. Голубева и других. Тем самым из рассмотрения исключаются неоднородности слоистой структуры. Анализ рациональных путей построения прикладных теорий показал, что имеется два пути. Первый аналитический путь представляет формальное разложение решения в функциональные ряды, получающееся при выделении переменных как в методе Власова-Кантаровича. Такой путь исследования в теории стержней применил Бердичевский В.Л., Гордиенко Б.А., в теории оболочек и пластин Коши и Пуассон, Кильчевский Н.А. и Векуа И.Н. Второй прикладной путь дополняет первый путь системой физических допущений кинематического и силового характера. К такому пути относится техническая теория стержней И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра, теория

стержней Тимошенко С.П. и Власова В.З., теория пластин Кирхгофа, теория оболочек Кирхгофа-Лява, Тимошенко С.П., Григолюка-Чулкова и многие другие.

Однако анизотропные слоистые стержни с естественной закрученностью мало изучены. Поэтому для построения стержневых моделей с кривой осью и переменными сечениями многослойной структуры воспользуемся классической технической теорией стержней с учетом нелинейного члена в кинематических соотношениях. В технической теории однородных стержней И.А.Биргера, Шора Б.Ф. используется линейная деформация волокон стержня и не учитывались неоднородность многослойного сечения.

В связи с этим для построения эффективных методов решения задач деформаций для вышеуказанных тел, как однородных, так и многослойных, являются одним из актуальных вопросов теории упругости анизотропных стержней произвольного сечения для определения НДС в слоях структуры.

Как показывает, анализ опубликованных работ остаются нерассмотренными вопросы регулирования величины напряжений в наиболее нагруженных зонах стержней не только за счет геометрической формы стержней, но и за счет выбора рациональной схемы ее армирования и формы слоев. Эффективность этого и до настоящего времени в лопатках ГТД детально еще никто не анализировал, хотя это может дать весьма заметный положительный эффект. Кроме того, разработка аналитических методов расчета многослойных структур и численных методов реализации аналитических подходов позволяет существенно ускорить и упростить решение задачи, повысить надежность проектирования и расчета элемента конструкции чему и посвящена эта работа.

Создание современных газотурбинных двигателей (ГТД) характеризуется заменой в ряде деталей традиционных конструкционных материалов (сталей и титановых сплавов) на современные КМ, имеющие более высокие удельные прочность и жесткость. Такие работы проводят все ведущие двигателестроительные фирмы мира (General Electric, Pratt and Whitney, CFM International и др.). Исследованиями в этой области также занимаются ФГУП ЦИАМ, ФГУП ВИАМ, ОАО «НПП «Мотор», ОАО «Пермский моторный завод» и др. В настоящее время од-

ним из основных направлений по применению КМ в газотурбинных двигателях является создание лопатки из углепластика, лопатки из титанового сплава, армированного волокнами карбида кремния, лопатки составной конструкции и лопатки из КМ на металлической матрице.

Для расчетов в работе используются упругие и прочностные характеристики многослойного КМ, полученные экспериментальным путем, анализируются возможности теоретического прогнозирования упругих характеристик КМ на основе знания структуры слоя КМ и механических характеристик его компонент. Показывается, что при использовании рациональной схемы армирования слоя и подбором размера и формы слоя можно существенно снизить напряжения в зонах концентрации в многослойных стержневых конструкциях или рабочей лопатки компрессора из КМ по сравнению с лопаткой из изотропного материала.

Одним из основных материалов, применяемых в ГТД, являются титановые сплавы, обладающие высокой удельной прочностью, но и имеющие ряд существенных недостатков: повышенную чувствительность к концентраторам напряжений; низкую технологичность. Эффективной заменой титанового сплава в лопатках компрессора ГТД могут стать КМ, армированные борными, углеродными и другими волокнами. *Однако применение таких материалов требует проведения обширных научных исследований, включающих следующие направления:*

- разработка способа формирования слоистой структуры стержневых изделий из КМ, обеспечивающего рациональный выбор коэффициента армирования и направления укладки армирующих волокон в каждой точке слоя создаваемой многослойной стержневой конструкций из КМ;

- разработка методики прогнозирования и экспериментального определения физико-механических характеристик КМ в целом и его компонентов отдельности;

- разработка методики расчета НДС многослойных стержневых изделий из КМ, дающей объективную оценку прочности стержневых конструкций при разнообразных внешних нагрузках.

При проведении исследования считаем, что известны все заданные газодинамические и инерционные силы.

Исследования деформированного состояния деталей из КМ, называемые структурными, предполагает рассмотрение композиции как неоднородной, дискретно-армированной среды и проведены В.В. Болотиным. Такой подход позволяет учесть основные особенности КМ, их неоднородность, конструктивный характер анизотропии. Решение задачи по этому методу приводит к большому числу дифференциальных или конечно-разностных уравнений. Если размеры всех слоев, входящих в конструкцию, одинаковы, то такая задача вполне разрешима на ЭВМ. Поэтому, задача заключалась в таком выборе аппроксимирующей модели многослойных армированных конструкций, которая с одной стороны допускала бы возможность практической реализации расчетов на прочность, а с другой - позволяла бы учесть особенности свойств и структуры КМ. Действительно, особенности строения слоистых материалов таковы, что их можно рассматривать как дискретную регулярную среду, составленную из большого числа чередующихся "жестких" слоев арматуры и "мягких" прослоек матрицы. Тем самым, удается представить неоднородный материал в виде многослойного анизотропного материала с упругими константами, выраженными через упругие константы его составляющих. Указанный метод позволяет решать очень важный вопрос оптимального проектирования на этапе эскизного проектирования конструкций.

Таким образом, стержень из КМ можно представить как анизотропное тело, упругие постоянные которого тем или иным способом определяются через упругие характеристики исходных компонентов - матрицы и наполнителя.

При планируемой замене в стержневых изделиях или рабочей лопатке из изотропного материала на КМ, сохраняется вся наружная геометрия многослойных стержневых конструкций или лопатки и режимы ее эксплуатации, что позволяет надеяться, что многослойный стержень или лопатка из КМ будем иметь необходимую прочность при выполнении следующих условий:

- удельная прочность КМ будет не ниже, чем удельная прочность из изотропного материала;
- коэффициент запаса по статической нагрузке при максимальном режиме будет удовлетворять условиям прочности;

- применяемый КМ будет менее чувствительным к концентраторам напряжений.

После обеспечения прочности многослойных стержневых изделий или перьевой части рабочей лопатки компрессора из КМ авиационного двигателя, особое внимание должно быть уделено явлению концентрации напряжений. Это связано с тем, что несущая способность стержневых изделий очень часто определяется в местах концентрации напряжений, так как именно там наступает предельное состояние и разрушение.

Применяя КМ, можно дополнительно применить принципиально новый способ снижения концентрации напряжений, основанный на армировании многослойного стержня или лопатки высокомодульными и высокопрочными борными, углеродными и другими волокнами.

В настоящее время математические методы моделирования динамического поведения многослойных конструкций из КМ разработаны недостаточно. В уравнениях движения не учитывалось влияние многослойной структуры с жесткими анизотропными слоями на значения собственных частот и коэффициентов механических потерь.

Таким образом, традиционно используемые методы расчета в силу своих ограничений не позволяют предсказать с необходимой точностью частотные характеристики многослойных анизотропных стержневых изделий на этапе эскизного проектирования. На практике вибрационная настройка всегда была сопряжена с большими трудностями и осуществлялась в основном экспериментально. Поэтому внедрение новых, более точных расчетных методов в процесс проектирования многослойных стержней или рабочих лопаток из КМ, является ***актуальной научно-технической задачей, которая обладает существенной новизной и имеющая важное практическое значение.***

Объектом исследования являются призматические многослойные анизотропные стержни, образованные из различных слоев линейно деформируемого анизотропного КМ, которые в поперечном сечении имеют произвольную конфигурацию и могут находить под совместным действием растягивающих, изгибающих и

крутящих моментов.

Целью настоящей работы является разработка математических расчетных моделей задачи механики сплошной среды, позволяющих исследовать НДС композиционных тел стержневого типа на основе линейного однородного, квазиоднородного и структурного подходов. В соответствии со сформулированной целью работы были поставлены и решены следующие задачи:

- разработка метода решения задачи теории упругости неоднородных слоистых тел с регулярной и квазирегулярной структурой, который позволяет учитывать влияния неоднородности структуры на распределение перемещений и напряжений;

- разработка эффективных методов решения задач с применением современных ЭВМ, для исследования НДС при кручении многослойных анизотропных призматических стержней, поперечное сечение которых представляют собой произвольную область;

- исследование распределение касательных напряжений, в том числе на поверхности контакта составного тела при его кручении, а также определение жесткости на кручении, в широком диапазоне изменения характерных физических и геометрических параметров многослойного призматического стержня;

- создание приближенного метода расчета естественно – закрученных составных анизотропных стержней слоистой структуры произвольного сечения в условиях кручения, изгиба, растяжения и действия центробежных нагрузок.

- на основе известных моделей неоднородного упругого тела провести расчеты прочности, колебаний тел стержневого типа;

- разработать методику расчета НДС композитных лопаток и лопастей, содержащих анизотропные или структурно неоднородные слои, с целью варьирования состава компонентов и ее структуры при неизменных внешних размерах и форме конструкции;

- на основе использования разработанной теории описать особенности деформирования высоконагруженных композитных изделий в поле центробежных сил;

- получить расчетные соотношения для напряжений, углов раскрутки, технических частот исследуемых тел, используемых как для теоретических, так и прикладных задачах.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, состоит в следующем:

- разработаны и получены расчетные формулы разрешающих уравнений для определения деформаций призматических тел;

- впервые разработана методика решения дифференциальных уравнений определения НДС в призматических телах, с удовлетворением всех граничных условий на контактных поверхностях многослойных анизотропных тел, что позволяет учесть закономерности распределения касательных напряжений и перемещений.

- построена закономерность изменения жесткости на кручение слоистого стержня при увеличении количества слоев и найдено его аналитическое выражение для тела многослойной структуры.

- построены номограммы и таблицы, отражающие зависимости интегральных характеристик жесткости стержня и его составных частей для определения модуля сдвига.

- построена для определения жесткости на кручение слоистых анизотропных стержней произвольного сечения оригинальная методика с использованием решения задачи кручения методом конечных элементов (МКЭ).

- впервые даны оценки характера распределений и уровней напряжений в отдельных слоях многослойных анизотропных стержней после их предварительного линейного деформирования на стадии эксплуатации или изготовления, что важно при решении вопроса о пригодности их для дальнейшего использования;

- разработаны алгоритм и программы, позволяющие проводить раскрой сечений по слоям, с целью варьирования их физических параметров для обеспечения надлежащей прочности, жесткости и сохранения формы конструкции специального назначения – лопаток и лопастей для конструирования структуры и состава композитного изделия;

- дана математическая формулировка задачи о НДС многослойного анизотропного призматического стержня произвольного сечения при действии растягивающих сил, изгибающих и крутящих моментов. Предложен алгоритм построения приближенного решения сформулированной задачи;

- предложены для естественно–закрученных слоистых анизотропных стержней новые кинематические соотношения, которые используются в основных уравнениях для расчета деформирования на основе стержневой модели, которая учитывает нелинейные деформаций, эффекты поперечного сечения и НДС в плоскости сечения и хорошо согласуются с имеющими экспериментальными данными;

- получены основные соотношения для расчета НДС в композитных телах стержневого типа в поле центробежных сил;

- получены расчетные соотношения для технических частот исследуемых тел, пригодных как для теоретических, так и прикладных целей.

Результаты, полученные в работе, представляют теоретическую и практическую ценность для расчета и проектирования многослойных анизотропных конструкций неоднородной структуры.

Результаты разработанной комплексной программы позволяют проводить послойный раскрой сечений по длине многослойного стержня (лопатки) из КМ и внедрены в производства по изготовлению лопаток из КМ в ООО «Политермо» (г.Истра, Московская обл.).

По результатам исследования получен инновационный патент и удостоверение автора №89798 (г. Астана, 2016 г. Министерства юстиции РК) по теме «Способ изготовления композитных лопаток ветроустановки согласно утвержденным математическим моделям методом вакуумно-компрессорной пропитки».

Разработанный комплекс расчетных программ зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности как «Программа для ЭВМ» на тему «Решения задачи кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов» (№2016662153 от 31.10.16).

Работа состоит из введения, шести глав, основных выводов, списка литерату-

ры и приложения. Работа состоит из введения, шести глав и выводов, приложений. Программа расчета на ЭВМ дана в виде блок–схемы.

В первой главе работа построено так: сначала изучаются характеристика композиционного материала отдельного слоя, составной части стержня, затем стержень в целом. Рассматриваемый призматический анизотропный слоистый стержень состоит из конечного числа слоев. Материал каждого слоя является однородным ортотропным. Поведение однонаправленного слоя полагается линейно–упругим, а связь между напряжениями и деформациями описывается обобщенным законом Гука. При этом параметры упругости слоя определяются либо экспериментальным путем, либо расчетным через технические постоянные.

В главе 1 приведен краткий обзор существующих экспериментальных работ Российских и зарубежных авторов, посвященных изучению физико-механических характеристик КМ, предел прочности, модуль упругости и т.д. Отмечены, что основные достижения в механике КМ связаны с работами Болотина В.В., Васильева В.В., Рабиновича А.Л. и Верховского И.А., Дудченко А.А., Аболиньша Д.С., Скудры Л.М. и Аузукалнса Я.В., Ванина Г.А., Бидермана В.Л. и других. Среди зарубежных авторов следует отметить работы Шеффера, Иквелла, Бира, Хашина и Розена, Цая, Уитни и Райли, а также Хайнера и Ашбауха и др. Проанализированы расчетная модель композиционного материала и методы определения упругих постоянных композиционного материала. Проанализированы экспериментально установленные наиболее существенные особенности поведения конструкционных материалов при их статическом и динамическом деформировании, которые, непременно, должны быть охвачены в рамках существующих и разрабатываемых математических моделей. Приведены расчетные формулы для определения упругих свойств слоя из композиционных материалов. Определяются расчетные формулы композиционной многослойной структуры и приведена математическая модель предварительно закрученного многослойного стержня произвольного сечения. Так как стержень из КМ имеет слоистую структуру, то для него возникает специфическая для армированных стержней задача – задача укладки в сечении слоев постоянной толщины. Так как размеры сечения могут меняться вдоль дли-

ны стержня, то и число слоев в каждом сечении будет различным. Расположение отдельных слоев в сечении стержня определяется толщиной монослоя ленты или ткани и наружной конфигураций сечения. В работе предложен оригинальный алгоритм расчета координат, оформляющие отдельные слои для стержня произвольного сечения. Предложен алгоритм и он реализован для расчетов в виде пакета программ на языке Fortran. Наиболее сложным в алгоритме является процесс построения начала и конца каждого слоя. Такие построения проводятся для ряда следующих друг за другом сечений. Взятые из разных сечений координаты начала и конца одного слоя образуют координаты одного лепестка, т.е. решена сформулированная задача раскрытия слоев ленты, ткани.

Направление осей симметрии материала слоя может не совпадать с осями координат стержня и может меняться от слоя к слою, что может быть причиной отличия физико-геометрических свойств отдельных слоев друг от друга. Поэтому предложена формула расчета физико-геометрических характеристик сечений анизотропного слоистого стержня и разработана программа, численно реализующая на языке Fortran определение физико-геометрических характеристик (количество их 15) слоя и сечения с высокой точностью.

Рассматриваются многослойный стержень произвольного сечения, находящийся под действием изгибающих M_1 , M_2 и крутящих M_t моментов, а также растягивающей силы P . Дана математическая формулировка задачи о н.д.с. этого стержня. Получение точного решения этой задачи представляет большие трудности.

Предложен алгоритм построения приближенного решения в виде степенного ряда по малому параметру. Обсуждаются вопросы существования и сходимости решения. Однако решение поставленной задачи в полном объеме представляют определенные математические трудности. Поэтому, в работе особенности деформирования КМ изучаются сначала на основе анализа результатов решения задачи о чистом кручении многослойных стержней.

Оказалось, что для призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, составленного из различных ортотропных слоев, существует аналитиче-

ское решение С.Г. Лехницкого - задача о чистом кручении, удовлетворяющие условия сплошности на поверхности контакта слоев. Однако в работе С.Г. Лехницкого не был проведен анализ решения для многослойного стержня. В связи с этим на основе составленной программы расчета всесторонне исследовалась распределение касательных напряжений, перемещении в отдельных слоях и на поверхностях их контакта в зависимости от механических характеристик материала этих слоев. Численное исследование задачи о кручении составных стержней прямоугольного сечения показывает существенное изменение напряжений и перемещений при переходе от слоя к слою. Обеспечение непрерывности касательного напряжения σ_{yz} на границах контакта слоев приводит к возможности разрушения слоев с низкой сдвиговой прочностью и, следовательно, к дальнейшему уменьшению их вклада в жесткость на кручение стержня и последующему повышению скачков напряжения σ_{xz} и перемещения w , а так же градиентов напряжений σ_{yz} . Поэтому увеличение межслоевой прочности КМ является основным способом обеспечения целостности и работоспособности стержней из КМ, а также их надежности и эффективности.

Проведенный анализ позволяет дать оценку работоспособности анизотропной слоистой конструкций при кручении в целом в зависимости от напряженности отдельного слоя.

В работе, аналитическим путем установлена зависимость выражения жесткости на кручение от числа слоев, которая асимптотический стремится к пределу, характерному для однородного анизотропного стержня с эффективными параметрами упругости. Из проведенного анализа следует, что на этапе предварительного выбора материала для вычисления жесткости C на кручении многослойного анизотропного стержня можно рекомендовать относительно простое соотношение

$$C = \frac{1}{3} ah^3 (G_A v_1 + G_B v_2) = \frac{1}{3} c_{55}^i ah^3. \quad (1)$$

Соотношение (1) является обобщением известных соотношении жесткости на кручение C на случай тонкого многослойного анизотропного стержня. Из (1) следует, что эффективный модуль сдвига $G = c_{55} = v_1 c_{55}^2 + v_2 c_{55}^1$ тонкого стержня

многослойной структуры должен быть определен по модели Фойхта в отличие от принятого способа ее определения по модели Рейса. Таким образом, полученные соотношения для оценки жесткости на кручение C и эффективного модуля c_{55} стержневых конструкции, рам, и т.д. из КМ, являясь достаточно простыми, дает достоверные результаты.

В работе построены специальные номограммы, позволяющие достаточно просто оценить отдельные характеристики стержня на основе небольшого объема информации о материале слоев. На стадии эскизного проектирования тонкостенных многослойных стержней работающих в условиях кручения предложена номограмма для оценки их характеристик жесткости на кручение. Были проведены многочисленные расчеты по приближенной формуле (1) для определения жесткости на кручения C стержня из композиционных материалов.

Они показали, что с увеличением модуля сдвига G_A жесткость C увеличивается линейно. Результаты расчетов приведены в виде зависимостей жесткости C от отношения G_A/G_B при определенных объемных содержаниях ν_1 . Параметры G_A , G_B могут быть связаны с отдельными конкретными углами армирования. Построенная линейная зависимость жесткости C от отношений модулей сдвига G_A/G_B позволяет определить эффективные параметры упругости многослойной анизотропной среды или же жесткости на кручение C двухфазного композиционного стержня при заданных значениях G_A , G_B и ν_1 , ν_2 . Действительно, если известно отношение модулей сдвига G_A/G_B чередующихся материалов и их относительное объемное содержание ν_1 , ν_2 , то жесткость неоднородного стержня C находится из линейной зависимости. При известных значениях жесткости C и относительном объемном содержании компонента ν_1 (или отношении G_A/G_B) можно определить отношение G_A/G_B (или ν_1). Если, кроме того, известны характеристики одного из материалов А или Б, то найденное отношение G_A/G_B позволяет установить модуль сдвига другого компонента. Результаты расчетов для композиции с алюминиевой матрицей ($G_B=26.31$ ГПа) показывают, что расчетные C и экспериментальные C^* значения жесткостей и модулей сдвига c_{55} , вычисленные по формулам (1), отличаются не более 3%. Таким образом, разработана методика количественной оцен-

ки жесткости на кручение тела слоистой структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения.

Вторая глава посвящена численному решению МКЭ задачи о кручении слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Проведен анализ работ, показывающий, что жесткость на кручение является важной интегральной характеристикой сечения стержней. Опубликованные результаты представляются недостаточными, особенно в части влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость при кручении слоистых стержней произвольного сечения. Поэтому, в работе предлагается методика и алгоритм решения задачи о кручении слоистых анизотропных стержней МКЭ с использованием алгоритмического языка Фортран. Рассматривается задача о кручении стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки. Значения осевых перемещений прямоугольного и ромбовидного сечений, вычисленные МКЭ, сравниваются с точными их значениями.

Геометрия слоистого стержня разбивается на слои по заданной толщине с учетом физической неоднородности и слоистости (технологическая задача раскрытия сечения на слои), алгоритм которого реализован по специально созданной программе на алгоритмическом языке Фортран. Полученная геометрия слоев различных сечении по длине стержня, позволяет при определении НДС исследуемой области учитывать их физическую неоднородность с учетом слоистости. Каждый слой рассматриваемого сечения может быть изготовлены из различных орторопных материалов (количество характеристик равно 9).

В связи с этим, для учета физической неоднородности и слоистости сечений, рассматриваемых конструкций при определении НДС, возникает необходимость для решения таких задач использование численных методов (МКЭ, МГЭ и др.). Поэтому в главе 2 для решения таких задач МКЭ, приведен алгоритм построения треугольник элементов по сечению слоистого стержня, который учитывает физическую неоднородность и слоистость сечения. Предлагаемый способ решения задачи о кручении многослойного анизотропного стержня произвольного сечения

использует алгоритмический язык Фортран в качестве расчетного ядра для МКЭ. Разработанный пакет программ позволяет по заданной толщине монослоя представить в автоматическом режиме поперечное сечение стержня в виде совокупности отдельных слоев, выбрать узловые точки и построить в окрестности их треугольные элементы. Количество узловых точек в исследуемой области обычно ограничено возможностями используемых ЭВМ. Это ограничение в работе снимается тем, что разрешающее уравнение формируется в каждой узловой точке. Для всех N окаймляющих узловую точку j треугольных элементов формируется уравнение относительно функций кручения узла j . При этом построенный отдельный элемент принадлежит только одному анизотропному слою. Решение задачи построена с использованием итерационного метода при неполной верхней релаксацией и точечной прогонкой.

При этом, применяемый итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи и увеличить практически без ограничения количество рассматриваемых узловых точек. Решена задача о кручении стержней ромбовидного, прямоугольного сечения и сечения компрессорной лопатки. Значения осевых перемещений, жесткости на кручение многослойных анизотропных стержней с прямоугольным и ромбовидным сечением, вычисленные МКЭ, сравниваются с аналитическим их значением.

Так же в качестве примера были проведены расчеты МКЭ для многослойных стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки, составленных из различных композиционных материалов с различными углами армирования. При этом наибольшие касательные напряжения возникают у входной и выходной кромках лопатки. Касательные напряжения в тонких слоях кромки корытца (спинки) и ромба может привести к местной потере устойчивости слоя с малыми свойствами на сдвиг. Таким образом, можно избавиться от опасных касательных напряжений у входной и выходной кромок стержня с помощью армирования тонких слоев кромок волокнами под различными углами укладки.

Результаты представленной работы достаточно точно позволяют определять, взаимного влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость и НДС при кручении слоистых стержней произвольного сечения.

Использованный итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи.

Расчетные значения жесткости на кручение используется в дальнейшем при определении НДС естественно-закрученных слоистых стержней.

Таким образом, в главе 2 с помощью МКЭ разработан алгоритм и реализована на алгоритмическом языке Фортран задача, позволяющая вычислить перемещения и напряжения, а так же жесткость на кручение многослойных композиционных стержней произвольного сечения при кручении.

В третьей главе для исследования поведения естественно – закрученных многослойных стержней в поле центробежных сил используется стержневая модель их расчета. Здесь предложены новые кинематические соотношения, более полно отражающие влияние начальной закрученности τ_0 и деформации кручения ε_τ на НДС стержня. Из условия равновесия элемента закрученного стержня при действии растягивающей силы P , изгибающих M_1, M_2 и крутящего моментов получена система разрешающих уравнений относительно параметров деформации растяжения ε , изгиба χ_1, χ_2 и кручения τ . Вообще, задача сформулирована в более общем виде, учитывающем нелинейные деформации, эффекты поперечных сил, деформации в плоскости сечения и температуры. Отличительной особенностью разрешающих уравнений для многослойного стержня является большая связанность деформаций растяжения ε , изгиба χ_1, χ_2 и кручения τ , чем в случае стержня из однородного изотропного материала. Достоверность уравнений приближенной теории закрученных слоистых стержней проверяется сопоставлением их следствий с известными соотношениями для некоторых частных случаев, а также сравнением результатов расчета с экспериментальными данными.

На основе соотношений предложенного варианта теории закрученных слои-

стных стержней произвольного сечения составлен пакет программ расчета на ЭВМ, позволяющий численно определить НДС лопаток и стержней из КМ в поле центробежных сил. Он включает в себя выше описанные программы представления сечения стержня в виде совокупности монослоев, расчета необходимых физико-геометрических характеристик сечения, вычисления жесткости на кручение. Проведен расчет НДС слоистой компрессорной лопатки из КМ. По результатам расчетов построено семейство кривых, отражающее зависимости деформации растяжения ε , растягивающего усилия P от центробежной силы, осредненного σ_{cp} напряжения, раскрутки τ и жесткости на кручение C_0 по Сен-Венану для каждого сечения.

Сравнение исследованных примеров показывает, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же физических оборотах. При заданной геометрической форме лопатки, выбираемой из аэродинамических соображений, посредством перекрестного армирования ее слоев уровень нормальных напряжений σ_{zz} можно уменьшить, одновременно избежав больших сжимающих напряжений на кромках профиля. Проанализированы уровни касательных напряжений σ_{yz} , σ_{xz} , обусловленные начальной закрученностью лопатки. Величина прочности при межслоевом сдвиге для слоистых материалов мала. Вследствие этого возникновение касательных напряжений в лопатках могут оказаться не допустимым.

Таким образом, разработана методика определения НДС лопатки из КМ с учетом слоистости материала. Расчет лопатки по этой методике позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами и его положения в теле лопатки. Составленная по этой методике программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретной лопатки из ранее выбранного класса КМ. Эффективность и достоверность разработанной программы подтверждена сравнением расчетных результатов с данными испытаний на растяжение естественно-закрученных стержней прямоугольного сечения.

Проведенные расчеты лопаток конкретных типов показали, что угол раскрут-

ки периферийного сечения лопатки можно уменьшить, увеличивая жесткость на кручение посредством перекрестного армирования слоев или применяя в пакете материала слоев из жесткого материала на растяжение. При возрастании уровня характеристик жесткости слоев неравномерность нормальных напряжений в поперечном сечении и величина касательных напряжений между слоями увеличиваются. Наличие больших касательных напряжений между слоями возникает из-за различной жесткости контактирующих слоев. Необходим плавный переход свойств материала от слоя к слою.

В главе 4 приведены результаты численного решения МКЭ НДС композиционной лопатки с помощью пакета ANSYS для сравнения результата расчета, с полученными в главе 3. По результатам расчетов построены изолинии распределения перемещения W, U, V по длине лопатки для спинки (выпуклая сторона сечения) и корытца (вогнутая сторона сечения). На входной кромке спинки от корневого сечения до третьего сечения перемещения W растут 4-5 раз, а на тонких выходных кромках они растут 10 раз. Распределение нормального перемещения W и перемещений U, V на спинке более равномерно по сравнению с корытцем лопатки. На корытце концентрация больших перемещений W наблюдается уже в четвертом сечении лопатки. Поэтому, чтобы увеличить прочность лопатки необходимо слои со стороны корытца заменить материалами более жесткими на растяжение.

Наибольшее нормальное напряжение распределена на корневом сечении лопатки, так как корневое сечение лопатки жестко закреплено. Средние напряжения по сравнению с напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} в 1,5-2 раза больше и по ним нельзя определить области сжимающих напряжений. Следовательно, для определения НДС лопатки необходимо вычислять все компоненты напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} .

Анализ работы многослойных КМ, в условиях близких к рабочим условиям лопаток позволил выявить ряд особенностей распределения напряжений в армированных материалах. Установлено, что при растяжении лопаток из КМ в поле центробежных сил, во внешних слоях происходит увеличение нормальных напряжений в 2-4 раза по сравнению со средними их величинами.

Численные результаты определения НДС композиционной лопатки с помо-

щью пакета ANSYS совпадает с результатами пункта 3.6 (см. глава 3) для лопатки из однонаправленного боралюминия. Для улучшения количественные показатели необходимо увеличить количество конечных элементов в расчетах ANSYS, что требует для расчета более мощных ЭВМ.

В главе 5 использованы основные вариационные принципы для решения задачи определения НДС в армированном слоистом теле в условиях динамического деформирования. Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из композиционного материала. С помощью метода Ритца на основе принципа Гамильтона определены собственные частоты армированного стержня. Полученная формула дает возможность подсчитать низшие собственные частоты при поперечных колебаниях слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Результаты численного анализа дают хорошее совпадение с опытными данными. Показано, что при взаимодействии наполнителя и матрицы полученное уравнение частот определяет собственную частоту, величина которой мало отличается от частот, найденных на основе теории «эффективных» модулей. Полученные формулы позволяют управлять собственными частотами путем выбора тех или иных физических и геометрических параметров многослойного анизотропного стержня.

На этапе эскизного проектирования лопатки необходимо решить задачу отстройки ее от зон возможных резонансов. Для этого после определения собственных частот и форм колебаний многослойных лопаток из КМ на различных режимах нагружения строится резонансная диаграмма лопатки, на которой наносят кривые изменения собственных частот колебаний лопатки с учетом влияния центробежных или газовых сил и лучи гармоник к частоте вращения. Точки пересечения кривых собственных частот с лучами гармоник определяют резонансные частоты, от которых необходимо отстроить лопатку. В этом случае собственные частоты колебаний лопатки отстраивают от резонанса, изменяя закон распределения толщин по срединной поверхности лопатки или с помощью изменения свойств многослойной лопатки из КМ с учетом НДС. В качестве примера приводятся резонансные диаграммы для отстройки от первых четырех гармоник возбу-

ждения на рабочих режимах для многослойного стержня прямоугольного сечения.

В главе 6 на основе разработанного варианта теории закрученных слоистых анизотропных стержней определяются собственные частоты закрученных анизотропных стержней, находящихся в поле центробежных сил. После определения собственных чисел несимметричной вещественной матрицы, находятся продольные, крутильные и изгибные собственные частоты слоистого стержня. Откуда будет возможность определить взаимовлияние более близких частот многослойного стержня. Таким образом, полученная система уравнения позволяет определить собственные частоты закрученных анизотропных стержней, находящихся в поле центробежных сил. Совпадение формулы собственных частот, в частных случаях, с известными результатами доказывает достоверность полученных результатов.

Для достоверности полученных соотношений приведено сравнение вычисленные по формуле численных результатов, с известными решениями определения собственных частот (изгибные и крутильные). Необходимо отметить, что использованные для сравнения результаты были получены в результате вычисления в пакете программ Ansys и по программам других авторов. Сравнения результатов расчетов собственных частот, которые дают отличие в среднем 5%, при этом в одних случаях получали большие, а в других – меньшие частоты.

Автор выражает особую признательность и благодарность за постановку проблемы, за постоянное внимание к работе, за его неизменную поддержку д.т.н., профессору Дудченко А.А. и д.т.н., профессору Каримбаеву Т.Д., а также за представление некоторых экспериментальных данных.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА
СТЕРЖНЕВЫХ ДЕТАЛЕЙ И РАБОЧИХ ЛОПАТОК КОМПРЕССОРОВ
ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ (ГТД)

Механические и физические характеристики материалов структурных компонентов и принятая технология их переработки полностью определяют свойства композиционного материала. Точно также те математические модели, которые приняты для описания поведения компонентов композиционных материалов при механических и температурных воздействиях, определяют модели деформирования композиционных материалов в целом. В связи с этим ниже описаны свойства структурных элементов и аналитические модели их деформирования.

Материал волокна определяет высокие характеристики прочности и жесткости будущих композиционных материалов, особенно, в направлении армирования. Кроме того, присутствие армирующих элементов обеспечивает повышенные характеристики вязкости разрушения составного материала. Армирующие элементы входят в состав КМ непосредственно в виде дискретных и непрерывных волокон, нитей, а также в форме изготовленных из них жгутов, ленты и тканей различного переплетения, войлока, матов и т.д. В любом случае нагруженный в направлении волокна и по боковой поверхности композиционный материал вовлекает армирующий элемент в общее сопротивление. В большинстве случаев практического применения, как правило, армирующие элементы деформируются линейно вплоть до разрушения. Это позволяет установить связь между напряжениями и деформациями в наиболее общем случае описывать соотношениями закона Гука [1-3].

Исследованию кручения слоистых стержней посвящена многочисленная литература [1]-[4]. Главной особенностью этих исследований является то, что материал стержня представляется в виде однородного анизотропного тела с "эффективными" по всему поперечному сечению механическими характеристиками. При этом, не достаточно полно учитывается слоистость структуры материала стерж-

ней, в частности, не позволяет оценить влияние месторасположения слоя с теми или иными свойствами на кручение стержня.

Этот недостаток используемых подходов не позволяет сформулировать задачу о выборе оптимальной структуры сечения стержня, обеспечивающей, например, ему наибольшую жесткость на кручение. Кроме того при использовании однородной модели анизотропного материала совершенно игнорируется возможное при кручении относительное движение компонентов композиции.

Композиционные материалы представляют собой волокнистую, конструктивно анизотропную среду и имеют ярко выраженную слоистую структуру. Сложная конфигурация армирующих слоев, составляющих криволинейные стержни, делает упругие свойства конструкции переменными по высоте и хорде профиля. Определение упругих свойств таких конструкций экспериментальными методами требует большой серии экспериментов на образцах с идентичной укладкой, что часто оказывается трудно реализуемым технически.

Другой подход исследования деформированного состояния деталей из КМ - структурный. Он предполагает рассмотрение композиции как неоднородной дискретно-армированной среды. Такой подход позволяет учесть основные особенности композиционных материалов, их неоднородности, конструктивный характер анизотропии. Решение задачи по этому методу приводит к большому числу дифференциальных и конечно-разностных уравнений [5]-[7]. Реальная картина работы подобных моделей КМ в стержнях отличается исключительной сложностью.

Поэтому задача о выборе аппроксимирующей модели многослойных армированных конструкций, которая, с одной стороны, допускала бы возможность практической реализации расчетов на НДС тела, а с другой - позволяла бы учесть особенности свойств и структуры КМ является актуальной. Среди таких подходов наибольшее распространение в настоящее время получила теория армированных сред, разработанная В.В. Болотиным [5], [6], [8]. Согласно этой теории дискретная модель материала заменяется квазиоднородной анизотропной средой, упругие постоянные которой выражаются через упругие постоянные компонентов. Эта операция становится возможной вследствие большого количества армирующих эле-

ментов и упорядоченности их свойств в композиции. Действительно, особенности строения слоистых материалов таковы, что их можно рассматривать как дискретную регулярную среду, составленную из большого числа чередующихся "жестких" слоев арматуры и "мягких" прослоек матрицы.

В основу теории армированных сред положены макроструктурные особенности рассматриваемых материалов: жесткость волокон существенно превышает жесткость податливой матрицы, толщина армирующих элементов и расстояние между соседними элементами малы по сравнению с характерными размерами тела. Эти особенности позволяют выразить НДС ее компонентов. Тем самым, удается представить неоднородный материал в виде однородного анизотропного материала с упругими константами, выраженными через упругие константы его составляющих. Точность предельного перехода к теории армированных сред возрастает с ростом числа армирующих элементов. Исследования показали, что уже при десяти и большем числе слоев погрешность становится незначительной (~5%) [7], [9]. Следовательно, для большинства реальных конструкций описанный путь замены дискретной среды квазиоднородной вполне допустим.

Слой полимерного связующего или металлической матрицы, армированной однонаправленными волокнами, является основным элементом КМ. Поэтому, прежде всего, при исследовании слоистых материалов, армированных непрерывными волокнами, необходимо определить характеристики составного материала с однонаправленными волокнами через свойства отдельных слоев, входящих в его состав (см. 1.1).

1.1. Требования к материалам, используемым в стержневых деталях и лопатках компрессора

Конструкция рабочих лопаток и используемый для них материал должны обеспечивать высокую прочность и жесткость, так как лопатки компрессора работают при высокой нагрузке в движущемся нестационарном газовом потоке к температура которого изменяется от 20°C на первых ступенях до 600°C на послед-

них. Кроме того, воздушный поток несет собой различные твердые частицы и капли, которые на больших скоростях сталкиваются с лопатками, подвергая их износу.

Таким образом, основные требования к материалам рабочих лопаток компрессора ГГД сводятся к следующим: высокая удельная прочность и жесткость при сложном напряженном состоянии, сохраняющиеся при повышенных температурах; высокая усталостная прочность; стойкость к эрозии, коррозии и к ударным нагрузкам; высокая чистота поверхности; технологичность их переработки.

Опыт показывает, что описанные требования могут быть удовлетворены при использовании композиционных армированных материалов, которые обладают большой удельной прочностью и жесткостью, чем лучшие сплавы, применяемые в авиадвигателестроении.

Композиционные материалы - это слоистые материалы, которые представляют собой объемное сочетание химически разнородных компонентов с четко выраженной границей раздела. В первую очередь, это материалы волокнистого строения. В качестве армирующих наполнителей применяются многофазные поликристаллические волокна и нитевидные монокристаллы углерода, бора, стекла, бериллия, а также различных соединений: окислов, карбидов, нитридов, боридов и других. Армирующие элементы в виде моноволокна и жгутов, нитей, лент, бумаг, холстов и других текстильных изделий сочетаются с металлическими и неметаллическими (полимерными, углеродными, керамическими и др.) матрицами.

Функция волокон или нитевидных кристаллов в материале заключается, главным образом, в том, чтобы нести прилагаемую внешнюю нагрузку. Главная роль матрицы состоит в том, чтобы связывать волокна воедино, распределяя по отдельным элементам, действующие нагрузки.

Многие технологические факторы, влияющие на прочность армированных материалов, мало изучены. Важнейшими из них являются механическое и химическое повреждение волокон в процессе армирования. Механическое повреждение связано с повреждением поверхности волокон или их разрушением в процессе изготовления материала. Химическое повреждение обусловлено физико-

химическими процессами на границе раздела разнородных материалов, приводящими к растворению волокон или образованию хрупких интерметаллидных соединений. Последние резко снижают прочность связи по границе раздела и, как следствие, прочность материала. Эти трудности могут быть преодолены либо подбором соответствующих материалов волокна и матрицы, либо специальным покрытиями волокон. В таблице 1.1. приведены свойства некоторых рядов волокон и усов [9]-[11].

Таблица 1.1 Свойства волокон и усов.

| | Волокна | | | | | | Нитевидные кристаллы | | | | | |
|---------------------------------|-------------|---------|-------|------|------|------|--------------------------------|------|-----|--------|--------------------------------|-----|
| | Стек- ло | С | В | W | Mo | Be | Al ₂ O ₃ | BeO | BeC | SiC | Si ₃ N ₄ | С |
| ρ , г/см ³ | 2,5 | 1,4-2 | 2,6 | 19,3 | 10,2 | 1,82 | 3,9 | 2,8 | 2,5 | 3,2 | 3,18 | 1,6 |
| σ 10 ⁻³ , МПа | 4,5 | 1,2-2,6 | 2,8-4 | 4,1 | 2,2 | 1,3 | 4,2-25 | 13,3 | 14 | 14-42 | 4,9-14 | 20 |
| E 10 ⁻³ , МПа | 0,88 | 1,7-4,2 | 3,85 | 4,1 | 3,6 | 2,45 | 4,2-10,5 | 3,5 | 4,9 | 4,9-10 | 2,8-3,8 | 7,1 |

Хотя прочность нитевидных кристаллов в несколько раз выше прочности непрерывных волокон, разработка композиционных материалов на основе последних продвинулась значительно дальше, поскольку для эффективного использования высокой прочности нитевидных кристаллов предстоит ещё решить ряд проблем по методам их переработки (фракционированию, ориентированию, получению полуфабрикатов и др.).

При условии совместимости волокон с матрицей уровень физико-механических характеристик КМ, в основном, определяется - свойствами упрочняющих волокон, их размерами, ориентацией и содержанием в композиции.

Характеристика композиций монотонно увеличивается по мере повышения прочности и жесткости армирующих волокон.

В настоящее время разработаны КМ на металлической матрице. Это сплавы на алюминиевой основе, армированные волокнами бора (ВКА-1) и графита (АВУ-1). Первый из них имеет предел прочности на разрыв 1100-1500 МПа, модуль упругости 2,3-10 МПа и предел прочности 500-700 МПа при плотности 2,65 г/см³ [12]. Перечисленные характеристики алюминиевого КМ в 2-3 раза выше указан-

ных свойств применяющихся алюминиевых сплавов, а по модулю упругости в два раза выше, чем у титановых сплавов. Характеристики прочности композиционного слоистого материала на основе бороалюминия и титанового сплава (ВКТ-4), соответственно равны 800-900 МПа и $2,5 \cdot 10^5$ МПа при плотности $3,32 \text{ г/см}^3$ [13].

Основная особенность КМ заключается в существенной ортотропии их механических свойств. Наибольшие показатели прочности и модуля упругости достигаются при растяжении вдоль направления армирования. Отношения продольных характеристик к характеристикам межслоевого сдвига или к поперечным характеристикам достигают при этом величин, равных 50-100.

Высокое сопротивление усталостному разрушению КМ обусловлено повышением энергии зарождения и энергии распространения трещин в матрицах, армированных высокопрочными волокнами [13].

Слоистая структура КМ позволяет регулировать их свойства в плоскости листа посредством изменения угла расположения волокон по отношению к линии нагружения. В этом заключается одно из самых важных преимуществ армированных материалов. По существу создание материала происходит на стадии проектирования конструкции. Выбор направления укладки армирующих слоев должен проводиться, исходя из анализа НДС детали. Только в этом случае можно получить максимальный эффект от применения КМ

Сочетание разнородных составляющих композита позволяет получить материалы с новыми свойствами.

Слоистые КМ характеризуются малой жесткостью и жесткостью при сдвиге между слоями, что обусловлено - низкими механическими характеристиками матрицы. Для увеличения этих показателей в настоящее время разработаны схемы армирования материала в трех направлениях. Известны несколько методов создания межслойных связей. Это многослойные ткани, основанные на системе двух нитей, трехмерные структуры, основанные на системе трех нитей. О некоторых свойствах указанных материалов можно судить по данным приведенным в работах [12]-[15].

Гибкость лопаток, имеющих большое удлинение, ведет к тому, что их жест-

кость может оказаться недостаточной для обеспечения стойкости к вибрациям. Для повышения жесткости металлических лопаток используются полки или бандажи. Это усложняет конструкцию двигателя, увеличивает стоимость производства лопаток, а также вызывает аэродинамические потери, понижая коэффициент полезного действия (КПД) компрессора. Высокая жесткость лопаток из армированных материалов с малым удлинением позволяет отказаться от полок, тем самым, снизив потери в воздушном тракте компрессора.

Кроме того, для обеспечения оптимальной величины КПД отношение шага лопаток к величине хорды не должно быть выше некоторого значения. При применении армированных пластиков, обладающих высокой удельной прочностью и жесткостью, намного легче получить необходимую длину периферийной хорды лопатки, то есть получить низкое значение отношения шага к хорде.

1.2. Расчетная модель и методы определения упругих постоянных композиционного материала

При проектировании деталей и рабочей лопатки из КМ необходимо определить ее упругие характеристики. С этой целью в настоящей главе анализируются существующие методы нахождения упругих постоянных КМ. Для практического применения рекомендуются формулы определения упругих констант материала лопатки по характеристикам составляющих его волокон и матрицы.

Композиционные материалы, представляют собой неоднородную, конструктивно-анизотропную среду. Рабочие лопатки компрессора ГГД из этих материалов получают методом прямого прессования предварительно пропитанных слоев или пропиткой пакета армирующих слоев под давлением. В обоих случаях лопатки имеют ярко выраженную слоистую структуру.

Тип анизотропии и конфигурация каждого слоя определяется размерами и напряженным состоянием лопатки.

При исследовании законов деформирования деталей из КМ, и в частности лопаток ГГД, существует два подхода.

Первый подход предполагает рассмотрение КМ как однородного монолитного анизотропного тела. Это так называемый феноменологический подход. Механические характеристики материала в этом случае рассматриваются как некоторые интегральные характеристики и определяются лабораторными испытаниями. Данный подход предполагает непосредственное использование теории упругости анизотропного тела. Указанный метод использован в работах Лехницкого С.Г., [16], [37], Амбарцумяна С.А. [17], Гольденבלата И.И. [18], Королёва В.И. [20] , Саркисяна В.С. [2], Арутюняна Н.Х. и Абрамяна В.Л. [1] и др.

Однако разнообразие используемых методов испытаний и типов образцов приводит к большому разбросу величин упругих постоянных, необходимых для расчета на прочность деталей из КМ. Сложная конфигурация армирующих слоев, входящих в лопатки ГГД, делает упругие свойства конструкции переменными по высоте и хорде профиля. Определение их экспериментальными методами требует большой серии экспериментов на образцах с идентичной укладкой, что часто бывает технически невозможно. Кроме того, как показывает практика, свойства композиционного материала в изделиях не всегда соответствуют свойствам, определяемым на образцах.

Второй подход исследования деформированного состояния деталей из КМ - структурный - предполагает рассмотрение композиции как неоднородной, дискретно-армированной среды. Такой подход позволяет учесть основные особенности композиционных материалов, их неоднородность, конструктивный характер анизотропии.

Решение задачи по этому методу приводит к большому числу дифференциальных или конечно-разностных уравнений [6], [8]. Если размеры всех слоев, входящих в конструкцию, одинаковы, то такая задача вполне разрешима на ЭВМ. Реальная же картина работы подобных моделей КМ в лопатках отличается исключительной сложностью. Поэтому описание этой картины с учетом всех факторов, связанных с дискретной работой слоев лопатки, приводит к столь сложным системам уравнений, что их решение оказывается практически невозможным даже при использовании современных ЭВМ.

Поэтому вставшая перед исследователями задача заключалась в таком выборе аппроксимирующей модели многослойных армированных конструкций, которая с одной стороны допускала бы возможность практической реализации расчетов на прочность, а с другой - позволяла бы учесть особенности свойств и структуры композиционного материала. Среди таких подходов наибольшее распространение в настоящее время получила теория армированных сред, разработанная В.В. Болотиным [5], [6], [8]. Согласно этой теории - дискретная модель материала заменяется квазиоднородной анизотропной средой, упругие постоянные которой выражаются через упругие постоянные компонентов. Эта операция становится возможной вследствие большого количества армирующих элементов и упорядоченности их свойств в композиции. Действительно, особенности строения слоистых материалов таковы, что их можно рассматривать как дискретную регулярную среду, составленную из большого числа чередующихся "жестких" слоев арматуры и "мягких" прослоек матрицы.

В основу теории армированных сред положены макроструктурные особенности рассматриваемых материалов: жесткость волокон существенно превышает жесткость податливой матрицы, толщина армирующих элементов и расстояния между соседними элементами малы по сравнению с характерными размерами тела.

Эти особенности позволяют выразить НДС композиции через параметры, характеризующие НДС её компонентов. Последовательное осуществление этого способа описания армированного тела приводит к системе весьма большого числа уравнений. Полученные уравнения являются дифференциальными по координатам плоскости армирования и разностными по индексам, приписываемым слоям. Далее, используя многочисленность армирующих элементов и считая, что при переходе от одного элемента к другому соответствующие функции меняются достаточно медленно, осуществляется аппроксимация конечного, но весьма большого числа функций одной или двух координат несколькими функциями трех независимых координат. Прделанная операция, позволяет получить вместо большого числа дифференциально-разностных уравнений замкнутую систему из нескольких

дифференциальных уравнений, описывающих деформацию некоторой "приведенной" квазиоднородной среды. Тем самым, удастся представить неоднородный материал в виде однородного анизотропного материала с упругими константами, выраженными через упругие константы его составляющих. Точность предельного перехода, а следовательно, и теории армированных сред возрастает с ростом числа армирующих элементов. Исследования показала, что при числе слоев больше десяти погрешность становится незначительной ($\sim 5\%$) [5], [9], [31].

Отсюда следует, что для большинства реальных конструкций описанный путь замены дискретной среды квазиоднородной вполне допустим. Указанный метод позволяет решать очень важный вопрос в авиадвигателестроении - вопрос оптимального проектирования конструкций.

Таким образом, рабочую лопатку компрессора ГГД из КМ можно представить как анизотропное квазиоднородное тело, упругие постоянные которого тем или иным способом определяются через упругие характеристики исходных компонентов - матрицы и наполнителя.

Во всех случаях, в настоящей работе, мы будем считать, что для упругого квазиоднородного тела имеет место обобщенный закон Гука.

Пусть отдельный слой является ортотропным телом, а направления осей координат x, y, z совпадают с главными направлениями, перпендикулярными плоскостям упругой симметрии. При этом ось z направляется вдоль основы (параллельно волокнам), ось x вдоль утка (перпендикулярно волокнам, но плоскости слоя), и ось y , перпендикулярно слою. В этом случае для слоя i зависимости между деформациями $\varepsilon_{xx}^i, \varepsilon_{yy}^i, \dots, \varepsilon_{xy}^i$ и напряжениями $\sigma_{xx}^i, \dots, \sigma_{xy}^i$ могут быть записаны в виде [16], [22]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^i_{xx} \\ \varepsilon^i_{yy} \\ \varepsilon^i_{zz} \\ \varepsilon^i_{yz} \\ \varepsilon^i_{xz} \\ \varepsilon^i_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & a^i_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a^i_{21} & a^i_{22} & a^i_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a^i_{31} & a^i_{32} & a^i_{33} & 0 & 0 & 0 \\ a^i_{41} & a^i_{42} & a^i_{43} & a^i_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^i_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^i_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i_{xx} \\ \sigma^i_{yy} \\ \sigma^i_{zz} \\ \sigma^i_{yz} \\ \sigma^i_{xz} \\ \sigma^i_{xy} \end{pmatrix} + T^i \begin{pmatrix} \alpha^i_{11} \\ \alpha^i_{22} \\ \alpha^i_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2.1)$$

где

$$a^i_{11} = \frac{1}{E_1^i}, a^i_{22} = \frac{1}{E_2^i}, a^i_{33} = \frac{1}{E_3^i}, a^i_{12} = \frac{-\nu_{12}^i}{E_2^i}, a^i_{13} = \frac{-\nu_{31}^i}{E_3^i}, a^i_{21} = \frac{-\nu_{21}^i}{E_1^i},$$

$$a^i_{23} = \frac{-\nu_{32}^i}{E_3^i}, a^i_{31} = \frac{-\nu_{13}^i}{E_1^i}, a^i_{44} = \frac{1}{2G_{23}^i}, a^i_{55} = \frac{1}{2G_{13}^i}, a^i_{66} = \frac{1}{2G_{12}^i}.$$

Здесь E_1^i, E_2^i, E_3^i - модули упругости вдоль осей x, y, z ; ν_{kj}^i - коэффициенты Пуассона ($k, j=1,2,3$), характеризующие сжатие в направлении, указанного вторым индексом при растяжении вдоль направления, указанного первым индексом. При этом направлению x соответствует индекс 1, y - 2, z - 3. Наконец, G_{kj}^i - модули сдвига материала i -го слоя в плоскости 23, 13, 12, а также T^i, α^i_{kj} ($k, j=1, 2, 3$) - температура и коэффициенты линейного расширения материала i -го слоя.

Из 12 параметров упругости 9 являются линейно-независимыми из-за существования известных равенств [16], [22],

$$E_2^i \nu_{12}^i = E_1^i \nu_{21}^i, E_2^i \nu_{32}^i = E_3^i \nu_{23}^i, E_3^i \nu_{13}^i = E_1^i \nu_{31}^i. \quad (1.2.2)$$

Разрешив систему (1.2.1) относительно компонент напряжений, можно получить выражение обобщенного закона Гука в другой, эквивалентной форме.

Таким образом, свойства анизотропного тела можно характеризовать следующими типами независимых "технических постоянных": тремя модулями упругости, тремя модулями сдвига, тремя коэффициентами Пуассона.

Анизотропные материалы могут иметь некоторую пространственную симметрию строения [16], [18], [23], что в значительной мере упрощает выражения обобщенного закона Гука. Практически все ориентированные композиционные материалы, можно отнести к ортотропным или трансверсально-изотропным мате-

риалам. Изделия, изготовленные из текстолитов, армированных тканью разного переплетения, или укладкой волокон в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, имеют слоистую структуру и обладают определенной симметрией строения. В каждой точке такого материала имеются три взаимно-ортогональные плоскости симметрии механических свойств: плоскость, параллельная срединной плоскости листа (плоскость 1,2), и еще две, перпендикулярные к ней к взаимно-перпендикулярные плоскости (плоскости 1,3 и 2,3). Анизотропные материалы, имеющие такую симметрию механических свойств, называются ортотропными. Уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к осям 1,2,3, принимают вид (1.2.1).

Число независимых упругих постоянных равно девяти. Уравнения (1.2.1) показывают, что в ортотропных телах нормальные напряжения не вызовут сдвигов, а касательные напряжения - относительных удлинений. В КМ это условие будет соблюдено, если линия действия нагрузки совпадет с направлением армирования, Уравнения (1.2.1) приобретают большую наглядность, если вместо коэффициентов податливости ввести "технические постоянные".

Соотношения (1.2.1) должны быть использованы при исследовании КМ на основе тканей и лент. Если армирующим элементом в слое являются волокна, жгуты или ленты, уток которых по сравнению с основой заметно разрежен (например, углелента марки "Кулон"), то ось z совпадает с осью симметрии и плоскость xOy является плоскостью изотропии. В этом случае в соотношениях (1.2.1) следует положить [16], [22]

$$E_1^i = E_2^i, \nu_{13}^i = \nu_{23}^i = \nu_3^i, \nu_{12}^i = \nu_1^i, G_{23}^i = G_{13}^i = G^i, G_{12}^i = \frac{E_1^i}{2(1+\nu_1^i)}, \quad (1.2.3)$$

и использовать зависимости (1.2.2). Из (1.2.2), (1.2.3) следует, что для трансверсально-изотропного тела число независимых постоянных равно пяти. Типичными трансверсально-изотропными телами являются, например, углеродные и органические волокна [24]. Упругие характеристики некоторых типов волокон приведены в таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1. Упругие характеристики волокон

| Вид волокна | E_1 | E_3 | G_{13} | G_{12} | ν_{13} | ν_{31} |
|------------------------|---------|---------|----------|----------|------------|------------|
| | ГПа | | | | | |
| Углеродные "Торнел" 40 | 7.7 | 282 | 28 | - | 0.007 | 0.25 |
| Углеродные | 16.1 | 230 | 20 | - | 0.021 | 0.3 |
| ----- | 20.6 | 228 | 47 | 6.6 | - | 0.3 |
| Стекланные | 70 | 70 | 28.4 | 28.4 | 0.23 | 0.23 |
| Борные | 380-400 | 380-400 | 160 | 160 | 0.2 | 0.2 |

У изотропного материала независимыми являются только две упругие постоянные E и G . Типичными изотропными материалами являются, например, различные виды полимерных связующих, применяемых для изготовления композиционных материалов. Упругие характеристики некоторых видов полимерных связующих приведены в таблице 1.2.2.

Таблица 1.2.2. Упругие характеристики полимерных связующих

| Вид связующего | E , ГПа | G , ГПа | ν |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|
| Полиэфирное | 2.1-4.6 | 1-1.9 | 0.35-0.42 |
| Эпоксидное | 2.8-4.2 | 0.8-1.5 | 0.35-0.4 |
| Фенолформальдегидное | 2.8-4.6 | 1-1.4 | 0.35 |

1.3. Расчетные формулы для определения упругих свойств из КМ

При расчете предполагается, что однонаправленный слой представляет собой квазиоднородную анизотропную среду, упругие свойства которой определяются упругими свойствами составляющих, а также структурой с учетом ориентации волокон. Поведение однонаправленного слоя полагается линейно-упругим, а связь между напряжением и деформациями описывается обобщенным законом Гука. В случае совпадения линии действия силы с направлением армирования однонаправленный слой является трансверсально-изотропным. Обобщенный закон Гука для него выражается формулами (1.2.2), (1.2.3).

Как видно из этих зависимостей свойства однонаправленного слоя определяются пятью независимыми величинами. Это модули упругости вдоль волокон E_3 и поперек E_1 , модуль сдвига в плоскости, параллельной волокнам G_{13} , коэффициент

Пуассона при растяжении вдоль оси 3 - ν_{31} и коэффициент Пуассона - ν_{12} , или модуль сдвига - G_{12} в плоскости изотропии. Эти пять упругих постоянных и подлежат определению на основании процентного содержания компонентов системы и их упругих характеристик.

Проблеме определения упругих постоянных посвящены работы Болотина В.В. [5], [6], Рабиновича А.Л. и Верховского И.А. [25], Аболиньша Д.С. [26], Скудры Л.М. и Булавс Ф.Я. [24], Ванина Г.А [21], Бидермана В.Л. и других. Среди зарубежных авторов следует отметить работы Шеффера [27], Иквелла [28], Бира [29], Хашина и Розена [30], Уитни и Райли [31]. В работах Шеффера и Иквелла используются теории сопротивления материалов. В работах Рабиновича А.Л. и Верховского И.А., а также Болотина В.В. и Бидермана В.Л. строится простейшее решение плоской задачи теории упругости с пренебрежением локальных эффектов. Напряжения и деформация считаются осредненными по элементарному объему, содержащих волокна и матрицу. Часть исследователей, Хашин и Розен, Цай и др., использовали в своих работах вариационный метод, основанный на теореме о минимуме потенциальной энергии. Уитни и Райли использовали классическую теорию упругости, решая плоскую осесимметричную задачу при помощи функций Эри.

Следует отметить, что механические свойства КМ, особенно в поперечном направлении отличаются чувствительностью к большому числу факторов, неподдающихся в настоящее время достаточно полному контролю. Это, прежде всего, искривление и случайное размещение волокон, наличие пористости и расслоения, качество адгезии волокна к матрице, также анизотропия некоторых видов волокон. Кроме вышеперечисленных факторов свойства материала зависят от массы технологических параметров. Вследствие этого построение строгих математических решений при определении НДС в арматуре и матрице часто бывает затруднительно и всегда оправдано. В настоящее время, по-видимому, целесообразно использовать наиболее простые идеализированные модели КМ, позволяющие обнаружить качественные особенности поведения материала и определить свойства композиции в определенных областях конструкции. При необходимости уточне-

ния свойств в местах разрыва волокон, около края или с учетом неупругих свойств матрицы, могут быть рассмотрены особые модели, учитывающие те или иные дефекты в микроструктуре.

Следует отметить, что анизотропия свойств волокон исследована в настоящее время недостаточно. Определение модуля упругости угольного волокна в поперечном направлении трудоемко, а результаты не достаточно достоверны. Определив свойства однонаправленного слоя КМ в осях упругой симметрии, по известным формулам преобразования упругих констант при переходе к другим координатам, мы можем найти упругие свойства слоя армированного материала, лежащего под любым углом к оси лопатки [16].

Механические и физические свойства деталей изготовленных из КМ, могут изменяться в достаточно широких пределах. При этом целенаправленное регулирование свойств конкретного материала может быть осуществлено путем выбора схемы укладки отдельного слоя, т.е. изменением углов между главными направлениями упругой симметрии материала и осями, в которых исследуется напряженно-деформированное состояние тела.

Для слоистой конструкции управление свойствами слоя осуществляется поворотом слоя относительно прямой перпендикулярной к волокнам, т.е. относительно оси x (рис.1.3.1). При этом направляющие косинусы, определяющие взаимное расположение главных направлений упругой симметрии (осей x, y, z) и используемой в расчетах системы координат (осей x', y', z'), приведены в таблице 1.3.1.

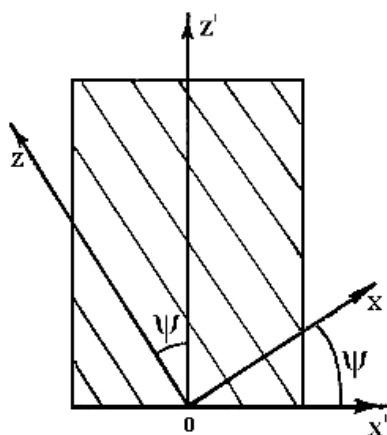


Рисунок 1.3.1 - Угол между осью нагружения и осью симметрии волокон

Таблица 1.3.1 Направляющие косинусы

| | x | y | z |
|------|-------------------|---------|-------------------|
| x' | $n=n_1=\cos\psi$ | $l_1=0$ | $m=m_1=-\sin\psi$ |
| y' | $n_2=0$ | $l_2=1$ | $m=0$ |
| z' | $m=n_3=-\sin\psi$ | $l_3=0$ | $n=m_3=\cos\psi$ |

В системе координат x', y', z' соотношения (1.2.1), устанавливающие связь между напряжениями и деформациями, усложняются и для материала i -го слоя и принимают вид [16], [22]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^i_{x'x'} \\ \varepsilon^i_{y'y'} \\ \varepsilon^i_{z'z'} \\ \varepsilon^i_{y'z'} \\ \varepsilon^i_{x'z'} \\ \varepsilon^i_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^i a_{12}^i a_{13}^i & 0 & a_{15}^i & 0 \\ a_{21}^i a_{22}^i a_{23}^i & 0 & a_{25}^i & 0 \\ a_{31}^i a_{32}^i a_{33}^i & 0 & a_{35}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^i & 0 & a_{46}^i \\ a_{51}^i & a_{52}^i & a_{53}^i & 0 & a_{55}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64}^i & 0 & a_{66}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i_{x'x'} \\ \sigma^i_{y'y'} \\ \sigma^i_{z'z'} \\ \sigma^i_{y'z'} \\ \sigma^i_{x'z'} \\ \sigma^i_{x'y'} \end{pmatrix} + T^i \begin{pmatrix} \alpha_{11}^i \\ \alpha_{22}^i \\ \alpha_{33}^i \\ 0 \\ \alpha_{15}^i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Упругие константы, входящие в соотношение (1.3.1), выражается через угол армирования ψ^i и девять упругих констант ортотропного тела формулами [16], [22]

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= \frac{m^4}{E_1^i} + \left(\frac{1}{G_{13}^i} - \frac{2\nu_{13}^i}{E_3^i} \right) n^2 m^2 + \frac{n^4}{E_1^i}, & a_{12}^i &= -\left(\frac{n^2 \nu_{12}^i}{E_1^i} + \frac{m^2 \nu_{23}^i}{E_2^i} \right), \\ a_{13}^i &= \frac{-\nu_{13}^i}{E_3^i} + \left(\frac{1}{E_3^i} + \frac{1}{E_1^i} + \frac{2\nu_{13}^i}{G_{13}^i} \right) n^2 m^2, & a_{23}^i &= -\left(\frac{m^2 \nu_{12}^i}{E_1^i} + \frac{n^2 \nu_{23}^i}{E_2^i} \right), \\ a_{22}^i &= \frac{1}{E_2^i}, & a_{33}^i &= \frac{n^4}{E_1^i} + \left(\frac{1}{G_{13}^i} - \frac{2\nu_{13}^i}{E_3^i} \right) n^2 m^2 + \frac{m^4}{E_1^i}, \\ a_{55}^i &= \frac{1}{G_{13}^i} + 4\left(\frac{1+\nu_{13}^i}{E_3^i} + \frac{1}{E_2^i} + \frac{1}{G_{13}^i} \right) n^2 m^2, & a_{66}^i &= \frac{n^2}{G_{12}^i} + \frac{m^2}{G_{23}^i}, \\ a_{25}^i &= -\left(\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} + \frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} \right) nm, & a_{44}^i &= \frac{m^2}{G_{12}^i} + \frac{n^2}{G_{23}^i}, & a_{46}^i &= \left(\frac{1}{G_{12}^i} + \frac{1}{G_{23}^i} \right) nm, \\ a_{35}^i &= \left[\frac{m^2}{E_1^i} - \frac{n^2}{E_3^i} + 0.5\left(\frac{1}{G_{13}^i} - \frac{2\nu_{13}^i}{E_3^i} \right) (n^2 - m^2) \right] nm, & & & n &= \cos\psi^i, & m &= \sin\psi^i. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$a_{15}^i = \left[\frac{n^2}{E_1^i} - \frac{m^2}{E_3^i} + 0.5 \left(\frac{1}{G_{13}^i} - \frac{2\nu_{13}^i}{E_3^i} \right) (n^2 - m^2) \right] nm,$$

$$a_{14}^i = a_{16}^i = a_{26}^i = a_{24}^i = a_{34}^i = a_{36}^i = a_{45}^i = a_{56}^i = 0. \quad (1.3.3)$$

При решении конкретных задач иногда физические соотношения (1.3.1) для i -го слоя необходимо представить в равносильной ему форме - разрешенной относительно компонент тензора напряжения [16]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'x'}^i \\ \sigma_{y'y'}^i \\ \sigma_{z'z'}^i \\ \sigma_{y'z'}^i \\ \sigma_{x'z'}^i \\ \sigma_{x'y'}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i & 0 & c_{15}^i & 0 \\ c_{12}^i & c_{22}^i & c_{23}^i & 0 & c_{25}^i & 0 \\ c_{13}^i & c_{23}^i & c_{33}^i & 0 & c_{35}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^i & 0 & c_{46}^i \\ c_{15}^i & c_{25}^i & c_{35}^i & 0 & c_{55}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46}^i & 0 & c_{66}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'x'}^i \\ \varepsilon_{y'y'}^i \\ \varepsilon_{z'z'}^i \\ \varepsilon_{y'z'}^i \\ \varepsilon_{x'z'}^i \\ \varepsilon_{x'y'}^i \end{pmatrix} + T^i \begin{pmatrix} \beta_{11}^i \\ \beta_{22}^i \\ \beta_{33}^i \\ 0 \\ \beta_{13}^i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Здесь параметры упругости c_{kj}^i обозначены значками штрих с целью показать, что они выписаны для произвольного угла армирования ψ^i i -го слоя. Значения параметров упругости c_{kj}^i ($k=1, \dots, 6$) могут быть определены следующими зависимостями через параметры податливости

$$\begin{aligned} c_{kj}^i &= (-1)^{j+k} \Delta_{kj} / \Delta, \quad (j, k = 1, 2, 3), \\ c_{kj}^i &= a_{kj}^i / \Delta_*, \quad (j, k = 4, 6), \\ c_{k5}^i &= -a_{k5}^i c_{kj}^i / a_{55}^i, \quad c_{55}^i = (1 - a_{k5}^i c_{k5}^i) / a_{55}^i. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Здесь по одинаковым индексам подразумевается суммирование. Тензор температурных напряжений β_{jk}^i связан с тензором тепловых расширений α_{jk}^i i -го слоя формулами

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}^i \\ \beta_{22}^i \\ \beta_{33}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & c_{13}^i \\ c_{12}^i & c_{22}^i & c_{23}^i \\ c_{13}^i & c_{23}^i & c_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}^i \\ \alpha_{22}^i \\ \alpha_{33}^i \end{bmatrix}, \quad (1.3.6)$$

$$\beta_{13}^i = \alpha_{11}^i c_{15}^i + \alpha_{22}^i c_{25}^i + \alpha_{33}^i c_{35}^i.$$

Определители Δ, Δ_* имеют вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^i & \gamma_{12}^i & \gamma_{13}^i \\ \gamma_{12}^i & \gamma_{22}^i & \gamma_{23}^i \\ \gamma_{13}^i & \gamma_{23}^i & \gamma_{33}^i \end{vmatrix}, \quad \Delta_* = \begin{vmatrix} a_{66}^i & a_{46}^i \\ a_{46}^i & a_{44}^i \end{vmatrix}.$$

В определителе $\Delta - \gamma_{kj}^i = a_{kj}^i - a_{k5}^i a_{j5}^i / a_{55}^i$ ($k, j = 1, 2, 3$); Δ_{kj} - миноры определителя Δ по элементам γ_{kj}^i . Параметры упругости c_{kj}^i ($k=1, \dots, 6$) из (1.3.5) для ортотропного материала в развернутом виде представляются соотношениями [16]

$$\begin{aligned} c_{11}^i &= c_{33}^i m^4 + 2(c_{13}^i + 2c_{55}^i) m^2 n^2 + c_{11}^i n^4, \quad c_{22}^i = c_{22}^i, \\ c_{33}^i &= c_{33}^i n^4 + 2(c_{13}^i + 2c_{55}^i) m^2 n^2 + c_{11}^i m^4, \quad c_{44}^i = c_{66}^i m^2 + c_{44}^i n^2, \\ c_{13}^i &= (c_{33}^i + c_{11}^i - 2c_{13}^i - 4c_{55}^i) n^2 m^2 + c_{13}^i, \quad c_{46}^i = (c_{66}^i - c_{44}^i) mn, \\ c_{12}^i &= c_{23}^i m^2 + c_{12}^i n^2, \quad c_{23}^i = c_{23}^i n^2 + c_{12}^i m^2, \\ c_{25}^i &= (c_{12}^i - c_{23}^i) nm, \quad c_{66}^i = c_{66}^i n^2 + c_{44}^i m^2, \\ c_{15}^i &= [c_{11}^i n^2 - c_{33}^i m^2 - (c_{13}^i + 2c_{55}^i)(n^2 - m^2)] nm, \\ c_{35}^i &= [c_{11}^i m^2 - c_{33}^i n^2 + (c_{13}^i + 2c_{55}^i)(n^2 - m^2)] nm, \\ c_{55}^i &= (c_{33}^i + c_{11}^i - 2c_{13}^i - 4c_{55}^i) m^2 n^2 + c_{55}^i, \quad n = \cos \psi^i, \quad m = \sin \psi^i. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Параметры упругости c_{kj}^i ортотропного материала i -го слоя определяются через технические постоянные формулами [16], [43]

$$\begin{aligned} c_{11}^i &= H^* (E_3^i - \nu_{32}^i \nu_{23}^i E_1^i), \quad c_{22}^i = H^* E_2^i (1 - \nu_{13}^i \nu_{31}^i), \\ c_{33}^i &= H^* E_3^i (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i), \quad c_{23}^i = H^* E_3^i (\nu_{23}^i + \nu_{21}^i \nu_{13}^i), \\ c_{13}^i &= H^* E_3^i (\nu_{12}^i \nu_{23}^i - \nu_{13}^i), \quad c_{12}^i = H^* (E_2^i \nu_{12}^i + \nu_{32}^i \nu_{13}^i E_3^i), \\ c_{44}^i &= G_{23}^i, \quad c_{55}^i = G_{13}^i, \quad c_{66}^i = G_{12}^i, \\ H &= (1 - \nu_{12}^i \nu_{21}^i - \nu_{13}^i \nu_{31}^i - \nu_{23}^i \nu_{32}^i - 2\nu_{12}^i \nu_{23}^i \nu_{31}^i)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

В частности, для трансверсально-изотропного материала справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E_1^i &= E_2^i = E_t^i, \quad E_3^i = E^i, \\ \nu_{23}^i &= \nu_{13}^i = \nu^i = c_{13}^i / (c_{11}^i + c_{12}^i), \\ c_{44}^i &= c_{55}^i = G^i, \quad E^i = c_{33}^i - 2c_{13}^i / (c_{11}^i + c_{12}^i), \\ c_{66}^i &= G_{12}^i = E_t^i / [2(1 + \nu_{12}^i)] = 0.5(c_{11}^i - c_{12}^i). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

В таблице 1.3.1 представлены значения упругих постоянных для некоторых видов современных стеклопластиков: стеклопластик на основе стеклоткани марки АССТТ(б)-С2-0 и полиэфирной смолы марок ПН-3 и НПС-609-21М, стеклопластики на эпоксидном связующем СВМ при соотношении волокон 1:1, 5:1, 10:1, 15:1 и стеклотестолит горячего прессования типа СТЭР-С-30 [32].

Таблица 1.3.1 Упругие характеристики стеклопластиков.

| Материалы | АССТТ(б)-С ₂ -0 и ПН-3 | АССТТ(б)-С ₂ -0 и НПС-609-21М | СВМ 1:1 | СВМ 1:5 | СВМ 1:10 | СВМ 1:15 | СТЭР-С-30 |
|----------------|-----------------------------------|--|---------|---------|----------|----------|-----------|
| Свойства | | | | | | | |
| E_1 , ГПа | 13.1 | 12 | 26 | 18.8 | 18 | 16 | 26 |
| E_2 , ГПа | 4.3 | 4.5 | 8.4 | 8 | 9.8 | 11.2 | 12.4 |
| E_3 , ГПа | 17.9 | 19 | 26 | 30.5 | 39 | 46 | 35.6 |
| G_{12} , ГПа | 2.4 | 2.3 | 3 | 3.5 | 3.2 | 4.3 | 6.8 |
| G_{13} , ГПа | 2.8 | 3 | 4.5 | 4.9 | 5.3 | 5.6 | 8.2 |
| G_{23} , ГПа | 2.4 | 2.3 | 3 | 3.1 | 3.9 | 3.3 | 6.8 |
| ν_{13} | 0.15 | 0.15 | 0.13 | 0.18 | 0.22 | 0.27 | 0.13 |
| ν_{23} | 0.08 | 0.07 | 0.072 | 0.07 | 0.07 | 0.07 | 0.07 |
| ν_{12} | 0.31 | 0.3 | 0.31 | 0.3 | 0.31 | 0.3 | 0.33 |

Основная задача заключается в определении независимых констант ортотропного материала (число их 9) или трансверсально-изотропного материала (число их 5). Существует два метода определения этих констант - экспериментальный и расчетный. В таблице 1.3.1 приведены экспериментальные характеристики стеклопластиков [32].

В таблице 1.3.2 приведены экспериментально найденные характеристики углепластика с эпоксидным связующим [33], значения постоянных для пластмассы, армированной углеволокном (GFRP) и стекловолокном (GFRP) [34], экспериментальные значения характеристик углеалюминия (CAL) [35] и боралюминия (BAL) [36].

При симметричном расположении слоев в стержне или в перелопатки бывает целесообразно рассматривать не каждый слой за основу материала, а пару перекрестных слоев как один [41].

Таблица 1.3.2 Упругие постоянные некоторых типов КМ.

| Материалы | Углепластик | CAL | BAL | CFRP | GFRP | ТЖ-07 и ЭТД-13 |
|----------------|-------------|--------|-------|-------|------|----------------|
| Свойства | | | | | | |
| E_1 , ГПа | 15.7 | 27 | 104 | 30 | 4 | 29.3 |
| E_2 , ГПа | 15.7 | 427 | 104 | 30 | 4 | 18.3 |
| E_3 , ГПа | 112.5 | 300 | 213 | 140 | 20 | 35.9 |
| G_{12} , ГПа | 3.3 | 103.85 | 32.6 | 11.28 | 1.52 | 6.29 |
| G_{13} , ГПа | 5.3 | 21.6 | 25.4 | 9.38 | 1.37 | 7.62 |
| G_{23} , ГПа | 5.3 | 21.6 | 26.1 | 9.38 | 1.37 | 6.64 |
| ν_{13} | 0.48 | 0.03 | 0.229 | 0.33 | 0.33 | 0.371 |
| ν_{23} | 0.03 | 0.18 | 0.226 | 0.3 | 0.3 | 0.144 |
| ν_{12} | 0.03 | 0.18 | 0.226 | 0.3 | 0.3 | 0.157 |
| Источники | [33] | [35] | [36] | [37] | [37] | [32] |

Более экономичный, но все же требующий экспериментального подтверждения, способ расчетного определения упругих констант анизотропного материала основан на использовании результатов решения отдельных задач для составного тела - для тела, состоящего из наполнителя и связующего. Эти задачи могут быть решены различными методами - вариационными, статическими, численными, с помощью двояко-периодических функций и т.д., - на основе самых различных гипотез (например, схемы параллельного, последовательного соединения) и упрощающих предположений о характере взаимной деформации компонент композиции и условия их взаимодействия. Исследования по разработке расчетных способов определения упругих констант многочисленны. Подробный обзор литературы по этому вопросу можно найти в [21], [38]-[40]. В [41] на основе сравнения расчетных формул между собой и с экспериментальными данными рекомендовано использовать для трансверсально-изотропного тела следующие соотношения

$$E_3 = E^H \nu_H + E^M \nu_M, \quad \nu_{31} = \nu^H \nu_H + \nu^M \nu_M, \quad (1.3.10)$$

$$E_1 = E^M \frac{(1 + \nu_H) E^H / E^M + \nu_M}{\nu_M E^H / E^M + 1 + \nu_H}, \quad (1.3.11)$$

$$G_{13} = G^M \frac{(1 + \nu_M) G^H / G^M + \nu^M}{\nu_M G^H / G^M + 1 + \nu_H}, \quad (1.3.12)$$

$$v_{12} = E_1 \left\{ -v_{31}^2 / E_3 + v^M / G_1^M + \frac{1-v^M}{2G^M} \left[\frac{2 \frac{(1-v^M)v_H}{1+(1-2v_H)G^M/G^H} - v_M}{2 \frac{(1-v^M)v_H}{1+(1-2v_H)G^M/G^H}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2v_H \frac{1-G^M/G^H}{3-4v^M+G^M/G^H}}{1+v_H \frac{1-G^M/G^H}{3-4v^M+G^M/G^H}} \right] \right\}. \quad (1.3.13)$$

Здесь H, M - индексы, указывающие на принадлежность материалу наполнителя и матрицы; v_H, v_M - объемное содержание материала наполнителя и матрицы ($v_M = 1 - v_H$).

Значения упругих постоянных, вычисленные по формулам (1.3.10) для различных КМ показывают, что простейшие модели Фойгхта и Рейсса вполне применимы для армированных пластиков. Для армированного алюминия они дают значительно завышенные результаты. Характерной особенностью некоторых высокомодульных волокон, особенно углеродных, является явно выраженная анизотропия свойств самих волокон. В расчетах обычно принимается, что волокна изотропны. Однако для углеродных волокон типа Торнел 40 аксиальный модуль упругости и трансверсальный отличаются примерно в 40 раз [14].

Зная верхние и нижние грани упругих характеристик композиционного материала, из которого изготавливается стержень или лопатка, можно провести расчет напряженно-деформированного состояния лопатки. В таблице 1.3.3 [32] приведены пределы прочности при сжатии и при растяжении стеклопластика на основе полиэфирной смолы марки ПН-3 и стеклоткани марки АСТТ(б)-С₂-0 в полярных координатах.

Таким образом, в настоящем параграфе предполагается, что однонаправленный слой представляет собой квазиоднородную анизотропную среду, упругие свойства которого определяются упругими свойствами составляющих, т.е. свойствами волокон и матрицы, их количественным соотношением, а также структурой расположения волокон и их ориентацией. Поведение однонаправленного слоя полагается линейно-упругим, а связь между напряжением и деформациями опи-

сывается обобщенным законом Гука (1.3.4). В случае совпадения линии действия силы с направлением армирования направленный слой является трансверсально-изотропным. При этом постоянные трансверсально-изотропного материала рекомендуется определять по формулам (1.3.10).

Таблица 1.3.3 Разрушающие напряжения для тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии [32].

| Разрушающие напряжения, МПа | Стеклопластика контактного формирования на основе АСТТ(b)-С ₂ -0 и ПН-3 | | Прессованные стеклопластики | | |
|-----------------------------|--|--------|-----------------------------|----------------|-----|
| | | | СТЭТ на ЭТД-13, ТЖС-07 | ЭП, ТС 8/3-250 | |
| | | | | Укладка | |
| | | | Параллельная | Ортогональная | |
| Растяжение | | Сжатие | | | |
| σ_{ex} | 300 | 222 | 511 | 451 | 399 |
| σ_{ey} | 200 | 149 | 411 | 327 | 398 |
| σ_{ez} | 10 | 281 | 686 | 349 | 376 |
| $\sigma_{exy}^{(45)}$ | 100 | 83,5 | 236 | 211 | 239 |
| $\sigma_{eyz}^{(45)}$ | 20 | 97 | 172 | 134 | 117 |
| $\sigma_{ezx}^{(45)}$ | 20 | 97 | 150 | 132 | 129 |

Таким образом, в настоящей главе проанализирован первый этап расчета на прочность и конструирования стержней и рабочих лопаток компрессора из КМ, а именно, определяются упругие константы волокнистого КМ слоистой структуры с различными типами армирования. При этом особенно тщательно анализировались аналитические методы определения упругих свойств однонаправленных слоев, из совокупности которых и состоит КМ. При этом свойства однонаправленного материала выражались через исходные свойства его компонентов, т.е. волокна и матрицы.

Анализ существующих расчетных соотношений и сравнение с экспериментом позволили рекомендовать некоторые из них для практического применения. Для вычисления продольного модуля Юнга (E_3) и основного коэффициента Пуассона (ν_{31}) справедливо правило механического смешивания формулы (1.3.10). Остальные выражения существенной поправки не дают. Для определения трансверсального модуля Юнга из всего многообразия проанализированных выражений

рекомендуется формула (1.3.11), полученная аппроксимацией результатов метода конечных элементов [42]. Эта формула проста и дает достаточную для практических целей точность. Модуль сдвига в плоскости слоя для однонаправленного материала целесообразно определять по формуле (1.3.12), выведенной Ваниным Г.А. или по тождественной ей формуле, полученной Хашиным и Розеном. Пятую постоянную трансверсально-изотропного материала целесообразно определять по формуле (1.3.13).

Таким образом, по указанным формулам, зная свойства выбранного вида волокна и матрицы, можно определить свойства однонаправленного слоя, а затем и приведенные свойства армированного в любом направлении КМ. Можно решать и обратную задачу, по заданным свойствам КМ подобрать тип волокон и матрицы, а также вид армирования метали, т.е. сконструировать материал для конкретной детали.

При использования перекрестных слоев арматуры в конструкции для учета стеснения деформации волокна за счет матрицы необходимо пользоваться формулами (1.3.6) - (1.3.7). Расчет упругих констант в направлении под углом к волокну по формулам преобразования координат дает заниженные результаты.

1.4 Расчетные формулы композиционной многослойной структуры

При изучении деформаций в слоистой конструкции ее следует рассматривать как составное тело. Решение краевых задач о НДС тела включает в себя ее решение для каждого слоя в отдельности. При переходе от слоя к слою удовлетворяют условиям непрерывности перемещений и условию равенства векторов напряжений в двух соседних слоях на поверхности их сочленения. В этом случае, если только свойства двух соседних слоев отличаются друг от друга, то при переходе от слоя к слою скачком могут изменяться все компоненты тензора напряжений - $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xx}$.

Это означает, что найденное в результате решения краевой задачи вектор перемещений является непрерывной функцией координат. Известны случаи, когда

указанные условия при переходе от слоя к слою выполняются частично или в других комбинациях.

Следует заметить, что из-за многочисленности слоев решение важных задач в строгой постановке для составного тела практически не удается. Это обстоятельство приводит к тому, что принимается ряд предположений, которые значительно упрощают способы получения решения.

Основные положения и гипотезы. Основной особенностью, подлежащей учету при разработке методов расчета НДС конструкций из материалов, армированных волокнами, является их слабое сопротивление сдвиговым и поперечным нагрузкам. Классические теории сплошных стержней, пластин и оболочек построены на гипотезе плоских сечений [23] и недеформируемых нормалей. Здесь постулируется пренебрежимо малое влияния "второстепенных" напряжений $(\sigma_{yy}, \sigma_{xx}, \sigma_{xy})$ на перемещения точек детали и на распределение "основных" напряжений $(\sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz})$ (ось z направлена перпендикулярно слоям). Деление напряжений на основные и второстепенные возникло при сопоставлении их относительных величин [39]:

$$\sigma_{xz} \sim \frac{h}{\ell} \sigma_{zz}, \quad \sigma_{xx} \sim \left(\frac{h}{\ell}\right) \sigma_{zz} \quad (1.4.1)$$

Для анизотропных материалов необходимо сопоставление их соответствующих деформаций. Для стержней получено такое сопоставление в виде [39]

$$\varepsilon_{xz} \sim \frac{E_x}{G_{xz}} \frac{h}{\ell} \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon_{xx} \sim \frac{E_x}{E_z} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \varepsilon_{zz}, \quad (1.4.2)$$

где h , ℓ - соответственно поперечные и продольные размеры стержня, т.е. его высота и длина.

Таким образом, гипотеза недеформируемых поперечных сечений придает материалу бесконечную сдвиговую и трансверсальную жесткость.

В работах С.Г. Лехницкого, С.А. Амбарцумяна [17], [37] и других работах показано, что погрешность теории недеформируемых нормалей растет с увеличением отношений E_z/G_{xz} и E_z/E_x .

Для некоторых задач, особенно при нагружении распределенными медленно меняющимися нагрузками, необходимость учета сдвига и сжимаемости нормали может быть определена на основе энергетического метода [19], [39]. Оценка состоит в определении вклада рассматриваемой компоненты в величину полной потенциальной энергии системы $(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}, \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}, \sigma_{xz}\varepsilon_{xz}, \dots)$. С помощью соотношения (1.4.1) и (1.4.2), можно получить относительную величину потенциальной энергии от сдвиговых и трансверсальных составляющих

$$\sigma_{yz}\varepsilon_{yz} / (\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}) = (h/l)^2 E_z / G_{yz}, \quad (1.4.3)$$

$$\sigma_{yy}\varepsilon_{yy} / (\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}) = (h/l)^4 E_z / E_y. \quad (1.4.4)$$

Из формул (1.4.3) и (1.4.4) видно, что для тонких стержней $(h/l < 0.1)$, поправка от трансверсальных напряжений мала, так как вклад от них в потенциальную энергию системы не превышает 0.1%. Вклад от касательных напряжений оценивается величиной 5-10%.

Следует заметить, что действительно $\sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$ значительно меньше напряжений $\sigma_{zz}, \sigma_{xx}, \sigma_{xz}$ и поэтому вполне допустимо считать их пренебрежимо малыми. Однако, пределы прочности на межслоевой сдвиг или предел прочности при поперечном растяжении слоистых КМ низки и поэтому малые значения $\sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$ могут определять работоспособность конструкции. В связи с этим определение реализуемых значений $\sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xy}$ представляется важным.

1.5. Определение физико-геометрических характеристик многослойных структур закрученного анизотропного стержня

1.5.1 Математическая модель предварительно закрученного неоднородного стержня произвольного сечения

1. Геометрическая характеристика стержня. Протяженный вдоль одной пространственной кривой Γ конструкционный элемент называется стержнем. Кривая Γ именуется осью стержня. Ось стержня может быть прямой или криво-

линейной. Стержень можно представить в виде тела, которое образуется при движении плоской фигуры вдоль оси Γ . Если при этом движении плоская фигура дополнительно вращается вокруг оси Γ , то образуется естественно-закрученный стержень (рис.1.5.1).

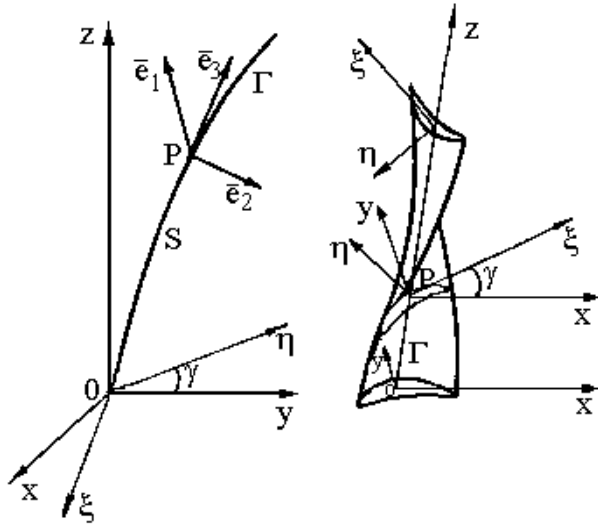


Рисунок 1.5.1 - Схема закрученного стержня.

Одной из важных особенностей стержня является то, что основная нагрузка имеет направление, практически совпадающее с осью стержня.

Криволинейный естественно-закрученный стержень изучают в некоторой прямоугольной неподвижной системе координат $(K_0) OX_i (i=1,2,3)$ (на рис. 1.5.1 система $OXYZ$). Уравнение оси Γ недеформированного стержня задается в виде

$$\bar{r}^0(s) = x_i^0(s) \bar{\mathcal{E}}_i, \quad (i=1,2,3) \quad (1.5.1)$$

в котором $x_i^0(s)$ является координатами текущей точки P ; $\bar{\mathcal{E}}_i$ - единичные орты системы K_0 ; s - скалярный параметр, соответствующий длине дуги, отчитываемой от начальной точки O .

Наряду с неподвижной системой координат K_0 может быть использована связанная с осью стержня подвижная система координат $(K_p) px'_i (i=1,2,3)$ (на рис.1.5.1 система $P\xi\eta\zeta$). Ортогональный триэдр \bar{e}_i единичных векторов в системе K_p предполагается совпадающим с направлениями касательной (\bar{e}_2) и бинормали (\bar{e}_1). Положение системы K_p относительно K_0 определяется из равенства

$$\bar{e}_i = \alpha_{ij}(s)\bar{\mathcal{E}}_i, \quad (1.5.2)$$

в котором

$$\begin{aligned} \alpha_{3j} &= x_{j,s}^0; \quad \alpha_{1j} = \rho x_{j,ss}^0; \quad \alpha_{2j} = \rho e_{mnj} x_{m,j}^0 x'_{n,ss}; \\ \rho &= 1 / \sqrt{|\bar{r}_{,ss}^0|}; \quad \tau_0 = |\bar{r}_{,s}^0 \cdot \bar{r}_{,ss}^0 \cdot \bar{r}_{,sss}^0| / \rho^2. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Здесь ρ - радиус кривизны; τ_0 - начальное кручение оси стержня; e_{mnj} - элементы кососимметрического тензора [46]. Нетрудно видеть, что компоненты метрического тензора α_{ij} являются функциями длины дуги s .

Плоская фигура, ограниченная боковой поверхностью стержня и лежащая в нормальной к его оси Γ плоскости, называется поперечным сечением в точке P (P -сечение). Произвольная точка M в P -сечении стержня имеет координаты

$$\bar{r}_M = r_P^0(s) + \bar{r}'_M = r_P^0(s) + \alpha'_\alpha(M)\bar{e}_\alpha(s) \quad (1.5.4)$$

Здесь \bar{r}'_M - радиус вектор точки M в подвижной системе координат K_p , греческие индексы принимают значения 1, 2 и по одинаковым индексам подразумевается суммирование. Если стержень незакрученный, то значениями параметров s , x'_1 , x'_2 определяются координаты произвольной точки M .

Закрученный стержень образуется путем поворота P -сечения относительно оси стержня на угол γ , равный

$$\gamma = \tau(s). \quad (1.5.5)$$

Здесь параметр τ в общем случае является функцией длины дуги и характеризует относительный угол закрутки [47-[49].

При указанном повороте местная система координат K_p преобразуется в новую систему координат K_x с ортами \bar{n}_i [50]. Единичные векторы \bar{n}_i определяются из равенств

$$\begin{aligned} \bar{n}_i &= \beta_{ij}\bar{e}_j, \quad \beta_{33} = 1, \quad \beta_{31} = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0, \\ \beta_{11} &= \beta_{22} = \cos(\tau \cdot s), \quad \beta_{21} = -\beta_{12} = \sin(\tau \cdot s). \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

С помощью соотношений (1.5.3), и (1.5.6) устанавливается связь локальной K_x и неподвижной K_0 систем координат

$$\bar{n}_i = \alpha_{ij} \bar{\mathcal{E}}_j = \beta_{im} \alpha_{mj} \bar{\mathcal{E}}_j. \quad (1.5.7)$$

Координаты произвольной точки M в P -сечений закрученного стержня определяются из равенства

$$\bar{r}_M = r^0(s) + x_\alpha(M) \bar{n}_\alpha, \quad (1.5.8)$$

через длину дуги s и независимые параметры $x_1(M)$, $x_2(M)$.

Если размеры сечений изменяются пропорционально скалярному параметру $\chi(s)$, то координаты произвольной точки M P -сечения определяется из равенств

$$\bar{r}_m = \bar{r}_p^0(s) + \chi(s) x_\alpha(M) \bar{n}_\alpha. \quad (1.5.9)$$

В этом случае вместо β_{ij} удобно использовать учитывающие изменения размеров нормирующие множители

$$n_{\alpha\beta} = \chi(s) \beta_{\alpha k}, \quad l_{3j} = l_{j3} = \beta_{3j}, \quad (\alpha, k = 1, 2; j = 1, 2, 3). \quad (1.5.10)$$

При этом единичные орты \bar{n}_i местной системы координат K_x определяются из выражения

$$\bar{n}_i = g_{ij} \bar{\mathcal{E}}_j = l_{im} \alpha_{mj} \bar{\mathcal{E}}_j, \quad (1.5.11)$$

а радиус-вектор произвольной точки M в системе K_0 из соотношений

$$\bar{r}_M = \bar{r}_p^0(s) + x_\alpha(M) g_{\alpha j} \bar{\mathcal{E}}_j = X_j \bar{\mathcal{E}}_j, \quad X_j = x_j^0 + x_\alpha(M) g_{\alpha j}. \quad (1.5.12)$$

Для стержней, изготовленных из неоднородного в сечении материала (например, композиционного), целесообразно использовать локальную систему координат, связанную с физико-геометрическими характеристиками сечения. Способ введения такой системы координат будет обсуждаться ниже. Здесь необходимо отметить некоторые особенности строения поперечного сечения изготовленных из композиционных материалов стержней.

1.5.2. Определение слоистой структуры по длине многослойного стержня

Стержни из КМ могут изготавливаться из отдельных жгутов, слоев ленты или ткани. В этих случаях сечения стержня имеет слоистую регулярную структуру. В связи с этим для стержней постоянного и переменного сечения возникает специ-

фическая для армированных стержней задача – задача укладки в сечении слоев постоянной толщины. Так как размеры сечений могут меняться вдоль длины стержня, то и число слоев в каждом сечении будет различным. В плоскости, содержащей ось стержня, отдельно слои представляются в виде лепестков. В связи с этим возникает технологическая задача раскроя таких лепестков. На рисунке 1.5.2 представлена компрессорная лопатка с различным образом уложенных слоев.

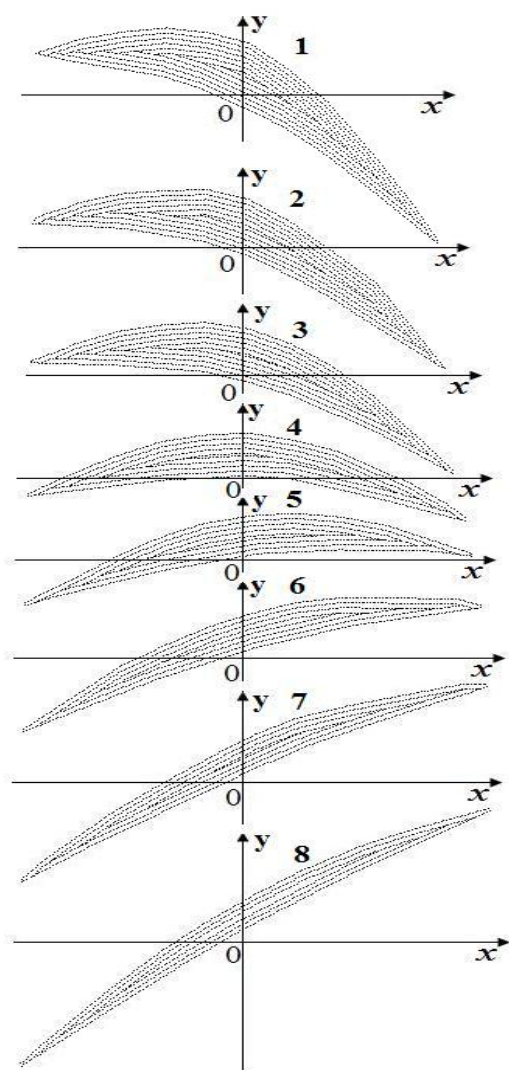


Рисунок 1.5.2 - Построенные слои поперечных сечений компрессорной лопатки; номера сечений лопатки соответствуют сечениям, удаленным от ее корневого сечения.

Расположение отдельных слоев в сечении стержня определяется толщиной монослоя ленты или ткани и наружной конфигурацией сечения. Для стержня произвольного сечения методика расчета координат для каждого слоя разработана в работе [51, 68, 89, 96]. Предложен алгоритм и он реализован для расчетов на ЭВМ с помощью алгоритмического языка Фортран [51, 68, 89, 96]. Входными парамет-

рами программы являются координаты линии, ограничивающие отдельное плоское сечение. Эта линия разбивается на две части (условно называемые впредь «спинка», «корытце»), к которым прилегают два наружных в сечении слоя. Координаты наружной поверхности слоя заданы. Строится геометрическое место точек удаленных от наружной линии на величину, равную толщине монослоя (рис. 1.5.2) [51] (см. Приложение 1).

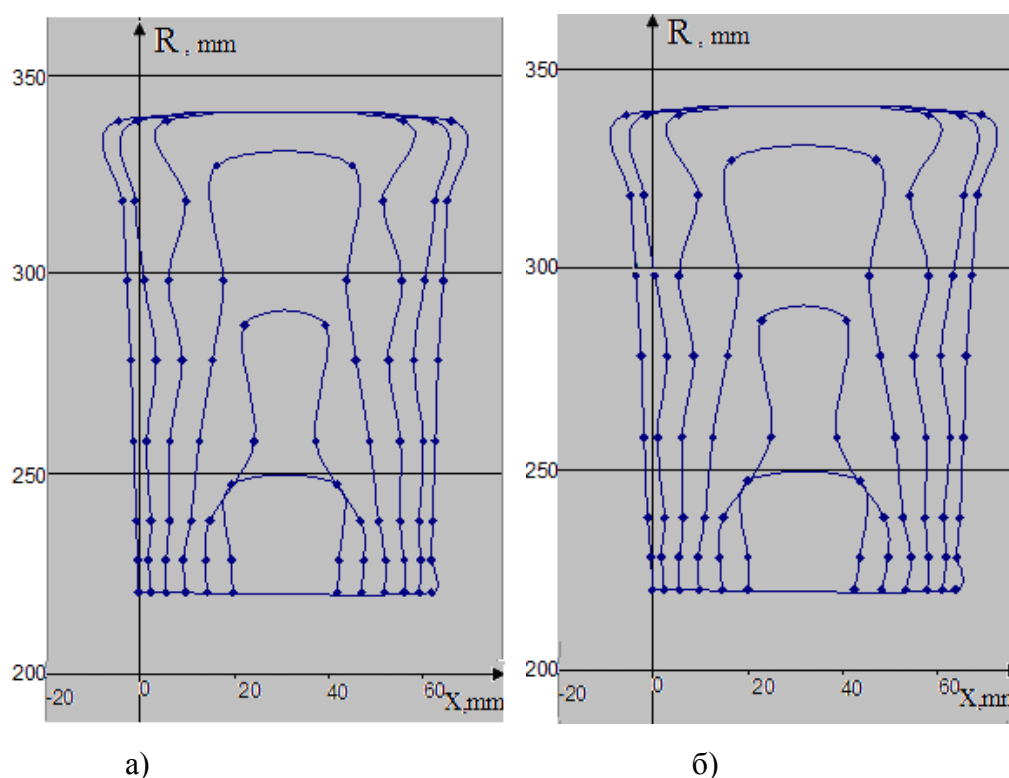


Рисунок 1.5.3 - Лепестки а) спинки б) корытца компрессорной лопатки из восьми сечений.

Построенные координаты считаются наружной линией следующего слоя и вновь повторяются в процессе построения координат внутренней линии текущего слоя. Так продолжается до тех пор, пока не выбирается вся толщина плоской фигуры. Движение идет с двух сторон – со стороны «спинки» и со стороны «корытца». Это предопределяет появление коротких слоев внутри сечения (см. рис. 1.5.3) [51].

Наиболее сложным в алгоритме является процесс построения начала и конца каждого слоя. Такие построения проводятся для ряда следующих друг за другом сечений. Взятые из разных сечений координаты начала и конца одного слоя образуют координаты одного лепестка, т.е. позволяет решить сформулированную за-

дачу раскроя слоев ленты, ткани [126, 242]. Более подробное описание алгоритма дано в приложении 1. Здесь на рисунке 1.5.4 приведен ряд сечений типичных стержней и с помощью графопостроителя построены результаты расчетов координат слоев.

Каждый слой представляет собой трансверсально-изотропное или ортотропное тело. Так как направление осей симметрии материала не совпадает с осями координат стержня и может меняться от слоя к слою, то физико-механические свойства слоев могут отличаться друг от друга. В связи с этим возникает необходимость определения приведенных механических характеристик поперечного сечения.

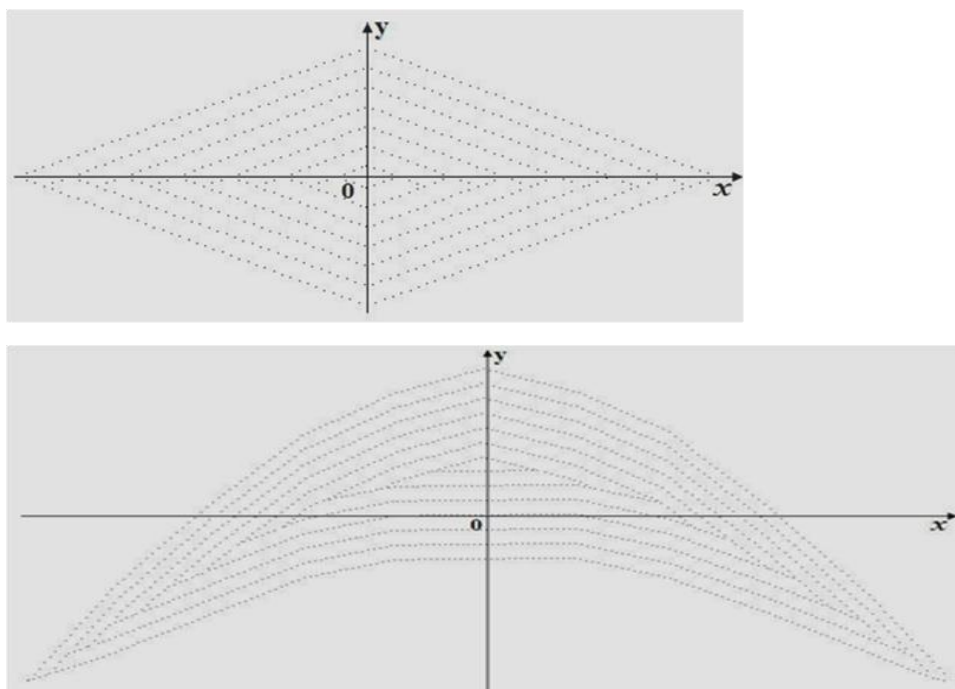


Рисунок 1.5.4 - Машинный раскрой по точкам сечения ромбовидной формы и авиационного профиля слоистого сечения.

1.5.3. Расчет физико-геометрических характеристик сечений анизотропного слоистого стержня

Наиболее часто используются следующие геометрические и физико-геометрические характеристики сечения стержня [63]

$$I_{mn}^k = \int_F H^k(x, y) x^n y^m dx dy. \quad (1.5.13)$$

Здесь показатели степеней m и n должны удовлетворять условию $0 \leq m \leq 4$, $0 \leq n \leq 4$ ($0 \leq n+m \leq 4$), а физико-механические свойства $H^k(x, y)$ содержат различные параметры (например, модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, коэффициент линейного расширения и т.д.) в зависимости от номера k . При $k=0$ $H^0(x, y)=1$ и интеграл (1.5.13) определяет геометрические характеристики сечения стержня. При $k=m=n=0$ интеграл I_{00}^0 равен площади поперечного сечения, т.е. $I_{00}^0=F$.

В пункте 1.5.2 показано каким образом сечение стержня представляется в виде отдельных слоев. Ниже описан алгоритм численного интегрирования соотношений (1.5.13). Предполагается, что материал каждого слоя может отличаться от материала других слоев своими физико-механическими характеристиками $H^k(x, y)$. Возможные при этом разрывы подынтегральной функции в (1.5.13) обуславливают представление интеграла (1.5.13) в виде суперпозиции интегралов, взятых по площади F_i каждого слоя. При этом интеграл (1.5.13) представляется в виде

$$I_{mn}^k = \sum_{i=1}^{K_C} H_i^k(x, y) \cdot J_{mn}^i, \quad J_{mn}^i = \iint_{F_i} x^n y^m dx dy. \quad (1.5.14)$$

Здесь K_C – число слоев и интегрирование осуществляется по площади F_i текущего слоя стержня, в котором $H^k(x, y)=\text{const}$.

Каждый слой ограничен совокупностью ломаных линии у «спинки» и у «крытца». На вершинах этих ломаных строятся треугольники Δ_ζ ($\zeta=1, 2, \dots$), полностью перекрывающие площадь слоя F_i ($F_i = \sum_{\zeta=1}^{M_i} \Delta_\zeta$) (см. рис.1.5.5). При этом

$$J_{mn}^i = \iint_{F_i} x^n y^m dx dy = \sum_{s=1}^{M_i} Q_{mn}^s, \quad Q_{mn}^s = \iint_{\Delta_s} x^n y^m dx dy. \quad (1.5.15)$$

Здесь M_i – количество треугольников в i -ом слое. Отдельный треугольник ABC имеет координаты вершин $A(x_1, y_1)$, $A(x_2, y_2)$, $A(x_3, y_3)$, которые выбраны так,

что при обходе $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ треугольник остается слева. Геометрические характеристики треугольника ABC находятся из соотношений (см. приложение 2)

$$Q_{mn}^s = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{C_{m+1}^k}{n+k+1} \left[\sum_{\ell=1}^3 d_{\ell} b_{\ell}^{m+1+k} (x_{\ell}^{n+k+1} - x_{\ell}^{n+k+1}) \right], \quad (1.5.16)$$

в котором C_{m+1}^k - число сочетаний из $m+1$ элементов по k ;

$$d_{\ell} = (y_{\ell+1} - y_{\ell}) / (x_{\ell+1} - x_{\ell}), b_{\ell} = y_{\ell} - d_{\ell} x_{\ell}, \quad (\ell = 1, 2, 3). \quad (1.5.17)$$

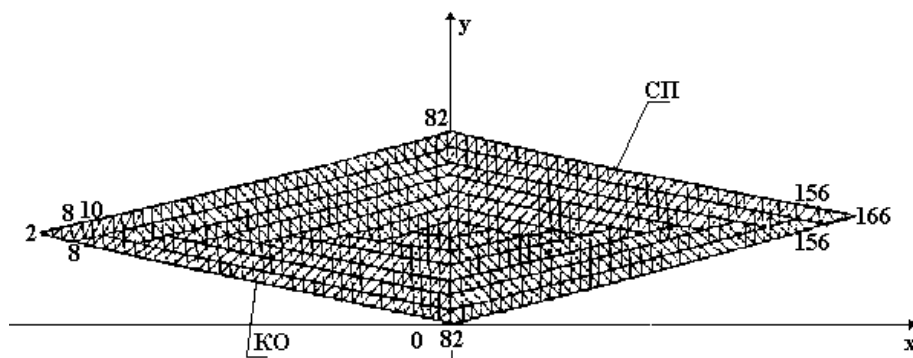


Рисунок 1.5.5 - Сетка из 1260 узлов и 1100 адаптированных со слоистостью структуры сечения элементов в ромбовидном стержне.

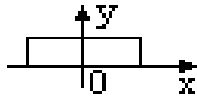
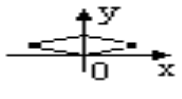
Если индекс у координаты превышает 3, то его следует заменить на 1. В тех случаях, когда абсциссы $x_{\ell}, x_{\ell+1}$ двух точек мало отличаются друг от друга, характеристики Q_{mn}^s вычисляются по формулам (см. приложение 2)

$$Q_{mn}^s = \iint_{\Delta_s} x^n y^m dx dy = \int_{(1)}^{(3)} x^n dx \int_A^D y^m dy + \int_{(1)}^{(2)} x^n dx \int_B^D y^m dy. \quad (1.5.18)$$

Численная реализация описанного алгоритма осуществляется с помощью специально составленной программы на алгоритмическом языке Фортран. Сравнение численных результатов геометрических характеристик I_{mn}^k стержня с ромбовидным ($d_1=120$ мм, $d_2=20$ мм) и прямоугольным ($a=120$ мм, $h=20$ мм) сечением вычисленные по формулам (1.3.18), с точными вычислениями приведены на таблице 1.5.1.

Численные результаты геометрических характеристик для приведенных сечений, вычисленные по формулам (1.3.13), отличаются от точных их значений не более чем на 0,0001%.

Таблица 1.5.1 Значения геометрических характеристик I_{mn}^k сечения

| Интеграл | I_{mn}^k | | Профиль прямоугольник | | Профиль ромб | |
|---------------------|------------|---|---|---------------------|---|---------------------|
| | m | n | формула (1.3.15) | Точное значение | Формула (1.3.15) | Точное значение |
| $\int_F dF$ | 0 | 0 | 2400 | 2400 | 1200 | 1200 |
| $\int_F x dF$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $3,71 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F x^2 dF$ | 0 | 2 | $2,88 \cdot 10^6$ | $2,88 \cdot 10^6$ | $7,2 \cdot 10^5$ | $7,2 \cdot 10^5$ |
| $\int_F x^3 dF$ | 0 | 3 | 0 | 0 | $-6,1 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F x^4 dF$ | 0 | 4 | $6,2108 \cdot 10^9$ | $6,2108 \cdot 10^9$ | $1,0368 \cdot 10^9$ | $1,0368 \cdot 10^9$ |
| $\int_F y dF$ | 1 | 0 | 24000 | 24000 | 12000 | 12000 |
| $\int_F xy dF$ | 1 | 1 | 0 | 0 | $-1,18 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F x^2 y dF$ | 1 | 2 | $2,88 \cdot 10^7$ | $2,88 \cdot 10^7$ | $7,2 \cdot 10^{-7}$ | $7,2 \cdot 10^{-7}$ |
| $\int_F x^3 y dF$ | 1 | 3 | 0 | 0 | $-2,23 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F y^2 dF$ | 2 | 0 | $3,2 \cdot 10^5$ | $3,2 \cdot 10^5$ | $1,4 \cdot 10^5$ | $1,4 \cdot 10^5$ |
| $\int_F y^2 x dF$ | 2 | 1 | 0 | 0 | $-1,32 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F y^2 x^2 dF$ | 2 | 2 | $3,84 \cdot 10^8$ | $3,84 \cdot 10^8$ | $7,68 \cdot 10^6$ | $7,68 \cdot 10^6$ |
| $\int_F y^3 dF$ | 3 | 0 | $4,8 \cdot 10^6$ | $4,8 \cdot 10^6$ | $1,8 \cdot 10^6$ | $1,8 \cdot 10^6$ |
| $\int_F y^3 x dF$ | 3 | 1 | 0 | 0 | $-1,39 \cdot 10^{-7}$ | 0 |
| $\int_F y^4 dF$ | 4 | 0 | $7,68 \cdot 10^7$ | $7,68 \cdot 10^7$ | $2,1493 \cdot 10^7$ | $2,1493 \cdot 10^7$ |
| Система координат | | |  | |  | |

После вычисления на ЭВМ физико-геометрических характеристик сечения находят центр тяжести сечения по формуле

$$x^* = I_{01}^0 / I_{00}^0, \quad y^* = I_{01}^0 / I_{00}^0, \quad (1.5.19)$$

а также направление главных осей. Если α^* - угол между осью x и одной из главных осей сечения, то

$$\cos^2 \alpha^* = 0.5(1 - \cos 2\alpha^*), \quad \sin^2 \alpha^* = 0.5(1 + \cos 2\alpha^*),$$

определяется из равенства

$$\cos 2\alpha^* = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha^*}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha^* = 2I_{22}^0 / (I_{02}^0 - I_{20}^0). \quad (1.5.20)$$

В последующем анализе может использоваться новая, местная система координат x', y' , связанная со старой следующей зависимостью

$$\begin{aligned} x' &= (x - x^*) \cos \alpha^* + (y - y^*) \sin \alpha^*, \\ y' &= -(x - x^*) \sin \alpha^* + (y - y^*) \cos \alpha^*. \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

С изменением координатной системы (параллельный перенос в центр тяжести и поворот относительно осей x и y) геометрические и физико-геометрические характеристики стержня произвольного сечения меняют величину. Физико-геометрические характеристики слоя в системе координат x', y', z' (1.5.21) находятся по формулам

$$\begin{aligned} I_{mn}^i &= (\cos \alpha^*)^{m+n} Q_{mn}^i \left[\sum_{j=0}^n \sum_{s=0}^m C_n^j C_m^s (-1)^j (\operatorname{tg} \alpha^*)^{j+s} \cdot \left(\frac{x^*}{y^*} \right)^j \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(\frac{Q_{01}^i}{Q_{20}^i} \right)^j \left(\frac{Q_{10}^i}{Q_{02}^i} \right)^s \sum_{\ell=0}^{j-s} \left(\frac{Q_{10}^i}{Q_{01}^i} \right)^\ell \cdot \left(\frac{x^*}{y^*} \right)^\ell \right] I, \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

где Q_{mn}^i - значения, вычисленные для слоя i по формуле (1.5.16) или (1.5.18).

Формула (1.5.22) характеризует, что в новой, местной системе координат физико-геометрические характеристики сечения могут отличаться от значения (1.5.13).

Метод расчета стержней произвольного сечения, в основе которых лежала классическая теория тонких изогнуто-закрученных стержней Кирхгофа-Клебша, разрабатывались и развивались многими авторами [45], [47-49], [54] и другими. Однако, в настоящее время не до конца разработаны методы расчета слоистых стержней произвольного сечения. Поэтому, рассматривается цилиндрический стержень из слоистого материала с поперечным сечением произвольной формы,

находящийся под действием усилий, распределенных по концам стержня и приводящихся к скручивающему моменту M_t , изгибающим моментам M_1, M_2 и силе P . Область сечения предполагается конечной и односвязной. Оси x, y совпадают с главными осями инерции рассматриваемого текущего сечения и проходят через центр тяжести сечения. Текущая ось z нормальна к сечению (см. рис. 1.5.6)

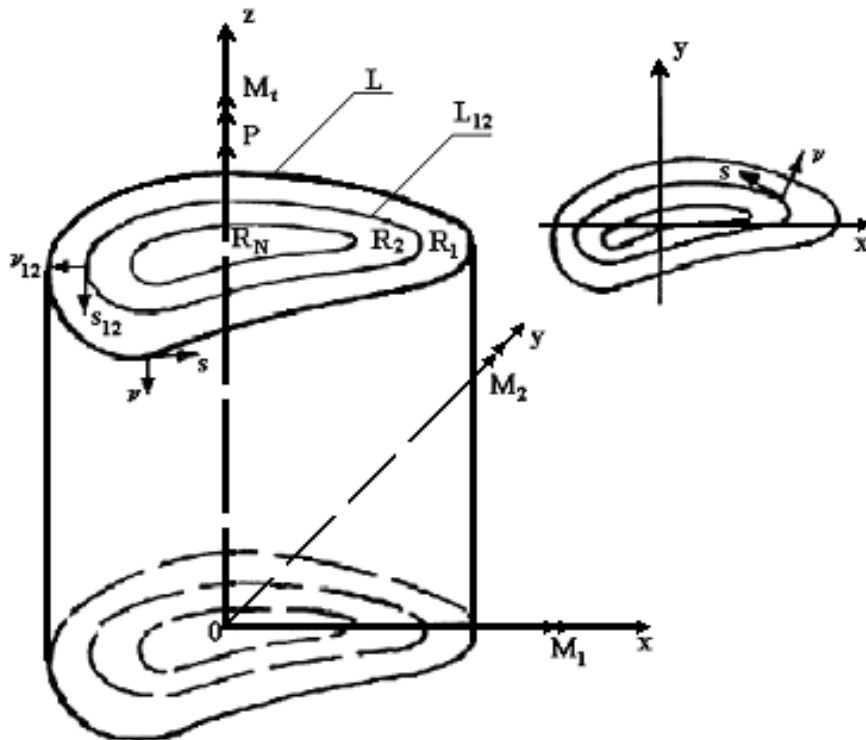


Рисунок 1.5.6 - Схема нагружения слоистого стержня.

В случае продольно-поперечной укладки слоев $\psi^i=0$ или $\psi^i=90$, в этих слоях физические соотношения (1.3.4) упрощаются из-за отсутствия связанности сдвиговых и продольно-поперечных деформации и напряжений. В этом случае $a_{j5}^i = a_{46}^i = 0$ ($j=1,2,3$) и кручение стержня является чистым [3], [4]. Если угол армирования ψ^i в некотором слое i отличен от нуля, то исследуемая деформация стержня является «обобщенной» и кручение стержня, в частности, обуславливает появление эффектов изгиба при кручении.

1.5.4 Формулы обобщенного кручения композиционного стержня

При "обобщенном" кручении компоненты перемещения точек i -го слоя u , v , w отыскиваются в виде [3]

$$\begin{aligned} u^i &= -\frac{a_{33}^i M_2}{2J_2^i} (l-z)^2 + \tau y (l-z) + U^i(x, y), \\ v^i &= \frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1}{2J_1^i} (l-z)^2 - \tau x (l-z) + V^i(x, y), \\ w^i &= \left[\frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1}{J_1^i} y + \frac{a_{33}^i M_2}{J_2^i} x - \frac{a_{33}^i}{F_i} P \right] (l-z) + W^i(x, y). \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

Здесь U^i, V^i, W^i – некоторые подлежащие определению функции координат сечения x, y ; τ – относительный угол закручивания на единицу длины стержня; l – длина стержня; $J_k^i = \int_F x_k^2 dF_i$ ($k=1,2$) – главные моменты инерции поперечного сечения i -го слоя; $I_{00}^{0i} = F_i$ – площадь сечения i -го слоя; P, M_1, M_2, M_t – силы и моменты, действующие в поперечном сечении стержня. Как правило, последние (P, M_1, M_2, M_t) являются известными величинами, однако иногда встречаются случаи, когда их следует определить в ходе решения задачи.

Используя геометрические соотношения Коши из (1.5.23) легко получить выражения для компонент тензора деформации при "обобщенном кручении" для слоя i в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial U^i}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22}^i = \frac{\partial V^i}{\partial y}; \quad 2\varepsilon_{12}^i = \frac{\partial U^i}{\partial y} + \frac{\partial V^i}{\partial x}; \\ \varepsilon_{33}^i &= \frac{a_{33}^i}{F_i} P + \frac{a_{33}^i}{J_2^i} M_2 x - \frac{a_{33}^i M_1 - 0.5a_{35}^i M_t}{J_1^i} y, \\ 2\varepsilon_{23}^i &= \tau x + \frac{\partial W^i}{\partial y}; \quad 2\varepsilon_{13}^i = -\tau y + \frac{\partial W^i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

Следует заметить, что в (1.5.24) все компоненты тензора деформации не зависят от координат z .

Если соотношения (1.3.4) подставить в уравнения равновесия

$$\sigma_{kj,j}^i + x_k^i = 0 \quad (k, j = 1, 2, 3), \quad (1.5.25)$$

где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате, и при этом, учесть представления (1.5.24), то уравнения равновесия могут быть приведены к виду [67,120, 244]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} + \frac{c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} + \frac{2c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} &= Z_1^i(x, y), \\ \frac{\partial^2 V^i}{\partial y^2} + \frac{c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^2} + \frac{2c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} &= Z_2^i(x, y). \end{aligned} \quad (1.5.26)$$

Здесь функция $Z_j^i(x, y)$ ($j=1,2$) определяются следующими соотношениями

$$Z_1^i(x, y) = -\frac{c_{13}^i a_{33}^i}{c_{11}^i J_2^i} M_2 - \frac{1}{c_{11}^i} \left(c_{15}^i \frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + c_{46}^i \frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} \right), \quad (1.5.27)$$

$$Z_2^i(x, y) = \frac{0.5a_{35}^i M_1 - a_{33}^i M_1 C_{23}^i}{c_{22}^i J_1^i} - \frac{1}{c_{22}^i} \left[(c_{25}^i - c_{46}^i) \tau + (c_{25}^i - c_{46}^i) \frac{\partial^2 W^i}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + \frac{c_{44}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} = Z_3^i(x, y), \quad (1.5.28)$$

$$Z_3^i(x, y) = \frac{2c_{35}^i a_{33}^i}{c_{55}^i J_2^i} M_2 - \frac{2c_{15}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} - \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} - \frac{c_{46}^i + 2c_{32}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y}. \quad (1.5.29)$$

Специальная форма уравнений равновесия (1.5.26), (1.5.28) относительно составляющих U^i, V^i, W^i перемещений u^i, v^i, w^i ($i=1,2,\dots,N$) выбрана с целью перенести вправо члены, обусловленные взаимодействием сдвиговых и продольно-поперечных деформаций. Действительно, если $c_{j5}^i = c_{46}^i = 0$ ($j=1,2,3$), что реализуется при $\psi^i = 0^0$ или $\psi^i = 90^0$, то $\psi^i = 0^0$, $Z_3^i = 0$, а Z_1^i, Z_2^i зависят только от изгибающих моментов M_1, M_2 обуславливая возможность по раздельного определения функции W^i и функции U^i, V^i . Этот метод описан ниже (см. 1.7).

Дифференциальные уравнения (1.5.26), (1.5.28) должны быть решены при заданных условиях на боковой поверхности стержня, а также на его торцах. В сечениях стержня должны выполняться условия непрерывности перемещений U^i, V^i, W_i при переходе от слоя к слою.

1.6. Постановка граничных условий

1.6.1. Условия на боковой поверхности

Пусть на цилиндрической поверхности неоднородного анизотропного призматического стержня заданы усилия X_ν, Y_ν, Z_ν . Тогда в рассматриваемом сечении z условия на контуре L слоистой области запишутся в виде [67,120]

$$\sigma_{11}l_1 + \sigma_{12}l_2 = X_\nu, \quad \sigma_{12}l_1 + \sigma_{22}l_2 = Y_\nu, \quad \sigma_{13}l_1 + \sigma_{23}l_2 = Z_\nu. \quad (1.6.1)$$

Здесь ν - направление нормали к ограничивающему рассматриваемое сечение контуру L (рис.1.3.5). $l_1 = \cos(\nu, x) = \partial y / \partial \zeta$, $l_2 = \cos(\nu, x) = -\partial x / \partial \zeta$ направляющие косинусы, которые написаны в предположении, что положительный обход области осуществляется так, что область при обходе всегда находится слева.

Если в соотношения (1.6.1) подставить физические зависимости (1.5.4) и, при этом, учесть выражения для компонент тензора деформации (1.5.24), то граничные условия на боковой поверхности запишутся в виде [67]

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^i}{\partial x} l_1 + \frac{c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial U^i}{\partial y} l_2 + \frac{c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial V^i}{\partial x} l_2 + \frac{c_{12}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial V^i}{\partial y} l_1 &= X_\nu^*, \\ \frac{c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial U^i}{\partial y} l_1 + \frac{c_{12}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial U^i}{\partial x} l_2 + \frac{c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial V^i}{\partial x} l_1 + \frac{\partial V^i}{\partial y} l_2 &= Y_\nu^*, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

$$\frac{\partial W^i}{\partial x} l_1 + \frac{c_{44}^i}{2c_{55}^i} \frac{\partial W^i}{\partial y} l_2 = Z_\nu^*, \quad (1.6.3)$$

в которых приняты обозначения

$$\begin{aligned} X_\nu^* &= \frac{1}{c_{11}^i} \left[x_\nu - c_{13}^i M_z^i l_1 - 0.5 (c_{15}^i y l_1 - c_{46}^i x l_2) \tau - \right. \\ &\quad \left. - 0.5 \left(c_{15}^i \frac{\partial W^i}{\partial x} l_1 + c_{46}^i \frac{\partial W^i}{\partial y} l_2 \right) - \beta_{11}^i l_1 T^i \right], \\ Y_\nu^* &= \frac{1}{c_{11}^i} \left[Y_\nu - c_{23}^i M_2^i l_2 - 0.5 (c_{25}^i Y l_2 - c_{46}^i X l_1) \tau - \right. \\ &\quad \left. - 0.5 \left(c_{25}^i \frac{\partial W^i}{\partial x} l_2 + c_{46}^i c_{25}^i \frac{\partial W^i}{\partial y} l_1 \right) - \beta_{22}^i l_2 T^i \right], \end{aligned}$$

$$Z_v^* = \frac{I}{c_{55}^i} [Z_v - c_{35}^i M_z^i \ell_1 - 0.5(c_{55}^i y \ell_1 - c_{44}^i x \ell_2) \tau - \\ - \left(c_{15}^i \frac{\partial U^i}{\partial x} \ell_1 + \frac{c_{46}^i}{2} \frac{\partial U^i}{\partial y} \ell_2 \right) - \left(c_{25}^i \frac{\partial V^i}{\partial y} \ell_1 + \frac{c_{46}^i}{2} \frac{\partial V^i}{\partial x} \ell_2 \right) - \beta_{13}^i \ell_1 T^i].$$

Здесь, кроме того, обозначено

$$M_z^i = a_{33}^i \left(\frac{P}{I_{00}^{0i}} + \frac{M_1}{I_{20}^{0i}} x + \frac{M_2}{I_{02}^{0i}} y \right) - 0.5 a_{35}^i \frac{M_t}{I_{02}^{0i}} y. \quad (1.6.4)$$

Специальная форма граничных условий (1.6.3), (1.6.2) относительно составляющих U_i , V_i , W_i ($i=1,2,\dots,N$), выбрана с целью перенести вправо члены, обусловленные взаимодействием сдвиговых и продольно-поперечных деформаций. Действительно, если параметры c_{45}^i и c_{46}^i равны нулю ($i=1,2,3$), что реализуется при $\psi^i = 0^0$ или $\psi^i = 90^0$ ($i=1,2,\dots,N$), то X_v^* и Y_v^* зависят только от изгибающих моментов M_1 , M_2 , и тем самым, обуславливают возможность отдельного представления граничных условия для функции U^i , V^i , W^i . Левые части условий (1.6.2), (1.6.3) характерны для задачи изгиба [16] и кручения анизотропных стержней [1], [3].

1.6.2. Условия на поверхностях контакта анизотропных слоев многослойного стержня

Из условия совместности перемещения и равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела L_{kj} анизотропных слоев R_k и R_j , следуют кинематические условия [67,120]

$$U^k = U^j, V^k = V^j, W^k = W^j \quad (1.6.5)$$

и статические соотношения

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}^i - \sigma_{11}^j) \ell_1 + (\sigma_{12}^i - \sigma_{12}^j) \ell_2 &= 0; \\ (\sigma_{22}^i - \sigma_{22}^j) \ell_2 + (\sigma_{12}^i - \sigma_{12}^j) \ell_1 &= 0; \\ (\sigma_{13}^i - \sigma_{13}^j) \ell_1 + (\sigma_{23}^i - \sigma_{23}^j) \ell_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Здесь $\ell_1 = \cos(\nu_{kj}, x) = \partial y / \partial s$, $\ell_2 = \cos(\nu, x) = -\partial x / \partial s$ направляющие косинусы нормали ν_{kj} ; ν_{kj} - направление нормали к линии раздела слоев R_k, R_j ; s - дуга линии L_{kj} (см. рисунок 1.3.5). После подстановки в (1.6.6) физических зависимостей (1.3.4) с учетом выражения (1.5.24), граничные условия на поверхностях контакта слоев запишутся в виде

$$\begin{aligned} & (c'_{11} \frac{\partial U^k}{\partial x} - c'_{11} \frac{\partial U^j}{\partial x} + c'_{11} \frac{\partial V^k}{\partial y} - c'_{11} \frac{\partial V^j}{\partial y}) \ell_1 + [c'_{66} (\frac{\partial U^k}{\partial y} + \frac{\partial V^k}{\partial x}) - \\ & - c'_{66} (\frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x})] \ell_2 = -[0.5(c'_{15} \frac{\partial W^k}{\partial x} - c'_{15} \frac{\partial W^j}{\partial x}) + c'_{13} M_z^k - c'_{13} M_z^j + \\ & + \beta_{11}^k T^k - \beta_{11}^j T^j] \ell_1 - [0.5(c'_{46} \frac{\partial W^k}{\partial y} - c'_{46} \frac{\partial W^j}{\partial y}) + 0.5(c'_{46} - c'_{46})x] \ell_2, \\ & (c'_{12} \frac{\partial U^k}{\partial x} - c'_{12} \frac{\partial U^j}{\partial x} + c'_{22} \frac{\partial V^k}{\partial y} - c'_{22} \frac{\partial V^j}{\partial y}) \ell_2 + [c'_{66} (\frac{\partial U^k}{\partial y} + \frac{\partial V^k}{\partial x}) - \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

$$\begin{aligned} & - c'_{66} (\frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x})] \ell_1 = -0.5[c'_{46} \frac{\partial W^k}{\partial y} - c'_{46} \frac{\partial W^j}{\partial y} + (c'_{46} - c'_{46})x] \ell_1 - \\ & - [0.5(c'_{25} \frac{\partial W^k}{\partial x} - c'_{25} \frac{\partial W^j}{\partial x}) + c'_{23} M_z^k - c'_{23} M_z^j + \beta_{22}^k T^k - \beta_{22}^j T^j] \ell_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (c'_{35} \frac{\partial W^k}{\partial y} - c'_{35} \frac{\partial W^j}{\partial y}) \ell_1 + 0.5(c'_{44} \frac{\partial W^k}{\partial x} - c'_{44} \frac{\partial W^j}{\partial x}) \ell_2 = \\ & = (c'_{15} \frac{\partial U^k}{\partial x} - c'_{15} \frac{\partial U^j}{\partial x} + c'_{25} \frac{\partial V^k}{\partial y} - c'_{25} \frac{\partial V^j}{\partial y}) \ell_1 - 0.5[c'_{46} \frac{\partial U^k}{\partial y} - c'_{46} \frac{\partial U^j}{\partial y} + \\ & + c'_{46} \frac{\partial V^k}{\partial x} - c'_{46} \frac{\partial V^j}{\partial x} + 0.5(c'_{44} - c'_{44})x\tau] \ell_2 - \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

$$\begin{aligned} & - [c'_{35} M_z^k - c'_{35} M_z^j + (c'_{55} - c'_{55})x\tau + \beta_{13}^k T^k - \beta_{13}^j T^j] \ell_1, \\ & U^k = U^j, V^k = V^j, W^k = W^j, \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

где M_z^k определяется из выражения (1.6.4).

Если параметры c'_{j5}^i и c'_{j6}^i равны нулю ($i=1,2,3$), что реализуется при $\psi^i=0$ или $\psi^i=90^0$ ($i=1,2,\dots,N$), то $U^k = U^j, V^k = V^j, W^k = W^j$,

$$\begin{aligned}
& (c'_{11} \frac{\partial U^k}{\partial x} - c'_{11} \frac{\partial U^j}{\partial x} + c'_{12} \frac{\partial V^k}{\partial y} - c'_{12} \frac{\partial V^j}{\partial y}) \ell_1 + 0.5 [c'_{66} (\frac{\partial U^k}{\partial y} + \frac{\partial V^k}{\partial x}) - \\
& - c'_{66} (\frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x})] \ell_2 = (c'_{13} M_z^{*j} - c'_{13} M_z^{*k} + \beta_{11}^j T^j - \beta_{11}^k T^k) \ell_1, \\
& (c'_{12} \frac{\partial U^k}{\partial x} - c'_{12} \frac{\partial U^j}{\partial x} + c'_{22} \frac{\partial V^k}{\partial y} - c'_{22} \frac{\partial V^j}{\partial y}) \ell_2 + 0.5 [c'_{66} (\frac{\partial U^k}{\partial y} + \frac{\partial V^k}{\partial x}) - \\
& - c'_{66} (\frac{\partial U^j}{\partial y} + \frac{\partial V^j}{\partial x})] \ell_1 = c'_{23} M_z^{*j} - c'_{23} M_z^{*k} + \beta_{22}^j T^j - \beta_{22}^k T^k \ell_2, \\
& (c'_{55} \frac{\partial W^k}{\partial x} - c'_{55} \frac{\partial W^j}{\partial x}) \ell_1 + (c'_{44} \frac{\partial W^k}{\partial y} - c'_{44} \frac{\partial W^j}{\partial y}) \ell_2 = \\
& = 0.5 (c'_{44} - c'_{44}) x \tau \ell_2 + [0.5 (c'_{55} - c'_{55}) y \tau + \beta_{13}^j T^j - \beta_{13}^k T^k] \ell_1,
\end{aligned}$$

где M_z^{*k} определяется из выражения

$$M_z^{*k} = a_{33}^{*i} \left(\frac{P}{I_{00}^{0k}} + \frac{M_1}{I_{20}^{0k}} x + \frac{M_2}{I_{02}^{0k}} y \right). \quad (1.6.10)$$

Выбранная форма граничных условий (1.6.7), (1.6.8) обуславливает возможность отдельного определения граничных условий для функций W^i и функций U^i, V^i . Действительно, условия (1.6.7) зависят только от изгибающих моментов M_1, M_2 характерные для задач изгиба [16], а условие (1.6.8) от значения τ , что характерно для задачи кручения анизотропных стержней [3].

1.6.3. Условия на торцевых поверхностях контакта многослойного стержня

На торце $z=const.$ граничные условия обычно для стержней выполняются интегрально [3], [58]. При этом

$$\begin{aligned}
& \iint_F \sigma_{zz} dF = P, \quad \iint_F x \sigma_{33} dF = -M_1, \quad \iint_F y \sigma_{33} dF = M_2, \\
& \iint_F \sigma_{13} dF = 0, \quad \iint_F \sigma_{23} dF = 0, \quad \iint_F (x \sigma_{23} - y \sigma_{13}) dF = M_t.
\end{aligned} \quad (1.6.11)$$

Первые три условия и частично последнее учтены при выборе формы функций, характеризующих перемещение, заданное соотношением (1.5.23).

Для отдельного слоя интегральные зависимости (1.6.11) могут быть выписаны с учетом жесткости слоя [52] –

$$\begin{aligned} \iint_{F_i} \sigma_{zz}^i dF_i &= \frac{c_{33}^i I_{00}^{0i}}{c_{33} I_{00}^0} P, \quad \iint_{F_i} x \sigma_{33}^i dF_i = -\frac{x_{cm}^i c_{33}^i I_{00}^{0i}}{x_{cm} c_{33} I_{00}^0} M_1, \\ \iint_{F_i} y \sigma_{33}^i dF_i &= \frac{y_{cm}^i c_{33}^i I_{00}^{0i}}{y_{cm} c_{33} I_{00}^0} M_2, \quad \iint_{F_i} (x \sigma_{23}^i - y \sigma_{13}^i) dF_i = \frac{C_i}{C} M_t, \\ x_{cm}^i &= \frac{I_{10}^{0i}}{I_{00}^{0i}}, \quad y_{cm}^i = \frac{I_{01}^{0i}}{I_{00}^{0i}} \end{aligned}$$

где C_i – жесткость на кручение по Сен-Венану i -го слоя.

При получении соотношений (1.6.2), (1.6.3) использован прием, рекомендованный в работах [2], [3], [54]. В этих работах используется выражение компонент тензора напряжения σ_{33} , найденное из третьего уравнения системы (1.3.4). Соответствующему подинтегральному выражению из (1.6.11) добавляется левая часть уравнений равновесия предварительно умноженная на x , y или их степени и произведения. В результате можно заменить интеграл по поверхности интегралами от объемных и поверхностных сил, распределенных по контуру сечения. Считая объемные и поверхностные силы равными нулю, можно установить справедливость первых пяти равенств (1.6.11). Последнее условие (1.6.11) дает необходимое контурное выражение для функции перемещения W^i . Действительно, если в эти уравнения подставить выражения σ_{13}^i и σ_{23}^i из (1.3.4), в которых использованы зависимости Коши (1.5.24), то оно записывается в виде

$$\iint_F \left[\frac{\partial}{\partial x} (yW^i) - \frac{1}{c_{55}} \frac{\partial}{\partial y} (xc_{44}^i W^i) \right] dF = M_v, \quad (1.6.12)$$

где приведенный крутящий момент M_v -

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{M_t}{c_{55}} - 0.5 \left(\frac{I_{02}^{0i}}{c_{55}} + \frac{c_{44}^i I_{20}^{0i}}{c_{55}} \right) \tau - \frac{c_{35}^i}{c_{55}} M_{zz}^i - \frac{\beta_{13}^i}{c_{55}} I_{01}^{0i} T^i - \\ &- \iint_{F_i} \left[2 \frac{c_{15}^i}{c_{55}} \frac{\partial}{\partial x} (yU^i) - \frac{c_{46}^i}{c_{55}} \frac{\partial}{\partial y} (xU^i) \right] dF_i - \iint_{F_i} \left(2 \frac{c_{25}^i}{c_{55}} \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial y} - \frac{c_{46}^i}{c_{55}} x \frac{\partial \mathcal{V}^i}{\partial x} \right) dF_i. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

В (1.6.13) приняты обозначения

$$M_{zz}^i = a_{33}^{\prime i} \left(\frac{I_{01}^{0i}}{I_{00}^{0i}} P + \frac{I_{11}^{0i}}{I_{20}^{0i}} M_1 \right) - 0.5 a_{33}^{\prime i} M_t, \quad (1.6.14)$$

где I_{01}^{0i}, I_{10}^{0i} - статические моменты инерции относительно оси y и x ; I_{11}^{0i} – центробежный момент слоя i .

Для решения задачи о кручении слоистого стержня, необходимо найти функции U^i, V^i, W^i , удовлетворяющие одновременно как дифференциальным уравнениям равновесия (1.5.26), (1.5.28), так и граничным условиям (1.6.2)-(1.6.6) и (1.6.12). Особенностью этих уравнений является то, что из-за связанности кручения и изгиба (коэффициенты $c_{j5}^{\prime i}$ и $c_{46}^{\prime i}$ ($i=1, 2, 3$) отличны от нуля) приходится одновременно решать систему трех дифференциальных уравнений (1.5.26), (1.5.28). Только тогда, когда параметры $c_{j5}^{\prime i} = c_{46}^{\prime i} = 0$, система уравнений (1.5.26), (1.5.28) расщепляется на задачи чистого кручения и чистого изгиба. В дальнейших исследованиях рассматривается задача о кручении анизотропного слоистого стержня при выполнении условий на боковой поверхности

$$X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0 \quad (1.6.15)$$

и на торцах

$$P = M_1 = M_2 = 0 \quad (1.6.16)$$

стержня. В результате решения поставленной задачи определяются функции U^i, V^i, W^i и по формулам (1.5.24) деформации в слое i , что позволяет в соответствии с соотношениями (1.3.4) оценить НДС слоя. Однако решения поставленной задачи в полном объеме представляет определенные трудности. В связи с этим, ниже предложен метод получения приближенного решения с помощью представления решения в виде ряда по степеням малого параметра.

1.7. Разработка метода решения полученных уравнений

В тех случаях, когда отношение $c_{46}^{\prime i}/c_{55}, c_{j5}^{\prime i}/c_{55}$ ($i=1, 2, \dots, N$) оказывается меньшим 1, то, следуя работам [44], [45], [53], в которых использовано разложе-

ние в ряд по малому физическому параметру, можно ввести один малый параметр [67,120]

$$\alpha = \text{Sup}\{\alpha_{ij}\} \quad (1.7.1)$$

при данном значении угла (см. зависимости (1.3.7)). В (1.3.4) параметр жесткости является эффективным параметром упругости сечения. В таблице 1.7.1 приведены значения параметра α меньше 1. В этом случае решение уравнений (1.5.4), (1.5.5) при граничных условиях (1.6.2)-(1.6.6) и (1.6.12) удобно отыскивать для каждого слоя i в виде степенного ряда [67,120]

$$U^i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j \tilde{U}_j^i, \quad V^i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j \tilde{V}_j^i, \quad W^i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i^j \tilde{W}_j^i. \quad (1.7.2)$$

Если принятую форму решения (1.7.2) подставить в уравнение (1.5.28), то оно принимает вид

$$D_1 \tilde{W}_j^i = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C_{44}^i}{C_{55}^i} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{W}_j^i = S_j, \quad (1.7.3)$$

в котором

$$S_j = -2 \frac{c_{35}^i a_{33}^i}{c_{55}^i} \frac{M_1}{J_1} \delta^1 - \left(2 \frac{c_{15}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{U}_j^i - \frac{c_{46}^i + 2c_{55}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 \tilde{V}_j^i}{\partial x \partial y}. \quad (1.7.4)$$

В равенстве (1.7.4) δ_j^l символ Кронеккера.

Если функции $\tilde{V}_j^i, \tilde{U}_j^i$ были предварительно определены, то уравнение (1.7.3) является неоднородным дифференциальным уравнением относительно \tilde{W}_0^i . Если же $j=0$, то $S_0=0$ и для определения \tilde{W}_0^i получается однородное уравнение.

Из соотношений (1.6.12) и принятой формы решения (1.7.2) находится условие

$$\sum_{i=1}^N \iint_{F_i} \left[\frac{\partial (y \tilde{W}_j^i)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_{44}^i}{c_{55}^i} x \tilde{W}_j^i \right) \right] dF = M_{tj}, \quad (1.7.5)$$

которому должно удовлетворяться найденное решение уравнения на контуре L .

На линиях раздела L_{ik} слоев R_i и R_k должны выполняться условия, $\tilde{W}_j^i = \tilde{W}_j^k$

$$\left(c_{55}^{ni} \frac{\partial \tilde{W}_j^i}{\partial x} - c_{55}^{ni} \frac{\partial \tilde{W}_j^k}{\partial x} \right) \ell_1 + \left(c_{44}^{ni} \frac{\partial \tilde{W}_j^i}{\partial x} - c_{44}^{ni} \frac{\partial \tilde{W}_j^k}{\partial x} \right) \ell_2 + \tilde{Z}_i^n - \tilde{Z}_i^k = 0, \quad (1.7.6)$$

в которых приняты обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^i &= c_{35}^{ni} M_z^i \ell_1 + 0.5 \left(c_{55}^{ni} y \ell_1 - c_{44}^{ni} x \ell_2 \right) \tau_o + \\ &+ \left(c_{15}^{ni} \frac{\partial \tilde{U}_{j-1}^i}{\partial x} + c_{25}^{ni} \frac{\partial \tilde{V}_{j-1}^i}{\partial y} \right) \ell_1 + 0.5 c_{46}^{ni} \left(\frac{\partial \tilde{U}_{j-1}^i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}_{j-1}^i}{\partial x} \right) \ell_2. \end{aligned}$$

Таблица 1.7.1 - Значение параметра α

| Название материала и источник | φ^i | $\pm 15^0$ | $\pm 30^0$ | $\pm 45^0$ |
|-------------------------------|-----------------------------|------------|------------|------------|
| | α | | | |
| BAL [36] | $c_{15}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.35 | 0.07 | -0.7 |
| | $c_{25}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.31 | 0.5 | 0.53 |
| | $c_{46}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.07 | 0.11 | 0.17 |
| | $c_{66}^{ni} / c_{11}^{ni}$ | 0.2 | 0.22 | 0.2 |
| Стеклопластик [32] | $c_{15}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.41 | 0.31 | 0.02 |
| | $c_{25}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.23 | 0.31 | 0.24 |
| | $c_{46}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.03 | -0.03 | -0.04 |
| | $c_{35}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.41 | -0.22 | -0.02 |
| CFRP [34] | $c_{15}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.08 | -0.37 | -0.7 |
| | $c_{25}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.02 | -0.02 | -0.02 |
| | $c_{44}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.51 | 0.31 | 0.27 |
| | $c_{46}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.02 | 0.02 | 0.02 |
| Углепластик [33] | $c_{15}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.15 | -0.45 | -0.8 |
| | $c_{25}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | -0.05 | -0.05 | -0.04 |
| | $c_{44}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.41 | 0.21 | 0.11 |
| | $c_{46}^{ni} / c_{55}^{ni}$ | 0.02 | 0.02 | 0.02 |

Здесь, M_z^i - определяется из выражения (1.6.4), ℓ_1, ℓ_2 - направляющие косинусы нормали ν к линии раздела L слоев R_i и R_k . В (1.7.5) правая часть определяется равенством

$$M_{ij} = \left[\frac{M_t}{c_{55}^{ni}} - 0.5 \left(J_2^i + \frac{c_{44}^{ni}}{c_{55}^{ni}} J_1^i \right) \tau - \beta_{13}^i S_x T^i \right] \delta_j^0 - c_{35}^{ni} M_{zz}^i \delta_j^1 -$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{F_i} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_{15}^i}{c_{55}^i} y \tilde{U}_{j-1}^i \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} x \tilde{U}_{j-1}^i \right) \right] dF_i - \\
& - \iint_{F_i} \left(\frac{c_{25}^i}{c_{55}^i} y \tilde{V}_{j-1}^i \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} x \tilde{V}_{j-1}^i \right) dF_i,
\end{aligned} \tag{1.7.7}$$

где M_{zz}^i определяется из выражения (1.6.14). Правая часть условия (1.7.5) также как и правая часть уравнения (1.7.3) может быть найдена, если будут предварительно определены функции \tilde{U}_{j-1}^i и \tilde{V}_{j-1}^i для каждого слоя i . При $j=0$ выражение M_{t0} зависит от заданного крутящего момента M_t и параметра кручения τ . Таким образом, при $j=0$ должно быть найдено решение задачи о чистом кручении (1.6.16).

Если решение отыскивается в виде (1.7.2), то функции $\tilde{U}_j^i, \tilde{V}_j^i$ в соответствии с уравнениями (1.7.3) и (1.7.8) должны быть определены в результате решения системы неоднородных уравнений [67,120]

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \tilde{U}_j^i}{\partial x^2} + \frac{c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 \tilde{U}_j^i}{\partial y^2} + \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 \tilde{V}_j^i}{\partial x \partial y} = Q_j, \\
& \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 \tilde{U}_j^i}{\partial x \partial y} + \frac{c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 \tilde{V}_j^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_j^i}{\partial y^2} = T_j,
\end{aligned} \tag{1.7.8}$$

в которых правые части определяются из равенств

$$\begin{aligned}
Q_j &= -\frac{c_{13}^i a_{33}^i}{c_{11}^i} \frac{M_1}{J_1^i} \delta_j^0 - \frac{c_{55}^i}{2c_{11}^i} \left(\frac{c_{55}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 \tilde{W}_j^{i2}}{\partial x^2} + \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 \tilde{W}_{j-1}^i}{\partial y^2 x^2} \right), \\
T_j &= \frac{a_{35}^i M_t - 2a_{33}^i M_2}{2c_{22}^i J_2^i} - c_{23}^i \delta_j^0 - \frac{c_{55}^i}{c_{11}^i} \left(\frac{c_{25}^i - c_{46}^i}{2c_{55}^i} \tau \delta_j^1 - \frac{c_{46}^i}{2c_{55}^i} \frac{\partial^2 \tilde{W}_{j-1}^i}{\partial x \partial y} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, если функции предварительно определены, то уравнения (1.7.8) должны быть решены при следующих граничных условиях:

а) На контуре L

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial x} + \frac{c_{12}^i}{c_{11}^i} \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial y} \right) \ell_1 + \frac{c_{66}^i}{c_{11}^i} \left(\frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial x} \right) \ell_2 &= M_{1j}^i, \\ \frac{c_{66}^i}{c_{11}^i} \left(\frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial x} \right) \ell_1 + \left(\frac{c_{12}^i}{c_{22}^i} \frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial y} \right) \ell_2 &= M_{2j}^i, \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

в которых введены дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} M_{1j}^i &= - \left(\frac{c_{13}^i}{c_{11}^i} M_t^i + \beta_{11}^i T^i \right) \ell_1 \delta_j^0 - \frac{c_{15}^i}{c_{11}^i} \left(\frac{c_{15}^i}{c_{55}^i} y \ell_1 - \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} x \ell_2 \right) \delta_j^1 \tau - \\ &- \frac{c_{55}^i}{c_{11}^i} \left(\frac{c_{15}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial \tilde{W}'_{j-1}}{\partial x} \ell_1 + \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial \tilde{W}'_{j-1}}{\partial y} \ell_2 \right), \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

$$\begin{aligned} M_{1j}^i &= - \left(\frac{c_{23}^i}{c_{22}^i} M_t^i \ell_1 + \beta_{22}^i T^i \ell_2 \right) \delta_j^0 - \frac{c_{55}^i}{c_{22}^i} \left(\frac{c_{25}^i}{c_{55}^i} y \ell_2 - \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} x \ell_1 \right) \delta_j^1 \tau - \\ &- \frac{c_{55}^i}{c_{22}^i} \left(\frac{c_{25}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial \tilde{W}'_{j-1}}{\partial x} \ell_2 + \frac{c_{45}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial \tilde{W}'_{j-1}}{\partial y} \ell_1 \right). \end{aligned}$$

В (1.7.10) выражение M_z^i определяется из отношений (1.6.4), а $\ell_1 = \cos(\nu, x)$, $\ell_2 = \cos(\nu, y)$ - направляющие косинусы нормали к контуру L .

б) На поверхностях контакта L_{ik} слоев R_i и R_k .

$$\begin{aligned} \left(c_{11}^i \frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial x} - c_{11}^k \frac{\partial \tilde{U}_j^k}{\partial x} + c_{12}^i \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial x} - c_{12}^k \frac{\partial \tilde{V}_j^k}{\partial x} \right) \ell_1 - \left(c_{11}^i M_{1j}^i - c_{11}^k M_{1j}^k \right) + \\ + 0.5 \left(c_{66}^i \frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial y} - c_{66}^k \frac{\partial \tilde{U}_j^k}{\partial y} + c_{66}^i \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial x} - c_{66}^k \frac{\partial \tilde{V}_j^k}{\partial x} \right) \ell_2 = 0, \\ 0.5 \left(c_{66}^i \frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial y} - c_{66}^k \frac{\partial \tilde{U}_j^k}{\partial y} + c_{66}^i \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial x} - c_{66}^k \frac{\partial \tilde{V}_j^k}{\partial x} \right) \ell_2 - \\ \left(c_{22}^i M_{2j}^i - c_{22}^k M_{2j}^k \right) + \left(c_{12}^i \frac{\partial \tilde{U}_j^i}{\partial x} - c_{12}^k \frac{\partial \tilde{U}_j^k}{\partial x} + c_{22}^i \frac{\partial \tilde{V}_j^i}{\partial y} - c_{22}^k \frac{\partial \tilde{V}_j^k}{\partial y} \right) \ell_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

где $\ell_1 = \cos(\nu_{ik}, x)$, $\ell_2 = \cos(\nu_{ik}, y)$ - направляющие косинусы нормали ν_{ik} к линии раздела L_{ik} слоев R_i и R_k . Правые части условия (1.7.8) будут полностью опреде-

лены, если предварительно был установлен вид функции \tilde{W}_{j-1}^i . Вместе с тем, при j , равном нулю, как правые части уравнений (1.7.8), так и правые части условий (1.7.9) определяются независимыми от \tilde{W}_{j-1}^i факторами. Это обстоятельство совместно с замечаниями, касающимися уравнения (1.7.3) и соответствующих им граничных условий (1.7.5), говорит, что полученная разрешающая система уравнений (1.7.3), (1.7.8) является рекуррентной системой уравнений.

Действительно, при $j=0$ правая часть уравнения (1.7.3) равна нулю и при граничных условиях (1.7.5) должно быть найдено решение задачи о чистом кручении (1.6.16), т.е. находится решение \tilde{W}_0^i для каждого слоя i . При $j=0$, как правые части уравнений (1.7.8), так и правые части условий (1.7.9) определяются значением $\tilde{U}_0^i, \tilde{V}_0^i$ для каждого слоя i . После подстановки предварительно определенные функции $\tilde{U}_0^i, \tilde{V}_0^i$ для каждого слоя i в правые части уравнения (1.7.3) и (1.7.5), из решения неоднородного дифференциального уравнения (1.7.3) относительно \tilde{W}_1^i , находится значение \tilde{W}_1^i для каждого слоя i . Так как функции \tilde{W}_0^i предварительно определены, то из решения неоднородного дифференциального уравнения (1.7.8) относительно $\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i$ находится значение $\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i$ для каждого слоя i .

Таким образом, по найденным функциям $\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i, \tilde{W}_1^i$ система уравнений (1.7.3), (1.7.8) совместно с граничными условиями (1.7.5), (1.7.6), (1.7.9) и (1.7.11) позволяет математически сформулировать задачу для определения отдельно функции $\tilde{U}_j^i, \tilde{V}_j^i$, и отдельно функции \tilde{W}_j^i для каждого слоя i при следующем $j+1$ -ом приближении.

В работе [44, 45] для анизотропного тела описан аналогичный способ для решения системы уравнений (1.7.3), (1.7.8) при достаточно жестких условиях, наложенных на упругие характеристики анизотропного тела. Там же доказана теорема существования и единственность решения в классе обобщенных функций, а также установлена сходимость степенного ряда (1.7.2) при представлении решения в виде разложения по малому параметру. Предложенный в настоящей работе алго-

ритм решения по существу является развитием работы [44, 45], в котором решение реализуется для каждого слоя многослойного стержня в перемещениях. Таким же образом, как и в [44, 45] можно показать сходимость рядов (1.7.2) к искомого решению. Однако, все же получение решения в такой схеме затруднено. Поэтому ниже отдельно рассматривается задача о кручении слоистого стержня (см. 1.8-1.9 и глава II) и в рамках определенных кинематических предположений задача о НДС естественно-закрученных слоистых стержней произвольного сечения, находящихся в поле центробежных сил (см. глава III-IV).

1.8. Кручение многослойного призматического стержня прямоугольного сечения, составленного из материала ортотропных слоев

Известно, что отыскание точного решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней произвольной формы поперечного сечения сопряжено с большими математическими трудностями.

В работах [1], [2], [3] изложены общие методы решения задач о кручении составных стержней, приведены решения ряда конкретных задач и дана обширная библиография. В [1] решена задача о кручении многослойного стержня, составленного из изотропных материалов, а в [2], [3] - из ортотропных материалов для прямоугольного сечения. При решении задач о кручении многослойного стержня с поперечным сечением сложной формы в [2], [3] материал стержня представляется в виде однородного анизотропного тела с "эффективными" по всему поперечному сечению механическими характеристиками. При этом, не учитывается слоистая структура материала стержня, не позволяя, тем самым, оценить влияние на характеристики деформирования при кручении месторасположения слоя с теми или иными свойствами. Интегральные характеристики не позволяют сформулировать и решить задачу о выборе оптимальной структуры сечения, обеспечивающей, например, ему наибольшую жесткость на кручение. Формулировка задач об определении НДС цилиндрических стержней, работающих на кручение, весьма мало отличается друг от друга [1-3]. Тем не менее, в литературе трудно отыскать

решения и формулировки этих задач для слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Поэтому коротко рассматривается общая постановка задачи о кручении составных анизотропных стержней произвольного поперечного сечения.

Пусть дано постоянное по длине поперечное сечение составного стержня, образованного из N слоев R_1, R_2, \dots, R_n , которым соответствуют различные упругие постоянные c_{44}^i и c_{55}^i ($i=1, 2, \dots, N$). Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки (1.6.15), а нагрузка, действующая по торцам, статически эквивалентна крутящему моменту M_t (1.6.16). Обозначим через L внешний контур всего сечения, L_i - контуры слоя R_i и L_{ij} линия раздела между слоями R_i и R_j . Линия раздела смежных слоев L_{ij} внутри сечения или пересекает внешний контур L под углом, не равным нулю (рис. 1.5.5). В этом случае граничные условия на боковой поверхности запишутся в виде (1.6.1) и на торцевых поверхностях – (1.6.11).

Для решения задачи, описываемой уравнениями (1.3.4) с граничными условиями (1.6.1) - (1.6.11), используется полуобратный метод Сен-Венана [4]. Исходя из граничных условий (1.6.1), предполагается, что в слоистом стержне качественная картина распределения напряжений не отличается от картины в случае однородного тела, т. е. из шести компонент тензора напряжений σ_{kj}^i ($k, j=1, 2, 3$), входящих в выражение (1.3.4), по-прежнему только две не равны нулю в любой точке сечения стержня - σ_{xz}^i и σ_{yz}^i . Тогда уравнения равновесия для слоя i запишутся в виде (1.5.28). Разница между уравнениями (1.5.28) и уравнениями для однородного тела с такой же упругой симметрией заключается в том, что в (1.5.28) параметры жесткости c_{44}^i и c_{55}^i - для каждого слоя i имеют различные значения, тогда как у однородного тела они постоянны. Поэтому при переходе от слоя к слою скачком могут изменяться отдельные компоненты тензоров напряжений.

Таким образом, задача о кручении анизотропных составных стержней сводится к задаче определения N функции $W^i(x, y)$ удовлетворяющих внутри R_i уравнениям (1.5.28) и условиям (1.6.3) на свободных участках границы и линиях раздела слоев (1.6.5).

Сравнивая методы решения задачи кручения в напряжениях [1-2] и в пере-

мещениях [3], следует заметить, что оба метода обладают достоинствами и недостатками. Введение функции напряжений $U(x,y)$ приводит к неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных, решение которого представляет большие трудности, в частности, для нерегулярных слоистых сечений, чем решение однородного уравнения, к которому сводится задача при решении в перемещениях. Граничные условия проще записываются через функцию напряжений. Кроме того, с помощью результатов, полученных для слоистых стержней, составленных из изотропных материалов, легче построить решение в напряжениях для регулярных сечений с изотропными слоями, чем в перемещениях. Однако, решение в перемещениях для неоднородных анизотропных стержней нерегулярного сечения выгодно отличается от решения в напряжениях, в связи с простым условием на линиях раздела анизотропных слоев.

Решение задачи о кручении составных стержней с помощью функции кручения приведены в работах [1], [2], [54], а при применении функции напряжений получило отражение в обширной библиографии, приведенной в работах [1], [55].

Имеется довольно много приближенных методов решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней с поперечным сечением произвольной формы (МКЭ, метод сеток, метод малого параметра, энергетический метод, и др.). Однако для доказательства достоверности результатов, полученных приближенными методами решения задачи о кручении анизотропных слоистых стержней, следует сопоставить их с точными решениями для регулярных многослойных сечений (в частности, с изотропными или ортотропными слоями) или с экспериментальными результатами. Поэтому здесь более подробно рассматриваются и обсуждаются результаты решения задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения, составленного из ортотропных материалов. В п.1.9 подробно рассматривается влияние жесткости на кручение анизотропных стержней слоистой структуры. Полученные результаты п. 1.8, 1.9, в последующем используется для определения достоверности полученных численных результатов решения задачи о кручении многослойных анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов (см. глава 2).

Аналитическое решение задачи о кручении призматического стержня прямоугольного сечения, составленного из различных ортотропных слоев, имеющих одинаковую ширину и удовлетворяющих условию непрерывности перемещений u^i, v^i, w^i и касательного напряжения σ_{yz}^i (см. рисунок 1.8.1) при переходе от слоя к слою было получено Лехницким С.Г. [54]. В этой задаче напряжения в каждом слое i выражаются через контактные усилия. В свою очередь, контактные усилия определяются из условия непрерывности перемещения w^i при переходе от слоя к слою. При этом решается вспомогательная задача о равновесии стержня прямоугольного сечения, деформируемого касательными усилиями. В этом случае касательные напряжения σ_{yz}^i на двух поверхностях слоя i не равны нулю, а задаются в виде тригонометрических рядов с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты определяются из условий (1.6.5) на поверхностях контакта. В результате для определения трех коэффициентов усилий, получается рекуррентная система уравнений. Для N -слойного стержня, составленного из ортотропных материалов, при определении контактных усилий, решается система алгебраических уравнений $N-1$ порядка.

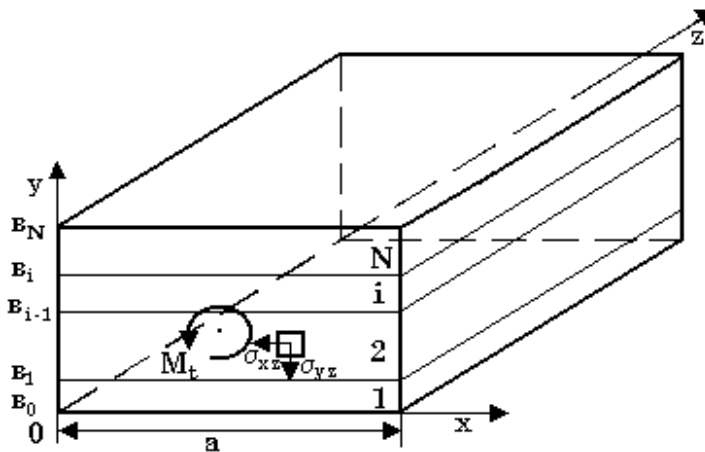


Рисунок - 1.8.1 Слоистый стержень прямоугольного сечения

В [54] касательные напряжения $\sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i$, функция кручения $\varphi^i(x, y)$ в слое i определяются из соотношений

$$\sigma_{xz}^i = \sum_{k=1,3}^{\infty} \left(\frac{8c_{44}^i a \tau}{k^2 \pi^2} B_{ki} + B_{ki}^* \right) \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad (1.8.1)$$

$$\sigma_{yz}^i = - \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[\frac{8f_i a \tau}{k^2 \pi^2} (A_{ki} + 1) + \mu_i A_{ki}^* \right] \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (1.8.2)$$

$$\varphi^i(x, y) = - \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[\frac{8a^2}{k^3 \pi^3 \mu_i} A_{ki} + \frac{a}{k\pi f_i \tau} A_{ki}^* \right] \cos \frac{k\pi x}{a}. \quad (1.8.3)$$

Здесь $h=b_i-b_{i-1}$ толщина, c_{44}^i, c_{55}^i - модули сдвига i -го слоя в плоскости yz и xz соответственно (см. рис.1.8.1), b_i - расстояние от оси x до линии раздела слоев с номерами $i-1$ и i ; a - ширина стержня; τ - относительный угол закручивания на единицу длины стержня. Кроме того,

$$\begin{aligned} \beta_{i,k} &= \frac{k\pi h_i}{a} \mu_i; \quad \mu_i^2 = c_{44}^i / c_{55}^i; \quad f_i^2 = c_{44}^i c_{55}^i; \\ A_{ki} &= \left[ch \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_i) - ch \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_{i-1}) \right] / sh \beta_{i,k}; \\ B_{ki} &= \left[sh \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_i) - sh \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_{i-1}) \right] / sh \beta_{i,k} \\ A_{ki}^* &= \left[\tau_{i-1,k} ch \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_i) - \tau_{i,k} ch \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_{i-1}) \right] / sh \beta_{i,k}; \\ B_{ki}^* &= \left[\tau_{i-1,k} sh \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_i) - \tau_{i,k} sh \frac{k\pi}{a} \mu_i (y - b_{i-1}) \right] / sh \beta_{i,k}; \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

В выражения (1.8.4) входят параметры жесткости c_{mn}^i , определяющиеся по формулам (1.3.7) и (1.3.8).

Контактные усилия между слоями $\tau_{i,k}$ находятся из решения системы $N-1$ алгебраических уравнений

$$f_{i-1} sh \beta_{i-1,k} \tau_{i,k} + s_{ik} \tau_{i-1,k} + f_i sh \beta_{i,k} \tau_{i-2,k} = s_{ik}^*, \quad (1.8.5)$$

где $i=2,3, \dots, N$; $k=1,3, \dots$; $\tau_{0,k} = \tau_{N,k} = 0$;

$$s_{ik} = - (f_{i-1} sh \beta_{i-1,k} ch \beta_{i,k} + f_i sh \beta_{i,k} \tilde{n} h \beta_{i-1,k});$$

$$s_{ik}^* = - \frac{8a\tau}{\pi^2 k^2} c_{44}^i c_{55}^i \left[\mu_i sh \beta_{i,k} (ch \beta_{i-1,k} - 1) + \mu_{i-1} sh \beta_{i-1,k} (\tilde{n} h \beta_{i,k} - 1) \right].$$

Определение касательных напряжений σ_{xz}^i и σ_{yz}^i , а также функции кручения $\varphi^i(x,y)$ и жесткости на кручение C каждого слоя i и всего сечения в целом требует

решения подобной системы алгебраических уравнений (1.8.5). Например, в [1], [2], [56] решается система из $2N$ алгебраических уравнений ($i=1,2,\dots,N$). В этой связи в [1], [2], [56], [64] приближенные оценки значений распределения касательных напряжений $\sigma_{xz}^i, \sigma_{yz}^i$ приведены для сечения только с тремя чередующимися изотропными слоями. Это означает, что недостаточно подробно изучены особенности распределения касательных напряжений и перемещений в сечениях многослойных стержней.

На основе соотношений (1.8.1)-(1.8.5) впервые была составлена программа расчета на алгоритмическом языке Фортран и на её основе исследовались распределения касательных напряжений, перемещений в многослойных стержнях прямоугольного сечения, составленных из изотропных и ортотропных материалов [66]. Блок-схема этой программы приведена на рисунке 1.8.2. Следует отметить, что значения A_{ki}^*, B_{ki}^* из уравнения (1.8.1)-(1.8.3) зависят от значения контактных усилий, которые предварительно определяются из решения системы уравнений (1.8.5). Рассмотрим варианты расчета многослойных стержней различной структуры.

1. Особенности НДС многослойных стержней с изотропными слоями. На основе описанной выше программы были проведены исследования распределения касательных напряжений, перемещений и определены жесткости на кручение многослойных стержней прямоугольного сечения со сторонами $a=120$ мм, $h=20$ мм [66]. Изотропные слои, изготовленные из мягкого материала A типа эпоксидной смолы ($c_{44}^i = c_{55}^i = G_A = 1.1$ ГПа, показаны на рисунках в виде черных слоев) и жесткого материала B типа стали ($c_{44}^i = c_{55}^i = G_A = 78.74$ ГПа, светлые слои), чередовались. Каждый слой имеет свою постоянную толщину, подобранную таким образом, что относительное объемное содержание материала A из эпоксидной смолы в обсуждаемых здесь результатах соответствовало $\nu_A = 0.3$. В виду симметрии изучаемого напряженного и деформированного состояния на рисунках изображена лишь четверть сечения стержня.

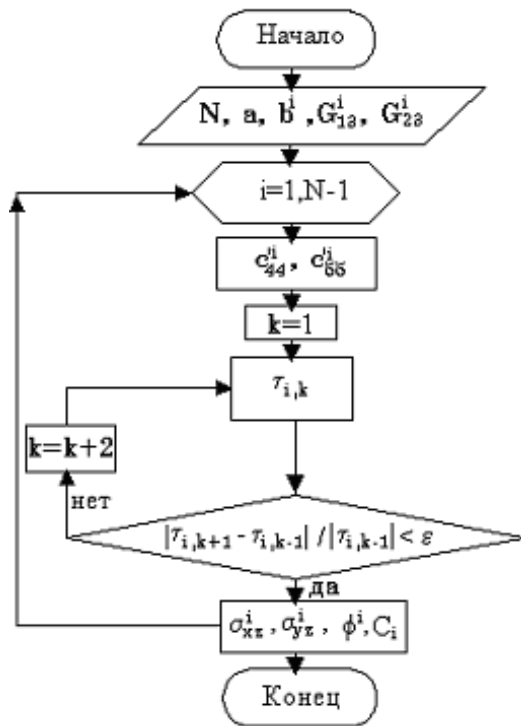


Рисунок 1.8.2 - Блок-схема программы

На рисунке 1.8.3-1.8.5 приведены результаты расчетов для трехслойных стержней в случаях, когда мягкий слой находится внутри (случай а) и снаружи (случай б) сечения.

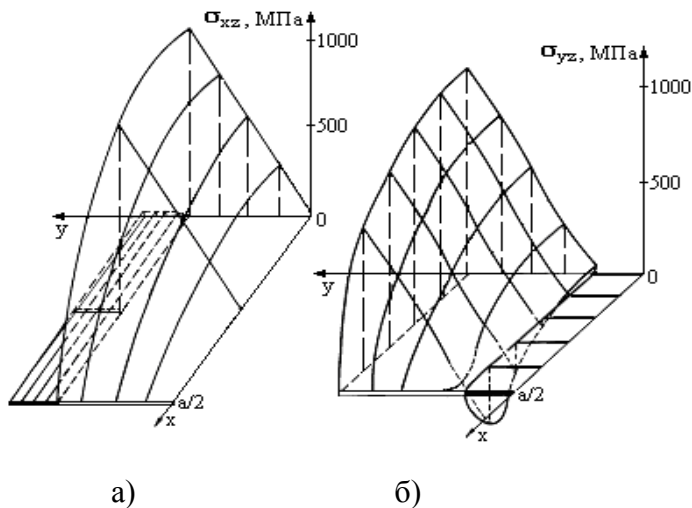


Рисунок 1.8.3 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трехслойного стержня с жестким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ полусторона прямоугольника.

Результаты расчетов показывают, что касательные напряжения σ_{xz}^i при переходе от слоя к слою претерпевают разрыв первого рода. При переходе от слоя к слою значения разрыва увеличиваются или уменьшаются пропорционально от-

ношению модулей $G_A^i / G_B^{i+1} < 1$ или $G_A^i / G_B^{i+1} < 1$ (рис.1.8.3). При более жестких наружных слоях наибольшие напряжения σ_{xz}^i достигаются на серединах длинных сторон внешнего контура (рис. 1.8.3а). При менее жестких наружных слоях наибольшие значения получаются в точках соприкосновения слоев на середине длинных сторон прямоугольника (рис.1.8.3б).

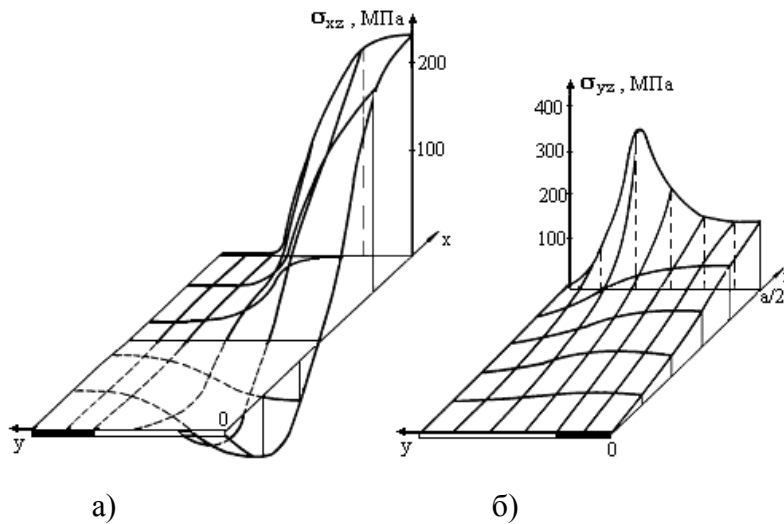


Рисунок 1.8.4 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении трехслойного стержня с жестким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ полуторона прямоугольника.

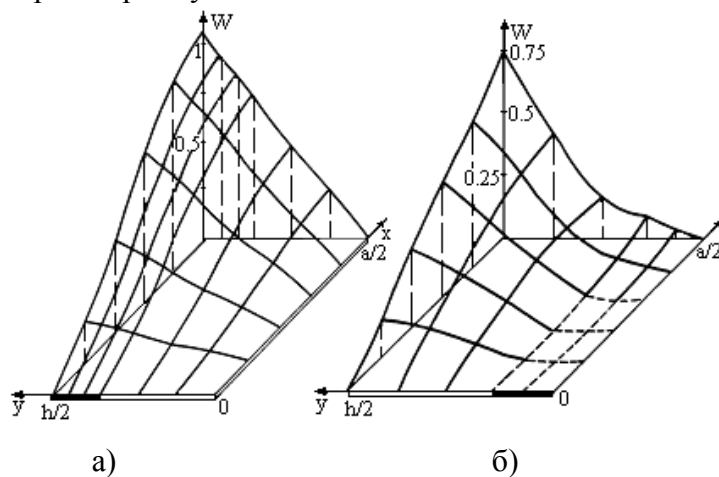


Рисунок 1.8.5 - Распределение осевых перемещений w в сечении трехслойного стержня с жестким (случай б) и мягким (случай а) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$, $h/2$ - полутороны прямоугольника.

Для стержня с жесткими наружными слоями (рис.1.8.4а) наибольшие значения напряжений σ_{yz}^i реализуются на серединах жесткого слоя коротких сторон внешнего контура, а при менее жестких наружных слоях наблюдается неравномерное распределение по сечению (рис. 1.8.4б). При более жестких наружных

слоях осевые перемещения w^i достигают наибольших значений на контуре (рис.1.8.5а), а при менее жестких наружных слоях ее значения как на контуре, так и во внутренних точках сечения увеличиваются (рис.1.8.5б).

Качественная картина распределения касательных напряжений и осевых перемещений находится в соответствии с общими представлениями о кручении изотропных стержней прямоугольного сечения [4]. Однако, если учесть незначительность модуля мягкого слоя, то в этих слоях градиенты напряжений (рис.1.8.4а) являются довольно большими. С изменением положения мягких и жестких слоев характер распределения, а также величины касательных напряжений и осевых перемещений изменяются.

Характер распределения величин касательных напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i и осевых перемещений w^i по сечению 39-ти слойного стержня с более жестким наружным слоем незначительно отличается от их распределения в стержне с менее жестким наружным слоем. Однако, здесь более наглядно демонстрируется скачкообразное изменение касательных напряжений σ_{xz}^i при переходе от слоя к слою (см. рис. 1.8.6).

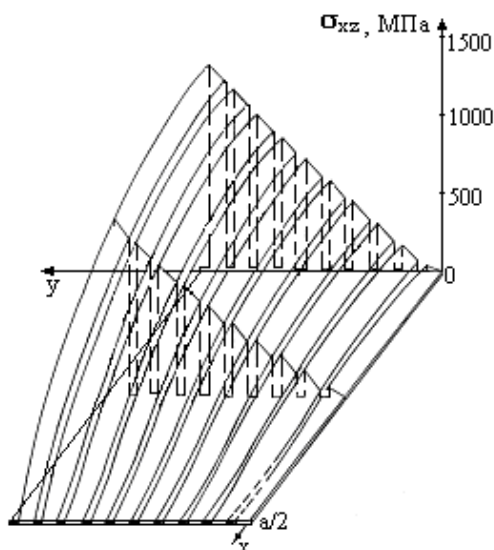


Рисунок 1.8.6 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении 39-ти слойного стержня с мягкими наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ - полусторона прямоугольника.

Из-за непрерывности касательных напряжений σ_{yz}^i и осевых перемещений w^i при переходе от слоя к слою и малой толщины мягких слоев в многослойных стержнях уровень напряжений σ_{yz}^i и значение перемещений w^i в этих слоях доста-

точно высок (рис. 1.8.7, 1.8.8). Это может привести к тому, что мягкие слои с относительно низкой прочностью на сдвиг достаточно быстро (уже при малых углах относительного угла закручивания τ) достигают предельных состояний или пластических деформаций. Жесткость мягких слоев при этом, уменьшается и эффект разрыва градиентов напряжений σ_{yz}^i и значений w^i усиливается. Исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях стержня позволяет оценить работоспособность слоистой конструкции при кручении.

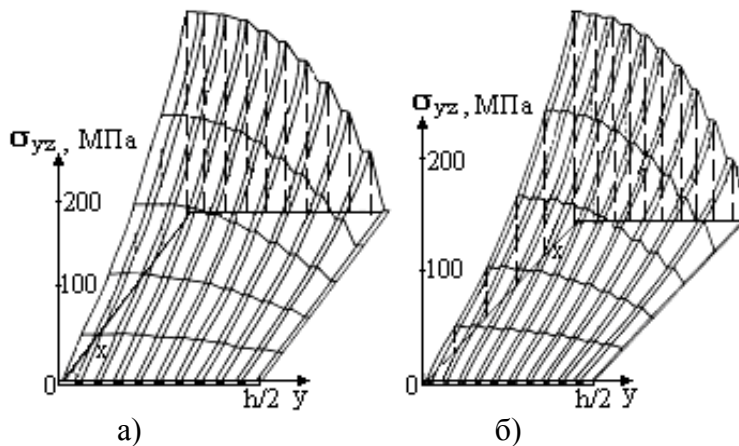


Рисунок 1.8.7 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении 39-ти слойного стержня с мягкими (случай а) и жесткими (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $h/2$ - полусторона прямоугольника.

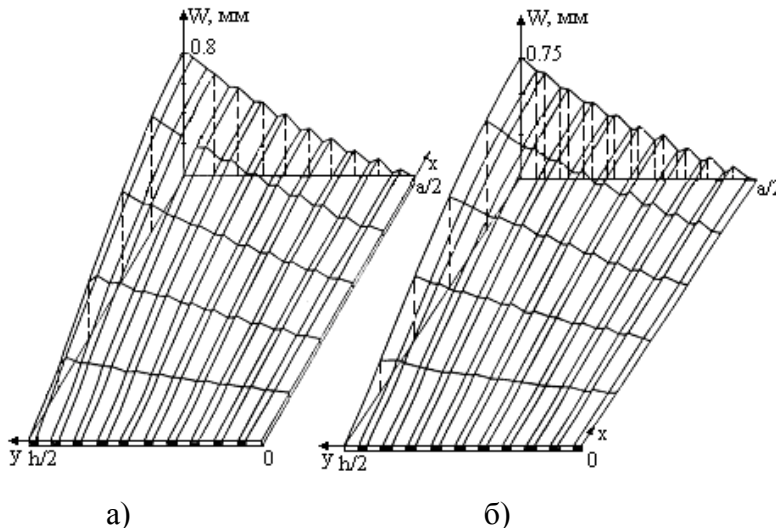


Рисунок 1.8.8 - Распределение осевых перемещений w в сечении 39-ти слойного стержня с мягкими (случай а) и жесткими (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $h/2$, $a/2$ - полустороны прямоугольника.

Из-за непрерывности касательных напряжений σ_{yz}^i и осевых перемещений w^i при переходе от слоя к слою и малой толщины мягких слоев в многослойных

стержнях уровень напряжений σ_{yz}^i и значение перемещений w^i в этих слоях достаточно высок (рис. 1.8.7, 1.8.8). Это может привести к тому, что мягкие слои с относительно низкой прочностью на сдвиг достаточно быстро (уже при малых углах относительного угла закручивания τ) достигают предельных состояний или пластических деформаций. Жесткость мягких слоев при этом уменьшается и эффект разрыва градиентов напряжений σ_{yz}^i и значений w^i усиливается. Исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях стержня позволяет оценить работоспособность слоистой конструкции при кручении.

2. Особенности НДС многослойного стержня с ортотропными слоями. На основе разработанной программы проведены исследования распределения касательных напряжений, перемещений в многослойных стержнях прямоугольного сечения со сторонами $a=120$ мм., $h=20$ мм [66]. Изотропные слои изготовлены из материала А типа алюминия ($c_{44}^i = c_{55}^i = G_A = 26.31$ ГПа, зачерненные на рисунках слои), а ортотропные слои - из композиционных материалов В (упругие свойства боралюминия, которых приведены на таблице 1.3.2 [36], заштрихованные на рисунках слои). Каждый слой имеет свою постоянную толщину, подобранную таким образом, что относительное объемное содержание материала матрицы А из алюминия в обсуждаемых результатах соответствовало $\nu=0.2$. В виду симметрии напряженно-деформированного состояния на рисунках изображена лишь четверть прямоугольного сечения стержня.

На рис.1.8.9-1.8.11 приведены результаты расчетов касательных напряжений и перемещений в виде поверхностей для трехслойных стержней в случаях, когда слой из материала А находится внутри (случай а) и снаружи (случай б) сечения. Качественная картина распределения касательных напряжений находится в соответствии с представлениями о кручении слоистых стержней прямоугольного сечения, составленных из изотропных материалов (см. пункт 1).

Результаты расчетов показывают, что с изменением положения слоев из материала А и В характер распределения, а также величины касательных напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i и осевых перемещений w^i изменяются незначительно в связи с малым

отличием значений модулей сдвига материалов слоев G_A и G_B (рис. 1.8.9- 1.8.11).

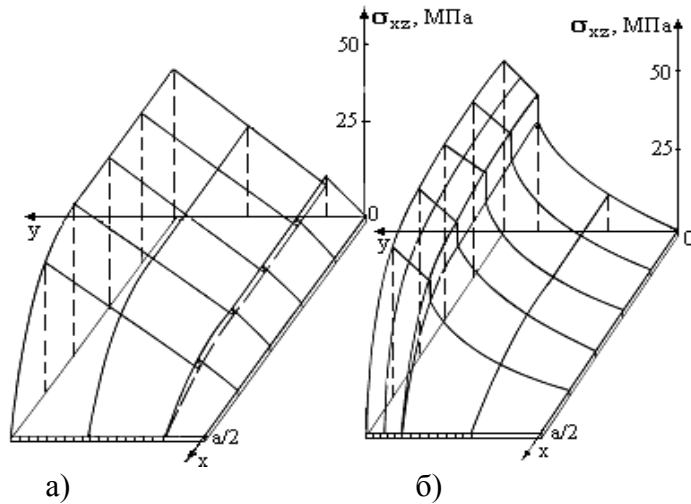


Рисунок 1.8.9 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трехслойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ - полусторона прямоугольника.

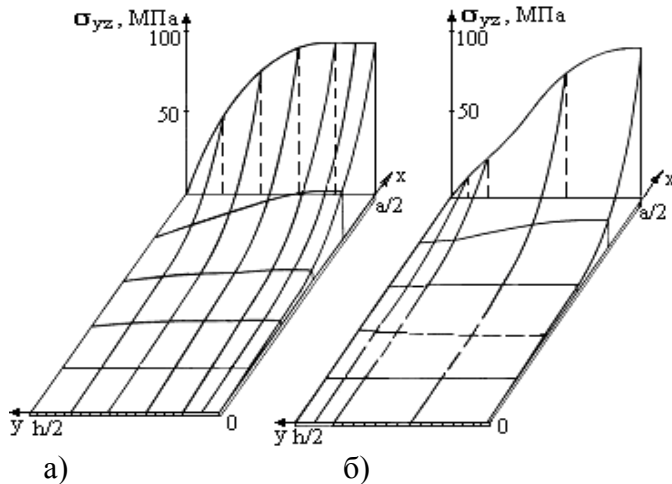


Рисунок 1.8.10 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении трехслойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$, $h/2$ - полустороны прямоугольника.

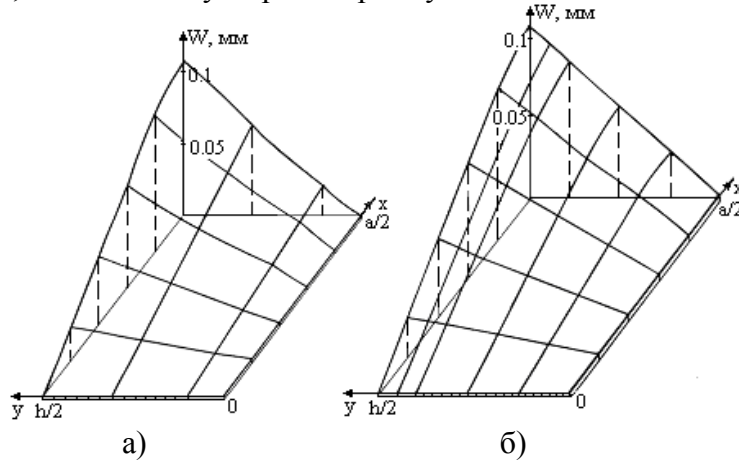


Рисунок 1.8.11 - Распределение осевых перемещений w в сечении трехслойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$, $h/2$ - полустороны прямоугольника.

На рисунке 1.8.12-1.8.14 приведены распределения величин касательных напряжений и осевых перемещений по сечению 29-ти слойного стержня. Здесь более наглядно демонстрируется скачкообразное изменение касательных напряжений σ_{xz}^i при переходе от слоя к слою (рис.1.6.12).

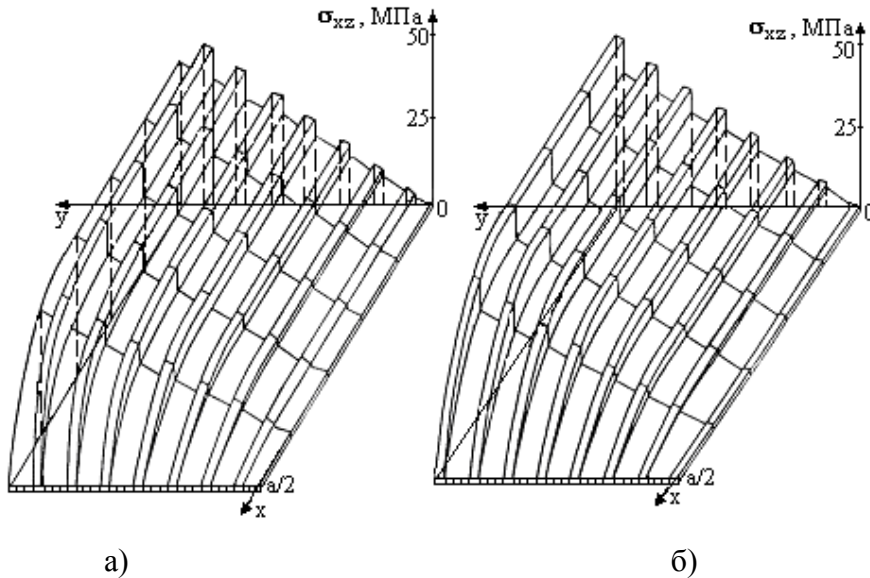


Рисунок 1.8.12 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении 29-ти слойного призматического стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ - полусторона прямоугольника.

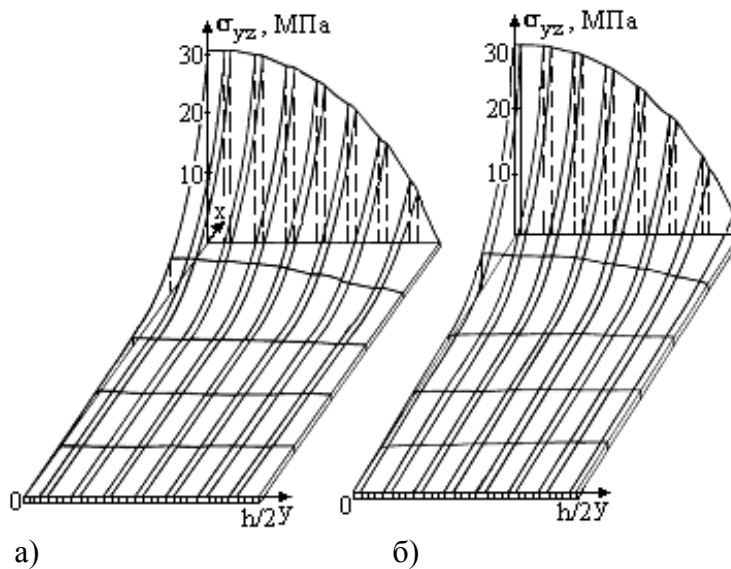


Рис.1.8.13 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении 29-ти слойного призматического стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $h/2$ - полусторона прямоугольника.

Из-за малой толщины слоев из материала матрицы A в многослойных стержнях уровни напряжений σ_{yz}^i и значения перемещений w^i в этих слоях большие (рис. 1.8.13, 1.8.14), что может привести слою из материала с относительно низкой

прочностью на сдвиг к предельному состоянию или пластическим деформациям. Поэтому, для уменьшения градиентов касательных напряжений σ_{yz}^i и значений осевых перемещений w^i в слое с малой толщиной, необходимо для этих слоев подбирать материалы со свойствами более прочными на сдвиг.

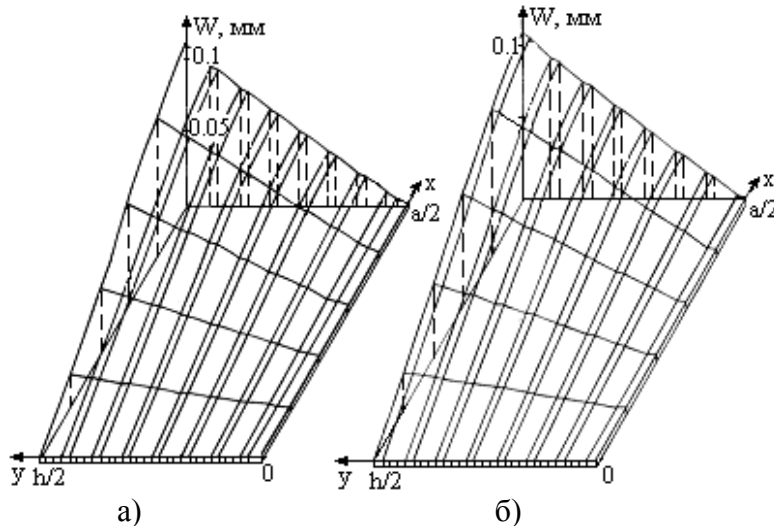


Рисунок 1.8.14 - Распределение осевых перемещений w в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$, $h/2$ - полустороны прямоугольника.

На рисунке 1.8.15-1.8.16 приведены результаты расчетов для трехслойного стержня, когда наружные слои из материала B армированы под углом $\pm 45^\circ$ (случай а) относительно центра кручения. Результаты расчетов показывают, что с изменением положения слоев из материала B характер распределения, а также величины касательных напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i изменяются (рис.1.8.15, 1.8.16). В связи с тем, что отношение модулей сдвига G_A^i / G_B^{i+1} значительно и из-за малой толщины слоя из материала матрицы A в этих слоях значения касательных напряжений σ_{xz}^i (рис.1.8.15б) и σ_{yz}^i (рис.1.8.16а) достаточно высоки в сравнении со случаем (рис.1.8.9б, рис.1.8.10а), когда угол армирования слоя из материала B был равным нулю ($\psi^i = 0$). Для того, чтобы не было предельных состояний или пластических деформаций в этих слоях необходимо, чередующие слои из материала B армировать под углом ψ^i так, чтобы отношение G_A^i / G_B^{i+1} было не столь большим.

На рисунке 1.8.17-1.8.19 приведены распределения касательных напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i и осевых перемещений w^i для 29-ти слойного стержня, когда слои из ма-

териала B армированы под углом $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$, 0° относительно центра кручения (случай а, когда наружные слои из материала B и случай б, когда наружные слои из материала A).

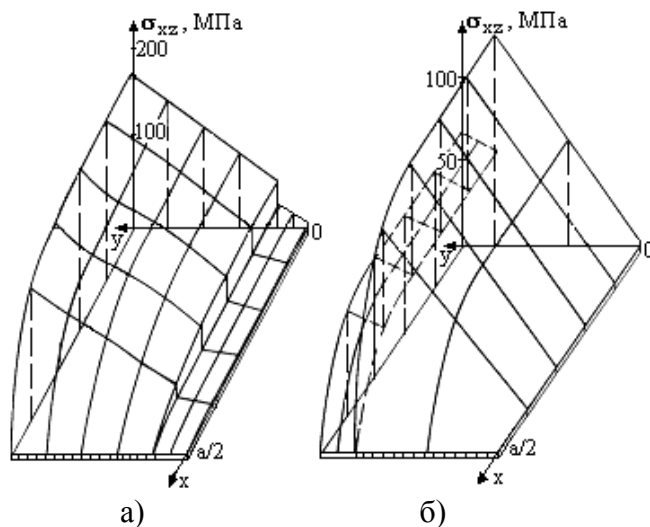


Рисунок 1.8.15 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении трехслойного стержня с ортотропными (угол армирования $\pm 45^\circ$, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ - полусторона прямоугольника.

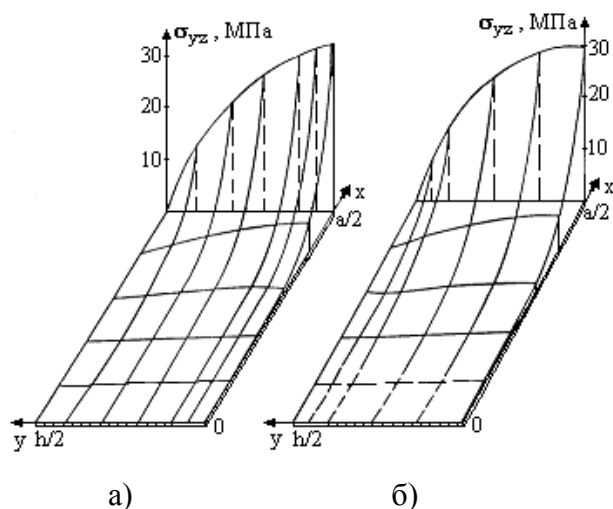


Рисунок 1.8.16 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении трехслойного стержня с ортотропными (угол армирования $\pm 45^\circ$, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $h/2$, $a/2$ - полустороны прямоугольника.

С изменением положение слоев из армированного материала B характер распределения касательных напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i (рис. 1.8.18, 1.8.17) и осевых перемещений w^i (рис. 1.8.19) изменяется. Здесь скачкообразное изменение касательных напряжений σ_{xz}^i при переходе от слоя к слою существенно в слоях, армированных под углом $\pm 45^\circ$ и $\pm 30^\circ$ (рис. 1.8.18). Поэтому в слоях из материала чередующегося со слоями, армированными под углами $\psi^j = \pm 45^\circ$ и $\psi^j = \pm 30^\circ$, достигается предель-

ное состояние или возникают пластические деформации ($\tau=0,001$). Из-за непрерывности касательных напряжений σ_{yz}^i при переходе от слоя к слою и малой толщины слоя из материала A чередующиеся с армированными слоями под углом $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ$ градиенты напряжений σ_{yz}^i с в этих слоях велики.

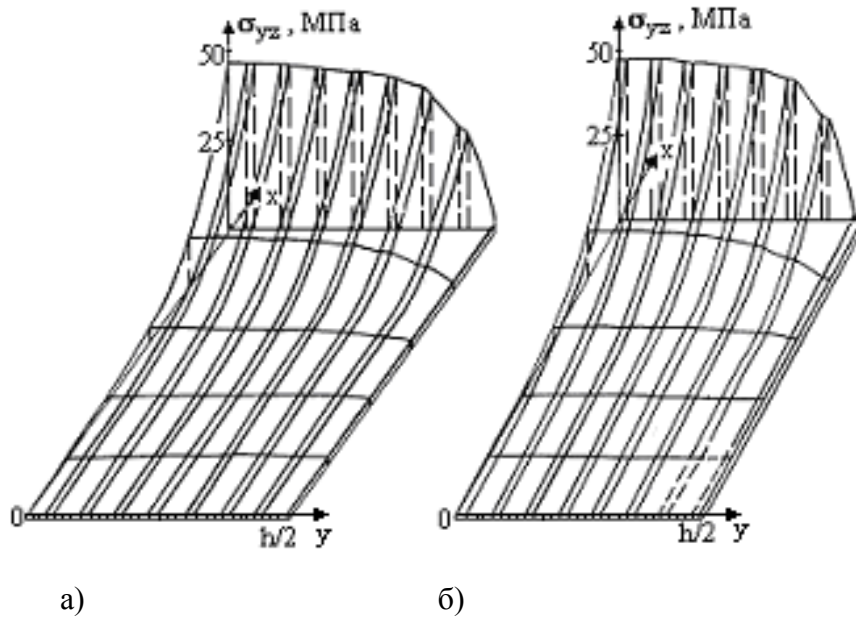


Рисунок 1.8.17 - Распределение касательных напряжений σ_{yz} в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (углы армирования $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ$, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $h/2$ - полусторона прямоугольника.

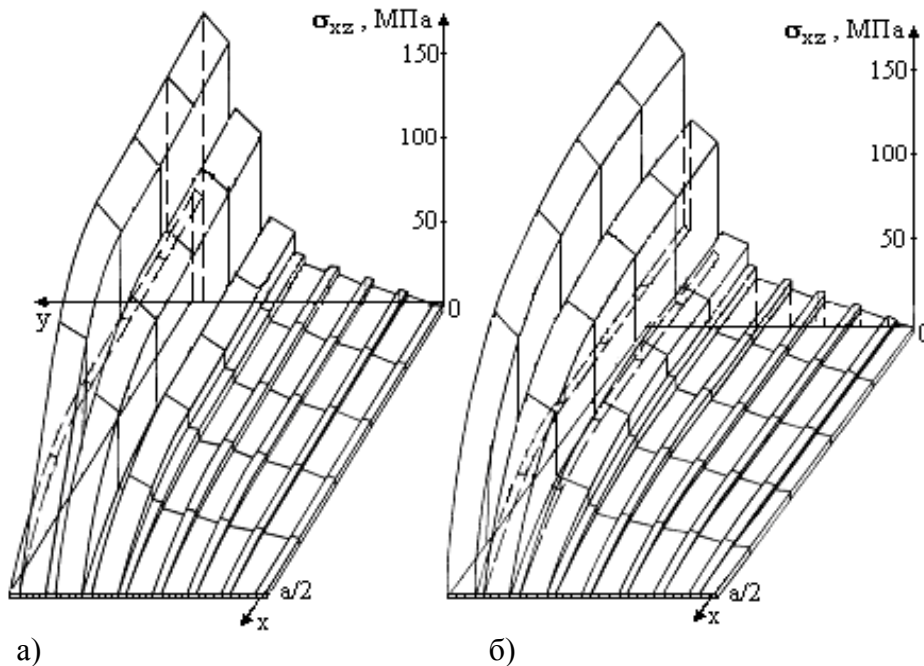


Рисунок 1.8.18 - Распределение касательных напряжений σ_{xz} в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (углы армирования $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ$, случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения, $a/2$ - полусторона прямоугольника.

В связи с этим, для того, чтобы заметно уменьшить градиенты касательных напряжений в слоях из материала матрица A , чередующихся со слоями, армированными под углами $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, для этих слоев необходимо подобрать материалы, модули сдвига которых близки по значению с модулями сдвига материала B , армированного под определенным углом ψ .

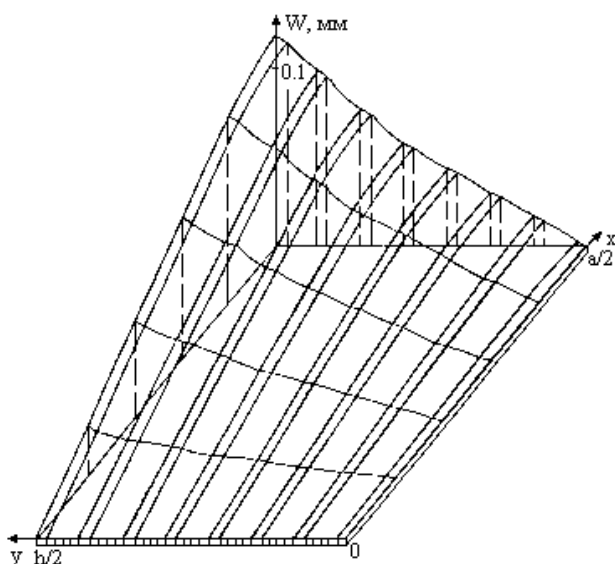


Рис.1.8.19 - Распределение осевых перемещений W в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (углы армирования $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$, 0° относительно центра кручения) внутренними слоями. 0 центр сечения, $a/2$, $h/2$ - полустороны прямоугольника.

3. Особенности НДС многослойного стержня чередующимися с ортотропными и изотропными слоями. Была проведена серия численных экспериментов с образцами прямоугольного сечения из чередующихся слоев углепластика (CAL , см. таб. 1.3.2) (с различными вариантами укладки слоев) и эпоксиды [122, 123]. Образцы были шириной $b=150$ мм, толщиной $h=10$ мм и $\tau_0=0.00215$ рад/мм. В качестве полимерных связующих волокна была взята эпоксид с упругими характеристиками $E=3000$ МПа, $G=938$ МПа, $\nu=0.33$. В виду симметрии напряженно-деформированного состояния на рисунках изображена лишь четверть прямоугольного сечения стержня.

Рассмотрим пример расчета кручения стержня следующей структуры. Структура симметрична по толщине сечения. Наружные четыре слоя со структурой укладки под углом $+60^\circ, -60^\circ, +60^\circ, -60^\circ$ к оси стержня, остальные слои нулевой укладки до оси симметрии. Расчет проводился с целью учета работы межслоевой эпоксидной прослойки.

Объемное содержание углепластика в пакете чередующихся слоев было $\nu_I=0.6$, а связующего эпоксиды - $\nu_I=0.4$. На основе соотношений (1.8.1)-(1.8.3) исследовались распределения касательных напряжений, функций кручения в 40 слойном стержне прямоугольного сечения, составленных из чередующихся ортотропных слоев и межслоевой эпоксидной прослойке.

На рис.1.8.20 приведена поверхность касательного напряжения σ_{13}^i при переходе от слоя с ортотропными материалами (углепластика) к слою с изотропными материалами (эпоксидная смола). Армированными под углами $+60^\circ$, -60° наружных слоях углепластика и с чередующимися с ними межслоевой эпоксидной прослойке (эпоксид) наблюдается скачкообразное изменение поверхности касательных напряжений σ_{13}^i . Происходить в этих слоях большие касательные напряжения, а в межслоевой эпоксидной прослойке, чередующихся с однонаправленными углепластиковыми слоями происходит равномерное распределение поверхности касательных напряжений σ_{13}^i .

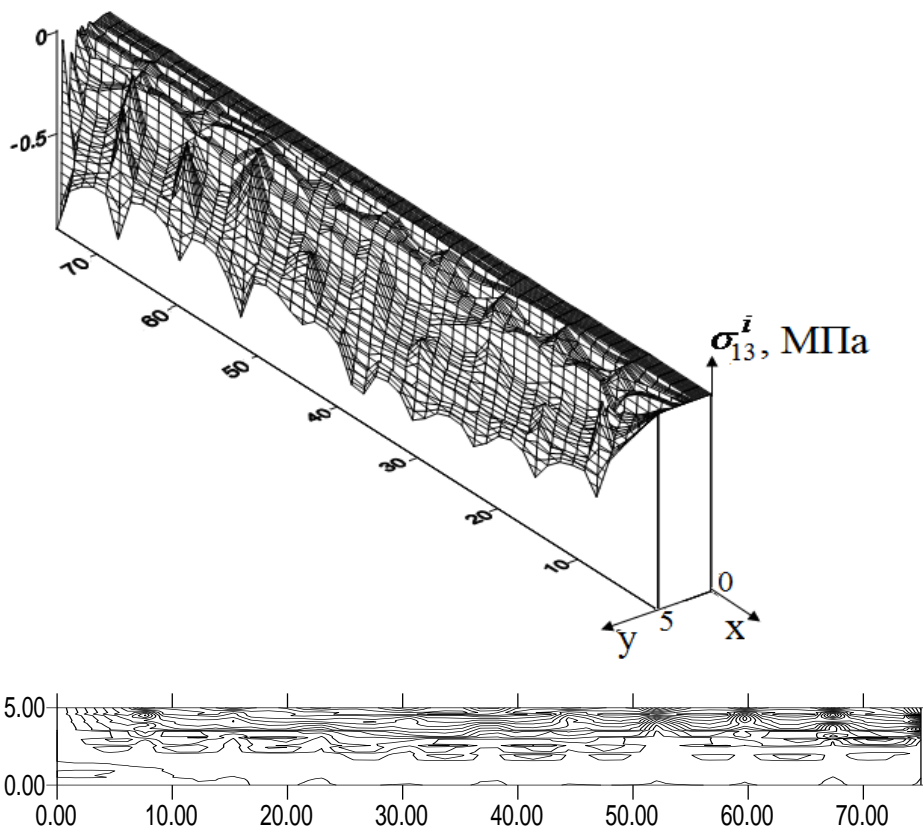


Рисунок 1.8.20 - Поверхность касательного напряжения σ_{13}^i и его изолинии для четверти сечения.

На рисунке 1.8.21 приведена поверхность распределения касательного напряжения σ_{23}^i и его изолиний. Из за граничных условий непрерывности напряжений σ_{23}^i при переходе от слоя к слою, поверхность касательных напряжений σ_{23}^i распределена относительно равномерно. На слоях наружных кромок из углепластика, армированными под углами $+60^0$, -60^0 к оси стержня и с чередующимися с ними межслоевой эпоксидной прослойке (эпоксид) наблюдается резкое изменение касательных напряжений σ_{23}^i . Происходить на слоях этих кромок большие касательные напряжения. В межслоевой эпоксидной прослойке, чередующихся с однонаправленными углепластиковыми прослойками происходит равномерное распределение поверхности касательных напряжений σ_{23}^i .

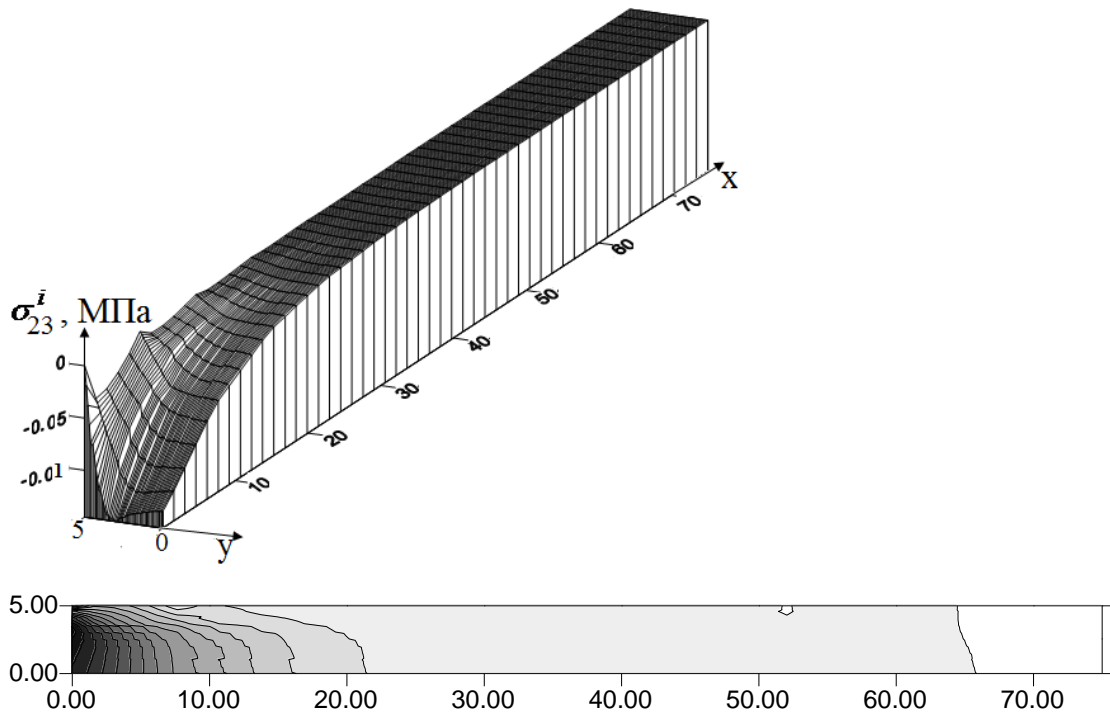


Рисунок 1.8.21 - Поверхность касательного напряжения σ_{23}^i и изолиний для четверти сечения.

На рисунке 1.8.22 приведена поверхность распределения по слоям функции кручения $\varphi(x,y)$. Из за граничных условий непрерывности функции кручения $\varphi(x,y)$ при переходе от слоя к слою, поверхность функции кручения $\varphi(x,y)$ распределена по сечению относительно равномерно. На слоях наружных кромок из углепластика, армированными под углами $+60^0$, -60^0 , с чередующимися с ними межслоевых эпоксидных прослойках (эпоксид) наблюдаются неравномерное изменение

функции кручения. Происходить в этих слоях большие искривление сечений. В чередующихся слоях однонаправленного углепластика с межслоевой эпоксидной прослойки происходит равномерное распределение поверхности функции кручения.

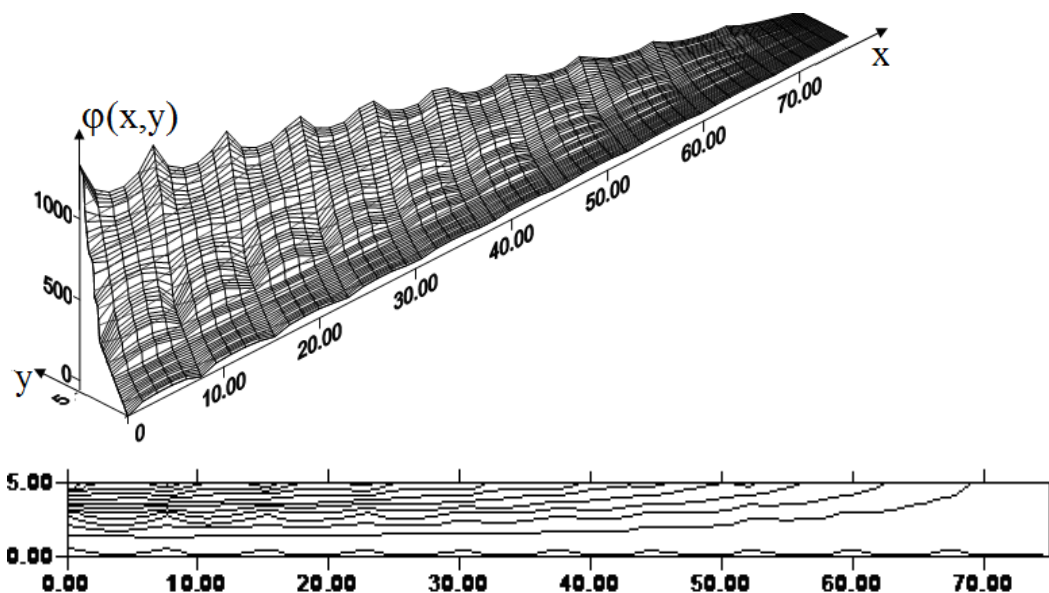


Рисунок 1.8.22 - Поверхность функции кручения $\varphi(x,y)$ и его изолиний для четверти сечения.

Как показали расчеты, вследствие малой сдвиговой жесткости между слоями внутренние мягкие слои под действием кручения смещаются относительно внешних, происходит искривление сечений (рис.1.8.22), которое достигает наибольшей величины в середине сечений. Искривление сечений приводит к перераспределению касательных напряжений (рис.1.8.20-1.8.21) по толщине стержня.

Поэтому, при проектировании лопаток необходимо учитывать возможное увеличение напряжений во внешних слоях. Видно, что при увеличении числа перекрестных слоев касательные напряжения, возникающие между продольными слоями, резко возрастают. Как видно из приведенных примеров, использование теории кручения многослойных стержней позволяет не только оценить вклад каждого слоя в эффективную жесткость на кручение, но и определить напряженное состояние каждого слоя, что особенно важно при определении слабого звена в исходном материале. Совокупность данных о влиянии жесткости на кручение отдельных слоев многослойного стержня и его прочность позволяют осуществить наиболее оптимальную укладку армирующих слоев, а также тип арматуры и матрицы.

1.9 Анализ зависимости жесткости на кручение анизотропного стержня от количества слоев

Жесткость на кручение является важной интегральной характеристикой сечения стержней, элементов ферм, рам и других инженерных сооружений. Обычно ее определяют из экспериментов на кручение путем деления действующего момента M_t на наблюдаемый угол поворота τ единицы длины образца [1,4] –

$$C = M_t / \tau \quad (1.9.1)$$

На стадии выбора материала конструкции, их эскизного проектирования чаще всего используется аналитический метод определения жесткости на кручение C . Наиболее разработанными являются способы расчетной оценки жесткости на кручение C стержней сравнительно простого поперечного сечения из изотропных материалов. Для анизотропных стержней, для неоднородных стержней слоистой структуры опубликованные результаты исследования представляются недостаточными, особенно, в части изучения влияния числа слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия при кручении на параметр жесткости C .

Здесь для приближенной аналитической оценки жесткости на кручение C неоднородного стержня используются приведенные в предыдущем пункте 1.8 результаты решения задачи о кручении стержня прямоугольного сечения, образованного скрепленными и чередующимися N слоями двух или нескольких различных изотропных или ортотропных материалов. Анализ этих работ показывает, что определение жесткости на кручение C многослойного тела требует решения системы алгебраических уравнений (1.8.5) высокого порядка. Ниже аналитически и путем непосредственных расчетов на основе составленной программы (см. рис.1.8.2) для стержней с различным числом слоев N и их расположением впервые установлено, что при увеличении числа слоев N ($N \rightarrow \infty$) выражение для жесткости на кручение C асимптотически стремится к пределу, характерному для однородного анизотропного стержня с эффективными параметрами упругости. В связи с этим была предпринята попытка установления аналитического выражения для жесткости на кручение однородных тел мелкослоистой структуры. Полученный

при этом приближенный результат для исследованных стержней отличался от указанного выше предела не более, чем на 6%, но все же был неожиданным, так как он отличался от известных в литературе данных по жесткости на кручение. В связи с этим ниже проведено исследование этого отличия, и, кроме того, построены специальные номограммы, облегчающие и анализ изменения свойств отдельных компонентов однородной среды и их объемного содержания в широком диапазоне [57].

Рассмотрим влияние количество слоев на жесткость стержня при кручении.

1. Жесткость на кручение слоистого стержня. Для многослойного стержня прямоугольного сечения с ортотропными слоями жесткость на кручение в соответствии с [54] определяется по формуле

$$C = \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[\frac{32a^3}{k^4 \pi^4} \sum_{i=1}^N c_{44}^{i,i} \left(h_i - \frac{2a}{k\pi\mu_i} \operatorname{th}(\beta_{i,k} / 2) \right) + \frac{4a^3}{k^3 \pi^3} \sum_{i=1}^N c_{ki} \right]. \quad (1.9.2)$$

Здесь $h_i = b_i - b_{i-1}$ - толщина; b_i - расстояние от оси x до линии раздела слоев с номерами $i-1$ и i ; a - общая ширина стержня (см. рис.1.8.1). Значения $\mu_i, \beta_{i,k}$, определяются из выражения (1.8.4), а модули сдвига $c_{44}^{i,i} = c_{55}^{i,i}$ ортотропного i -го слоя в плоскости yz и xz - из (1.3.7) и (1.3.8). Наконец, в выражение (1.9.2) входят слагаемые

$$c_{ki} = -(\tau_{i-1,k} + \tau_{i,k}) \operatorname{th}(\beta_{i,k} / 2) / (\tau\mu_i), \quad (1.9.3)$$

определяемые через неизвестные пока контактные усилия $\tau_{i,k}$ и заданный угол раскручивания на единицу длины стержня τ . Контактные усилия между слоями $\tau_{i,k}$ находятся из решения системы рекуррентных уравнений (1.8.5) [54]. Таким образом, для определения жесткости на кручение C из (1.8.2) необходимо предварительно определить контактные усилия из системы уравнений (1.8.5). Проведение непосредственных расчетов становится затруднительным при большом числе N слоев. В связи с этим была использована составленная программа расчета на ЭВМ (рис. 1.8.2), позволяющая при заданных механических свойствах слоев, их геометрических размерах, вычислить значение жесткости на кручение C . Ниже обсуждаются некоторые результаты численных расчетов. Во всех случаях (кроме

специально оговоренных) рассматривался стержень прямоугольного сечения со стороной $a=120$ мм. и толщиной $h=20$ мм [57].

а. Жесткость на кручение слоистых стержней, составленных из изотропных материалов. Расчеты проведены для стержня, составленного из чередующихся листов двух изотропных материалов A и B с модулями сдвига $G_A=52.5$ ГПа и $G_B=26.31$ ГПа. На рисунке 1.9.1 приведены результаты расчетов жесткости на кручение в виде зависимостей от числа слоев N . При проведении расчетов для стержней постоянной толщины h с различным числом слоев N сохранялось постоянным относительное содержание объема v_j

$$v_j = \frac{h_j}{h_1 + h_2}, \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2} N, \quad j = 1, 2. \quad (1.9.4)$$

отдельных компонентов слоистого тела. Приведены результаты расчетов для двух объемных содержаний материала $A - v_1=0.7$ (кривые обозначены знаком *) и $v_2 = 0.525$ (см. рис.1.9.1, кривые – о).

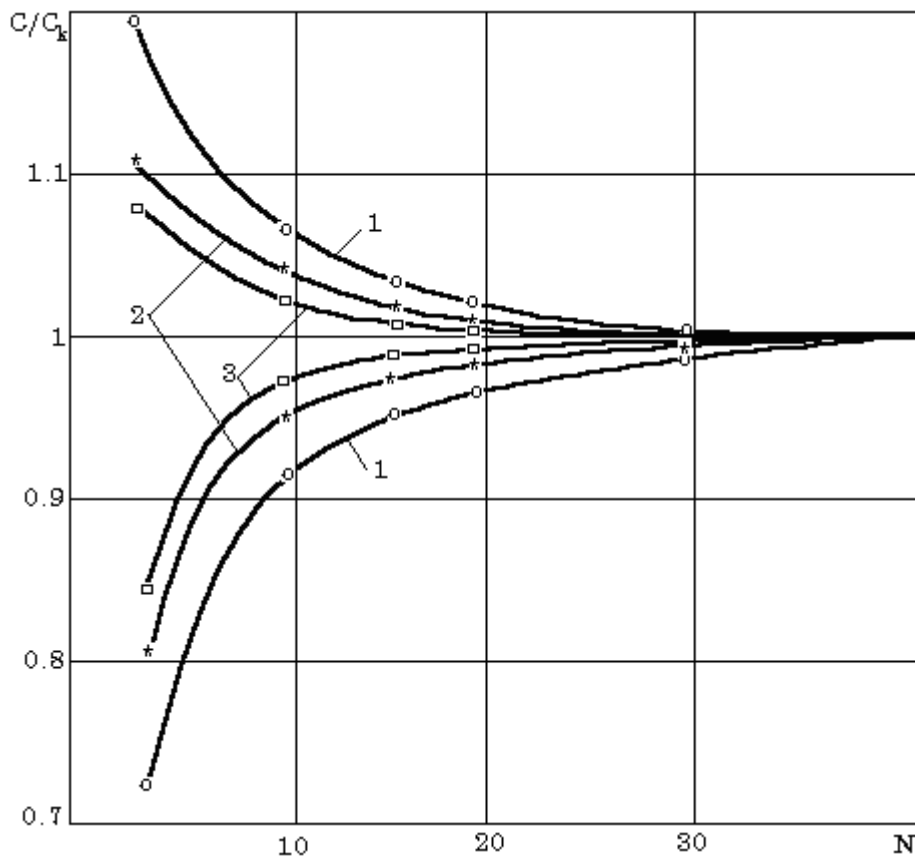


Рисунок 1.9.1 - Зависимость жесткости на кручение от числа слоев N (1-3 - v_1 равно соответственно 0.525; 0.7; 0.8 соответственно).

Нетрудно видеть, что с увеличением числа слоев N жесткость слоистого стержня C асимптотически приближается к пределу C_k которое сравнивается с его приближенным аналитическим выражением C (см. пункт 2, (1.9.10)). Обращает внимание, что стремление к пределу является стремлением сверху для материала с более жестким наружным слоем и снизу - для материала с относительно мягким наружным слоем. Сопоставление кривых зависимостей для приведенных объемных содержаний показывает, что уже при 13 слоях отличие жесткости на кручение слоистого стержня от жесткости C , вычисленной по формуле (1.9.10), составляет не более 6%. С ростом отличия модулей сдвига слоев стремление жесткости на кручение стержня к асимптоте замедляется. Это показано в результате вычислений C для другого стержня, материалы слоев которого имели модули сдвига $G_A=78.74$ ГПа, $G_B=1.1$ ГПа (см. рисунок 1.9.2) [57].

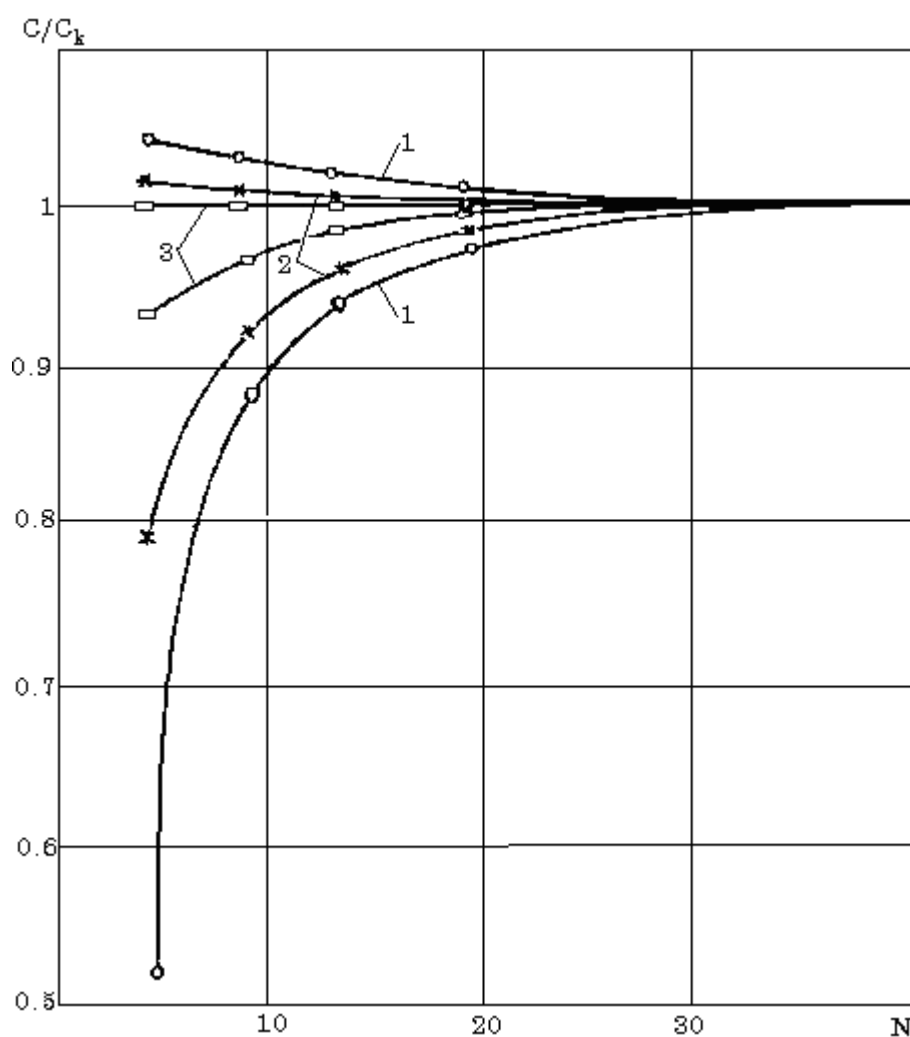


Рисунок 1.9.2 - Зависимость жесткости на кручение от числа слоев N : 1-3 – см. рис. 1.9.1.

На основе точного аналитического решения задачи о кручении слоистого стержня прямоугольного сечения впервые численно оценена характеристика жесткости на кручение C для тела мелкослоистой структуры и приведена количественная оценка области применимости однородной анизотропной модели к исследованию кручения неоднородных слоистых структур [57], [124].

б. Жесткость на кручение многослойного стержня с ортотропными слоями.

Расчеты проведены для стержня, составленного из чередующихся листов изотропного материала A (с модулем сдвига $G_A=26.31$ ГПа) и ортотропного боралюминиевого материала B , (см. табл.1.3.2) характеристики которого вычисляются на основе формул (1.3.7) и данных таблицы 1.3.2 [36]. Каждый слой имеет свою толщину, подобранную таким образом, что относительное содержание объемов материалов A и B являются постоянными и составляют $\nu_1=0.2$, $\nu_2=0.8$.

В таблице 1.9.1 приведены значения жесткости на кручение стержня, составленного из материалов A и B , когда наружный слой составного стержня изготовлен из материала A (значение C_A) и из материала B (C_B). Из таблицы видно, что значение жесткости на кручение C с увеличением числа слоев N ($N \rightarrow \infty$) стремится к пределу. В связи с тем, что отношение модулей сдвига ($G_A/G_B \approx 3$ отличается незначительно, значение жесткости на кручение многослойного стержня ($N=29$) C_A (C_B) отличается от значения C_A (C_B) трехслойного стержня не более чем на 5%. Из таблицы видно, что максимальное значение жесткости на кручение достигается для трехслойного стержня, когда наружные слои армированы под углом $\pm 45^\circ$. Следует отметить, что с увеличением числа слоев N отношение h/a стремится к нулю и это обстоятельство используется для получения приближенной оценки жесткости на кручение стержня мелкослоистой структуры.

Проведенные расчеты показывают, что существует единственный предел, к которому с ростом числа слоев N асимптотически стремится интегральная характеристика сечения стержня - жесткость на кручение C . В связи с этим ниже принята попытка аналитического определения этого предела.

2. Приближенная оценка жесткости на кручение стержня в зависимости от количество слоев. Для простоты предполагается, что стержень образован че-

редующимися слоями двух изотропных материалов с $c_{44}^{2i-1} = c_{55}^{2i-1} = G_A$ и $c_{44}^{2i} = c_{55}^{2i} = G_B$ ($i=1,2,\dots,0.5(N+1)$), имеющих толщины h_1, h_2 и постоянное относительное объемное содержание ν_1, ν_2 компонентов.

Таблица 1.9.1 Значение жесткости на кручение многослойного стержня, составленных из ортотропных материалов.

| Число слоев N | C_A | C_B |
|-----------------------------|------------------|-------|
| | Н·м ² | |
| 3 | 69.02 | 62.23 |
| | 162.2* | 244* |
| 19 | 65.42 | 64.43 |
| 29 | 65.19 | 64.59 |
| 39 | 65 | 65 |
| $ C^3 - C^{29} /C^{29}, \%$ | 4.3 | 3.6 |

* - приведены значение жесткости C_B (C_A) трехслойного стержня, когда наружные (внутренний) слои армированы из материала B под углами $\pm 45^\circ$.

Если в соотношении (1.9.2) гиперболический тангенс представить в виде степенного ряда и сохранить при этом члены порядка h_i/a , то приближенно выражение жесткости на кручение C^0 определяется из равенства

$$C^0 \approx \frac{a}{h} \sum_{i=1}^N c_{44}^{2i} h_i^3 - \frac{2a^3}{\tau \pi^2} \sum_{i=1}^N h_i \left[\sum_{k=1,3}^{\infty} \left[\frac{32a^3}{k^4 \pi^4} \sum_{i=1}^N (\tau_{i-1,k} + \tau_{i,k}) / k^2 \right] \right]. \quad (1.9.5)$$

В нашем случае первое слагаемое вычисляется из приближенного равенства

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^N c_{44}^{2i} h_i^3 \approx -\frac{4a^3}{3N^2} (\nu_1^3 G_A + \nu_2^3 G_B) \quad (1.9.6)$$

С ростом числа слоев N слагаемое (1.9.6) быстро убывает и приближается к нулю. Этот результат подтвержден и численными результатами. В приведенном выше примере в пункте 1а значение этого слагаемого составило для 3 слоев 26%, 9 - 1.6%, 13 - 1.2%, 29 - 1%. Этот анализ показывает, что приближенное значение жесткости на кручение C^0 в основном определяется вторым слагаемым в равенстве (1.9.5), т.е.

$$C^0 \approx -\frac{2a^3}{\tau \pi^2} \sum_{i=1}^N h_i \left[\sum_{k=1,3}^{\infty} \left[\frac{32a^3}{k^4 \pi^4} \sum_{i=1}^N (\tau_{i-1,k} + \tau_{i,k}) / k^2 \right] \right] \quad (1.9.7)$$

$$C = \frac{1}{3} ah^3 (G_A v_1 + G_B v_2). \quad (1.9.10)$$

Значения жесткости C , вычисленные по точным (1.9.2) и приближенным (1.9.10) формулам, приведены в таблице на рисунке 1.9.1. Сопоставление численных результатов показывает, что жесткость C композиционного стержня определенная по приближенной формуле (1.9.10) дает оценку сверху. Результаты расчетов, проведенных для различных отношений h/a , показывают, что отличие приближенных оценок C по формуле (1.9.10) от жесткости на кручение C_k , полученных по соотношениям (1.9.2) для тонких стержней, составляет не более 10%. В связи с этим на этапе предварительного выбора материала тонкого многослойного стержня для вычисления жесткости на кручение C можно рекомендовать полученное относительно простое соотношение (1.9.10). Очевидно, что для сплошного, неслоистого тонкого удлиненного стержня ($h/a < 0.1$) формула (1.9.10) дает широко используемый на практике приближенный результат

$$C = \frac{1}{3} c_{55}^i ah^3, \quad (1.9.11)$$

что может служить обоснованием достоверности полученного результата (1.9.10). Если $c_{44}^i = c_{55}^i = G_B = G_A = G$ и так как $v_1 + v_2 = 1$, то из (1.9.10) получается известное в литературе [4] соотношение для тонкого изотропного тела

$$C = \frac{1}{3} G ah^3. \quad (1.9.12)$$

Таким образом, полученное выражение (1.9.10) является обобщением известных соотношений (1.9.11), (1.9.12) на случай тонкого многослойного стержня.

3. Анализ результатов использования соотношений (1.9.10). Для анизотропных относительно тонких ($h/a < 0.1$) стержней с эффективными параметрами упругости известно соотношение (1.9.11) [21]. Поэтому обычно до решения задачи на кручение определялись эффективные модули c_{55} анизотропного тела. Следует отметить, что изделия из композиционных материалов состоят из отдельных слоев с различной ориентацией армирующих наполнителей. В связи с этим определение эффективных значений параметров упругости в каждом конкретном слу-

чае является одной из важнейших задач. Известные экспериментальные способы их определения могут оказаться не рациональными и трудоемкими. Аналитический путь позволяет выразить упругие постоянные анизотропного однородного тела через упругие характеристики отдельных компонентов композиционного материала, их объемное содержание. Это направление нашло надлежащее развитие в работах [59-62] и широко используется на практике. Одним из таких известных и используемых расчетных формул является выражение

$$c_{55}^{-1} = \frac{v_1}{c_{55}^1} + \frac{v_2}{c_{55}^2} = \frac{v_1 c_{55}^2 + v_2 c_{55}^1}{c_{55}^1 c_{55}^2}, \quad (1.9.13)$$

оценивающее эффективный модуль сдвига c_{55} через модули сдвига c_{55}^j компонентов и их объемное содержание v_j ($j=1,2$) в рамках модели Рейсса. Если использовать соотношение (1.3.4) и полученную оценку (1.9.10) жесткости на кручение C , то легко обнаружить, что эффективный модуль сдвига должен быть определен по формуле (1.3.10)

$$c_{55} = v_1 c_{55}^2 + v_2 c_{55}^1, \quad (1.9.14)$$

следующей из гипотез Фойхта. Это отличие используемых в расчетах формул (1.9.13) и формула, полученной как следствие решения задачи о кручении [3], оказалось заметным. В связи с этим становится актуальным более глубокое проведение сравнительных оценок и их экспериментального обоснования. Как было указано выше значение жесткости на кручение C , вычисленное по формуле (1.9.10), отличается от точного не более чем на 6% рамках этой же точности с помощью формулы (1.9.14) определяется и эффективный модуль сдвига c_{55} .

4. Номограмма для определения жесткости на кручение C . Были проведены многочисленные расчеты по приближенной формуле (1.9.10) для определения жесткости на кручения C композиционных материалов [57]. Они показали, что с увеличением модуля сдвига G_A жесткость C увеличивается линейно. Результаты расчетов приведены на рисунке 1.9.3 в виде зависимостей жесткости C от отношения G_A/G_B при определенных объемных содержаниях v_j . Параметры G_A, G_B могут быть связаны с отдельными конкретными углами армирования. Построенная

линейная зависимость жесткости C от отношений модулей сдвига G_A/G_B (см. рис. 1.9.3) позволяет определить эффективные параметры упругости мелкослоистой среды или же жесткости на кручение C° двухфазного композиционного стержня при заданных значениях G_A , G_B и ν_1 , ν_2 . Действительно, если известно отношение модулей сдвига G_A/G_B чередующихся материалов и их относительное объемное содержание ν_1 , ν_2 , то жесткость неоднородного стержня C находится из линейной зависимости, приведенной на рисунке 1.9.3 (точки $A \rightarrow B \rightarrow C$).

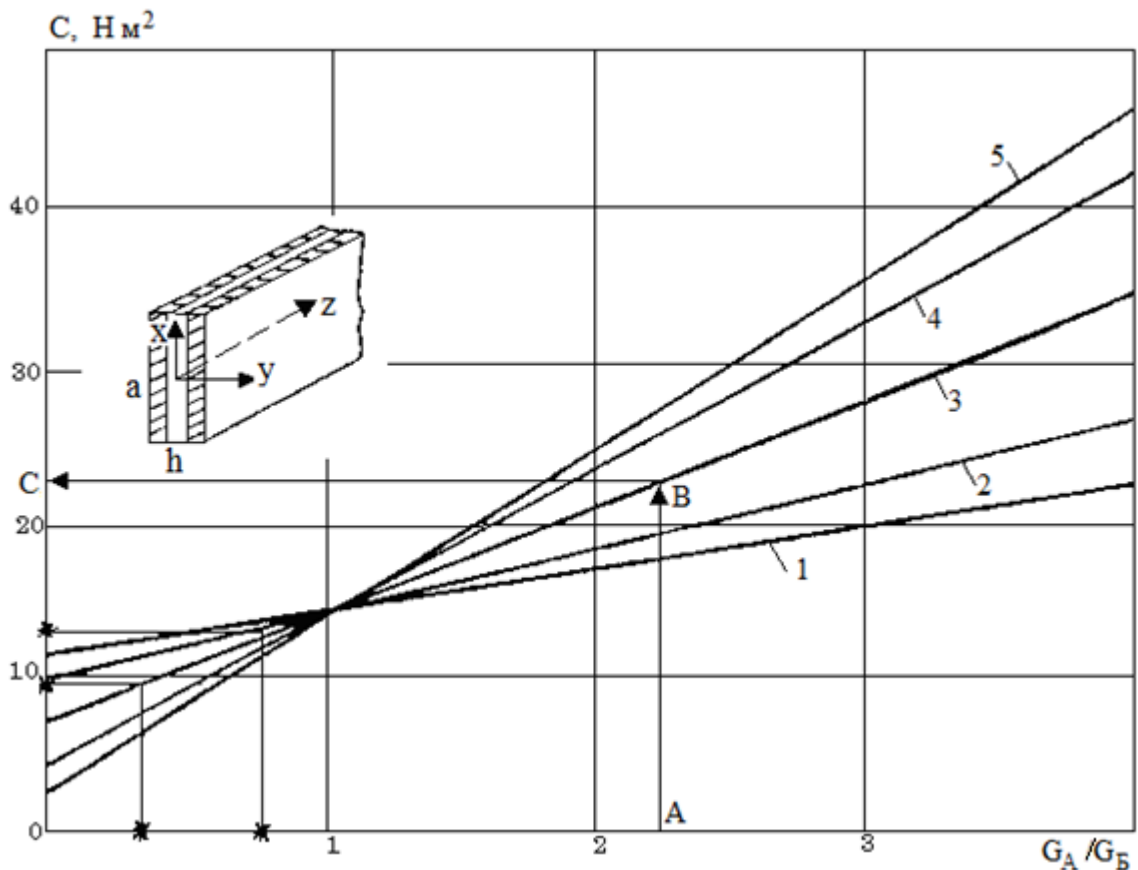


Рисунок 1.9.3 - Зависимость жесткости на кручение от отношения значений модулей на сдвиг слоев: 1–5 - ν_1 равно 0.2; 0.3; 0.5; 0.7 и 0.8 соответственно.

При известных значениях жесткости C (экспериментальные значения C^* , для прямоугольных однонаправленно-армированных ($\psi=0^\circ$) углеалюминиевых (CAL) [35] и боралюминиевых (BAL) [36] композиционных стержней со сторонами $a=60$ мм, $h=3$ мм, были любезно представлены к.т.н. Л.Л.Горшковым, на рисунке 1.9.3 эти данные отмечены знаком “*”) и относительном объемном содержании компонента ν_1 (или отношении G_A/G_B) можно определить отношение G_A/G_B (или ν_1) (см. рис. 1.9.3). Если, кроме того, известны характеристика одного из материалов А

или Б, то найденное отношение G_A/G_B позволяет установить модуль сдвига другого компонента. Сравнения жесткости на кручение и модуля сдвига c_{55} , полученные экспериментально (данные Л.Л.Горшкова) и с помощью приведенной на рисунке 1.9.3 линейной зависимости C от G_A/G_B даны в таблице 1.9.2 ($\nu_I=0.5$). Здесь же приведена приближенная оценка модуля сдвига композиции, полученная из соотношения (1.9.14) по формуле

$$c_{55}^{\bullet} \approx \frac{3C^*}{ah^3}. \quad (1.9.15)$$

Результаты расчетов для композиции с алюминиевой матрицей ($G_B=26.31$ ГПа) показывают, что расчетные C и экспериментальные C^* значения жесткостей и модулей сдвига c_{55} , c_{55}^{\bullet} вычисленные по формулам (1.9.14) и (1.9.15), отличаются не более 3% (см.табл.1.9.2).

Таблица 1.9.2. Сравнения жесткости на кручение C и модуля сдвига c_{55} с экспериментальными результатами.

| Характеристики материала | φ , град | | | |
|--|------------------|----------------|----------------|----------------|
| | 0° | $\pm 15^\circ$ | $\pm 30^\circ$ | $\pm 45^\circ$ |
| <i>BAL</i> [36] $\nu=0.5$ | | | | |
| C^* , Н·м ² | 12.42 | 17.82 | 22.68 | 24.3 |
| C° , Н·м ² | 11.75 | 17.9 | 22.76 | 24.79 |
| c_{55}^* , ГПа | 23 | 33 | 42 | 46 |
| c_{55}^{\bullet} , ГПа | 22.76 | 33.16 | 42.16 | 45.91 |
| $(G_A/G_B)^{\oplus}$ | 0.65 | 1.52 | 2.21 | 2.49 |
| $(c_{55}^* - c_{55}^{\bullet}) / c_{55}^{\bullet}$, % | 5.4 | -0.4 | -0.35 | -0.78 |
| $(C^* - C^{\circ}) / C^{\circ}$, % | 1 | -0.5 | -0.4 | 0.2 |
| <i>CAL</i> [35] $\nu=0.5$ | | | | |
| C^* , Н·м ² | 9.83 | 12.04 | 19.98 | 24.3 |
| C° , Н·м ² | 9.09 | 12.64 | 19.72 | 24.79 |
| c_{55}^* , ГПа | 18.21 | 23.4 | 37 | 45 |
| c_{55}^{\bullet} , ГПа | 18,31 | 23.41 | 36.66 | 45.91 |
| $(G_A/G_B)^{\oplus}$ | 0.38 | 0.78 | 1.79 | 2.49 |
| $(c_{55}^* - c_{55}^{\bullet}) / c_{55}^{\bullet}$, % | 0.6 | -0.04 | 0.9 | -0.2 |
| $(C^* - C^{\circ}) / C^{\circ}$, % | -0.6 | 0.01 | 0.45 | 2 |
| Обозначение. «*» - экспериментальные значения; « \circ » - расчетные значения по формуле (1.9.10); « \bullet » - расчетные значения по формуле (1.9.15); « \oplus » - из номограммы и рисунок 1.9.3. | | | | |

Выводы

Таким образом, полученные соотношения для оценки жесткости на кручение C° и эффективного модуля c_{55} КМ, являясь достаточно простыми, по крайней мере, для исследованных случаев дали достоверные результаты. Следовательно, впервые разработана методика количественной оценки жесткости на кручение тела многослойной структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения. Получено приближенное соотношение для оценки жесткости на кручение для тела с чередующимися слоями.

Численное исследование задачи о кручении составных стержней прямоугольного сечения показывает существенное изменение напряжений и перемещений при переходе от слоя к слою. Обеспечение непрерывности касательного напряжения σ_{yz} на границах контакта слоев приводит к возможности разрушения слоев с низкой сдвиговой прочностью и, следовательно, к дальнейшему уменьшению их вклада в жесткость на кручение стержня и последующему повышению скачков напряжения σ_{xz} и перемещения w , а так же градиентов напряжений σ_{yz} . Поэтому увеличение межслоевой прочности КМ является основным способом обеспечения целостности и работоспособности стержней из КМ, а также их надежности и эффективности.

Таким образом, полученные соотношения для оценки жесткости на кручение C° и эффективного модуля c_{55} стержневых конструкции, рам, и т.д. из КМ, являясь достаточно простыми, дает достоверные результаты.

Впервые разработана методика количественной оценки жесткости на кручение тела слоистой структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения.

Получено приближенное соотношение для оценки жесткости на кручение для тела с чередующимися слоями. На стадии эскизного проектирования тонкостенных многослойных стержневых конструкции, рам и других инженерных сооружений работающих в условиях кручения предложена номограмма для оценки их характеристик жесткости на кручение C и эффективного модуля c_{55} .

РАЗРАБОТКА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ЗАДАЧИ
О КРУЧЕНИИ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В ряде случаев рациональное проектирование и оценка работоспособности стержневых деталей из композиционных материалов (КМ), используемых в различных конструкциях, связаны с необходимостью решения задачи о кручении слоистых анизотропных стержней. Обзор работ, посвященных решению задач о кручении неоднородных стержней, показывает недостаточность аналитических и экспериментальных результатов [1], [55].

Приближенное аналитическое решение задачи о кручении неоднородных стержней с простой формой поперечного сечения получены в [1], [3]. Поэтому представляется, что численные методы являются в настоящее время наиболее общим подходом в исследованиях кручения неоднородных стержней с произвольной конфигурацией поперечного сечения [55], [63]-[75].

В работе [70] метод конечных элементов (МКЭ) применяется к задаче о кручении стержней, поперечное сечение которых составлено из N подобластей, соответствующих материалам с различными модулями сдвига. Задача сведена к минимизации функционала, содержащего функцию напряжений при разделении каждой подобласти треугольной сеткой. Для определения узловых значений функции напряжений получена система линейных алгебраических уравнений. Приведены результаты применения составленной программы к вычислению жесткости и максимальных напряжений при кручении однородных стержней с сечениями в форме квадрата, полого квадрата и эллипса.

В работе [71] показано, как исходя из вариационной задачи, с помощью МКЭ можно перейти к обычной задаче на экстремум. Применяются треугольные элементы с квадратичным выражением искомой функции. Метод используется для определения напряженного состояния при кручении произвольных односвязных поперечных сечений и может распространяться на многосвязные сечения.

В [72] исследуется задача оптимизации скручиваемого стержня из КМ В качестве максимизируемого функционала принимается жесткость на кручение. Материал стержня предполагается армированным жесткими включениями. Используется расчетная схема деформирования материалов, базирующаяся на представлениях о микроструктурных особенностях и эффективных модулях. В этой схеме эффективные модули композита связаны с характеристиками армирующего материала A_M и матрицы, коэффициентов концентрации включений. Между эффективным модулем сдвига G и коэффициентом концентрации ν имеет место линейная зависимость (подобная зависимость для слоистого композиционного стержня установлена в п. 1.8, 1.9):

$$G = A_M + G_M, \quad A_M = E/15 - G_M,$$

где E - модуль Юнга арматуры, а G_M - модуль сдвига связующего. В рассматриваемой задаче оптимизации параметр ν играет роль управляющей переменной, которая разыскивается из условия максимизации функционала жесткости. Для отыскания оптимального распределения ν используется итерационный алгоритм, основанный на малых вариациях управляющей функции, и решения "прямых" вариационных задач. Дается анализ найденных оптимальных решений. Оценивается выигрыш получаемый при оптимизации структуры.

В [73] рассмотрены границы применимости некоторых приближенных формул для определения жесткости на кручение лопаток турбомашин. Исследования проведены МКЭ на тестовых задачах, а также на реальных профилях турбинных и компрессорных лопаток. В работе оцениваются погрешности вычисления геометрической жесткости на кручение по приближенным формулам в зависимости от определенных геометрических параметров. Геометрическая жесткость на кручение определялась по следующим приближенным зависимостям [49] формула (2.1)

$$I_{d1} = \frac{4I_{\xi}I_{\eta}}{I_{\xi} + I_{\eta}}, \quad (2.1)$$

$$I_{d2} = \frac{1}{3} \int_{\zeta} h(\zeta) d\zeta, \quad (2.2)$$

$$I_{d_3} = \frac{\pi}{16} b h^3. \quad (2.3)$$

Здесь I_ξ, I_η - главные центральные моменты инерции; ζ - координата, отсчитываемая вдоль средней линии профиля, длина которой l ; b - хорда профиля (рис. 2.1.1).

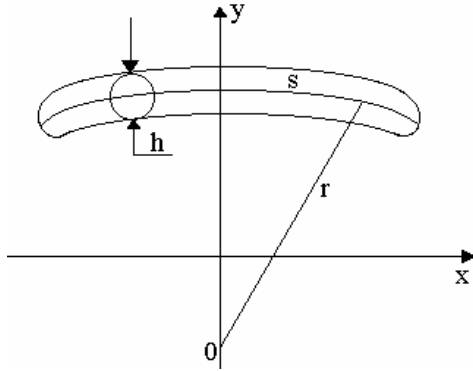


Рисунок 2.1.1 - Средняя линия профиля.

Формула Власова (2.1) [49] применяется в расчетах различных конструкций, а зависимости (2.2), (2.3) - в расчетах только удлиненных тонкостенных профилей. Формула (2.2) точно определяет геометрическую жесткость бесконечной полосы постоянной ширины $h=const.$, а в общем случае точность решения зависит от степени искривленности h/r и тонкостенности h/l профиля. Зависимость (2.3) чаще всего применяется для приближенной оценки геометрической жесткости на кручение турбинных лопаток. Отмечено, что во всех расчетах погрешность определения геометрической жесткости по формуле (2.2) меньше чем при использовании других известных соотношений.

Компрессорные лопатки имеют удлиненную форму поперечного сечения с небольшой степенью искривленности, а турбинные лопатки более компактны и отличаются существенной изогнутостью профиля. Поэтому для турбинных и некоторых профилей компрессорных лопаток необходимо рассматривать задачу о кручении в полной постановке.

Анализ этих работ показывает, что жесткость на кручение является важной интегральной характеристикой сечения стержней. Опубликованные результаты представляются недостаточными, особенно в части влияния слоев, свойств от-

дельных слоев, их взаимодействия на жесткость при кручении слоистых стержней произвольного сечения. Поэтому, в п. 2.1-2.3 предлагается методика и алгоритм решения задачи о кручении слоистых анизотропных стержней МКЭ с использованием алгоритмического языка Фортран. Рассматривается задача о кручении стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки (см. 2.4). Значения осевых перемещений прямоугольного и ромбовидного сечения, вычисленные МКЭ сравниваются с точными их значениями (см. 2.4).

В настоящее время для решения задачи кручения применяются различные прикладные программы (Ansys, Nastran, и др.), где используется МКЭ. В этих программах по заданной геометрии формируется твердотельная модель рассматриваемого стержня или конструкции и разбивается на конечные элементы. Можно с помощью специальных программ (UG NX, T_Flex, и др.) разбить рассматриваемое сечение на слои по заданной толщине и импортировать полученную геометрию в другие программы, например Ansys, Nastran, и др. В этом случае полученная геометрия сечения может не соответствовать реальному слоистому сечению конструкции, который был выбран в соответствии с технологическим заданием. Поэтому геометрия слоистого стержня (см. глава 1, п. 1.5) разбивается на слои по заданной толщине с учетом физической неоднородности и слоистости (технологическая задача раскроя сечения на слои), алгоритм которого реализован по специально созданной программе на алгоритмическом языке Фортран. Полученная геометрия слоев различного сечения по длине стержня, позволяет при определении НДС исследуемой области учитывать их физическую неоднородность с учетом слоистости. Каждый слой рассматриваемого сечения может быть изготовлен из различных ортотропных материалов (количество характеристик равно 9, см. п.1.5). Кроме того исследуемый стержень является переменным по длине, ширине и толщине. В этом случае количество слоев в каждом сечении будет различным. Следовательно появляются короткие лепестки слоев одного материала по длине стержня (см. п.1.5). Из-за этого при твердотельном расчете по программам Ansys, Nastran, и др. задачи кручения или определения НДС стержня, находящихся под действием растяжения, изгиба и кручения (см. глава 3), в

слоистых стержнях возникают конфликтные ситуации в этих программах (Ansys, Nastran, и др.). Это связано с появлением коротких лепестков с различными физическими свойствами по длине стержня. Появляются конфликтные ситуации и в программах Ansys, Nastran, и др. с задачами склеивания этих лепестков по длине в слоистом стержне. Такую же задачу эти программы могут решать (Ansys, Nastran, и др.), если физические характеристики слоистого сечения стержня рассматривать анизотропными с эффективными параметрами по длине и по сечению (см. глава 4). В этом случае учет физической неоднородности и слоистости сечения, особенно, в части влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость при кручении и НДС слоистых стержней произвольного сечения не учитывается. Результаты определения таких параметров в последующем используются при расчете НДС многослойного стержня и слоистой компрессорной лопатки из КМ, которая находится в поле центробежных сил (см. главу 3). Также при определении свободного колебания аналогичных конструкций (см. глава 5.).

В связи с этим, для учета физической неоднородности и слоистости сечений, рассматриваемых конструкций при определении НДС, возникает необходимость для решения таких задач использование численных методов (МКЭ, МГЭ и др.). Поэтому в рассматриваемой главе для решения таких задач МКЭ, приведен алгоритм построения треугольник элементов по сечению слоистого стержня (см. п.2.1-2.3), который учитывает физическую неоднородность и слоистость сечения. Предлагаемый способ решения задачи о кручении многослойного анизотропного стержня произвольного сечения использует алгоритмический язык Фортран в качестве расчетного ядра для МКЭ. При этом, применяемый итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи (см. п.2.4). Необходимо отметить, что результаты решения таких задач в прикладных программах (Ansys, Nastran, и др.) потребует дополнительного подтверждения полученных решений.

2.1 Рациональные способы разбиения на треугольные элементы поперечного сечения слоистых анизотропных стержней

Для проведения конечно-элементного расчета НДС исследуемой области при кручении необходимо сначала разбить на конечные элементы с учетом физической неоднородности и слоистости сечения. Эта операция заключается в определении координат, связанная с физико-геометрическими характеристиками сечения. Способ введения такой системы координат обсужден в пункте 1.5 (подпункт 1.5.2.-1.5.3). Здесь необходимо отметить процесс построения начала и конца каждого слоя "спинки" (выпуклая сторона сечения) ("корытца") со старой линией "корытца" (вогнутая сторона сечения) ("спинки"), которые определяются независимо друг от друга. Такой порядок нумерации, во-первых, позволяет свести разность номеров узловых точек к минимуму [51]. Например, для эллипса и авиационного профиля, максимальное значение разности узловых номеров, среди 1300 и 1678 точек, было 4 и 6, а для ромба с 1260 точками составляло 2. Следовательно, при решении с использованием МКЭ задачи кручения, автоматически получается оптимальная ширина ленты матрицы жесткости системы. Координаты и номера построенных точек сохраняются в памяти ЭВМ и при необходимости можно получить их изображение с помощью отдельной процедуры. Более подробное описание алгоритма дано в приложение 1 [51].

В связи с широким внедрением МКЭ в исследованиях сложных объектов с различными физико-геометрическими характеристиками были созданы алгоритмы автоматического построения сетки конечных элементов [51], [76]-[85].

Характерной особенностью большинства алгоритмов является то, что при создании систем автоматического разбиения исследуемой области на конечные элементы решаются топологические задачи, в которых пытаются получить треугольные элементы максимально-приближенные к равносторонним [76], [80]-[85]. Номера узлов в автоматически генерируемой сетке присваиваются в порядке вычисления их координат. Получаемые при этом матрицы жесткости системы обычно имеют большую ширину ленты. В [86], [87] описана методика и предложены

алгоритмы уменьшения ширины ленты матрицы жесткости системы путем перенумерации узлов после формирования сетки конечных элементов для исследуемой области.

Однако, алгоритмам, приведенным в [77], [78], [81]-[85], присущи определенные недостатки. Так, например, алгоритмы, приведенные в [81], [86], [88] не позволяют учесть при дискретизации возможную физическую неоднородность составных областей. Разработанные в [80] алгоритмы не позволяют вычислять геометрические и физико-геометрические характеристики отдельного треугольного элемента и исследуемой области неоднородной структуры, что необходимо при исследовании слоистых тел, тел из КМ. Поэтому в п.1.5 предложена методика расчета координат внутренних слоев произвольного поперечного сечения стержня, с учетом физической неоднородности слоев и специальная нумерация узловых точек, позволяющая оптимизировать ширину ленты матрицы жесткости системы [51], [89],[136],[142], [144], [157].

Автоматическое построение сетки конечных элементов производится на основе известной информации о координатах и номерах точки каждого слоя "спинки" и "корытца" сечения. Так как расчет координат внутренних слоев сечения учитывает все физико-геометрические особенности области, дискретизация на конечные элементы производится по отдельным слоям отдельной области. Задаются по две точки из каждого прилежащего слоя и строится четырехугольник элемента. Сравнение длин диагоналей позволяет разделить четырехугольник на треугольные элементы максимально близкие к равносторонним. После этого задаются следующие точки этих слоев и повторяется вышеизложенный процесс пока не будут просмотрены все участки ломаной линии "спинки" ("корытца").

В процессе построения сетки конечных элементов, вычисляются физико-геометрические характеристики только что построенного треугольного элемента по формуле (1.5.13). Это позволяет вести поэлементный подсчет интегральных физико-геометрических характеристик каждого слоя и получить физико-геометрические значения физически неоднородных слоистых сечений.

Одним из трудоемких этапов реализации МКЭ, который все еще входит в

функцию расчетчика, является формирование конечно-элементной сетки или подготовка информации по области геометрии, а также ввод данных в ЭВМ, оценка точности МКЭ-решения, требующих больших затрат, причем как интеллектуальных, так и вычислительных. Считается, что затраты на подготовку конечно-элементной сетки и системы составляют половину времени конечно-элементного расчета [89]. Поэтому ниже предлагается методика автоматического формирования жесткости системы и ее решения (см. п. 2.2 - 2.3).

2.2 Матрица жесткости треугольного элемента многослойных анизотропных стержней

Конечно-элементное представление задачи о кручении неоднородных стержней, поперечное сечение которых составлено из отдельных слоев анизотропного материала, трудно отыскать в литературе [3].

В системе координат x, y, z (см. рисунок 1.5.5) соотношения между напряжениями σ_{kj}^i и деформациями ε_{kj}^i для слоя i определяются из формулы (1.3.4). Перемещения u^i, w^i, v^i точек i -го слоя определяются из равенств (1.5.23) и (1.6.16). Принятая форма перемещений говорит о том, что при переходе от слоя к слою перемещения u^i, v^i в плоскости сечения изменяются непрерывно. Непрерывность перемещения w^i из плоскости сечения при переходе от слоя к слою обеспечивается в последующем соответствующей линейной аппроксимацией функции кручения $\varphi^i(x, y)$ в треугольных элементах. Деформации $\varepsilon_{xz}^i, \varepsilon_{yz}^i$ i -го слоя определяются из соотношений (1.5.24).

В треугольном элементе с вершинами x_j, y_j ($j=r, s, t$) функции кручения $\varphi_j^i(x, y)$ в слое i определяются в виде скалярных функций координат [63],[69], [70]:

$$w_j^i / \tau = \varphi_j^i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \{x\}^T \cdot \{\alpha\} \quad (2.2.1)$$

Здесь $\{x\}^T$ - транспонированная матрица-столбец $\{x\}$, состоящая из элемен-

тов l, x, y ; τ - относительный угол закручивания на единицу длины стержня; $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Совокупность значений функции кручения в вершинах треугольного элемента e определяется как вектор $\{\delta^i\}_e = \{\varphi^i_r, \varphi^i_s, \varphi^i_t\}$.

Из (2.2.1) следует

$$\{\delta^i\}_e = A\{\alpha\}, \quad (2.2.2)$$

в котором матрица A определяется равенством

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x^r & y^r \\ 1 & x^s & y^s \\ 1 & x^t & y^t \end{pmatrix}.$$

Из (2.2.2) можно получить

$$\{\alpha\} = A^{-1}\{\delta^i\}_e, \quad (2.2.3)$$

где обратная матрица A^{-1} равна

$$A^{-1} = \frac{1}{2F} \begin{pmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

В (2.2.4) элементы матрицы A^{-1} определяются из соотношений

$$a_k = x_m y_n - x_n y_m, \quad b_k = y_m - y_n, \quad c_k = x_n - x_m, \quad (n, k, m = r, s, t), \quad (m \neq n \neq k),$$

F - площадь треугольного элемента e . В соответствии (2.2.1) и (2.2.3)

$$\varphi_j^i = \{x\}^T A^{-1} \{\delta^i\}_e \quad (2.2.5)$$

Производные функции (2.2.5) по x и y имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x} &= [0, 1, 0] \cdot A^{-1} = [b_r, b_s, b_t] / 2F, \\ \frac{\partial \varphi_j^i}{\partial y} &= [0, 1, 0] \cdot A^{-1} = [c_r, c_s, c_t] / 2F. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Вектор деформации

$$\{\varepsilon^i\}_e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz}^i \\ \varepsilon_{xz}^i \end{Bmatrix}$$

после подстановки в него (2.2.6), записывается в виде

$$\{\varepsilon^i\}_e = B\{\delta^i\}_e + \{Y\} \quad (2.2.7)$$

Вектор $\{Y\}$ определяется компонентами

$$\{Y\} = \frac{\tau}{2} \begin{Bmatrix} x \\ -y \end{Bmatrix},$$

а матрица B

$$B = \frac{\tau}{4F} \begin{pmatrix} b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{pmatrix}.$$

После подстановки в (1.3.4) деформаций (2.2.7), компоненты вектора напряжения определяется по формуле

$$\{\sigma^i\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i \end{Bmatrix} = D^i (B\{\delta^i\}_e + \{Y\}) + \beta^i T^i, \quad (2.2.8)$$

где D^i - матрица упругости элемента i -го слоя

$$D^i = \begin{pmatrix} c_{44}^i & 0 \\ 0 & c_{55}^i \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_{13}^i \end{Bmatrix}.$$

Исходя из граничных условий (1.6.1) предполагается, что в слоистом стержне качественная картина распределения напряжений не отличается от картины в случае однородного тела. Следовательно, из (2.2.8) определяются две компоненты касательных напряжений

$$\{\sigma^i\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_{23}^i \\ \sigma_{13}^i \end{Bmatrix}.$$

Интеграл энергии треугольного элемента e вычисляется по формуле

$$\Pi_e = \int \{\varepsilon^i\}_e^T \{\sigma^i\}_e de. \quad (2.2.10)$$

Подставив в (2.2.10) выражения (2.2.7), можно получить

$$\Pi_e = \int_e (\{\sigma^i\}_e^T B^T + \{Y\}^T) \beta^i T_e^i de + \int_e (\{\sigma^i\}_e^T B^T + \{Y\}^T) \{\sigma^i\}_e de.$$

Параметры $\{\sigma^i\}_e^T$ не зависят от внутренних координат точек треугольного элемента e и поэтому могут, вынесены за знак интеграла

$$\Pi_e = \{\sigma^i\}_e^T \int_e (B^T + \{Y\}^T) \{\sigma^i\}_e de + \int_e \{\varepsilon^i\}_e^T \beta^i T_e^i de. \quad (2.2.11)$$

Ввиду справедливости равенств

$$\{Y\}^T \{\sigma^i\}_e = \{\sigma^i\}_e^T \cdot \{Y\}$$

интеграл (2.2.11) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \{\sigma^i\}_e^T \int_e [B^T D^i B \{\sigma^i\}_e^T + B^T D^i \{Y\} + \{Y\}^T D^i B \{\sigma^i\}_e + \{Y\}^T D^i \{Y\}] de = \\ &= \{\sigma^i\}_e^T \int_e ([B^T D^i B \{\sigma^i\}_e + 2B^T D^i \{Y\} + B^T \beta^i T_e^i]) de + \\ &+ \int_e \{Y\}^T D^i \{Y\} de + \{Y\} B^T \beta^i T_e^i de. \end{aligned}$$

Минимум энергии достигается, если во всех треугольных элементах e , выполняется равенство

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \{\sigma^i\}_e^T} = 0,$$

т.е.

$$\int_e B^T D^i B \{\sigma^i\}_e de = -2 \int_e B^T D^i \{Y\} de - \int_e B^T \beta^i T_e^i de. \quad (2.2.12)$$

Учитывая выражения, зависящие от внутренних координат треугольного элемента e уравнения (2.2.12) приводятся к виду

$$B^T D^i B \{\sigma^i\}_e = -2 \frac{B^T D^i}{F} \{z\} - B^T \beta^i T_e^i, \quad (2.2.13)$$

где F - площадь треугольного элемента, а

$$\{z\} = \int_e \{Y\} de = \frac{\tau}{2} \begin{Bmatrix} S_y^i \\ -S_x^i \end{Bmatrix}.$$

S_x , S_y - статические моменты элемента относительно осей x и y .

Подстановка значений (2.2.5) в (1.6.12) позволяет определить жесткость на кручение треугольного элемента e слоя i в виде

$$C_e^i = \frac{2}{\tau^2} \{z\} D^i B \{\sigma^i\}_e + c_{55}^i J_x^i + c_{44}^i J_y^i - \beta_{13}^i S_x T_e^i, \quad (2.2.14)$$

где J_x , J_y - главные моменты инерции элемента e относительно осей x и y .

Равенство (2.2.13) в матричном выражении имеет вид [63]:

$$K_e^i W^i = F_e^i, \quad (2.2.15)$$

где $K_e^i = B^T D^i B$ - матрица жесткости элемента e

$$K_e^i = \frac{\tau^2}{16F} \begin{bmatrix} b_r^2 c_{44}^i + c_r^2 c_{55}^i & b_r b_s c_{44}^i + c_r c_s c_{55}^i & b_t b_r c_{44}^i + c_t c_r c_{55}^i \\ k_{12} & b_s^2 c_{44}^i + c_s^2 c_{55}^i & b_s b_t c_{44}^i + c_s c_t c_{55}^i \\ k_{13} & k_{23} & b_t^2 c_{44}^i + c_t^2 c_{55}^i \end{bmatrix}. \quad (2.2.16)$$

F_e^i - узловые силы элемента e

$$F_e^i = -\frac{\tau^2}{8F^2} \begin{bmatrix} c_{44}^i b_r S_y - c_{55}^i c_r S_x \\ c_{44}^i b_s S_y - c_{55}^i c_s S_x \\ c_{44}^i b_t S_y - c_{55}^i c_t S_x \end{bmatrix} - \frac{\tau^2 T_e^i}{4F} \cdot \begin{bmatrix} c_r \\ c_s \\ c_t \end{bmatrix} \cdot \beta_{13}^i. \quad (2.2.17)$$

2.3. Формирование матрицы жесткости системы в узловой точке и способ ее решения

Этап подготовительных работ при расчете МКЭ завершается формированием обобщенной матрицы жесткости всей системы конечных элементов или, что тоже самое, построением разрешающей системы алгебраических уравнений. В матричной форме система уравнений записывается в виде

$$\{F\} = \{K\} \{W\}. \quad (2.3.1)$$

Здесь $[K]$ - матрица жесткости системы (она имеет ленточную структуру), $\{W\}$, $\{F\}$ - совокупность узловых перемещений и сил для исследуемой области. Решением системы уравнений (2.2.1) определяются узловые перемещения $\{W\}$, далее по формулам (2.2.8) - напряжения в i -ом слое.

Однако, обзор работ посвященных применению МКЭ в различных отраслях техники, показывает [76], [74], [89], что количество рассматриваемых узловых точек в исследуемой области ограничены ($n < 1000$). Это связано с возможностями используемых ЭВМ. В случае, когда рассматривается НДС слоистых конструкции, количество узловых точек в конструкции из КМ, подлежащие к рассмотрению, могут расти без ограничения [63]. В связи с этим предлагается метод по-

строения матрицы жесткости системы в узловой точке j и использовать итерационный способ её решения.

Вначале поперечное сечение неоднородного слоистого анизотропного стержня представляется в виде совокупности слоев по описанной методике в 1.5. В окрестности каждой узловой точки j строятся совокупность N треугольных элементов. Построенный отдельный треугольный элемент принадлежит только одному слою. Элементы строятся вокруг узла j строго против движения часовой стрелки, перебирая самые ближайшие точки из его окрестности (рис.2.3.1).

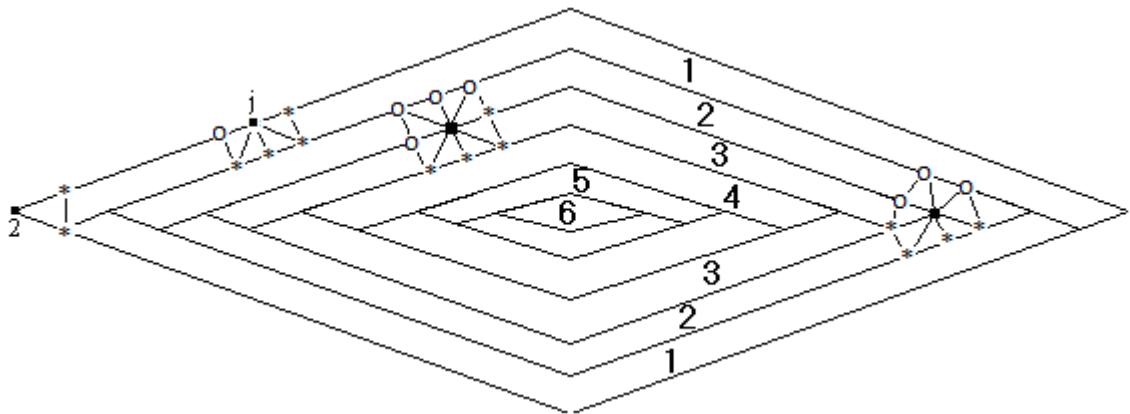


Рисунок 2.3.1 - Построение в узловой точке j (■) совокупность треугольных элементов. (○) – точки с известными значениями перемещений в $m-1$ итерации, (*) - точки в m -ой итерации

В каждом из построенных треугольных элементов устанавливается равенство (2.2.15). Для всех N окаймляющих узловую точку треугольных элементов на основе равенства (2.2.15) формируется уравнение относительно осевого перемещения узла j . В связи с нерегулярностью и слоистостью сечения стержня в окрестности рассматриваемой узловой точки можно построить до десяти треугольных элементов. Система уравнений равновесия для узловой точки j , аналогичная системе (2.3.1), получается стандартным образом:

$$\{F_j\} = [K] \{W_j\} \quad (2.3.2)$$

Здесь $[K]$ - матрица жесткости узловой точки j

$$K_j = \left[\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)} (k_{13}^{(1)} + k_{12}^{(2)}) (k_{13}^{(2)} + k_{12}^{(3)}) (k_{12}^{(1)} + k_{13}^{(N)}) \right], \quad (2.3.3)$$

а $\{F_j\}$, $\{W_j\}$ - совокупность узловых перемещений и сил для узла j :

$$W_j = \left\{ \begin{array}{c} \varphi_r^j \\ \varphi_s^{(1)} \\ \varphi_s^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_s^{(N)} \end{array} \right\}, F_j = \left\{ \sum_{n=1}^N f_r^{(n)} \right\}. \quad (2.3.4)$$

В соотношениях (2.3.3) и (2.3.4) N - означает количество построенных треугольников в окрестности узловой точки j , $\varphi_r^j = \varphi_j$ - функция кручения в точке j , а $\varphi_s^{(n)}$ ($n=1,2,\dots,N$) - функция кручения в вершине s треугольного элемента n . Параметры $k_{sm}^{(n)}$ ($s,m=1,2,3$) ($n=1,2, \dots, N$) определяются из соотношения (2.2.16), а параметры $f_m^{(n)}$ ($m=r,s,t$) - из (2.2.17).

Из соотношения (2.2.3) можно получить значение функции кручения в точке j по формуле

$$\varphi_j = \sum_{n=1}^N \frac{f_r^{(n)}}{k_{11}^{(n)}} - \frac{\sum_{n=1}^{N-1} (k_{13}^{(n)} + k_{12}^{(n+1)}) \varphi_s^{(n)}}{\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)}} - \frac{(k_{12}^{(1)} - k_{13}^{(N)}) \varphi_s^{(N)}}{\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)}}. \quad (2.3.5)$$

Решение задачи построено на применение итерационного метода Зейделя-Гаусса с неполной верхней релаксацией и точечной прогонкой [63]. В вершинах окаймляющих рассматриваемый узел j N треугольных элементов предполагаются известными значения функции кручения $\varphi(x,y)$ предыдущей $m-1$ итерации (на рис.2.3.1 обозначены знаком *) и значение $\varphi(x,y)$, полученные в текущей m -ой итерации (на рис. 2.3.1 обозначены знаком о). При этом в каждом узле решается уравнение

$$\varphi_j^m = \frac{F_j}{\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)}} - \frac{\sum_{n=1}^{N_o} k_n \{ \varphi_s^{(n)} \}^m}{\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)}} - \frac{\sum_{n=1}^{N_*} k_n \{ \varphi_s^{(n)} \}^{m-1}}{\sum_{n=1}^N k_{11}^{(n)}}, \quad (2.3.6)$$

где

$$F_j = \sum_{n=1}^N f_r^{(n)}, k_{N-1} = [k_{13}^{(n-1)} + k_{12}^{(n)}], k_N = [k_{13}^{(1)} + k_{12}^{(N)}], (n = 1,2,\dots,N).$$

Используя результат решения уравнения (2.3.6) и значения функции кручения в предыдущей $m-1$ итерации, приближенное решение в m -ой итерации строится по формуле

$$\varphi_j^m = \varphi_j^m + R(\varphi_j^m - \varphi_j^{m-1}), \quad (2.3.7)$$

где $R = 1 + r \left| \varphi_j^m - \varphi_j^{m-1} \right| / \left| \varphi_j^{m-1} \right|$, а r - коэффициент релаксации, выбираемый опытным путем [76]. Процесс итерации для всех узловых точек сечения продолжается до тех пор, пока отношение

$$\left| \varphi_j^m - \varphi_j^{m-1} \right| \leq \left| \varphi_j^{m-1} \right|$$

не станет меньше некоторой требуемой малой величины ε .

Напряжения (2.2.8) для узла j определяются как среднее значение напряжений в окаймляющих узел j N треугольных элементах. Жесткость C при кручении определяется, как суперпозиция жесткостей отдельных элементов и слоев составного стержня

$$C = \sum_{i=1}^{K_c} C_i = \sum_{i=1}^{K_c} C_i \sum_{j=1}^L C_i^j, \quad (2.3.8)$$

где K_c - количество слоев, L - количество треугольников в слое i .

В МКЭ предложенный метод построения матрицы жесткости системы в узловой точке j использует только оперативную память ЭВМ, тем самым позволяет увеличить количество рассматриваемых узловых точек (на ПЭВМ можно рассматривать до 15 000 узловых точек сечения), а способ решения уравнений (2.3.5) методом итерации позволит получить требуемую точность МКЭ-решения. С увеличением количества рассматриваемых слоев, то же самое, что и узловых точек, сходимость МКЭ-решения убыстряется (см. п. 2.4).

2.4 Численные решения МКЭ задачи о кручении слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Анализ результатов расчета

Как было установлено в 1.8 и 1.9, в литературе трудно найти решение задачи кручения для слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Поэтому

на основе соотношений (2.3.9), (2.3.13) - (2.3.15), (2.4.7), (2.4.8) впервые была составлена программа расчета НДС слоистого стержня произвольного сечения на алгоритмическом языке FORTRAN для ЭВМ и на ее основе исследовались распределения перемещений в сечениях и определены жесткости на кручение стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки. Блок-схема этой программы приведена на рисунке 2.4.1. Вычисленные значения перемещений прямоугольного сечения сравнены с их точными аналитическими значениями. Численные результаты жесткости на кручение прямоугольного и ромбовидного сечения сопоставлены с их аналитическими значениями.



Рисунок 2.4.1 - Блок-схема программы.

Даже на такой высокопроизводительной ЭВМ, как IBM PC для расчета одной итерации по составленной программе требуется большое количество вычислительного времени. Это связано с большим количеством рассматриваемых уз-

ловых точек. Поэтому, при расчетах использовалась технология временного прерывания счета в контрольных точках, суть которого в том, что в задаваемых точках программы все рабочие переменные записываются в отдельный файл. При продолжении счета после временного прерывания, все рабочие переменные программы считываются с файла и вычисления продолжают по программе. В начале счета рабочие переменные определяются по программе.

Таким образом, достигается значительная независимость программы от технических возможностей используемой ЭВМ, а вычисления могут продолжаться сколь угодно длительное время. Лишь параметры файла, на котором записываются рабочие переменные вычислительной программы определяются устройством носителей внешней памяти. При использовании описанной технологии временного прерывания счета допускается возможность корректирования программы в контрольных точках с целью получения полной выходной информации.

Расчеты были проведены для стержней прямоугольного и ромбовидного сечения из дюралюминия с модулем сдвига $G=28 \text{ ГПа}$, а - компрессорной лопатки из бораллюминия (табл.1.1.5 BAL [36]).

Рассматривался стержень прямоугольного сечения со стороной $a=120$ мм и толщиной $h=20$ мм, и ромб, диагонали которого равны $d_1=120$ мм, $d_2=20$ мм. Сечения компрессорной лопатки имеют следующие характеристики: $c_{max}=4.47$ мм, хорда $b=62$ мм, площадь сечения $F=187$ мм². Данные этой лопатки соответствуют второму сечению, показанному на рисунке 1.5.2 компрессорной лопатки.

На рисунке 2.4.2 приведены результаты расчетов жесткости C на кручение в виде зависимостей от числа итерации M . Жесткость на кручение лопаточного сечения быстрее приближается к точному значению C , чем жесткости на кручение стержней прямоугольного и ромбовидного сечения из-за особенностей угловых точек.

Здесь точные значения C для прямоугольного сечения определялись по формуле (1.7.2), а ромба [90]

$$C = C_{\text{ромб}} = 0.03515G(d_1d_2)^3 / \sqrt{d_1^2 + d_2^2}. \quad (2.4.3)$$

Жесткость на кручения сечения компрессорной лопатки оценивалась по формуле (2.2).

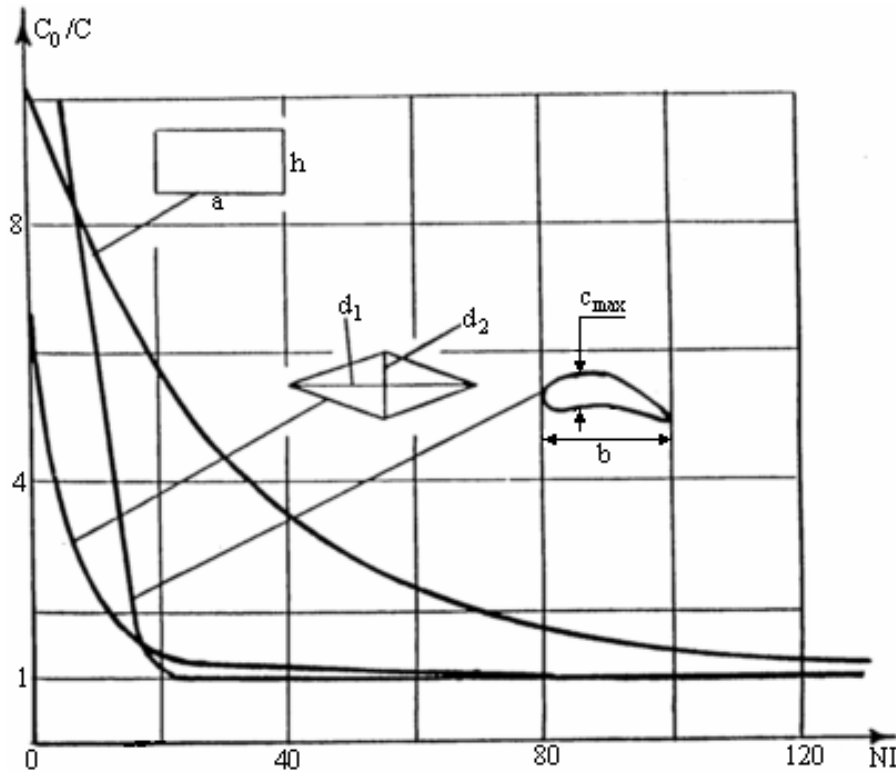


Рисунок 2.4.2 - Зависимость жесткости на кручение C от числа итерации NI .

На рисунке 2.4.3 приведены кривые зависимости отношения числа j не сходящихся перемещений сечения (W) к числу (k) рассматриваемых перемещений сечения от номера итерации NI . Видно, что перемещения в сечении ромба ($k=1360$) сходятся к истинному значению в два раза быстрее по сравнению с перемещением в сечении стержня прямоугольного вида ($k=1134$).

На рисунке 2.4.4 приведены кривые распределения перемещений по контуру сечения прямоугольного призматического стержня от номера итерации NI . Кривая отмеченная знаком (*) соответствует номеру итерации $NI=20$, (•) - $NI=50$, (— —) - $NI=140$. По мере увеличения количества итерации NI , вычисленные значения перемещений (W) стремятся к истинному полю перемещений (на рис. непрерывная линия) определенной по формуле (1.6.3), снизу. При итерации $NI=120$ отличие распределения перемещений (W) по сечению от точного решения составляет не более 3%.

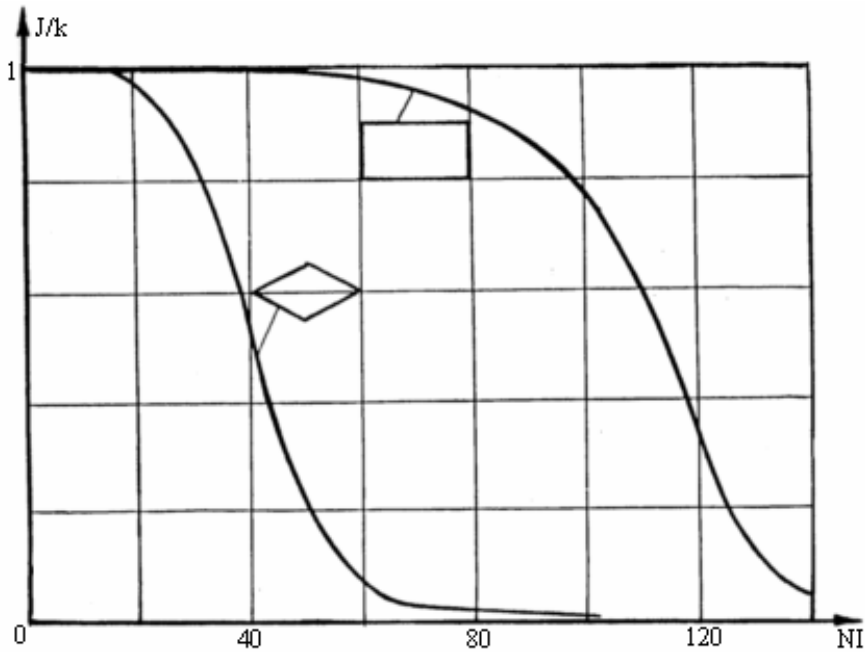


Рисунок 2.4.3 - Кривые зависимости отношения точек неудовлетворяющих условию $|\varphi_j^m - \varphi_j^{m-1}| \leq |\varphi_j^{m-1}|$ к общему числу точек k сечений от номера итерации NI .

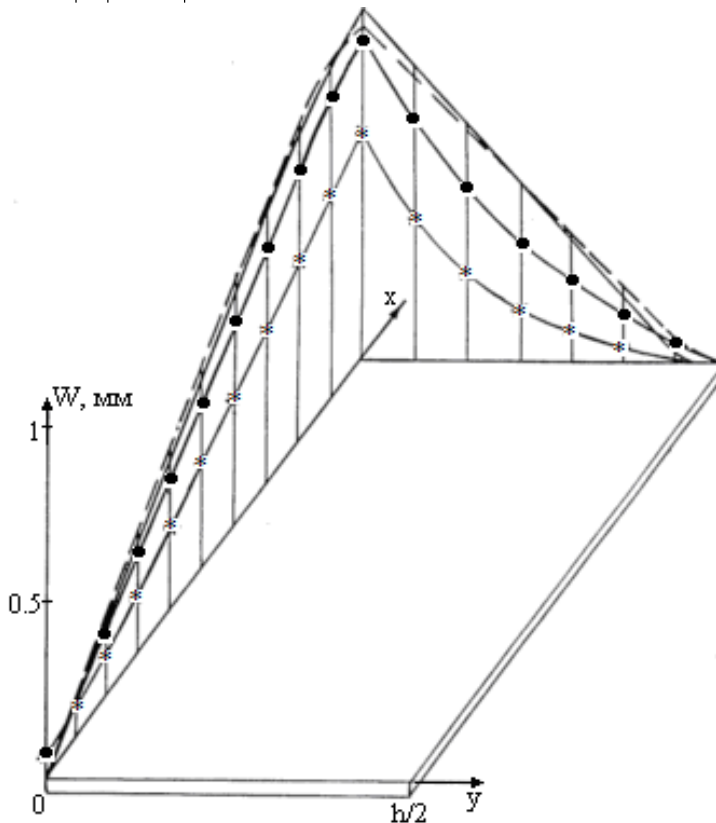


Рисунок 2.4.4 - Кривые распределения перемещений W по контуру сечения прямоугольного стержня от номера итерации NI . (*) - $NI=20$, (•) - $NI=50$, (---) - $NI=140$.

На рисунке 2.4.5 приведена поверхность распределения перемещений (W) в сечении ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня. При итерации $NI=60$

жесткость на кручение C ромба от его точного значения C (2.4.3) отличается не более чем на 3%. Поверхность распределения перемещений (W) в сечении ромбовидного стержня (см. рис. 2.4.5) находится в соответствии с его аналитическим решением [90]. Наибольшего значения перемещения (W) достигается ближе к средней части контура ромба (точка A , рис.2.4.5.).

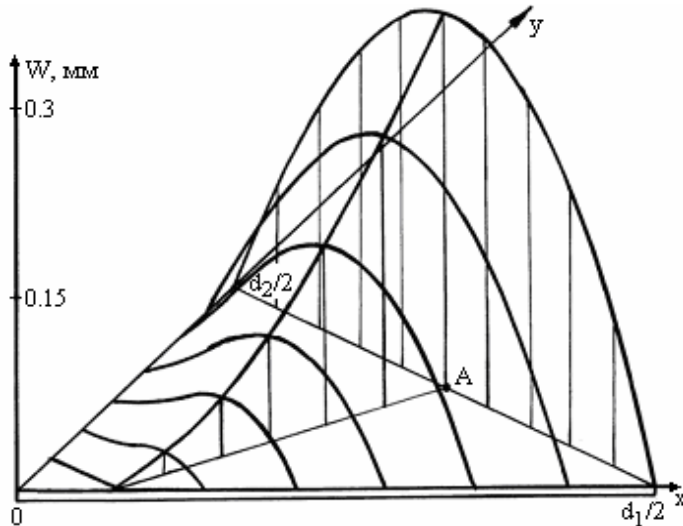
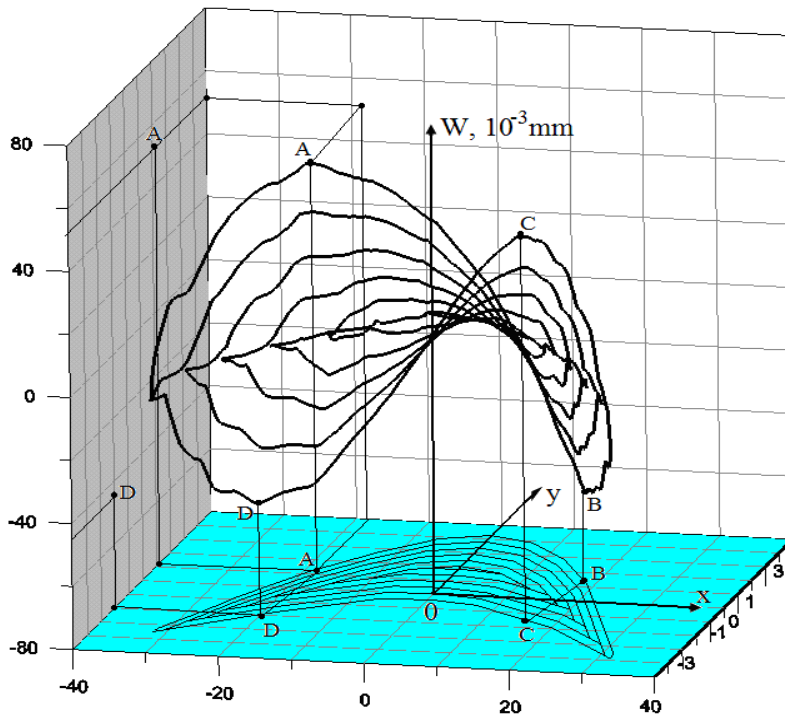


Рисунок 2.4.5 - Поверхность распределения перемещений W в сечении ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня. d_1, d_2 - диагонали ромба.

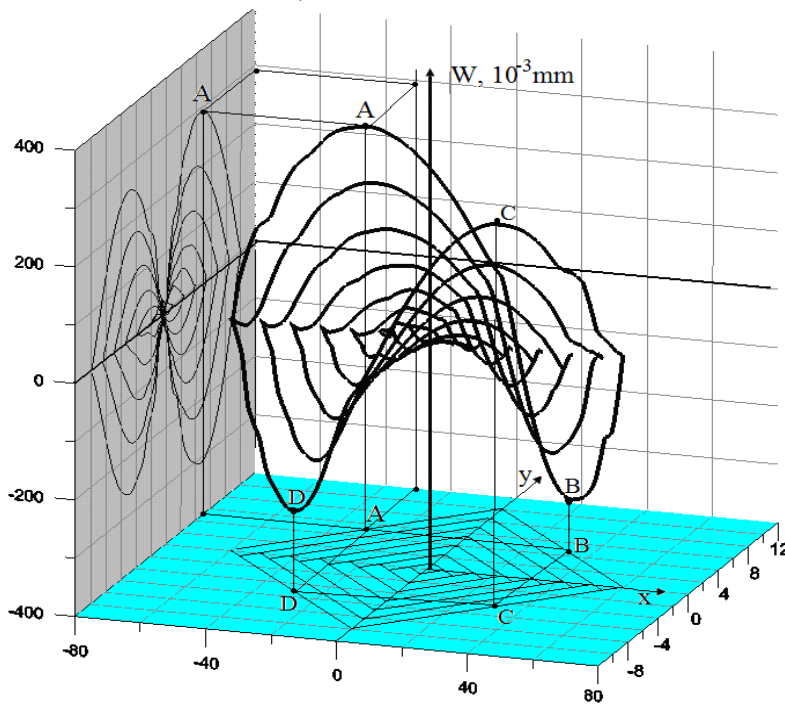
В связи симметрией распределения перемещений в вышеприведенных примерах рассматривались лишь четверть сечения прямоугольника и ромба.

На рисунке 2.4.6 приведена поверхность распределения перемещений (W) в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями алюминия и боралюминия [68]. Наибольшие перемещения для лопатки достигается у кромки спинки и корытца лопатки. В этом случае на спинке (у выходной кромки) лопатки происходит растягивающее, а на корытце (у выходной кромки) сжимающее перемещение.

На рисунке 2.4.7 приведены поверхности касательного напряжения σ_{yz} ромбовидного сечения стержня с чередующимися слоями алюминия и боралюминия [68]. При этом наибольшие касательные напряжения происходит у входной и выходной кромки лопатки (ромба, точка A). Касательные напряжения в тонких слоях кромки корытца (спинки) и ромба (точка A) может привести к местной потере устойчивости слоя с малыми свойствами на сдвиг.



а)

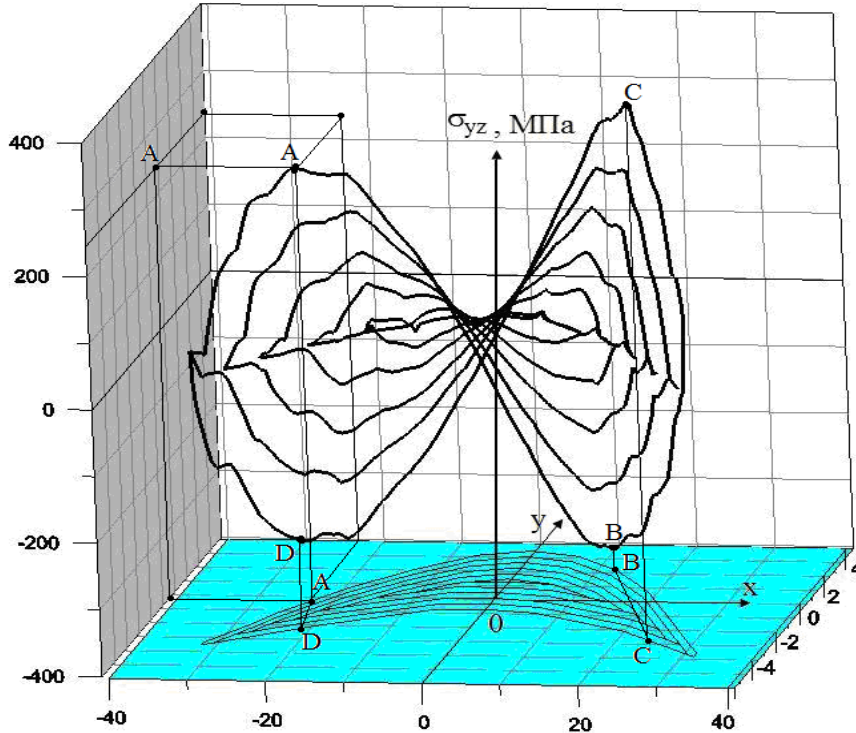


б)

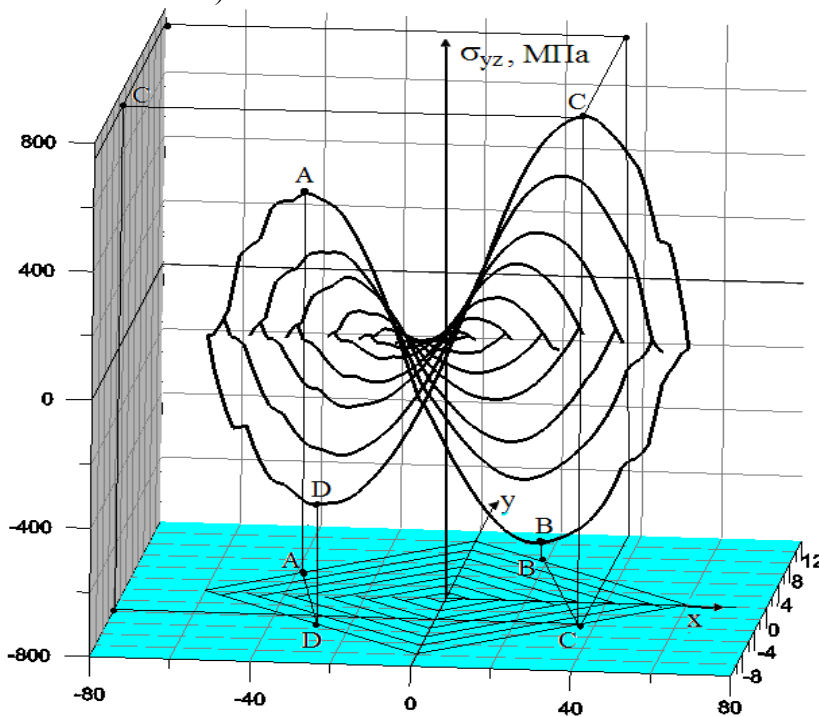
Рисунок 2.4.6 - Поверхность распределения перемещений W в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия и алюминия.

На рисунке 2.4.8. приведены поверхности распределения перемещений W в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия уложенных под углами $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$ и алюминия к оси стержня [68]. В этом случае происходит неравномерное рас-

пределение перемещении во внутренних слоях боралюминия армированных волокнами с различными углами армирования. Здесь наибольшее перемещение достигается в слоях кромки из боралюминия армированных волокнами под углами $+45^{\circ}$, -45° и ромба в точках (A, B, C, D) .

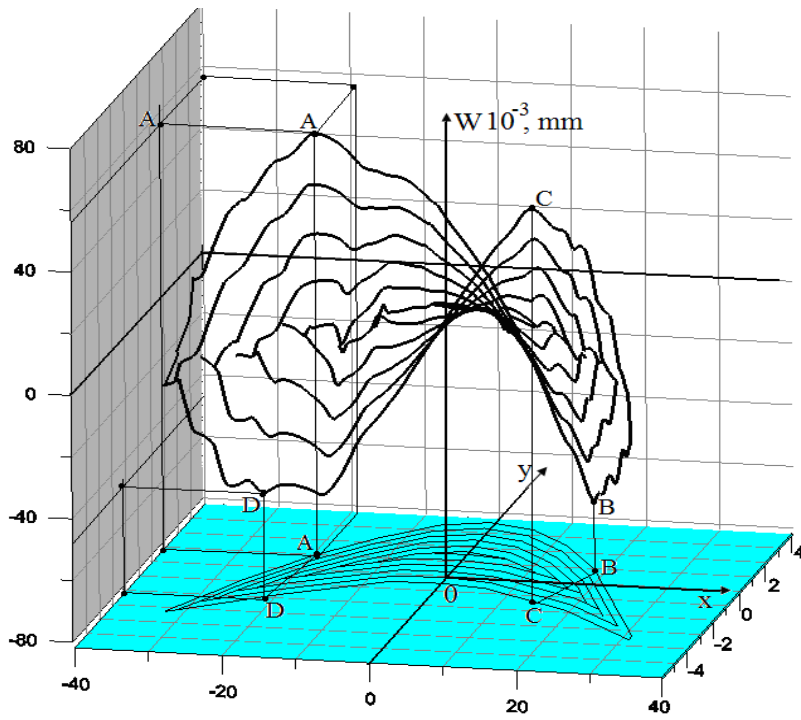


а)

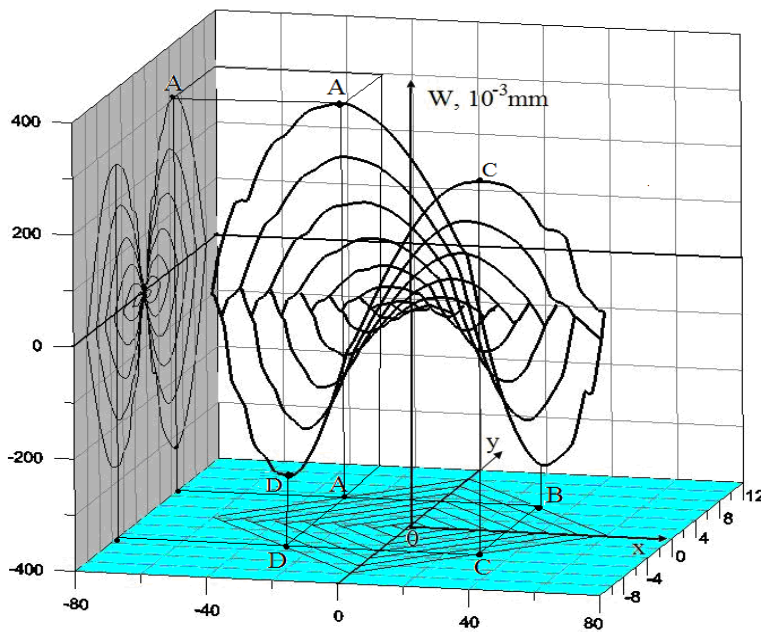


б)

Рисунок 2.4.7 - Поверхности касательного напряжения σ_{yz} ромбовидного сечения стержня с чередующимися слоями боралюминия и алюминия.



а)

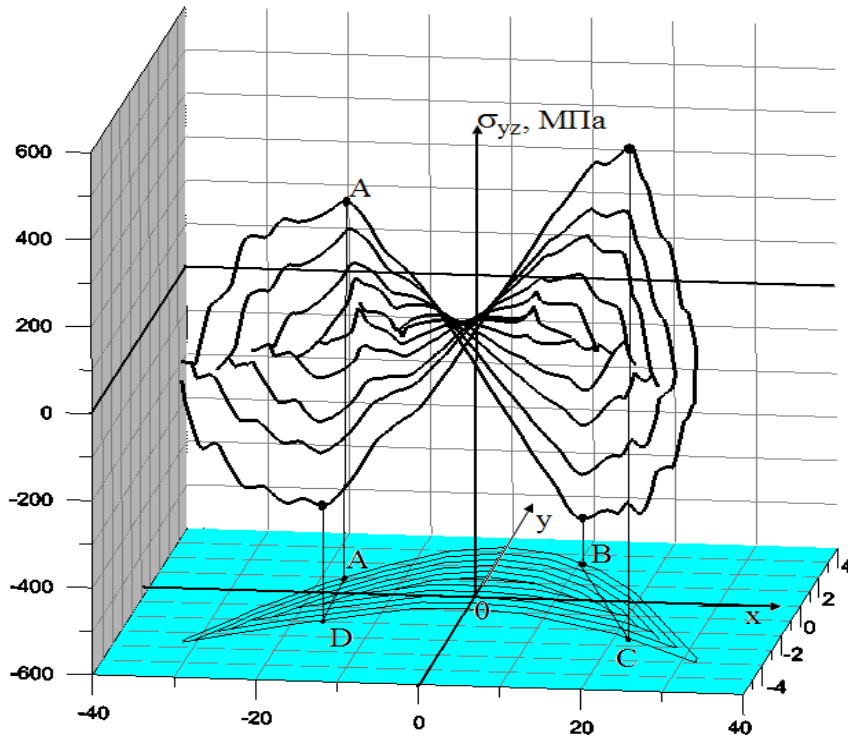


б)

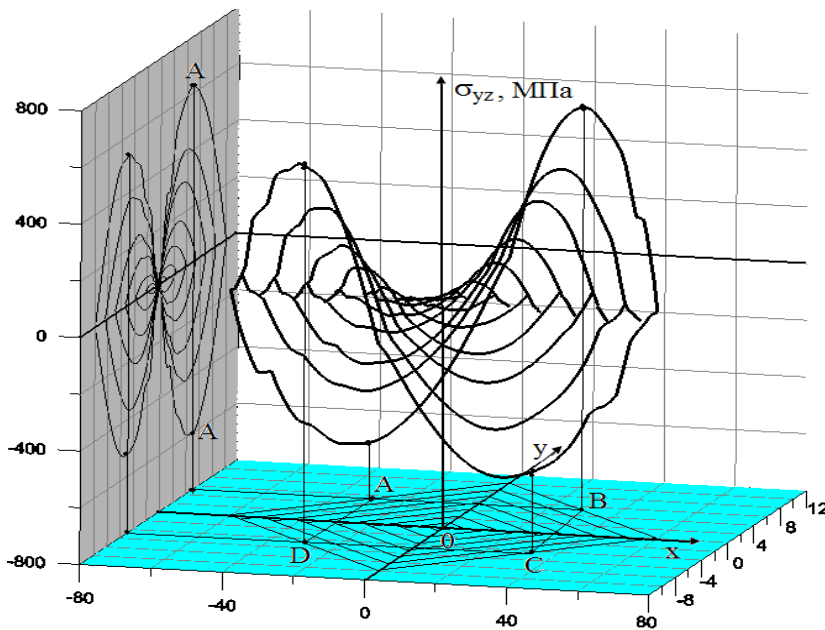
Рисунок 2.4.8. - Поверхность распределения перемещений W в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия уложенных под углами $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$ и алюминия.

На рисунке 2.4.9 приведены поверхности касательного напряжения σ_{yz} в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия, уложенными под углами $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$ и алюминия к оси стержня [68]. В этом случае происходит неравномерное распределение касательного напряжения σ_{yz} во внутренних слоях боралюминия арми-

рованных волокнами с различными углами армирования.



а)



б)

Рисунок 2.4.9 - Поверхность распределения касательных напряжений σ_{yz} в сечении а) лопатки б) ($NI=60$) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия уложенных под углами $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$ и алюминия.

Здесь наибольшее перемещение достигается в слоях кромки из боралюминия армированных волокнами под углами $+45^0$, -45^0 и ромба в точках (A, B, C, D) . В этом случае наибольшие касательные напряжения (точки A, B, C, D), по сравне-

нию с значениями распределения касательного напряжения в слоях составленного из чередующих слоев боралюминия и алюминия (рис. 2.4.7), достигает своего значения вдали от входной и выходной кромки. Таким образом, можно избежать от опасных касательных напряжений у входной и выходной кромки стержня с помощью армирования тонких слоев кромки волокнами под различными углами.

Проведем анализ результатов расчетов.

Таким образом, в этой главе с помощью МКЭ разработан алгоритм и реализована на алгоритмическом языке Фортран задача, позволяющая вычислить перемещения, деформации и напряжения, а так же жесткость на кручение многослойных композиционных стержней произвольного сечения при кручении.

В МКЭ предложенный метод построения матрицы жесткости системы в узловой точке j использует только оперативную память ЭВМ, тем самым позволяет увеличить количество рассматриваемых узловых точек (на ПЭВМ можно рассматривать до 15 000 узловых точек сечения), а способ решения уравнений (2.3.5) методом итерации позволит получить требуемую точность МКЭ-решения. С увеличением количества рассматриваемых слоев, то же самое, что и узловых точек, сходимость МКЭ-решения убыстряется

Впервые была составлена программа расчета НДС слоистого анизотропного стержня произвольного сечения на алгоритмическом языке FORTRAN для ЭВМ и на ее основе исследовались распределения перемещений в сечениях и определены жесткости на кручение стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки. Вычисленные значения перемещений прямоугольного сечения сравнены с их точными аналитическими значениями. Численные результаты жесткости на кручение прямоугольного и ромбовидного сечения сопоставлены с их аналитическими значениями. По мере увеличения количества итерации NI , вычисленные значения перемещений (W) стремятся к истинному полю перемещений, определенной по аналитической формуле (1.6.3), снизу. При итерации $NI=120$ отличие распределения перемещений (W) по сечению от точного значения составляет не более 3%.

Так же в качестве примера были проведены расчеты МКЭ для многослойных

стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки, составленных из различных композиционных материалов с различными углами армирования. При этом наибольшие касательные напряжения возникают у входной и выходной кромок лопатки (у ромба точка A). Касательные напряжения в тонких слоях кромки корытца (спинки) и ромба (точка A) может привести к местной потере устойчивости слоя с малыми свойствами на сдвиг.

Показано, что можно избавиться от опасных касательных напряжений около входной и выходной кромок стержня с помощью армирования тонких слоев кромок волокнами под различными углами.

Результаты представленной работы достаточно точно позволяют определять, взаимного влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость и напряженно-деформированное состояние при кручении слоистых стержней произвольного сечения.

Использованный итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи.

Расчетные значения жесткости на кручение используется в дальнейшем (глава V) при определении НДС естественно-закрученных слоистых стержней.

Разработанный комплекс программ заявлены в Федеральную службу по интеллектуальной собственности для государственной регистрации как «Программа для ЭВМ» на тему «Решения задачи кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов» (см. приложение 3), который позволяет регулировать уровни максимальных касательных напряжений в зависимости от механических свойств отдельных слоев и последующего рационального их расположения в теле многослойного анизотропного стержня.

МЕТОД РАСЧЕТА ЗАКРУЧЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ
КОМПОЗИЦИОННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ
КРУЧЕНИЯ, ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ

Прямые и криволинейные, закрученные и незакрученные стержни являются моделями несущие основную часть нагрузки конструктивных элементов в строительной механике, машиностроении и других отраслях техники. Например, закрученные стержни являются моделями рабочих лопаток турбомашин. В последние годы стержневые системы стали изготавливаться из КМ. Обнаружилось [91], что наименее развитая часть механики КМ касается методов расчета стержней.

Расчету закрученных стержней из изотропных однородных материалов посвящены многочисленные исследования. В работах [92], [93]-[95] впервые исследовалось явление раскрутки закрученного стержня при растяжении и изгибе. Наиболее подробно исследование НДС естественно-закрученных стержней из однородных материалов было проведено в [47], [49], [97], [92]-[95], [97]-[105], в которых дано объяснение взаимосвязанности всех видов нагрузок и деформаций с учетом естественной закрученности.

В [106] применительно к расчету статического напряженного состояния лопастей вертолетных винтов и ветроэнергетических установок предлагается вариант дискретно-континуального метода расчета упругих анизотропных цилиндрических стержней произвольного поперечного неоднородного сечения. Плотность потенциальной энергии деформируемой системы представляется рядом, первые члены которого соответствуют деформированию в рамках гипотез С.П. Тимошенко, а в остальных слагаемых используется конечно-элементная аппроксимация дифференциальных операторов, отражающих изменчивость напряженного состояния в плоскости поперечного сечения. Условие стационарности функционала Лагранжа приводит к матричному дифференциальному уравнению в направлении осевой координаты, интегрируемому при помощи матричной экспоненциальной

функции. Приводятся примеры численных расчетов стержней простого и комбинированного профилей, однородной и слоистой структуры, нагруженных перерезывающей силой и крутящим моментом на свободном торце. Результаты расчета тестовых задач хорошо согласуются с известными аналитическими решениями.

В [107] дан расчет криволинейных слоистых из бимодульных материалов МКЭ. Рассматривается два типа поперечных сечений: сплошное прямоугольное и круговое тонкостенное. Применен итерационный метод решения уравнений. Поле перемещений представлено в форме интерполяционных полиномов Эрмита первого порядка. Положение нейтрального слоя, которое переменено по длине балки, находится итерационным способом решения матрицы жесткости. Для этого составлены итерационные вычислительные программы для обоих типов сечений.

В работах [108]-[112] принят специальный вид выражений для нормальных и тангенциальных перемещений в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u(z) - y\tau(z), \\ \tilde{v} &= v(z) + x\tau(z), \\ \tilde{w} &= w(z) + x\alpha(z) + y\beta(z) + g(x, y)\lambda(z),\end{aligned}$$

и деформаций

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{zz} &= \tilde{w}_{,z} = w' + x\alpha' + y\beta' + g\lambda', \\ \tilde{\varepsilon}_{xz} &= \tilde{u}_{,z} + \tilde{w}_{,x} = u' + \alpha - y\theta' + g_{,x}\lambda \\ \tilde{\varepsilon}_{yz} &= \tilde{v}_{,z} + \tilde{w}_{,y} = v' + \beta + x\theta' + g_{,y}\lambda\end{aligned}$$

где u, v, w – перемещения; $\theta(z)$ – угол закручивания на единицу длины; $\alpha(z), \beta(z)$ – кривизны относительно оси x и y ; $g(x, y)$ – функция депланации; $\lambda(z)$ – кручение.

В [108] исследовались кручение и изгиб призматических балок произвольного поперечного сечения с учетом изменения формы поперечного сечения балки в процессе деформации. Принят специальный вид выражений для нормальных и тангенциальных перемещений, которые содержат семь неизвестных функций. Уравнения равновесия задачи выписаны с использованием вариационного метода. Проведен асимптотический анализ решения полученных уравнений.

В [111] рассматривается взаимодействие между растяжением и кручением в

брусе с начальной закруткой и слабо спиральной формой оси центров тяжести сечения. Исследование проводится на основе уравнений теории упругости, а анализ и выводы - на основе полученных общих решений. Оценки даны на примерах бруса эллиптического сечения с начальной закруткой и прямой осью центров тяжести.

В [112] рассматриваются задачи нелинейного поведения брусьев, поперечное сечение которых предварительно повернуто на некоторый угол к осевой линии, при совместном действии крутящего момента и растягивающего осевого усилия. В нелинейной постановке учитывается совместное действие изгиба с кручением и растяжением. Приводятся результаты проведенного эксперимента, которые удовлетворительно подтверждают решение нелинейных уравнений и сильно отличаются от соответствующих результатов линейной теории. Анализируется эффект нелинейности в рассматриваемой задаче.

В [113] на основе вариационного принципа Лагранжа получены уравнения, описывающие поведение призматических стержней с произвольным сечением, нагруженных осевыми силами, крутящим моментам, поперечными силами и изгибающими моментами, действующими в двух ортогональных плоскостях. Используются геометрически нелинейные (по Карману) соотношения, учитывающие деформации поперечного сдвига. Сечение наделяется семью степенями свободы - шесть из них соответствует закону плоских сечений, а одна учитывает депланацию. Получено семь уравнений равновесия относительно девяти обобщенных силовых факторов и соответствующие физические соотношения, которые записаны для случаев, когда сечение обладает симметрией и не учитывает деформации поперечного сдвига. В качестве примеров рассматриваются задачи о растяжении и кручении стержней.

В [114] излагается линейная теория для упругих балок с предварительной закруткой, испытывающих воздействие произвольных нагрузок. Распределение продольных деформаций принимается таким же, как для балок без закрутки. Оно выражается посредством использования функций искажения Сен-Венана и ее производных по длине балки. Данная работа содержит общую систему диффе-

ренциальных уравнений для поставленной задачи, приводятся результаты решения в явном виде для чистого растяжения, кручения и изгиба балок с предварительной закруткой. Излагаемая теория расчета указанных объектов позволяет также определять положение центра сдвига и оси предварительной закрутки. Приводятся результаты, полученные также и для случая комбинированной деформаций кручение-растяжение, которые хорошо согласуются с асимптотическими решениями соответствующей объемной задачи теории упругости независимо от пределов, излагаемых за счет пренебрежения деформациями поперечных сечений в своей плоскости. Параметры НДС при комбинированной деформаций кручение-растяжение представляются в виде нечетных функций степени закрутки балки. Общее решение комбинированной задачи представляет сумму двух членов, один из которых зависит от продольных деформаций, возникающих за счет предварительной закрутки в результате внутреннего стеснения при кручении балки. Второй член отражает влияние на НДС балки деформации в плоскости поперечного сечения, которыми обычно пренебрегают в технической теории балок. Устанавливается, что явная формула при комбинированной деформации кручение - растяжение предварительно-закрученных изотропных балок может быть выведена из полной системы дифференциальных уравнений объемной задачи теории упругости путем приравнивания работ внешних и внутренних сил и интегрирования по всему поперечному сечению балки.

В [115] на основе уравнений трехмерной линейной теории упругости исследуется задача о кручении прямого стержня. При этом исследуется два случая: кручение в рамках плоской и трехмерной задачи теории упругости. Последняя задача решается асимптотическим методом. Результирующее соотношение для крутящего момента и осевой силы содержит два слагаемых, первое из которых связано с искажением первоначально плоской формы поперечных сечений, а другое обусловлено локальными поворотами, возникающими при изгибе, когда упругий центр и ось предварительного закручивания не совпадают. Отмечается соответствие результатов данной работы результатом известных приближенных решений.

В работе [49] дан подробный обзор исследований, посвященных закручен-

ным изотропным стержням. Как видно из этой работы проблема составных закрученных стержней была рассмотрена только в работах [106], [107], [116], [117], решения в которых не были доведены до практического использования [49].

При применении КМ в закрученных стержнях появляется ряд дополнительных эффектов, связанных с возможностью варьирования типа и укладки арматуры в слоях, положения слоев относительно оси кручение, а также с малой межслоевой жесткостью на сдвиг и структурной несимметричностью сечения. Появляется возможность измерения обобщенных параметров систем дифференциальных уравнений [118], [161], [171] в рамках заданных условий нагрузки и геометрии стержня (см. п. 1.5).

В работах [106], [117] применительно к анизотропным средам получены общие результаты поведения стержней. При отсутствии связанности растяжения с изгибом и кручением в [106] предложено приближенное решение задачи о совместном изгибе и кручении анизотропной балки. Полученное решение использовано для экспериментального определения пяти коэффициентов податливости трансверсально-изотропной балки. Относительный вклад в общую энергию отдельных видов деформации оценивался в [9], [19]. Приведенные работы посвящены для тел с однородным сечением. Поэтому в 4.1 с помощью геометрических представлений [118], [97] для слоистых анизотропных стержней с прямолинейной осью получены кинематические соотношения, которые в последующем использовались для установления основных уравнений (см. п. 4.2, 4.3).

3.1 Геометрия и кинематические соотношения закрученных слоистых анизотропных стержней

Закрученными называются стержни, боковая поверхность которых образуется винтовым движением контура L плоского поперечного сечения относительно оси G . Такие стержни могут быть прямыми и кривыми, постоянного и переменного сечения. В данной работе рассматриваются прямые или слабо искривленные закрученные стержни, как имеющие наибольшее практическое применение. В рабо-

тах [47], [49], [91-95], [118] начальная закрученность называется естественной. Такое определение начальной закрученности вызвано функциональными требованиями к соответствующему конструктивному элементу. Например, закрученные элементы являются моделями лопаток газовых турбин, компрессоров и воздушных винтов. Поэтому закрученные стержни представляют собой тип стержней, требующих самостоятельного исследования.

1. Геометрия закрученного слоистого стержня. При рассмотрении закрученных стержней используются две основные системы координат: неподвижная (K_x) и местная (K_ξ) (рис.3.1.1). В качестве неподвижной принимается прямоугольная правая система $Oxyz$. Начало координат O расположено в центре масс начального сечения. При этом ось z направлена по длине стержня, ось x перпендикулярно направлению волокон, но в плоскости слоя, и ось y , перпендикулярно слою. Оси ξ , η неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ при движении вдоль оси поворачивается вместе с сечением, оставаясь главными центральными осями любого сечения. Ось ζ совпадает с осью z .

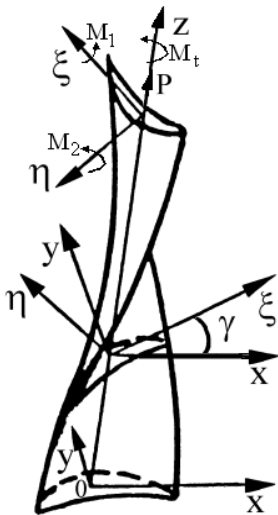


Рисунок 3.1.1 - Основные системы координат для закрученных стержней.

Угол $\alpha(z)$ есть начальный угол закрученности стержня, отсчитываемый между осями x и ξ против движения часовой стрелки. В этом случае неподвижная система (K_x) и связанная с текущим поперечным сечением (K_ξ) системы координат с помощью преобразования [118]

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Относительная закрученность стержня в текущем сечении $z=\zeta$ равна

$$\tau_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \quad (3.1.2)$$

Если стержень равномерно закручено, то $\tau_0 = \text{const}$. В этом случае

$$\alpha(z) = \alpha(0) + \tau_0 z; \quad \tau_0 = \frac{\alpha(\ell) - \alpha(0)}{\ell}, \quad (3.1.2)$$

где ℓ - длина стержня.

Произвольная точка A_0 в поперечном сечении z_0 находится на расстоянии

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (3.1.4)$$

от оси вращения стержня. Траектория перемещения точки A_0 при увеличении z образует винтовое волокно [50], [49], [97], [119]. На расстоянии z_* от сечения z_0 точка A_0 займет положение A . Длина винтовой дуги AA_0 равна

$$\ell \approx z_* (1 + \tau_0^2 r^2)^{0,5} \quad (3.1.5)$$

и она ортогональна плоскости поперечного сечения $z_0 + z_* = \text{const}$ (рис. 3.1.2).

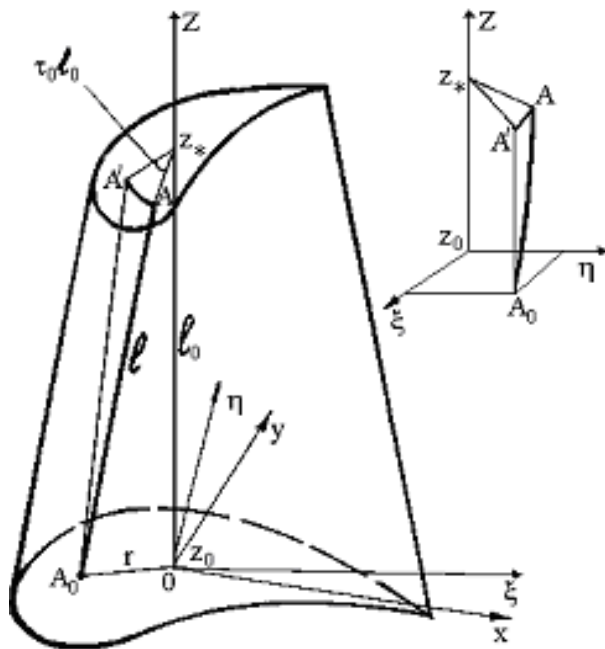


Рисунок 3.1.2 - Элемент закрученного стержня.

2. Центр кручения закрученного стержня. Пусть под действием крутящих моментов M_t точка A поворачивается на угол τ относительно центра кручения O_k [97]. Точка O_k удалена на расстояние r_k^0 под углом α_k^0 к оси ξ (см. рис.3.1.3), а точка A в результате кручения занимает положение точки C . Тогда $\sphericalangle AC = r_k \tau$ ($r_k = |O_k A| = |O_k C|$). В криволинейном треугольнике ABC

$$\sphericalangle AB = \sphericalangle AC \cdot \cos(\alpha_k - \alpha) = r_k \tau \cos(\alpha_k - \alpha), \quad \sphericalangle BC = \sphericalangle AC \cdot \sin(\alpha_k - \alpha) = r_k \tau \sin(\alpha_k - \alpha).$$

Здесь α_k, α - угол между радиусами векторов, исходящими из точек O_k и O . Опустив перпендикуляр из точек O_k на направление радиуса вектора OA легко получить $\sphericalangle OAO_k = \alpha_k - \alpha$ и поэтому

$$r_k \cos(\alpha_k - \alpha) = r - r_k^0 \cos(\alpha_k + \alpha), \quad r_k \sin(\alpha_k - \alpha) = r_k^0 \sin(\alpha_k + \alpha).$$

Следовательно, $\sphericalangle AB$ и $\sphericalangle BC$ выражаются через текущие координаты относительно основной системы координат и величины, характеризующие положение центра кручения определяется из соотношений (см. рис. 3.1.3)

$$\begin{aligned} \sphericalangle AB &= \tau(r - p_c); \quad BC = p_s \tau; \quad r = |OB| = |OA|; \quad p_c = r_k^0 \cos(\alpha_k^0 + \alpha); \\ p_s &= r_k^0 \sin(\alpha_k^0 + \alpha); \quad (p_c)^2 + (p_s)^2 = (r_k^0)^2; \quad |O_k N| = r - p_c \xi / r - p_s \eta / r. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

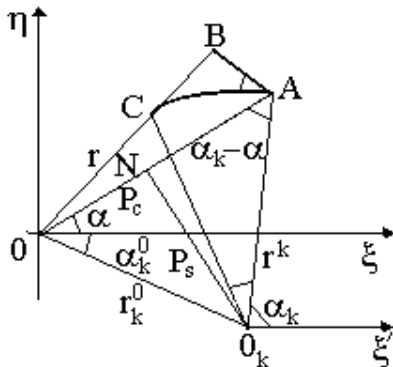


Рисунок 3.1.3 - Схема определения деформаций элемента при повороте сечений.

3. Кинематика естественно закрученного стержня.

3а. Удлинение винтового волокна, обусловленное кручением τ .

В результате начальной закрутки τ_0 и дополнительной закрутки деформации кручения τ длина ℓ отрезка $A_0 A$ станет $A_0 B$ (см. рис. 3.1.4)

$$\begin{aligned} \ell' &= \left\{ z^2 + z^2 [r\tau_0 + \tau(r - p_c)]^2 + z^2 \tau^2 p_s^2 \right\}^{0.5} = \\ &= \ell \cdot \left\{ 1 + \cos \beta [2r\tau_0(r - p_c)\tau + \tau^2(r^2 - 2rp_c + r_k^{02})] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

где p_c , r_k^0 определяются из (3.1.6), а $\beta = \arctg(\tau_0 r)$ угол наклона волокна по отношению к оси стержня.

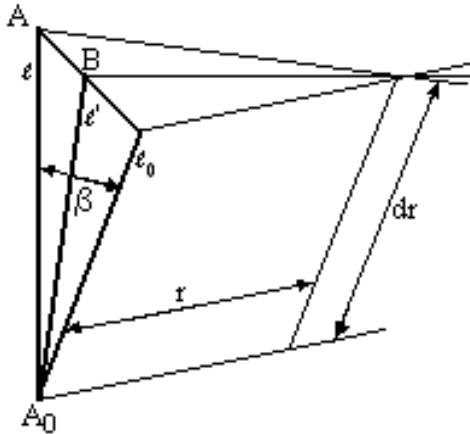


Рисунок 3.1.4 - Схема определения деформаций элемента при повороте сечений.

Следовательно, удлинение винтового волокна, обусловленное кручением τ , приближенно находится из выражения

$$\varepsilon_\tau = \frac{\ell - \ell'}{\ell} \approx \tau_0 \tau \cos \beta \left[rp + \frac{\tau \cos \beta}{2\tau_0} (r^2 + 2rp_c + r_k^{02} + \tau_0 r^2 \rho \cos \beta) \right], \quad (3.1.8)$$

где $p = r - p_c$. При вычислении ε_τ считались малыми члены, содержащие параметр τ в третьей и более высоких степенях. Если центр кручения совпадает с осью стержня ($r_k^0 = 0$, $p = r$) и при этом в выражении (3.1.8) сохранить первое слагаемое, то из него непосредственно следует соответствующее выражение работы [119].

3б. Удлинение винтового волокна, обусловленное растяжением и изгибом. Аналогично (3.1.7) вычисляется удлинение винтового волокна, обусловленное растяжением ε и изгибом χ_1 , χ_2 . При этом, деформации находятся из выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_\ell &= \varepsilon_{33}^0 \cos \beta (1 + 0.5r^2 \tau_0 \varepsilon_{33}^0 \cos \beta), \\ \varepsilon_{33}^0 &= \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Здесь ε относительное удлинение волокна за счёт растяжения, а χ_j ($j=1,2$) - изменение его кривизны. При малых деформациях выражения (3.1.9) совпадают с соотношениями работ [97].

Зв. Растяжение, изгиб и кручение винтового волокна. При сочетании растяжения, изгиба и кручения общая продольная деформация винтового волокна оценивается величиной [118]

$$\varepsilon^b = \varepsilon_\ell + \varepsilon_\tau, \quad (3.1.10)$$

проекция которой на оси неподвижной системы координат K_x равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^0 &= \varepsilon^b \cos \beta, & \varepsilon_{23}^0 &= \varepsilon^b \sin \beta \sin \alpha, \\ \varepsilon_{13}^0 &= \varepsilon^b \cos \alpha \sin \beta, & \alpha &= \tau_0 z, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

и определяют продольные и поперечные деформации стержня, обусловленные его начальной закрученностью.

В последующем исследовании кинематические соотношения для слоя i выбраны в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k3}^i &= \varepsilon_{k3}^{0i} + \varepsilon_{k3}^{ci} + \mathcal{E}_{k3}^i, \quad (k, j = 1, 2), \\ \varepsilon_{33}^i &= \varepsilon_i^b \cos \beta, & \varepsilon_{kj}^i &= \mathcal{E}_{kj}^i, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

в которой ε_{k3}^{ci} - соответствуют значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами Q_j [49]; величины \mathcal{E}_{k3}^i позволяют оценить влияние перемещений u_j^i в плоскости поперечного сечения на сдвиговые деформации и $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$ деформации элементов поперечного сечения. Таким образом, в развитие работ [42], [115], [121] деформации ε_{k3}^i определяются суперпозицией трех типов деформации $\varepsilon_{k3}^{0i}, \varepsilon_{k3}^{ci}$ и \mathcal{E}_{kj}^i .

3.2 Равновесие закрученных многослойных анизотропных стержней

Отдельные слои составного закрученного стержня могут иметь различную симметрию строения и поэтому физические соотношения (1.3.4) используются в

общей форме. При исследованиях равновесия стержней обычно применяют уравнения в интегральной форме (1.6.11), приводя напряжение в текущем сечении z_0 к статистически эквивалентной системе усилия P и моментов M_1, M_2, M_3 , приложенных к оси стержня [49], [97].

Величины P, M_1, M_2 определяются как равнодействующие сила и моменты в поперечном сечении от нормальных напряжений σ_{zz} в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i = & (c_{13}^i \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^i \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^i \mathcal{E}_{23}^i + c_{35}^i \mathcal{E}_{13}^i) + \\ & + (c_{33}^i \varepsilon_{33}^i + c_{13}^i \varepsilon_{13}^{0i}) + c_{35}^i \varepsilon_{13}^{ci} + \beta_{33}^i T^i, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где $\mathcal{E}_{kj}^i, \varepsilon_{33}^i, \varepsilon_{13}^{0i}, \varepsilon_{13}^{ci}$ берутся из зависимости (4.1.12), а статические соотношения имеют вид

$$P = \int_F \sigma_{zz}^i dF, M_1 = \int_F \sigma_{zz}^i \eta dF, M_2 = - \int_F \xi \sigma_{zz}^i dF. \quad (3.2.2)$$

При определении крутящего момента M_t необходимо учесть, что напряжения σ_{zz}^i , действующие вдоль винтовых волокон под углом $\beta = \tau_0 r$ к поперечному сечению, имеют проекцию на поперечное сечение $\sigma_{zz}^i r \tau_0$, которая вызывает дополнительный крутящий момент.

В связи с этим момент запишется

$$M_t = \int_F (\sigma_{yz}^i \xi - \sigma_{xz}^i \eta) dF + \tau_0 \int_F r p \sigma_{zz}^i dF, \quad p = r - p_c. \quad (3.2.3)$$

Если в уравнения (3.2.2), (3.2.3) подставить выражения (3.2.1), то легко получить разрешающую систему уравнений в виде

$$\bar{P} = (K + 0.5 \tau_0^2 L) \bar{\varepsilon} + \bar{q} + \bar{s} + \bar{\theta}, \quad (3.2.4)$$

в котором вектор обобщенных сил $P = \{P, M_2, M_1, M_t\}$ определяется через вектор обобщенных деформаций $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau\}$ и векторы $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$, устанавливающие влияние поперечных сил, напряжений в плоскости сечения и температуры. Компоненты матриц K, L и векторов $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$, приведены ниже –

$$k_{11} = \sum_{i=1}^N \int_{F_i} c_1^i \cos \beta dF_i; \quad k_{12} = - \sum_{i=1}^N \int_{F_i} \xi c_1^i \cos \beta dF_i;$$

$$\begin{aligned}
k_{13} &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{14} &= -\tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int rp \cos \beta dF_i; \\
k_{22} &= \sum_{i=1F_i}^N \int \xi^2 c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{24} &= -\tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int \xi r p c_1^i \cos \beta dF_i; \\
k_{34} &= \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int \eta r p c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{23} &= -\sum_{i=1F_i}^N \int \eta \xi p c_1^i \cos \beta dF_i; \\
k_{33} &= \sum_{i=1F_i}^N \int \eta^2 c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{44} &= \tau_0^2 \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 p^2 c_1^i \cos \beta dF_i + C_0;
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$k_{sj} = k_{js} \quad (j, s = \overline{1,4}).$$

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i r^2 \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; & l_{12} &= -\sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \rho \varepsilon_{33}^0 \tau^2 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{13} &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \eta r^2 \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; & l_{22} &= \sum_{i=1F_i}^N \int \xi^2 r^2 c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{24} &= -\frac{1}{\tau_0} \sum_{i=1F_i}^N \int \xi \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; & l_{34} &= \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{i=1F_i}^N \int \eta \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{14} &= \frac{1}{\tau_0^2} \sum_{i=1F_i}^N \int \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; & l_{13} &= \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 \eta c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{33} &= \sum_{i=1F_i}^N \int \eta^2 r^2 c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; & l_{23} &= -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \eta c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{44} &= \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{i=1F_i}^N \int p r \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; & l_{sj} &= l_{js} \quad (j, s = \overline{1,4});
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1F_i}^N \int \mathcal{D}_c^i dF_i; & S_2 &= -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \mathcal{D}_c^i dF_i; \\
S_3 &= \sum_{i=1F_i}^N \int \eta \mathcal{D}_c^{ii} dF_i; & S_4 &= \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r p \mathcal{D}_c^i dF_i.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned}
q_1 &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^{ci} dF_i; & q_2 &= -\sum_{i=1F_i}^N \int c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^{ci} \xi dF_i; \\
q_3 &= \sum_{i=1F_i}^N \int \eta c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^{ci} dF_i; & q_4 &= \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^{ci} dF_i.
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\omega_1 = \sum_{i=1F_i}^N \int \beta_{33}^i T^i dF_i; \quad \omega_2 = -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \beta_{33}^i T^i dF_i;$$

$$\omega_3 = \sum_{i=1}^N \int \eta \beta_{33}^i T^i dF_i; \quad \omega_4 = \tau_0 \sum_{i=1}^N \int r p \beta_{33}^i T^i dF_i. \quad (3.2.9)$$

где N количество слоев в сечении.

В равенствах (3.2.5)-(3.2.7) приняты дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} c_1^i &= c_{33}^i \cos \beta + c_{35}^i \cos \alpha \sin \beta; \\ \rho &= r^2 - 2rp_c + (r_k^0)^2 + \tau_0^2 r^2 p^2 \cos \beta; \\ \mathcal{E}_c &= c_{13}^i \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^i \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^i \mathcal{E}_{23}^i + c_{35}^i \mathcal{E}_{13}^i, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

а также C_0 - жесткость на кручение слоистого сечения, определенная по Сен-Венану (глава II)

$$C_0 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \int (\xi \sigma_{yz}^i - \eta \sigma_{xz}^i) dF_i. \quad (3.2.11)$$

Система уравнений (3.2.4) является нелинейной относительно компонент вектора обобщенных деформаций $\bar{\varepsilon} = \{ \varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau \}$.

Максимальная деформация поперечного сечения ε_{j3}^{ci} ($j=1,2$) может быть выражена через заданные поперечные силы Q_j [97] энергетическим методом (см. п. 1.2), и определяется из равенства, которые аналогичны следующим

$$\varepsilon_{j3}^{ci} = -Q_j \cdot N_j, \quad N_j = \frac{9}{4h^6} \int_{-0.5-h}^{0.5-h} [(h^2 - 4z^2)^2 / c_{kk}^i] dz, \quad (3.2.12)$$

$$(j=1, k=4), (j=2, k=5).$$

По найденным величинам ε_{j3}^{ci} вычисляются компоненты (3.2.5) вектора \bar{q} в слое i .

Влияние напряжений и деформаций, действующих в плоскости поперечного сечения, может быть установлено итерационными методами, предложенными в [97] и главе I, путем решений плоской задачи теории упругости.

Координаты центра кручения могут быть найдены из условий

$$K_{j4} = 0 \quad (j=2,3), \quad (3.2.13)$$

исключающих влияние кручения на деформации изгиба.

Центр изгиба (жесткости) точка, относительно которой момент касательных

сил при поперечном изгибе равен нулю (см. приложение 4) [125, 233]. Если равнодействующая внешних сил проходит через центр изгиба сечения, при деформации стержня оно не испытывает закрутки. Координаты (ξ_{uz}, η_{uz}) центра изгиба в системе главных осей сечения определяются по известным зависимостям [49, 125] (см. приложение 4):

$$\xi_{uz} = \frac{I_{\varphi\xi}}{I_{\xi}}, \quad \eta_{uz} = \frac{I_{\varphi\eta}}{I_{\eta}}, \quad I_{\varphi\xi} = \int_F \varphi\eta dF, \quad I_{\varphi\eta} = \int_F \varphi\xi dF,$$

Из условий (3.2.9) координаты центра кручения O_k относительно систем координат K_{ξ} вычисляются по формулам

$$\xi_k = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{F_i} r^2 \xi c_1^i dF_i}{\sum_{i=1}^N \left(\int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i + \int_{F_i} \xi \eta c_1^i dF_i / \int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i \right)},$$

$$\eta_k = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{F_i} r^2 \eta c_1^i dF_i}{\sum_{i=1}^N \left(\int_{F_i} \eta^2 c_1^i dF_i + \int_{F_i} \xi \eta c_1^i dF_i / \int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i \right)},$$
(3.2.14)

В работах [49], [92] [97], [98], [105], уравнения (3.2.1) используются в линеаризованной форме

$$\bar{P} = K\bar{\varepsilon} + \bar{\theta},$$
(3.2.15)

которая при необходимости может быть уточнена в соответствии с (3.2.1). Из (3.2.15) следует, что

$$\bar{\varepsilon} = K^{-1}(\bar{P} + \bar{\theta}),$$
(3.2.16)

которое используется для оценки деформированного состояние стержней, находящихся под воздействием усилия P , заданных моментов M_1, M_2, M_t и температуры. В дальнейшем с помощью соотношений (3.1.7), (3.1.12) и (1.3.4) вычисляются напряжения в каждом слое i в рамках предположений, принятых при получении уравнений (3.2.15).

Характерной особенностью приведенных уравнений, связанных со слоистой структурой стержней, является то, что параметры c_1^i меняются от слоя к слою и для вычисления параметров жесткости k_{mn} ($n, m=1, 4$) используются специально

созданные на основе соотношений (3.2.4) программы. Кроме того, из-за изменения ориентации слоя i относительно системы координат параметры упругости c_{mn}^i являются переменными. Следует отметить, что взаимосвязанность растяжения, изгиба и кручения являлось предметом многочисленных исследований [49], [92], [97], [108]-[110], [121]. Однако в основном они касались стержней из изотропных материалов. В стержнях из слоистых материалов эта взаимосвязанность проявляется в большой мере из-за возможной структурной несимметричности. Так, например, в незакрученном стержне ($\tau_0=0$) параметры жесткости k_{4j} ($j=1,2,3$) могут отличаться от нуля и в связи с этим появляется эффект кручения при простом растяжении или изгибе.

Применение точной теории естественно-закрученных стержней произвольного поперечного сечения на базе общих уравнений теории упругости связано с большими математическими трудностями и приводят к сложным решениям, и поэтому этот путь для разработки практических методов расчета не рационален.

В связи с этим, получена приближенная теория закрученных слоистых стержней произвольного сечения основана на определенных гипотезах, позволяющих разделить компоненты напряжений и деформаций на главные и второстепенные (см. п. 1.4), которыми в ряде уравнений пренебрегается. Достоверность приближенной теории закрученных слоистых стержней, проверяется сопоставлением с известными для некоторых частных простых случаев решениями [49], [97] (см. п. 4.3) и сравнением результатов расчетов с экспериментальными данными (см. п. 4.4).

3.3 Напряженно деформированное состояние закрученных анизотропных составных стержней произвольной конфигурации сечения

Основные положения линейной теории стержней применимы к стержням, у которых

$$\tau_0^2 r^2 \ll 1 \quad (3.3.1)$$

Допущение, что соответствующие точки различных сечений закрученного стержня располагаются на винтовых линиях A_0A (см. рис. 3.1.2), углы которых по отношению к оси стержня равна $\beta = \text{arctg}(\tau_0 r)$ и позволяет ограничиваться малыми углами наклона винтовых линий [49]

$$\beta^2 \ll 1. \quad (3.3.2)$$

Критерий (3.3.1) эквивалентен критерию (3.3.2), так как при малых углах наклона $\beta \approx \tau_0 r$.

Необходимо отметить, что понятие винтовой линии или волокна используется для наглядности при некоторых подходах к построению приближенной теории закрученных стержней, но не является необходимым при построении общей теории закрученных стержней.

Некоторые особенности поведения закрученных стержней зависят от абсолютного угла закрученности $\alpha(z)$ (от взаимного положения сечений), другие от степени закрутки τ_0 (от скорости изменения по длине взаимного положения сечений), а также от $\alpha(z)$ и τ_0 .

При условии (3.3.1) угол $\alpha = \tau_0 z$ будет малым, поэтому [49], [97]

$$\alpha^2 = (\tau_0 z)^2 \ll 1; \sin \alpha \approx \alpha; \cos \alpha \approx 1. \quad (3.3.3)$$

1. Слабо закрученные стержни (линейное по τ_0 приближение). Во многих исследованиях [48], [49], [92]-[95] естественно-закрученных стержней в качестве простейшего приближения принимается линейное по τ_0 приближение (3.2.15), когда во всех уравнениях сохраняются только члены, содержащие τ_0 в степени, не выше первой. В этом случае основные деформации в поперечном сечении ζ в соответствии с (4.1.12) описываются выражениями [155]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^i &= \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1 + \tau_0 r^2, \\ \varepsilon_{23}^i &= \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon^b - Q_2 \cdot N_2, \\ \varepsilon_{13}^i &= \tau_0 \cos \alpha \cdot \varepsilon^b - Q_1 N_1, \alpha = \tau_0 \zeta, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

в которых слагаемые $Q_j N_j (j=1,2)$ определяются из (3.2.12). С принятой точностью для напряжений в сечении ζ получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^i &= \varepsilon^b (c_{13}^i + c_{15}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{15}^i Q_1 N_1 + \beta_{11}^i T^i, \\
\sigma_{22}^i &= \varepsilon^b (c_{23}^i + c_{25}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{25}^i Q_1 N_1 + \beta_{22}^i T^i, \\
\sigma_{33}^i &= \varepsilon^b (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{35}^i Q_1 N_1 + \beta_{33}^i T^i, \\
\sigma_{23}^i &= \varepsilon^b \tau_0 c_{44}^i \sin \alpha - c_{44}^i Q_2 N_2, \\
\sigma_{13}^i &= \varepsilon^b (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{55}^i Q_1 N_1 + \beta_{13}^i T^i, \\
\sigma_{12}^i &= c_{44}^i \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon^b - c_{46}^i Q_2 N_2.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Из условий (3.3.1), (3.3.3) следует, что изменение основных напряжений из (3.3.5) по длине стержня имеет порядок τ_0 . В этом случае компоненты матрицы K (3.2.5) принимают вид [155]

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i dF_i; \quad k_{12} = -\sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \xi dF_i; \quad k_{13} = \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \eta dF_i; \\
k_{14} &= \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r p - c_{33}^i dF_i + \tau_0^2 \sum_{i=1F_i}^N \int c_{35}^i r p \cos \alpha dF_i; \quad k_{22} = \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \xi^2 dF_i; \\
k_{23} &= -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \eta c_1^i dF_i; \quad k_{24} = -\tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r \xi p c_{33}^i dF_i - \tau_0^2 \sum_{i=1F_i}^N \int \xi r c_{35}^i p \cos \alpha dF_i; \\
k_{34} &= \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r \eta p c_{33}^i dF_i + \tau_0^2 \sum_{i=1F_i}^N \int r p \eta c_{35}^i \cos \alpha dF_i; \quad k_{33} = \sum_{i=1F_i}^N \int \eta^2 c_1^i dF_i; \\
k_{44} &= \tau_0^2 \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 p^2 c_{33}^i dF_i + \tau_0^3 \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 p^2 c_{35}^i \cos \alpha dF_i + C_0; \quad k_{si} = k_{js} (j, s = \overline{1,4}).
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

где C_0 - жесткость на кручение (3.2.11), а также

$$c_1^i = c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha. \tag{3.3.7}$$

Если стержень состоит из однородного изотропного материала и при этом в (3.3.6) сохранить члены, содержащие τ_0 в первой степени, то можно получить формулы работы [49], [92], [93].

2. Умеренно закрученные стержни (нелинейное по τ_0 приближение). Полученные линейные относительно начальной закрученности соотношения из (3.3.6) не отражают такие общеизвестные факты, как зависимость жесткости стержня при растяжении, изгибе и кручении от предварительной закрученности [49], [97], [119]. Этот недостаток связан с формальным пренебрежением членами

порядка τ_0^2 независимо от величины других членов. В формулах интегрального характера (3.2.2), (3.2.3) роль отдельных членов дополнительно зависит от характера распределения напряжений σ_{zz}^i по сечению. В связи с этим при интегрировании по сечению слоистого стержня выражения (3.2.6) следует рассматривать при сохранении всех членов, в том числе, имеющие множитель τ_0^2 . При этом три выражения систем (3.2.2) для P , M_1 , M_2 изменяются незначительно, а выражение (3.2.3) зависит от члена с множителем τ_0^2 , так как с увеличением закрученности повышается жесткость на кручение C_0 по Сен-Венану.

Если стержень состоит из однородного изотропного материала и сохранить в (3.3.6) члены, содержащие τ_0 во второй степени, то в этом случае получаются формулы технической теории закрученных стержней [49] и формулы работ [39], [99]-[104], [115]. Это позволяет рассматривать формулы (3.2.4), (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) как основные соотношения приближенной теории закрученных анизотропных слоистых стержней произвольного сечения.

3.4 Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими расчетами кручения, изгиба и растяжения естественно-закрученных стержней

1. Растяжение естественно-закрученных изотропных стержней прямоугольного сечения. Для проверок достоверности основных соотношений технической теории закрученных изотропных стержней, в работе [102] проведен эксперимент на растяжение закрученных образцов прямоугольного сечения из листового дуралюминия Д16АТ, отличающихся шириной a и толщиной h . При действии только растягивающего усилия P зависимость $\tau=f(P)$ представлена в виде [102]

$$\tau = \tau_0 K_\theta P_\theta \quad (3.4.1)$$

где введены безразмерные параметры

$$K_\theta = (1 + P_\theta + \beta_r^2)^{-1}; P_\theta = \frac{J_\theta}{G \cdot J_j^0} \cdot \frac{P}{F}; \beta_r^2 = \frac{1+\nu}{30} \left(\tau_0 \frac{a^2}{h} \right)^2. \quad (3.4.2)$$

В (3.4.2) принято обозначения

$$J^0_j = \int_F (r^2 + \varphi'_{\psi}) dF; J_P = \int_F r dF; r^2 = x^2 + y^2.$$

Здесь $\varphi'_{\psi}(x, y)$ устанавливается с помощью определения свойств главного сечения стержня, где F - площадь, ν - коэффициент Пуассона, а G - модуль сдвига материала сечения.

Линейной теории соответствует значение $K_{\theta 1}=1$, технической теории стержня соответствует значение $K_{\theta 3}=(1-\beta_{r1}^2)^{-1}$, где

$$\beta_{r1}^2 = 2(1+\nu) \frac{\tau_0^2}{J_j^0} (J_r - J_P / F + J_{xr}^2 - J_{yr}^2 / J_y^2),$$

$$J_r = \int_F r^4 dF; J_{xr} = \int_F yr^2 dF; J_{yr} = \int_F xrdF; \quad (3.4.3)$$

$$J_x = \int_F y^2 dF, J_y = \int_F x^2 dF.$$

Нелинейной задаче соответствует значение K_{θ} из (3.4.2). Расчетные кривые для различных τ_0 при указанных значениях коэффициента K_{θ} приведены на рис. 3.4.1, знаком (о) указаны экспериментальные результаты.

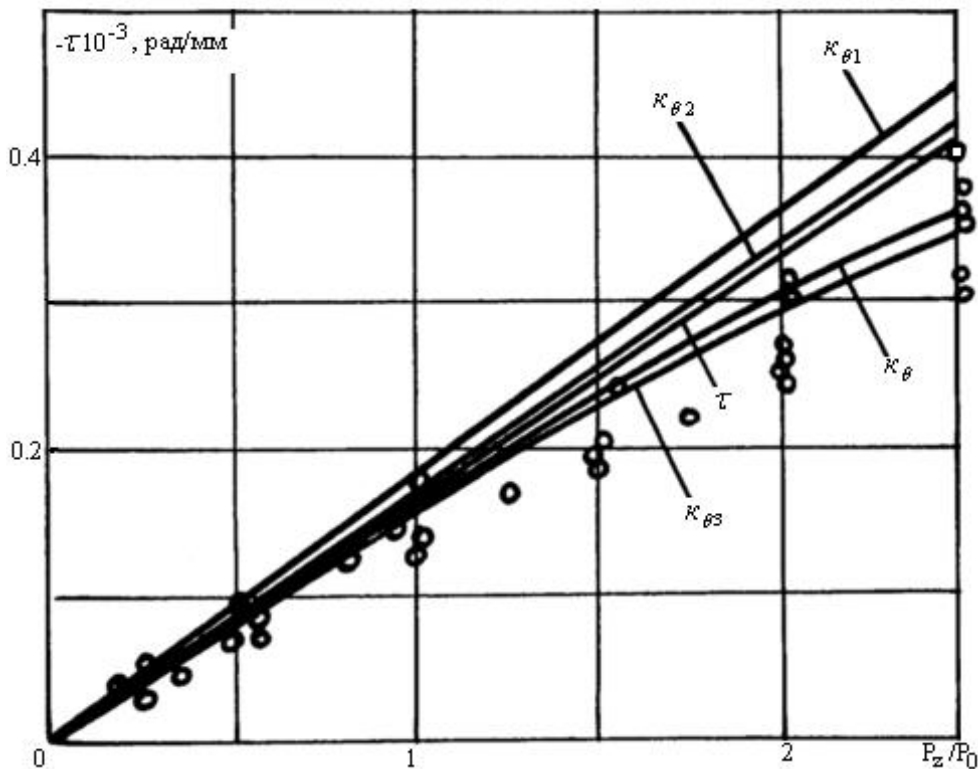


Рисунок 3.4.1а - Сравнение расчетных углов упругой раскрутки ($\tau, K_{\theta}, K_{\theta 1}, K_{\theta 2}, K_{\theta 3}$) закрученных образцов прямоугольного сечения с экспериментальными (о) значениями. $a=30$ мм., $h=1.45$ мм. $\tau_0=0.00197$ рад./мм.

Видно хорошее соответствие результатов расчета по соотношениям (3.2.15) в широком диапазоне изменения упругой раскрутки τ . В работе [97] формула (3.4.1) представлена в качестве руководства при расчете на прочность рабочих лопаток ГТД.

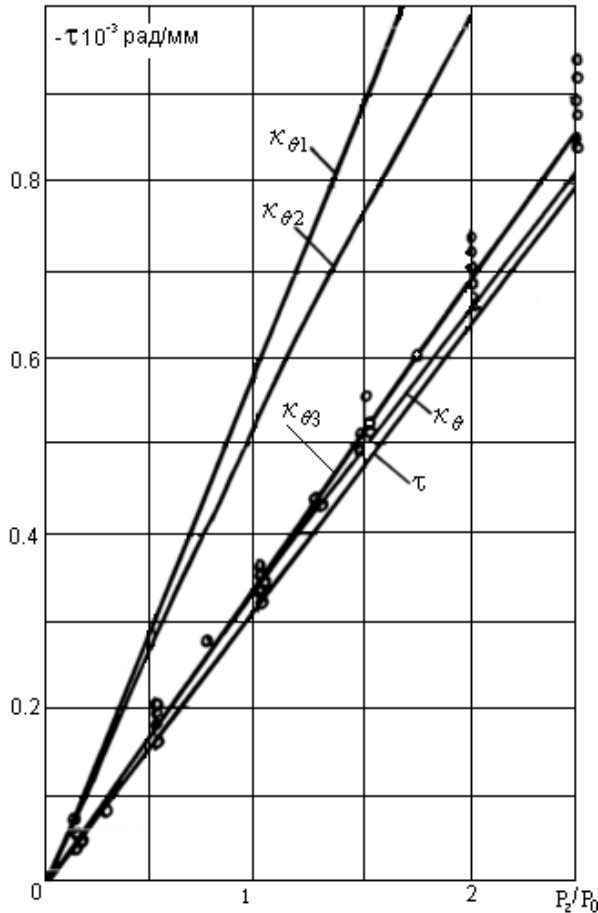


Рисунок 3.4.1б - Сравнение расчетных углов упругой раскрутки ($\tau, \kappa_{\theta}, \kappa_{\theta 1}, \kappa_{\theta 2}, \kappa_{\theta 3}$) закрученных образцов прямоугольного сечения с экспериментальными (о) значениями. $a=30$ мм., $h=1.45$ мм. $\tau_0=0.00648$ рад./мм.

2. Растяжение, изгиб и кручение закрученных слоистых стержней прямоугольного сечения, составленных из ортотропных материалов. Для стержней прямоугольного сечения, имеющего две оси симметрии,

$$k_{12} = k_{23} = k_{21} = k_{32} = k_{24} = k_{42} = 0 \quad (3.4.4)$$

и система уравнений (3.2.15) принимает вид

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ k_{13} & 0 & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & 0 & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_2 \\ \chi_1 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_2 \\ M_t \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} k_{11}k_{13}k_{14} \\ k_{13}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_1 \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ M_1 \\ M_t \end{bmatrix} \text{ и } \chi_2 = M_2 / k_{22}. \quad (3.4.5)$$

Разрешив уравнения (3.4.5) относительно деформации, можно получить

$$\varepsilon = \Delta_1 / \Delta, \chi_1 = \Delta_2 / \Delta, \tau = \Delta_3 / \Delta, \quad (3.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(k_{33}k_{44} - k_{34}^2) + M_1(k_{34}k_{14} - k_{13}k_{44}) + M_t(k_{13}k_{34} - k_{14}k_{33}), \\ \Delta_2 &= P(k_{14}k_{34} - k_{13}k_{44}) + M_1(k_{11}k_{44} - k_{14}^2) + M_t(k_{13}k_{14} - k_{11}k_{34}), \\ \Delta_3 &= P(k_{13}k_{34} - k_{14}k_{33}) + M_1(k_{13}k_{14} - k_{11}k_{34}) + M_t(k_{11}k_{33} - k_{13}^2), \\ \Delta &= k_{11}k_{33} - k_{44} + 2k_{13}k_{14}k_{34} - k_{14}^2k_{33} - k_{13}^2k_{44} - k_{34}^2k_{11}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Если выразить геометрические характеристики слоистого стержня прямоугольного сечения, через толщину слоя $h_i = b_i - b_{i-1}$ ($i = \overline{1, N}$) и ширину a , то компоненты k_{mn} (3.3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{i=1}^N c_1^i a h_i; \quad k_{13} = \sum_{i=1}^N c_1^i \frac{a}{2} h_i (b_i + b_{i-1}); \quad k_{22} = \sum_{i=1}^N c_1^i \frac{a^3}{12} h_i; \quad k_{33} = \sum_{i=1}^N c_1^i \frac{a}{3} (b_i^3 - b_{i-1}^3); \\ k_{14} &= \tau_0 \sum_{i=1}^N c_{33}^i \frac{a}{12} h_i [a^2 + 4(b_i^2 + b_i b_{i-1} + b_{i-1}^2)] + \\ &+ \tau_0^2 \sum_{i=1}^N c_{35}^i \cos \alpha \frac{a}{12} h_i [a^2 + 4(b_i^2 + b_i b_{i-1} + b_{i-1}^2)]; \\ k_{34} &= \tau_0 \sum_{i=1}^N c_1^i \frac{a^3}{12} h_i (b_i - b_{i-1}) [a^2 - 6(b_i^2 - b_{i-1}^2)] + \\ &+ \tau_0^2 \cos \alpha \sum_{i=1}^N c_{35}^i \frac{a}{24} h_i (b_i + b_{i-1}) [a^2 - 6(b_i^2 + b_{i-1}^2)]; \\ k_{44} &= C_0 + \frac{\tau_0^2}{90} \sum_{i=1}^N c_{33}^i a [a^4 h_i + 18(b_i^3 + b_{i-1}^3)], \quad k_{13} = k_{31}, \quad k_{14} = k_{41}, \quad k_{34} = k_{43}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

где c_1^i определяется из (3.3.7), а C_0 - из соотношений (3.2.11).

Если стержень находится только под действием растягивающей силы P ($M_1 = M_2 = M_t = 0$), то выражение (3.4.5) записывается в виде

$$\varepsilon / P = \Delta_1 / \Delta, \chi_1 / P = \Delta_2 / \Delta, \tau / P = \Delta_3 / \Delta, \quad (3.4.9)$$

где $\Delta_1 = k_{33}k_{44} - k_{34}^2$, $\Delta_2 = k_{14}k_{34} - k_{13}k_{44}$, $\Delta_3 = k_{13}k_{34} - k_{14}k_{33}$, а Δ определяется из (3.4.7).

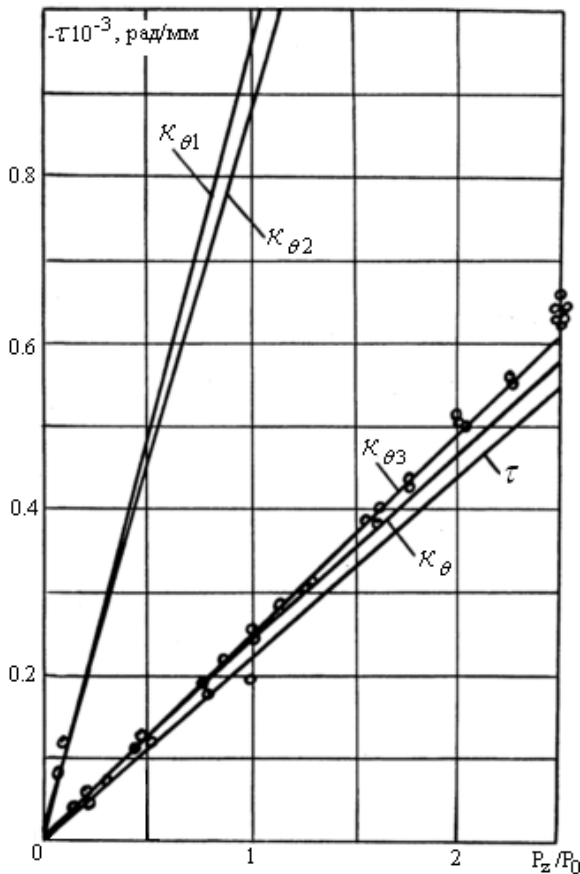


Рисунок 3.4.1с - Сравнение расчетных углов упругой раскрутки ($\tau, \kappa_{\theta}, \kappa_{\theta 1}, \kappa_{\theta 2}, \kappa_{\theta 3}$) закрученных образцов прямоугольного сечения с экспериментальными (o) значениями. $a=30$ мм., $h=1.45$ мм. $\tau_0=0.013$ рад./мм.

Л.А.Горшковым проведена серия экспериментов над закрученными образцами прямоугольного сечения из стеклопластика и углепластика с различными вариантами укладки слоев. Образцы шириной 40 мм, длиной 100 мм и углом закрутки 30° при различных толщинах подвергали растяжению. Варьируя толщину образцов, была получена экспериментальная зависимость угла упругой раскрутки от толщины h (рисунок 3.4.2). В связи с близостью значений углов раскрутки различных образцов на рисунке 3.4.2 приведена экспериментальная кривая только для стеклоткани, с расположенной основой вдоль оси образца. На этом же рисунке приведена теоретическая кривая, рассчитанная по формуле (3.4.9). Упругие константы стеклоткани и стеклопластика ТЖС-0.7 [32] близки и поэтому справедливо утверждение, что экспериментальные точки ложатся довольно близко к

расчетным кривым.

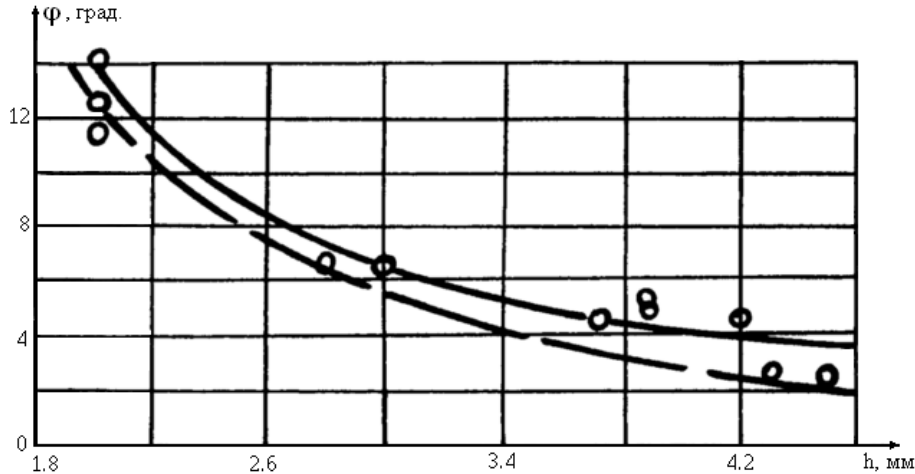


Рисунок 3.4.2 - Сравнение расчетных (пунктирная линия) значений угла упругой раскрутки закрученных образцов прямоугольного сечения из стеклоткани при растягивающей нагрузке 5900 Н с экспериментальной кривой (сплошная линия). (o) - экспериментальные точки.

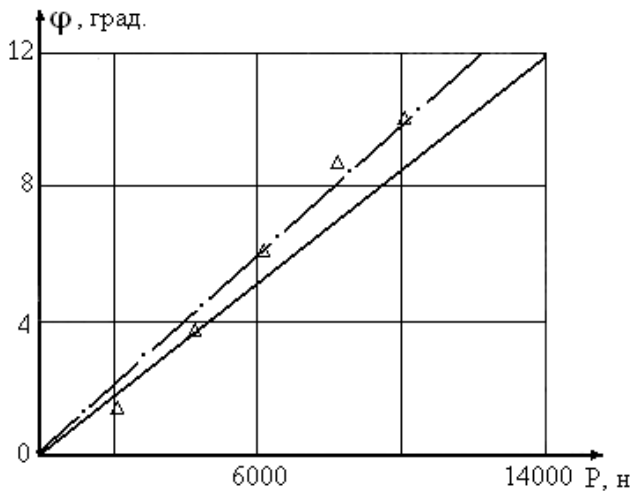


Рисунок 3.4.3 - Сравнение расчетных (сплошная линия) значений угла раскрутки для однонаправленных образцов прямоугольного сечения из углепластика с экспериментальной кривой в зависимости от нагрузки. Пунктирная линия - кривая, построенная по экспериментальным точкам (Δ).

Для образцов из углепластиков, армированных под углом 0° , зависимости угла раскрутки от растягивающей силы приведены на рисунке 3.4.3. На этом же рисунке нанесена прямая, соответствующая теоретическим расчетам по формуле (3.4.9). Видно, что соответствие экспериментальных и теоретических данных достаточно хорошее.

Таким образом, результаты сравнения экспериментальных данных с теоретическими расчетами подтверждают правильность вывода соотношений (3.2.4), (3.4.9), полученных в настоящей главе.

3.5 Исследование естественно закрученных слоистых анизотропных стержней из армированных материалов

Принятая в настоящее время технология изготовления деталей, элементов конструкций из композиционных материалов имеет явно выраженную слоистую структуру [51]. Свойства отдельных слоев и их взаимное расположение в составе пакета таких слоев, в конечном счете, определяют свойства всего материала. Поведение однонаправленного слоя полагается линейно-упругим, а связь между напряжениями и деформациями описывается обобщенным законом Гука. Применение точной теории естественно-закрученных стержней произвольного поперечного сечения на базе общих уравнений теории упругости связано с большими математическими трудностями и приводят к сложным решениям. Поэтому полученная приближенная теория [118] закрученных слоистых стержней произвольного сечения основана на определенных гипотезах, позволяющих разделить компоненты напряжений и деформаций на главные и второстепенные, которыми в ряде уравнений пренебрегается.

Рассмотрим пример расчета НДС стержня следующей структуры. Структура симметрична по толщине сечения. Наружные четыре слоя со структурой укладки под углом $+60^\circ, -60^\circ, +60^\circ, -60^\circ$ к оси стержня, остальные слои нулевой укладки до оси симметрии. Расчет проводился с целью учета работы межслоевой эпоксидной прослойки. Образцы были шириной $L=150$ мм, толщиной $h=10$ мм и углом закрутки 55° на базе 450 мм (рис. 3.5.1). Общее количество слоев было 40. Объемное содержание углепластика в чередующихся слоях было $\nu_1=0.6$, а связующего эпоксиды - $\nu_1=0.4$ [190].

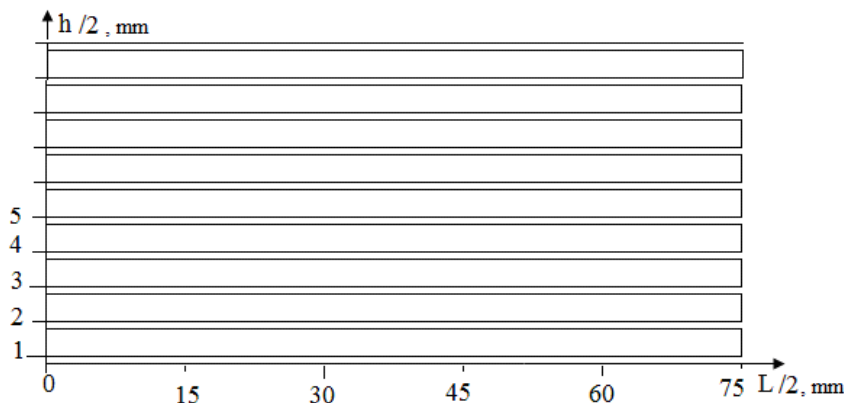


Рисунок 3.5.1 - Четверть прямоугольного сечение образца.

Расчеты показали, что несмотря на различные упругие характеристики углепластика и матрицы (см.табл.3.5.1), угол раскрутки τ , деформация растяжения ϵ и изгиба χ_2 у образцов одних геометрических размеров от растягивающих сил P меняется линейно (рисунки 3.5.2-3.5.4).

Таблица 3.5.1. Данные эпоксида и углепластика.

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------|------------|------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| Свойства материала | $E_1, 10^3$ кг/мм ² | $E_2, 10^3$ кг/мм ² | $E_3, 10^3$ кг/мм ² | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} | $G_{12}, 10^3$ кг/мм ² | $G_{13}, 10^3$ кг/мм ² | $G_{23}, 10^3$ кг/мм ² | $\rho, 10^{-10}$ кг/мм ³ |
| Углепластик | 15.7 | 15.7 | 112.5 | 0.48 | 0.03 | 0.03 | 3.3 | 5.3 | 5.3 | 1,67 |
| Эпоксид | 2.8-4.2 | | | 0.33-0.4 | | | 0.8-1.5 | | | 1,2 |

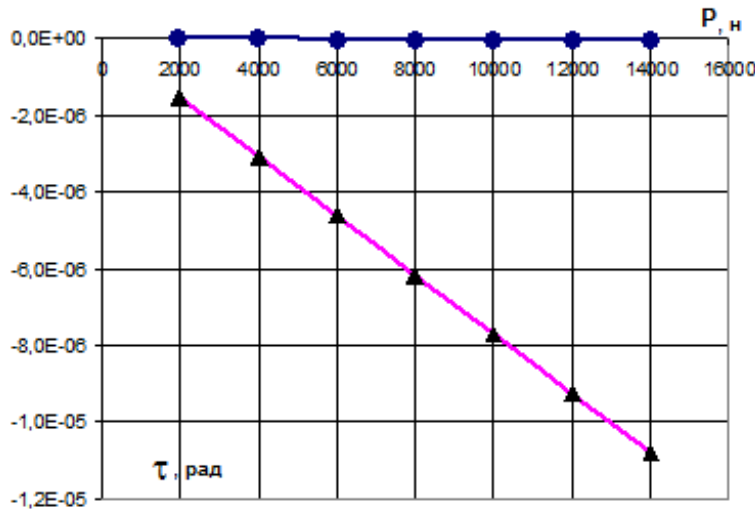


Рисунок 3.5.2 - Изменение деформации раскрутки τ от нагрузки растяжения P .

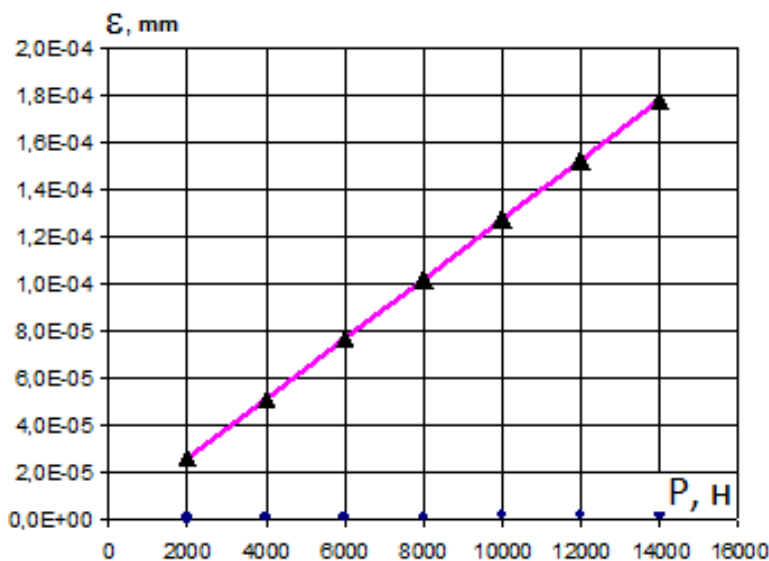


Рисунок 3.5.3 - Изменение деформации растяжения ϵ от нагрузки растяжения P .

Таким образом, линейность зависимости угла упругой раскрутки от нагрузки при использовании углепластика не нарушается. Увеличение модуля сдвига в плоскости слоя образца за счет использования высокомодульных углеродных волокон, расположенных под углом к оси нагружения, а также мягких матриц значительно уменьшает величину параметра гибкости, что позволяет при расчете лопаток из композиционных материалов использовать формулы (3.2.16).

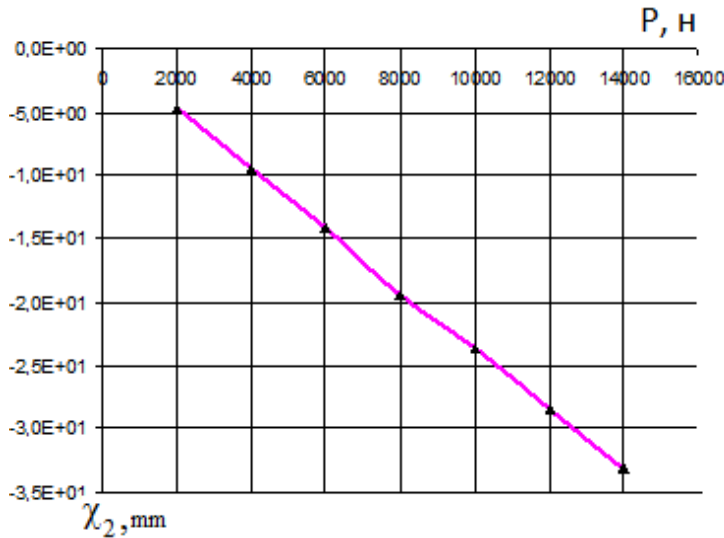


Рисунок 3.5.4 - Изменение деформации изгиба χ_2 от нагрузки растяжения P .

Нормальные и касательные напряжения в любой точке прямоугольного сечения находятся из следующих выражений (3.3.5) [122, 123,193]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^i &= \varepsilon^b (c_{13}^i + c_{15}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{15}^i Q_1 N_1 + \beta_{11}^i T^i, \\ \sigma_{22}^i &= \varepsilon^b (c_{23}^i + c_{25}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{25}^i Q_1 N_1 + \beta_{22}^i T^i, \\ \sigma_{33}^i &= \varepsilon^b (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{35}^i Q_1 N_1 + \beta_{33}^i T^i, \\ \sigma_{23}^i &= \varepsilon^b \tau_0 c_{44}^i \sin \alpha - c_{44}^i Q_2 N_2, \\ \sigma_{13}^i &= \varepsilon^b (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{55}^i Q_1 N_1 + \beta_{13}^i T^i, \\ \sigma_{12}^i &= c_{44}^i \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon^b - c_{46}^i Q_2 N_2. \\ \varepsilon_{33}^i &= \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1 + \tau_0 \tau^2, \quad \alpha = \tau_0 \zeta, \end{aligned}$$

Неравномерность распределения нормальных напряжений σ_{33}^i возрастает: их значения в чередующих слоях углепластика с углами армирования 0° в три раза больше, чем в слоях с углами армирования $\pm 60^\circ$ (рис. 3.5.5). Увеличение нормальных напряже-

ний σ_{33}^i в слоях углепластика с углами армирования 0^0 связано с тем, что параметр упругости (3.3.7) $c_1^i = c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha$ при $\pm 60^0$ меньше чем при 0^0 .

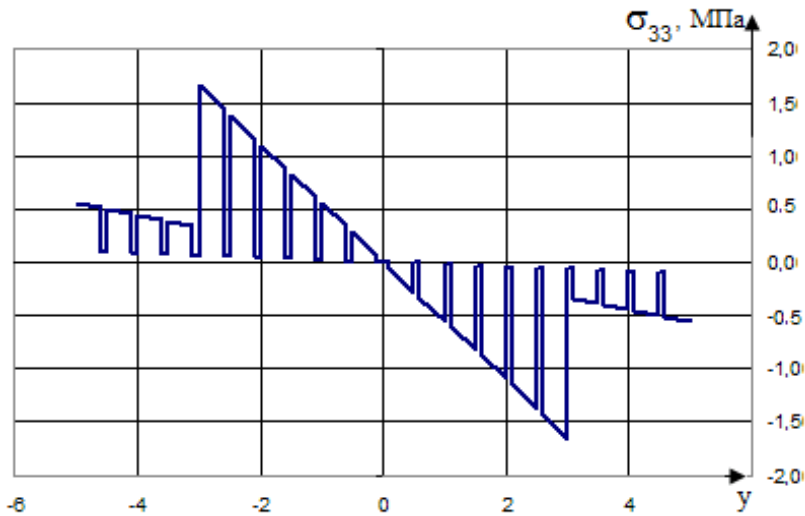


Рисунок 3.5.5 - Распределение нормального напряжения σ_{33}^i по толщине h .

Касательные напряжения σ_{12}^i обычно малы и имеет порядок [2] $\frac{I_{03}\tau}{J_p h} \sigma_{13}^i$, где

$$I_{03} = \frac{1}{3} \int_F y^3 dF, \quad J_p = \frac{1}{3} \int_F r^2 dF, \text{ что составляет } 20\% \text{ от } \sigma_{13}^i. \text{ Поэтому при расчете}$$

изотропных стержней напряжением σ_{12}^i обычно пренебрегают. В композиционных слоистых материалах напряжения σ_{12}^i , действующих между слоями, представляют большую опасность, чем напряжения σ_{13}^i , действующие в плоскости слоев. Потому что прочность КМ на сдвиг между слоями, на порядок меньше прочности на сдвиг в плоскости слоя. На рисунке 3.5.6 приведены эпюры напряжений σ_{12}^i по толщине слоя. Видно скачкообразное изменение напряжений при переходе от слоя с углом армирования углепластика $\pm 60^0$ к слою из материала эпоксиды, что могут привести потери прочности мягкого слоя.

На рисунке 3.5.7 приведена эпюры напряжений σ_{13}^i по толщине слоя. Видно скачкообразное изменение при переходе от слоя с углом армирования углепластика $\pm 60^0$ к слою из материала эпоксиды. В слоях углепластика с углами армирования $\pm 60^0$ происходит сжимающие (растягивающие) напряжения, а мягких слоях эпоксиды

имеется растягивающие (сжимающие) напряжения. Напряжения 0.1 МПа для мягкого слоя эпоксида может привести местной потере прочности.

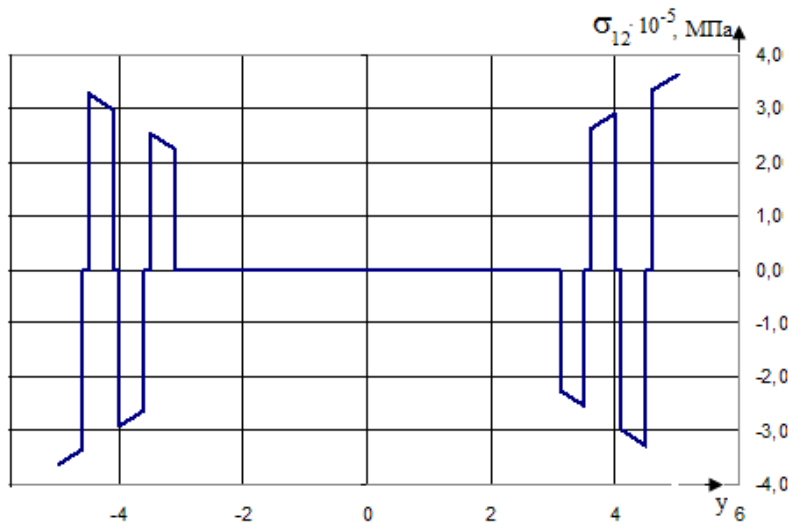


Рисунок 3.5.6 - Распределение касательного напряжения σ_{12}^i по толщине h .

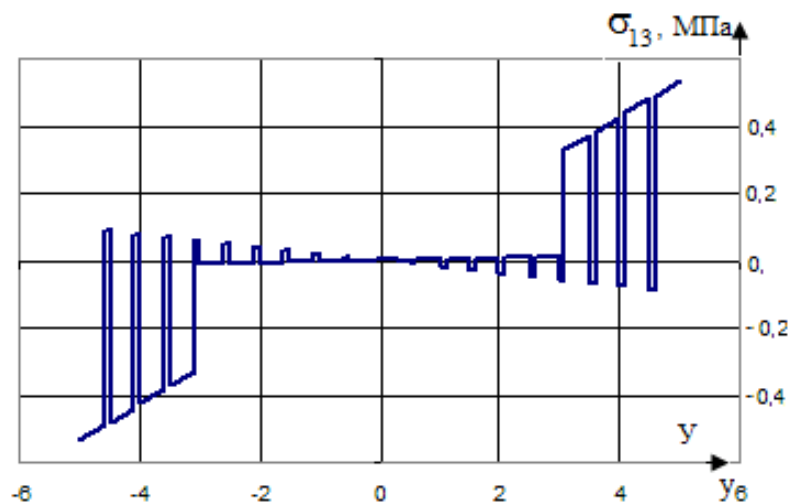


Рисунок 3.5.7 - Распределение касательного напряжения σ_{13}^i по толщине h .

На рисунке 3.5.8 приведены эпюры касательных напряжений σ_{23}^i по толщине h . Видно, что перекрестным армированием углепластика можно уменьшить уровень касательного напряжения σ_{23}^i .

На рисунке 3.5.9 приведены эпюры напряжений σ_{11}^i по толщине h . Видно, что при переходе от слоя с углами армированием углепластика $\pm 60^\circ$ к слою эпоксиды происходит увеличение разрыва градиента напряжений σ_{11}^i , который превосходит уровень нормальных напряжений σ_{33}^i . В этом случае может происходить рас-

слоение материала.

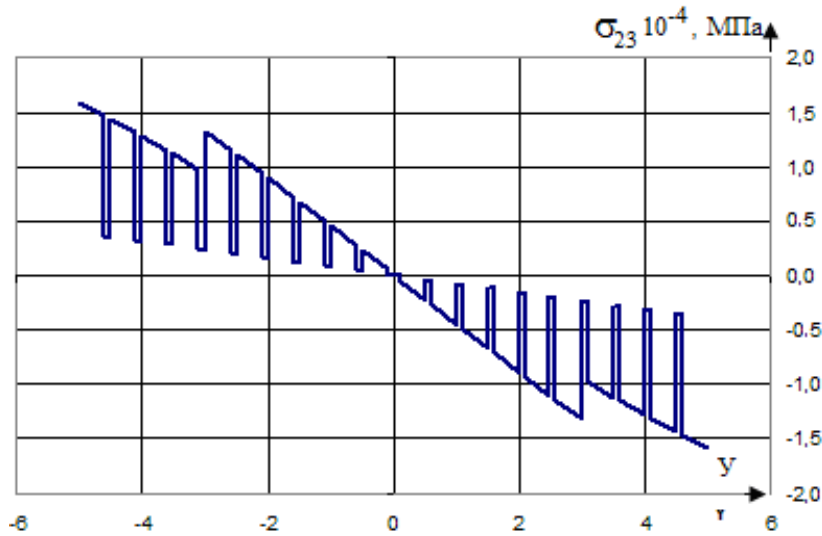


Рисунок 3.5.8 - Распределение касательного напряжения σ_{23}^i по толщине h .

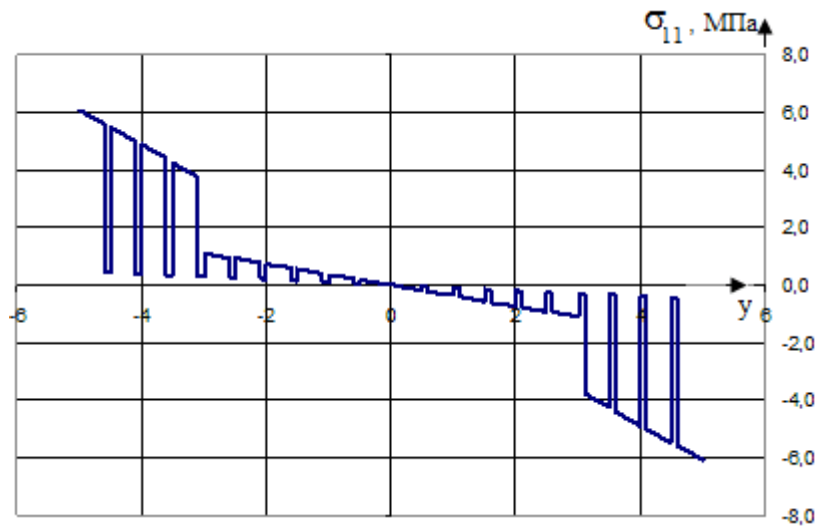


Рисунок 3.5.9 - Распределение касательного напряжения σ_{11}^i по толщине h .

На рисунке 3.5.10 приведены эпюры напряжений σ_{22}^i по толщине h . Видно, что при переходе от слоя с углами армированием углепластика $\pm 60^\circ$ к слою эпоксида происходит уменьшение уровня напряжений в слоях с эпоксидом, при переходе от слоя с углами армированием углепластика 0° к слою эпоксида происходит увеличение уровня напряжений σ_{22}^i . Следовательно, с помощью перекрестного армирования слоев можно достичь уменьшения уровня градиента напряжений σ_{22}^i .

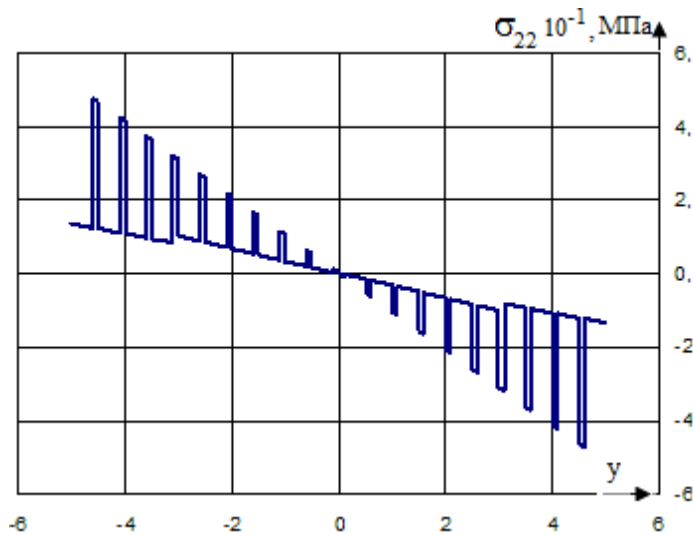


Рисунок 3.5.10 - Распределение касательного напряжения σ_{22}^i по толщине h .

На рисунке 3.5.11-3.5.12 приведена зависимость напряжений σ_{13}^i по толщине слоя от нагрузки в слоях с углом армирования углепластика $\pm 60^\circ$ и эпоксида. В этом случае сохраняется линейное изменение напряжений от нагрузки P . В слоях углепластика с углами армирования $\pm 60^\circ$ возникают сжимающие (растягивающие) напряжения, а в мягких слоях эпоксида имеем растягивающие (сжимающие) напряжения. Следовательно, с увеличением нагрузки, увеличение напряжения σ_{13}^i для мягкого слоя может привести местной потере прочности.

Выводы

Таким образом, проанализированы расчеты на прочность стержня прямоугольного сечения из композиционного материала, а именно, проведен выбор структуры материала, удовлетворяющий техническим требованиям стержня с точки зрения напряженно-деформированного состояния в условиях крутильно-изгибной связанности с учетом особенностей работы КМ.

На примере со слоистым стержнем, находящимся под действием центробежных сил показано влияние сдвигов между слоями на перераспределение нормальных и касательных напряжений по слоям. В зависимости от величины коэффициента анизотропии использованного материала нормальные и касательные напряжения во внешних слоях в 2-5 раз увеличивается. Сравнение этих значений напряжений с величинами для данных

слоев позволяет выбрать способ армирования этих слоев.

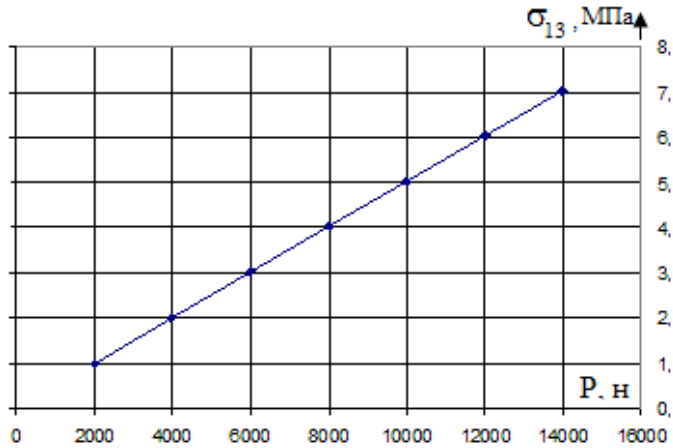


Рисунок 3.5.11 - Распределение касательного напряжения σ_{13}^i в матрице по толщине h .

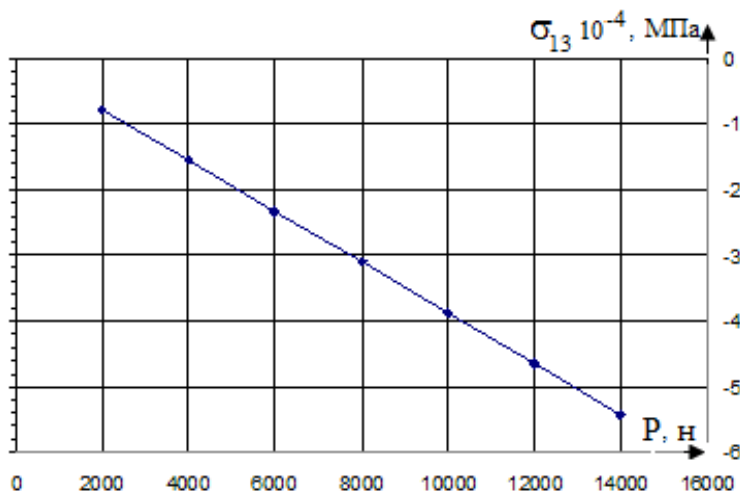


Рисунок 3.3.12 - Распределение касательного напряжения σ_{13}^i в наполнителе по толщине h .

Как показали расчеты (рисунок 3.5.7), вследствие малой сдвиговой жесткости между слоями внутренние мягкие слои под действием растягивающих сил смещаются относительно внешних, происходит искривление сечений, которое достигает наибольшей величины в середине сечений. Искривление сечений приводит к перераспределению нормальных (рисунок 3.5.3-3.5.9) и касательных напряжений по толщине стержня. Нормальные напряжения резко возрастают во внутренних слоях однонаправленного материала по сравнению в слоях с перекрестно армированными материалами.

Поэтому, при проектировании лопаток необходимо учитывать возможное увеличение напряжений во внешних слоях. При прочности углепластика ~ 588 МПа коэффициент увеличения напряжений равен -1.8 .

Видно, что при увеличении числа перекрестных слоев касательные напряжения,

возникающие между продольными слоями, резко возрастают.

Как видно из приведенных примеров, использование полученной полупространственной теории закрученных стержней [67, 68, 118, 120] позволяет не только оценить вклад каждого слоя в эффективную жесткость на кручение, но и определить напряженное состояние каждого слоя, что особенно важно при определении слабого звена в исходном материале. Совокупность данных о влиянии жесткости отдельных слоев на угол раскрутки стержня и его прочность позволит выбрать наиболее оптимальную укладку армирующих слоев, а также тип арматуры и матрицы.

Как показали расчеты, слоистые стержни в результате деформации сдвига имеют большее удлинение и изгиб, чем изотропные стержни. Поэтому необходимо учитывать этот фактор при изготовлении лопаток. Величина удлинения и изгиба, также нормальных напряжений зависит от параметров E_3 , G_{23} , L , h .

Анализ напряжено-деформированного состояния естественно закрученных стержней из композиционных материалов позволяет выявить особенности работы армированного материала в условиях изгибно-крутильной связанности. В слоистых стержнях с большими коэффициентами анизотропии ($\frac{E}{G} \geq 50$) неравномерность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении при растяжении значительно сильнее, чем в изотропных мягких слоях. При растяжении даже для слабо закрученных стержней с большой относительной толщиной при использовании композиционных материалов на кромках могут возникнуть сжимающие (растягивающие) напряжения, что нежелательно для армированных материалов.

Подбирая укладку слоев, их расположение в теле стержня, тем самым меняя соотношение упругих постоянных, можно добиться минимального значения изменения угла упругой раскрутки, деформации растяжения и изгиба при растяжении естественно-закрученного стержня в сочетании с приемлемыми величинами напряжений. Приведенные графики на рисунок 3.5.2-3.5.12 позволяют найти оптимальное сочетание крутильной жесткости с жесткостью при растяжении для стержней любых геометрических размеров, что позволяет оценить композиционного материала с точки зрения применимости его в рабочих лопатках компрессора.

3.6 Напряженно-деформированное состояние лопаток и стержней из композиционного материала в поле центробежных сил

Очертание лопаток турбомашин в перспективных двигателях становятся более сложными. Наблюдается переход в конструкциях лопаток вентиляторов, компрессоров и турбин от очертаний, близких к стержням с закруткой и большим относительным удлинением, к очертаниям типа пластин с малым относительным удлинением, большой закруткой и кривизной. Вместо современных металлических сплавов начинают применять интерметаллические соединения, композиты с металлической матрицей и композиты с керамической матрицей. По мере совершенствования методов расчета современных реактивных двигателей геометрические характеристики, аэродинамические и температурные нагрузки на диски и барабаны с лопатками становятся более определенными, что дает возможность применять численные методы для определения напряженно-деформированного состояния лопаток. Перспективные, модели воздушных винтов имеют лопасти с большим углом стреловидности, закрученные по размаху и изогнутые, относительно оси вращения. Эти лопасти должны работать в весьма сложных и тяжелых аэромеханических условиях.

Подобные конструкции известны уже давно, но до сих пор отсутствовали средства для их расчета и материалы для их изготовления. В настоящее время благодаря появлению быстродействующих ЭВМ и сложного инженерного программного обеспечения, а также наличию современных композиционных материалов стало возможным более тщательный и точный анализ лопастей перспективных турбовинтовых двигателей. Поэтому, используя полученные в п. 3.1-3.5 расчетные материалы, была составлена программа расчета на ЭВМ, которая позволяет численно определить НДС лопаток из композиционного материала.

Программа ТЕМП, блок-схема которого приведена на рисунке 3.6.1, предназначена для исследования НДС, естественно-закрученных слоистых стержневых конструкций, которые находятся под совместным действием растягивающих сил, изгибающих и крутящих моментов или под действием центробежных сил.

Каждый слой исследуемого сечения стержня состоит из ортотропного материала с 9 независимыми упругими постоянными (таблица 3.6.1).

Таблица 3.6.1

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------|------------|------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Свойства материала | $E_1,$ кг/мм ² | $E_2,$ кг/мм ² | $E_3,$ кг/мм ² | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} | $G_{12},$ кг/мм ² | $G_{13},$ кг/мм ² | $G_{23},$ кг/мм ² |

При этом целенаправленное регулирование общих свойств конкретного материала может быть осуществлено путем выбора как схемы укладки волокон в отдельном слое, так и расположением слоев с известными свойствами в сечении. Это достигается изменением углов ψ между главными направлениями упругой симметрии материала в слое и осями, в котором исследуется НДС тела. При этом количество независимых упругих постоянных материала слоя в общем случае будет равно 13 (см. (1.3.7)).

Поперечное сечение рассматриваемых стержневых конструкций является произвольным. Входными параметрами программы являются координаты линии, ограничивающей отдельное произвольное плоское сечение, обычно задаваемое в рабочих чертежах проекта. Это линия разбивается на две части (условно называемое впредь "спинка" и "корытце"), к которым прилегают два наружных в сечении слоя. Координаты наружной поверхности упомянутых слоев задаются. Исходя из этих начальных данных с помощью процедуры РАС (расчет раскроя армирующих слоев) (рисунок 3.6.1, блок 3), сечение произвольной конфигурации разбивается на отдельные слои по заданной толщине t_c монослоя (приложение 1) [51]. При этом формируются номера начала и конца каждого слоя. Такие построения проводятся для ряда следующих друг за другом сечений стержня (рисунок 1.5.2). Так как размеры сечения могут меняться вдоль длины стержня, то и число слоев в каждом сечении может оказаться различным. Это предопределяет появление коротких слоев внутри сечения. Взятые из разных сечений координаты начала и конца одного слоя определяют длину лепестка в текущем сечении стержня. Следовательно, в процедуре РАС решается технологическая задача "раскроя" каждого

слоя стержня на лепестки в плоскостях, параллельных оси стержня (рисунок 1.5.3). Координаты и номера построенных точек слоев сохраняются в оперативной памяти ЭВМ и при необходимости они могут быть распечатаны.



Рисунок 3.6.1 - Блок схема программы TEMP.

Для исследования НДС слоистого стержня используются основные соотношения разработанной здесь технической теории слоистых стержней (см. п. 3.2). На основе этой теории с помощью процедуры ДКК (вычисления физико-геометрических характеристик, деформации ε , χ_1 , χ_2 , τ и напряжения σ_{11}^i , σ_{22}^i , σ_{33}^i , σ_{23}^i , σ_{13}^i , σ_{12}^i) (рисунок 3.6.1, блок 5) для каждого сечения вычисляются деформации растяжения ε , изменения кривизн χ_1 , χ_2 и раскрутка τ , а также напря-

жения $\sigma_{11}^i, \sigma_{22}^i, \sigma_{33}^i, \sigma_{23}^i, \sigma_{13}^i, \sigma_{12}^i$ в отдельных точках слоя i .

Входными параметрами для процедуры ДКК являются растягивающее усилие P , изгибающие M_1, M_2 и крутящий M_t моменты, а также 13 упругих постоянных каждого слоя в соответствии с формулой (1.3.7) для текущего слоя. Координаты и номера построенных точек слоев в соответствии с процедурой РАС также являются входными параметрами для текущего сечения.

Для исследования НДС стержня в поле центробежных сил, растягивающее усилие, действующее в текущем сечении, вычисляется по формуле, приведенной в [43, 118]

$$P_r = P = \omega^2 \int_r^R (\int_{F(r_1)} \rho dF) r_1 dr_1 \quad (3.6.1)$$

Здесь $F(r_1)$ - площадь поперечного сечения; r, R - расстояние от оси вращения до центра тяжести текущего r и периферийного R сечения соответственно (рис. 3.6.2); $\omega = \pi N / 30^\circ$ угловая скорость (рад.обор./сек.), где N - частота вращения (обор./мин.); r_1 - переменная интегрирования; ρ - плотность материала слоя сечения. Таким образом, усилие P в текущем сечении r равно по величине центробежной силе инерции, развиваемой частью слоистого стержня, заключенного между рассматриваемым сечением r и периферийным сечением R .

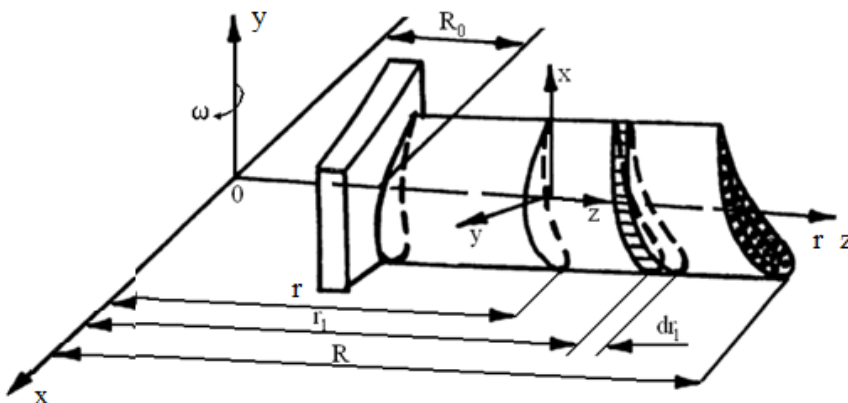


Рисунок 3.6.2 - Закрученный стержень и системы координат.

Для вычисления центробежного усилия по формуле (3.5.1) и координат центра тяжести текущего сечения необходимы данные о геометрических характеристиках всех сечений. Для этого сначала вычисляются (случай $NN=0, Q2=0$, рису-

нок 3.6.1) с помощью процедуры *GR* (рисунок 3.6.1, блок 4) 15 геометрических характеристик (таблица 3.6.2) и приведенные плотности всех сечений.

В случае $NN=1$ (рисунок 3.6.1) вычисляются центробежное усилие для текущего сечения r по приближенной аппроксимационной для (3.6.1) формуле

$$P_r = \omega^2 \sum_{i=r}^R \int_{r_i}^{r_{i+1}} F \rho r_1 dr_1, \quad (3.6.2)$$

в которой площадь и плотность текущего сечения изменяются линейно относительно предыдущего сечения, т.е.

$$\begin{aligned} F &= F_i + (r_1 - r_i)(F_{i+1} - F_i)/(r_{i+1} - r_i), \\ \rho &= \rho_i + (r_1 - r_i)(\rho_{i+1} - \rho_i)/(r_{i+1} - r_i). \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Таблица 3.6.2 Геометрические характеристики

| № | Геометрические характеристики |
|----|----------------------------------|
| 1 | $I_{00}^0 = \iint dx dy$ |
| 2 | $I_{10}^0 = \iint x dx dy$ |
| 3 | $I_{20}^0 = \iint x^2 dx dy$ |
| 4 | $I_{30}^0 = \iint x^3 dx dy$ |
| 5 | $I_{40}^0 = \iint x^4 dx dy$ |
| 6 | $I_{01}^0 = \iint y dx dy$ |
| 7 | $I_{11}^0 = \iint y x dx dy$ |
| 8 | $I_{21}^0 = \iint y x^2 dx dy$ |
| 9 | $I_{31}^0 = \iint y x^3 dx dy$ |
| 10 | $I_{02}^0 = \iint y^2 dx dy$ |
| 11 | $I_{12}^0 = \iint x y^2 dx dy$ |
| 12 | $I_{13}^0 = \iint x y^3 dx dy$ |
| 13 | $I_{22}^0 = \iint y^2 x^2 dx dy$ |
| 14 | $I_{03}^0 = \iint y^3 dx dy$ |
| 15 | $I_{04}^0 = \iint y^4 dx dy$ |

Для определения работы внешних сил необходимо найти смещения w по формуле

$$w = \int_{R_0}^z \varepsilon_{33}^i dz = \int_{R_0}^z (\varepsilon - \chi_2 \xi + \chi_1 \eta + \tau_0 \tau r^2) dr_1 = (\varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1 + \tau_0 \tau r^2) (R_0 - z);$$

L – работа внешних сил, которые вычисляются по формуле [125]

$$L = L_P + L_n + L_t,$$

где L_P – работа поверхностных сил, L_n , L_t – работа изгибающих и крутящих моментов от действия на закрученную лопатку растягивающих сил P [125].

L_P – работа поверхностных сил вычисляются по формуле

$$L_P = \iint_S P w ds = \int_{R_0}^z P(z) \left(\iint_S \varepsilon_{33}^i ds \right) dr_1, \quad \varepsilon_{33}^b \approx \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1 + \tau_0 \tau r^2,$$

$$\iint_S \varepsilon_{33}^i ds = \varepsilon F - S_y \chi_2 + S_x \chi_1 + \tau_0 \tau (J_x + J_y), \quad (3.6.4)$$

$$L_P = [\varepsilon F - S_y \chi_2 + S_x \chi_1 + \tau_0 \tau (J_x + J_y)] (P(z) - P(R_0)),$$

$$P(r) = P = \omega^2 \int_{r=F(r_1)}^R (\int \rho dF) r_1 dr_1,$$

где напряжения в сечении $r_1=z$ определяются выражениями

$$\sigma_z = \rho v \Omega^2 \frac{\int_{r_1=z}^R r_1 F(r_1) dr_1}{F(z)} = \frac{P(z)}{F(z)}. \quad (3.6.5)$$

Здесь ρ – плотности материалов сечения, Ω – угловая скорость вращения, $P(z)$ – центробежные силы, действующие на сечение $r_1=z$.

Работа изгибающих моментов определяются формулой

$$L_n = M_2 \int_{R_0}^z \chi_1 dx_1 - M_1 \int_{R_0}^z \chi_2 dx_1. \quad (3.6.6)$$

Здесь

$$M_1 = M'_1 \cos \alpha + M'_2 \sin \alpha,$$

$$M_2 = -M'_1 \sin \alpha + M'_2 \cos \alpha,$$

где α – угол установки, изгибающие моменты M'_2, M'_1 от центробежных сил в сечении $r_1=z$ определяется равенствами

$$M'_1 = \rho^i \Omega^2 v^i \int_z^R [y(r_1) - y(z)] r_1 F(r_1) dr_1,$$

$$M'_2 = \rho^i \Omega^2 v^i \int_z^R [x(z) r_1 - z x(r_1)] F(r_1) dr_1,$$
(3.6.7)

где $x(z)$, $y(z)$ координаты центра тяжести сечения после деформации в неподвижной системе координат, v^i – объемное содержание материала i слоя сечения. Оси x' , y' , относительно которых подсчитываются моменты, представляют местную, неподвижную декартову систему координат с началом в центре тяжести сечения.

Работа от крутящего момента от центробежных сил будет равна [125]

$$L_t = - \int_{R_0}^z M'_t(z) \tau(r_1) dr_1 = - M'_t \int_{R_0}^z \tau(r_1) dr_1,$$

$$M'_t = \rho \Omega^2 v \int_z^R J_{x'y'}(r_1) dr_1,$$
(3.6.8)

где $\tau(r_1)$ - раскручивания сечения r_1 , $J_{x'y'}(r_1)$ - центральный момент инерции относительно осей x' , y' .

Далее для текущего сечения в процедуре ДКК (рисунок 3.6.1, блок 5) исследуется НДС слоистого стержня. В ДКК определяются деформации растяжения ε , изменения кривизн χ_1 , χ_2 и раскрутка τ , вычисляются физико-геометрические характеристики сечения с помощью процедуры GR (случай $QR=1$, рисунок 3.6.1).

Для определения напряженно-деформированного состояния рабочей лопатки в качестве нагрузок выступают центробежные силы, изгибающие моменты M'_2 , M'_1 , крутящий момент M'_t возникающие при вращении лопатки с заданной скоростью.

Программа-ТЕМР, используемая в описанных ниже расчетах, в настоящее время применяется для анализа НДС лопастей на этапе эскизного проектирования.

1. Описание исследуемой лопатки. Рассматриваемая модель лопасти является уменьшенным вариантом натурной компрессорной лопатки. Это лопасть была спроектирована и изготовлена с таким расчетом, чтобы соблюдалась конструктивная и аэродинамическая - эквивалентность реальной лопасти. Лопасть, исследуемая в данной работе, представлена восемью сечениями [137], [155], [171],

[181], [190], [193], [194], [202], [243], [245]. Геометрические данные каждого сечения лопатки приведены на таблице 3.6.3.

Таблица 3.6.3 Геометрические характеристики лопатки

| Номер сечения | Радиус сечения R, мм | Коор. центра тяжести x_c/y_c | Коор. перед. кром. $X_{п}/Y_{п}$ | Коор. задн. кром. x_3/y_3 | c_{max} мм | Длина хорды, в, мм. | Площадь сечения F, мм ² |
|---------------|----------------------|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|--------------|---------------------|------------------------------------|
| 1 | 220.25 | 0.27 0.14 | -30.8 3.3 | 29.1 -11.6 | 4.71 | 61 | 197.5 |
| 2 | 228.25 | 0.52 0.2 | -31.2 2.2 | 30 -9.5 | 4.47 | 62 | 187 |
| 3 | 238.25 | 0.38 0.45 | -31.5 3.3 | 31.3 -7.6 | 4.19 | 63.5 | 176.8 |
| 4 | 258.25 | 0.87 0.8 | -32 -1.2 | 33.2 -3.3 | 3.68 | 65.3 | 155.6 |
| 5 | 278.25 | 0.8 1.1 | -32.4 -3.5 | 34.2 0.4 | 3.24 | 66.6 | 137.7 |
| 6 | 298.25 | 1.38 1.45 | -32.6 -5.7 | 35.5 4.1 | 2.85 | 68.3 | 134.3 |
| 7 | 318.25 | 1.05 1.63 | -33 -7.8 | 36.3 7.7 | 2.53 | 69.6 | 124.8 |
| 8 | 338.25 | 1.2 1.9 | -33.1 -9.7 | 36.7 10.5 | 2.26 | 72.5 | 112.7 |

На рисунке 3.6.3 приведены изменения площади (на рисунке кривая 2), наибольшей толщины (на рисунке - 1), хорды (на рисунке - 3) лопатки и отношение c_{max}/b зависимости от r/R_0 . На рисунке 3.6.4 приведены некоторые геометрические характеристики каждого сечения в виде кривых зависимостей от r/R_0 . Корневое сечение лопатки состоит из 12 слоев одинаковой толщины $t_c=0.4\text{мм}$, а периферийное сечение из 6 слоев. Относительный угол закрутки на единицу длины лопатки τ_0 равен 0.006 рад/мм.

2. Расчетные варианты. В качестве примера по описанной программе TEMP была рассчитана лопатка из композиционного материала в поле центробежных сил. При этом было проведено исследование - для трех различных вариантов сочетаний упругих постоянных в пакете слоев композиционной лопатки.

В первом варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев боралюминия (BAL, таблица 1.1.5) и чистого

алюминия. В этом случае относительное объемное содержание боралюминия в пакете слоев составляло 0.55, а алюминия - 0.45.

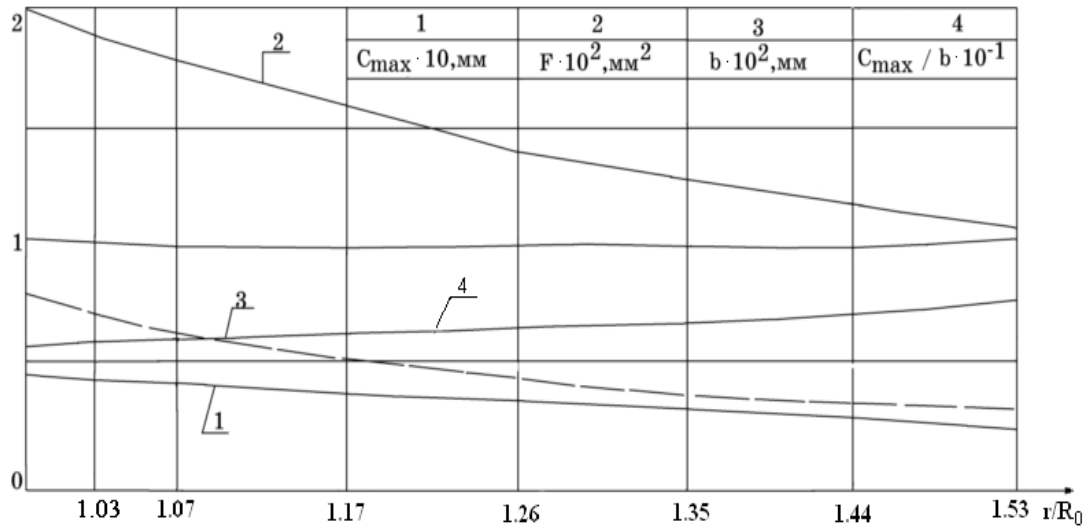


Рисунок 3.6.3 - Изменение c_{\max} , площади F , хорды b и c_{\max}/b по длине компрессорной лопатки r/R_0 .

Во втором варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев боралюминия (BAL, $v_1=0.45$), керамики (Sic, $v_2=0.45$) и чистого алюминия ($v_3=0.1$).

В третьем варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев боралюминия, уложенных под углами $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$ к оси лопатки. В этом случае относительное объемное содержание слоев боралюминия уложенных под углами $\pm 45^\circ$ к оси лопатки, составляло 0.4, а при $\pm 30^\circ$ - 0.4 и $\pm 15^\circ$ - 0.2.

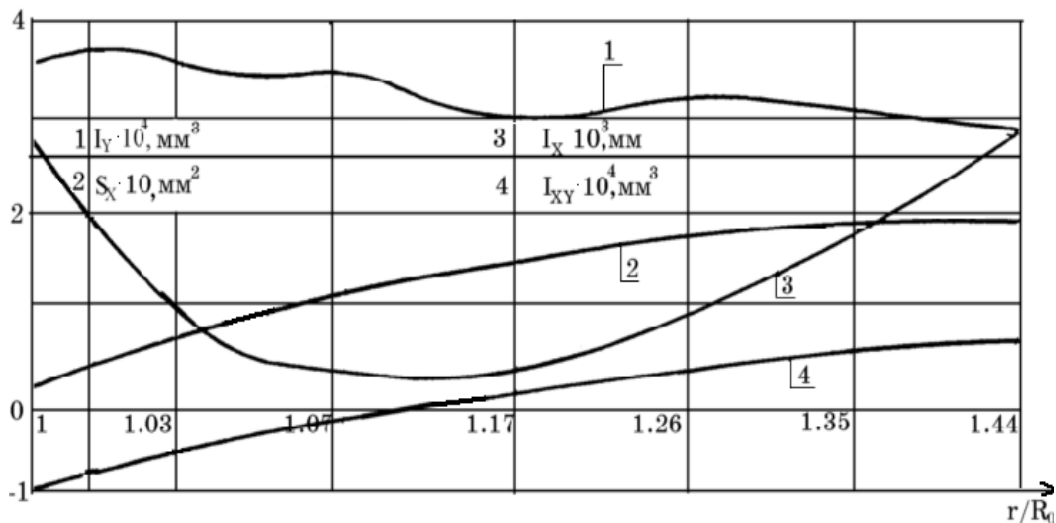


Рисунок 3.6.4 - Изменение некоторых геометрических характеристик сечения по длине

компрессорной лопатки r/R_0 .

3. Анализ результатов расчетов. По результатам расчетов на рис. 3.6.5 - 3.6.7 построено семейство кривых, отражающих зависимости деформации раскрутки τ , растяжения ε и жесткости на кручение по Сен-Венану C_0 (пунктирные линии на рис. 3.6.7), а также растягивающего усилия P от центробежной силы (пунктирные линии на рисунке 3.6.5) и осредненного напряжения $\sigma_{cp}=P/F$ для каждого сечения лопатки r/R_0 .

Растягивающее усилие P при вращении лопатки вычислено по формуле (3.6.1) для каждого ее сечения r/R_0 (рисунок 3.6.5). Объемное содержание волокон бора и алюминиевой матрицы в 1 и 3 лопатках совпадают. Это и явилось - причиной совпадения растягивающих усилий (кривые 1, 3) для этих лопаток.

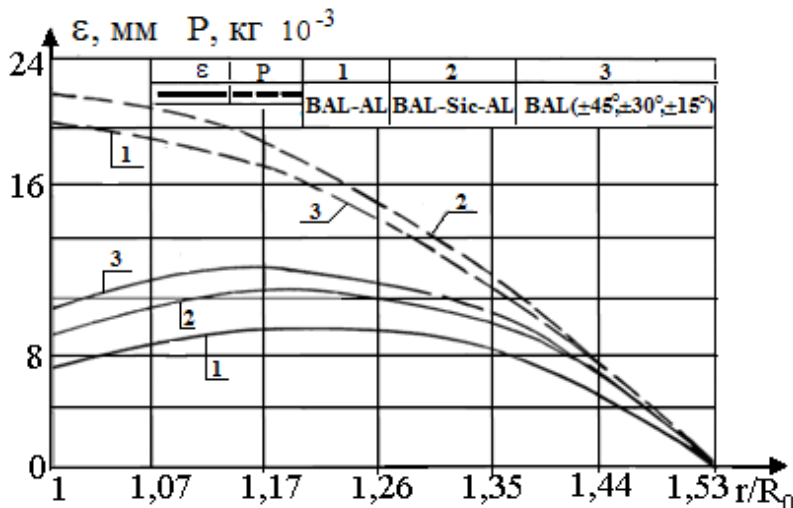


Рисунок 3.6.5 - Изменение деформации растяжения и растягивающих усилий P (пунктирная линия) от центробежных сил по длине r/R_0 компрессорной лопатки.

Повышенная плотность карбида кремния, используемого в лопатке 2-го типа, обуславливает более высокий уровень центробежных нагрузок (кривая 2). Как видно из рисунка 3.6.6, осредненные значения растягивающих напряжений σ_{cp} в условной незакрученной лопатке достигают наибольшего значения в четвертом сечении. Это связано с тем, что усилие P в четвертом сечении отличается от усилия в корневом на 15% (рисунок 3.6.5), в то время как их площади отличаются на 20% (рисунок 3.6.3). Для лопаток 2-го типа осредненные напряжения σ_{cp} превышают соответствующие величины в лопатках 1, 3 типов. Это связано с тем, что в

лопатке 2-го типа имеется более высокий уровень центробежных нагрузок.

Деформация растяжения ε в 1 и 3 лопатках отличаются незначительно и с приближением к периферийному сечению они практически совпадают (кривая 1, 3). В справедливости этого нетрудно убедиться из следующих рассуждений. Действительно, для лопаток деформация растяжения ε , и раскрутка τ при растяжении связаны приближенным соотношением

$$\varepsilon \approx \frac{P - \tau k_{14}}{k_{11}} \quad (3.6.4)$$

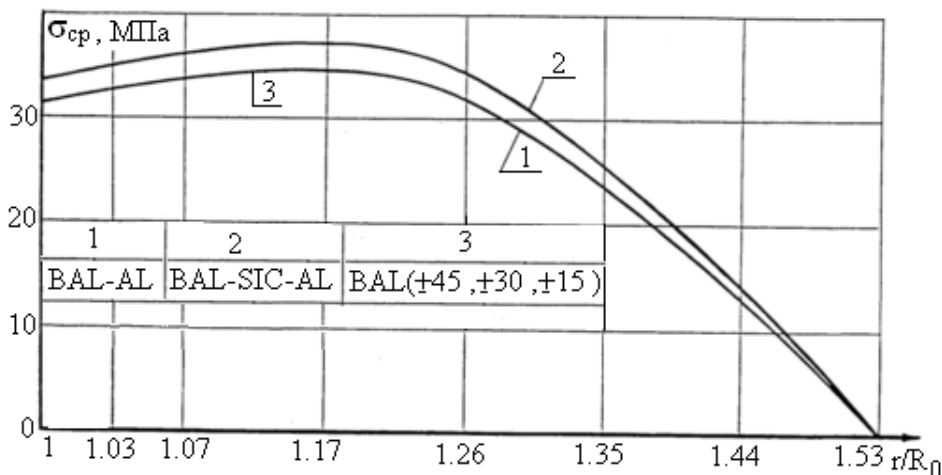


Рисунок 3.6.6 - Изменение осредненных напряжений $\sigma_{ср} = P/F$ по длине r/R_0 компрессорной лопатки.

При этом, оценки по соотношению (3.6.4) для седьмого сечения лопатки 1-го типа дают

$$\varepsilon = \frac{168 + 5.2 \cdot 10^{-4} \cdot 4.2 \cdot 10^6}{2.4 \cdot 10^6} = \frac{386}{2.4 \cdot 10^6} = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ мм},$$

а для лопатки 3-го типа-

$$\varepsilon = \frac{168 + 4.7 \cdot 10^{-5} \cdot 3.2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} = \frac{318}{2 \cdot 10^6} = 1.59 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Нетрудно видеть, что величина раскрутки τ для лопатки 1-го типа в 1.1, коэффициент k_{11} в 1.2, k_{14} - 1.3 раза превышают аналогичные значения для лопатки 3-го типа. Это и привело к совпадению деформации растяжения ε в седьмом сечении для этих лопаток.

Аналогичные оценки для корневого сечения лопатки 1-го типа приводят

$$\varepsilon = \frac{615 + 8.8 \cdot 10^{-4} 10^6}{3.5 \cdot 10^6} = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ мм},$$

а для лопатки 3-го типа - к

$$\varepsilon = \frac{615 + 4.6 \cdot 10^{-4} 3.8 \cdot 10^6}{3.4 \cdot 10^6} = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ мм.},$$

т.е. деформация растяжения ε лопатки 1-го типа больше деформации ε лопатки 3-го типа. Как видно из проведенного анализа это обусловлено взаимосвязанностью кручения с растяжением. Так как, величина раскрутки τ лопатки 1-го типа в 1.6 раза больше раскрутки τ лопатки 3-го типа. Максимальная деформация ε лопатки 2-го типа в 1.2 - 1.5 раза меньше деформации растяжения 1 и 3-го типов (рис. 3.6.5).

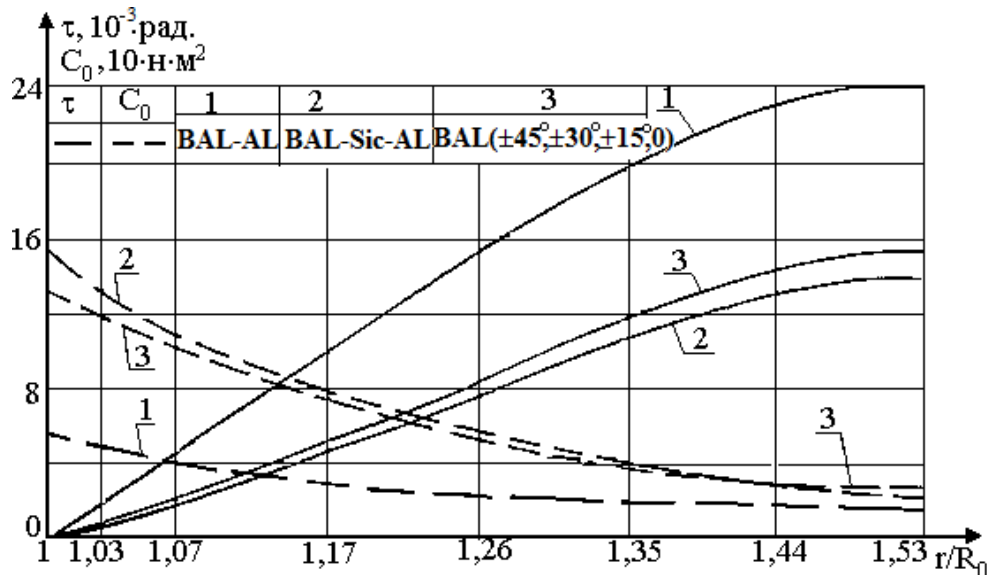
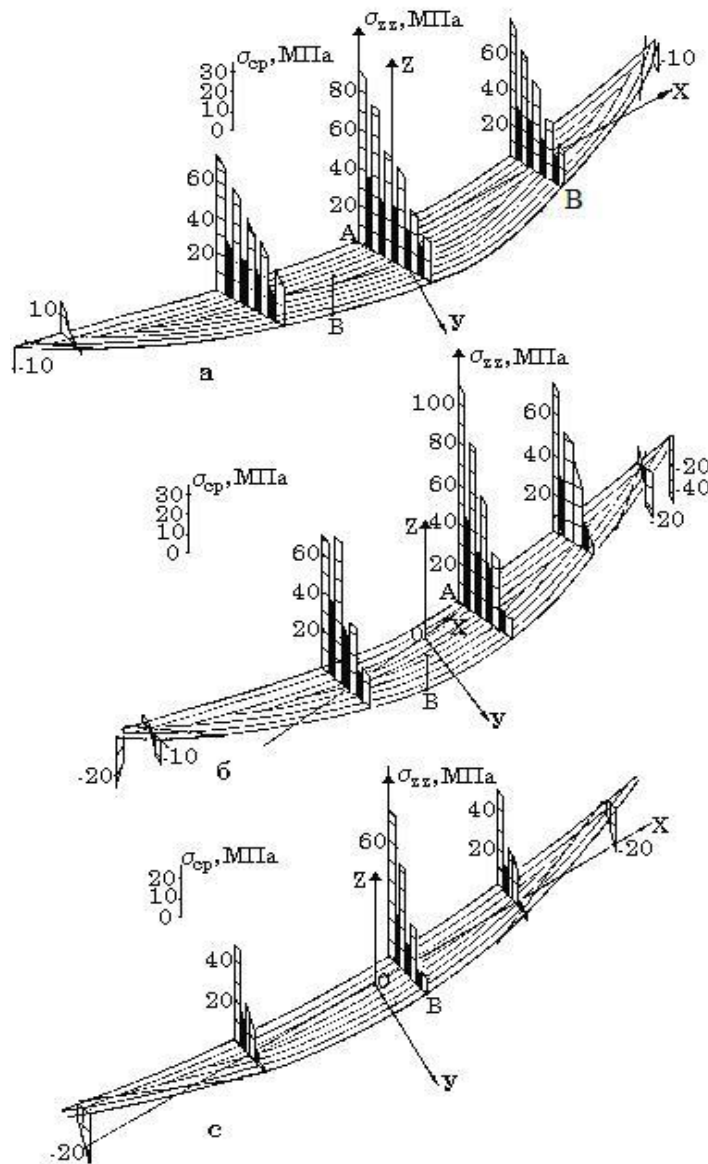


Рисунок 3.6.7 - Изменение деформации раскрутки τ и жесткости на кручение по Сен-Венану C_0 (пунктирная линии) по длине r/R_0 компрессорной лопатки.

Как видно, из рисунки 3.6.7 жесткость на кручение C_0 лопатки, составленной из чередующихся слоев однонаправлено-армированного боралюминия и чистого алюминия (кривая 1) в 2.5 раза меньше жесткости C_0 лопатки, состоящей из чередующихся слоев боралюминия, уложенных под углами $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$ к оси лопатки (кривая 3). Благодаря этому, максимальное значение раскрутки τ пера лопатки, состоящей из слоев однонаправленного материала, в 1.6 раза превосходит раскрутку пера лопатки, состоящей из чередующихся слоев боралюминия, уло-

женных под углами $\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$ к оси лопатки.

Однако, если отдельные слои лопатки заменить более жестким материалом (например, в нашем случае, карбидом кремния SiC), то можно достичь такого же эффекта увеличения жесткости на кручение C_0 (кривая 2), как и в случае использования перекрестного армирования материала слоев и, тем самым, достигается более низкий уровень раскрутки пера лопатки τ (кривая 2). Очевидно, варьируя углами укладки более жестких волокон, можно достичь еще более высоких уровней жесткости на кручение пера лопатки и меньших углов раскрутки τ при растяжении.



□ - боралюминий; ■ - алюминий

Рисунок 3.6.8 - Уровни нормальных напряжений σ_{zz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия и алюминия

Таким образом, в исследованных примерах показано, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же физических оборотах ротора. Для лопаток из изотропного материала такой широкой возможности регулирования не имеется.

На рисунке 3.6.8 - 3.6.10 приведены уровни нормальных напряжений σ_{zz} для отдельного сечения (а - 2-сечение, б - 4-сечение, с - 6-сечение) лопаток из различных материалов.

На рисунке 3.6.8 приведены нормальные напряжения для лопатки 1-го типа. Как правило, наибольшие значения напряжений σ_{zz} достигаются в средней части сечения лопатки и они уменьшаются по мере приближения к кромкам сечения. Наименьшие значения напряжений σ_{zz} по сечению наблюдаются на кромках, где имеет место сжимающие напряжения. На рисунках нулевые уровни напряжений в сечении отмечены пунктирными линиями.

В средней части сечения наибольшее значение напряжений достигается на корытце (точка А). Оно постепенно уменьшается по мере приближения к спинке. На рисунках точками В отмечены точки спинки, в которых достигаются максимальные значения напряжения σ_{zz} . При переходе от слоя к слою, которые отличаются уровнем характеристик жесткости, значения напряжений σ_{zz} изменяются скачкообразно.

В корневом сечении наибольшее напряжение σ_{zz} достигается в двух точках В спинки (рисунок 3.6.8а, 3.6.9а, 3.6.10а). С приближением к периферийному сечению эти точки приближаются к средней части спинки (рисунок 3.6.8б,с, 3.6.9б,с, 3.6.10б,с). Напряжения σ_{zz} изменяются от корневого сечения к периферийному по такой же кривой, как кривая - изменения осредненных напряжений σ_{cp} и принимают наибольшее значение в четвертом сечении лопатки. Наибольшее значение сжимающих напряжений σ_{zz} достигается в четвертом сечении лопатки. При этом, по мере приближения к периферийному сечению протяженность зон сжимающих напряжений σ_{zz} на кромках увеличивается. Это обусловлено влиянием на НДС

лопатки уменьшения максимальной толщины и увеличения хорды, а также увеличения раскрутки на периферийных сечениях (рисунок 3.6.8б, 3.6.10 б,с).

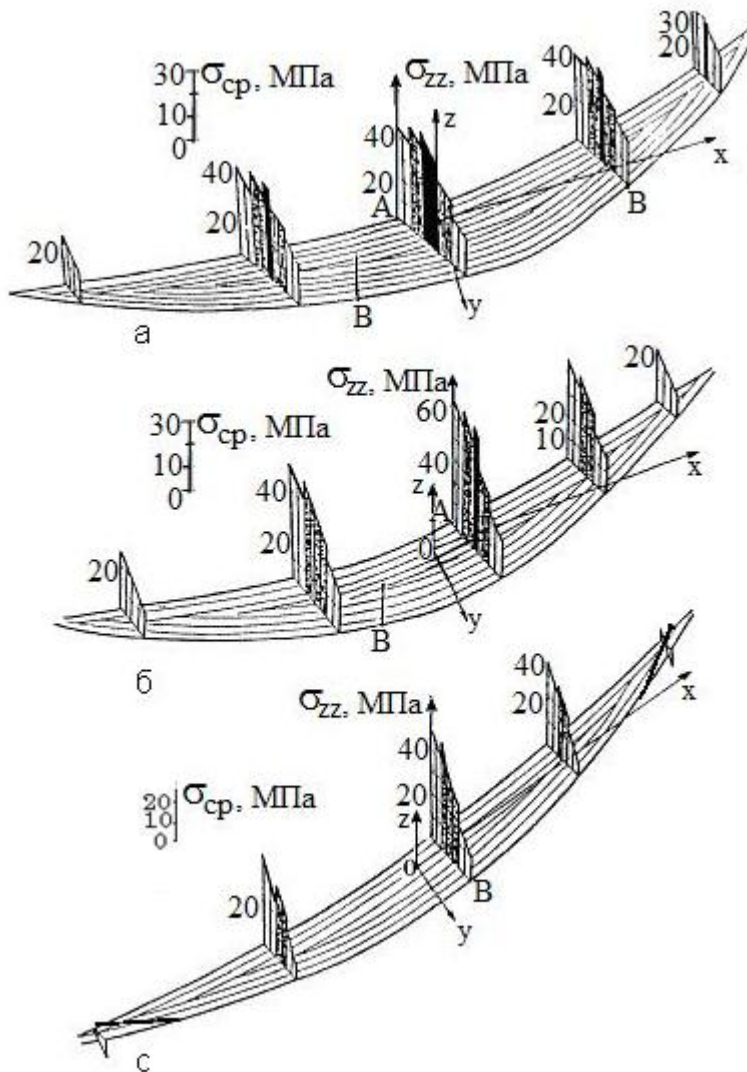
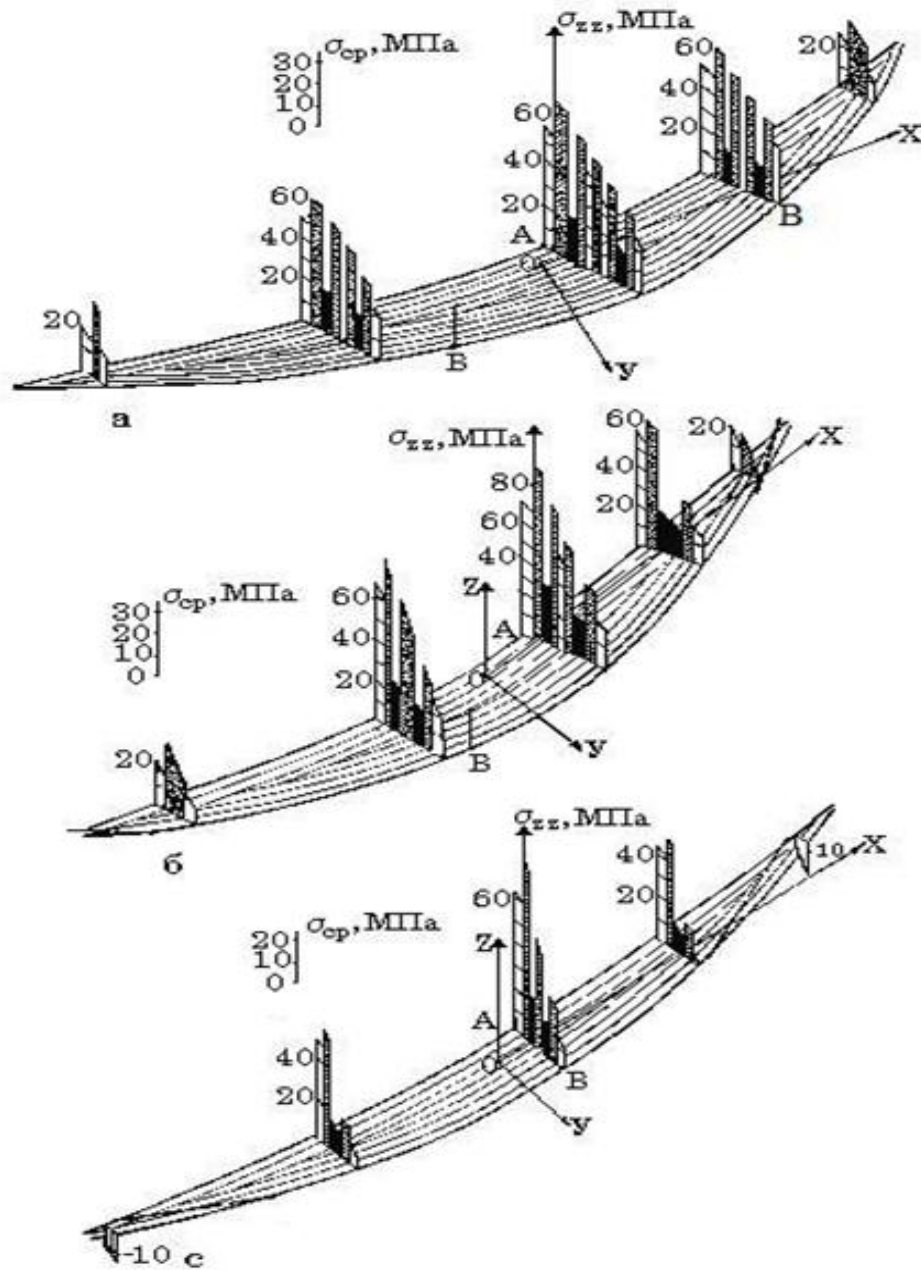


Рисунок 3.6.9 - Уровни нормальных напряжений σ_{zz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (с) лопатки, армированной под углами $\pm 45^\circ$ (\square), $\pm 30^\circ$ (\blacksquare), $\pm 15^\circ$ (\blacksquare) волокнами боралюминия.

На рисунке 3.6.8 приведены уровни напряжений σ_{zz} лопатки 1-го типа (на рис. уровни напряжений для слоя чистого алюминия зачернены). В этом случае, в отдельных слоях при переходе от слоя к слою уровни напряжений σ_{zz} резко уменьшаются. Например, во 2-ом сечении (рисунок 3.6.8б) в слоях из алюминия в точке А $\sigma_{zz}=45$ МПа, а в слоях боралюминия $\sigma_{zz}=105$ МПа. С увеличением растягивающего усилия напряжения σ_{zz} в слое алюминия возрастают, что может привести к разрушению этого слоя. В средней части корытца (рисунок 3.6.8б) возникают напряжения σ_{zz} , в три раза превышающие осредненную величину σ_{cp} , а на

кромках появляются сжимающие напряжения, превышающие по абсолютной величине осредненное напряжение σ_{cp} . Воздействия сжимающих напряжений в тонких слоях кромки может привести к локальной потере устойчивости кромки.

На рисунке 3.6.9 приведены уровни напряжений σ_{zz} , для лопатки 3-го типа (на рис. уровни напряжений слоя боралюминия при укладке $\pm 30^\circ$ затемнены, а при укладке $\pm 15^\circ$ - зачернены).



□ - боралюминий; ▨ - карбида кремния; ■ - алюминий

Рисунок 3.6.10 - Уровни нормальных напряжений σ_{zz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (с) лопатки, армированной волокнами боралюминия, карбида кремния и алюминия.

Напряжения σ_{zz} в сравнении с предыдущим примером распределены более равномерно по сечению. Это связано с тем, что параметры упругости c_{mn}^i при переходе от слоя к слою изменяются в меньшей мере. В сечениях, близких к корневому, наибольшее напряжение σ_{zz} , достигается в наиболее жестких на растяжение слоях боралюминия, уложенных под углами $\pm 15^\circ$ (рисунок 3.6.9а,б.). С приближением к периферийному сечению максимальные напряжения σ_{zz} имеют место в слоях боралюминия, уложенных под углами $\pm 45^\circ$ (рисунок 3.6.9с). Это связано с тем, что в периферийных сечениях отсутствуют слои боралюминия, уложенные под углами $\pm 15^\circ$. Незначительные сжимающие напряжения σ_{zz} на кромках появляются только в сечениях, близких к периферийному (рисунок 3.6.9с). По сравнению с предыдущим примером (рисунок 3.5.8) уровень максимальных напряжений σ_{zz} в этом случае уменьшился в два раза (рисунок 3.6.9). Это обусловлено тем, что параметры упругости c_{33}^i однонаправленно-армированного боралюминия в 1.6 раза превышают параметры c_{mn}^i боралюминия, уложенных под углами $\pm 45^\circ$. С другой стороны, как обсуждалось выше, деформация растяжения ε лопаток 1-го типа больше деформаций ε лопаток 3-го типа (рисунок 3.6.5).

Таким образом, при заданной геометрической форме лопатки, выбираемой из аэродинамических соображений, посредством перекрестного армирования ее слоев уровень напряжений σ_{zz} можно уменьшить, одновременно избежав больших сжимающих напряжений на кромках профиля и достичь более равномерного распределения их (σ_{zz}) по сечению.

На рисунке 3.6.10 приведены уровни нормальных напряжений для лопатки 2-го типа (на рисунке уровни напряжений для слоя чистого алюминия зачернены, а для карбида кремния - затемнены). В этом случае общая картина, обсужденная в предыдущих примерах, сохраняется. Однако здесь более наглядно демонстрируется неравномерность распределения напряжений σ_{zz} по сечению. Уровни напряжений σ_{zz} в слоях боралюминия и алюминия в 1.2 - 1.4 раза меньше, чем в случаях, рассмотренных в первом примере (рисунок 3.6.8). Это связано с применением в пакете слоев материала с более жесткими характеристиками на растяжение. На-

пример, карбид кремния имеет параметр упругости c_{33}^i в два раза больше, чем чистый алюминий. Несмотря на это при увеличении рабочих оборотов и соответственно усилия P слой из алюминия может разрушиться. Однако, если армирующие слои уложить под определенными углами, то возможно заметное уменьшение неравномерности распределения напряжений σ_{zz} . Для лопатки из изотропного материала такой возможности управления уровнями напряжений не имеется.

На рисунке 3.6.11 приведено семейство кривых, характеризующее изменения напряжений σ_{zz} в точке A , а на рисунке 3.6.12 - в точке 0 , определенная по длине лопатки r/R_0 .

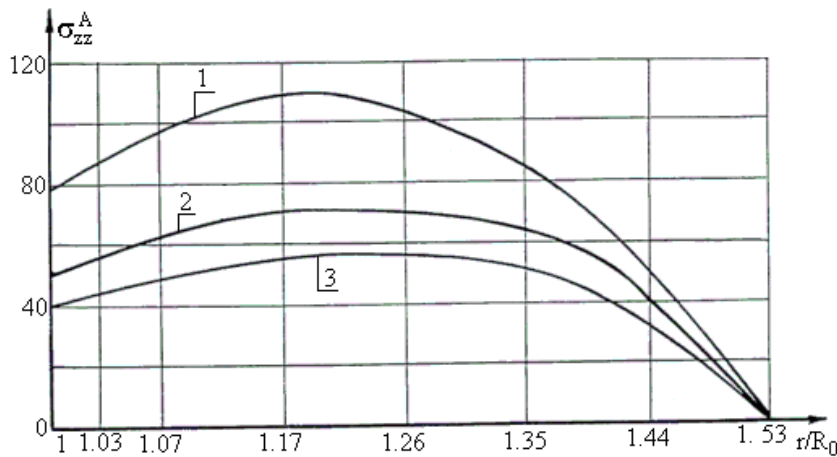


Рисунок 3.6.11 - Кривые изменения нормальных напряжений σ_{zz}^A в точке A лопатки, составленных из слоев BAL-AL (линия 1), BAL-SIC-AL (линия 2), BAL($\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$) (линия 3) по длине r/R_0 .

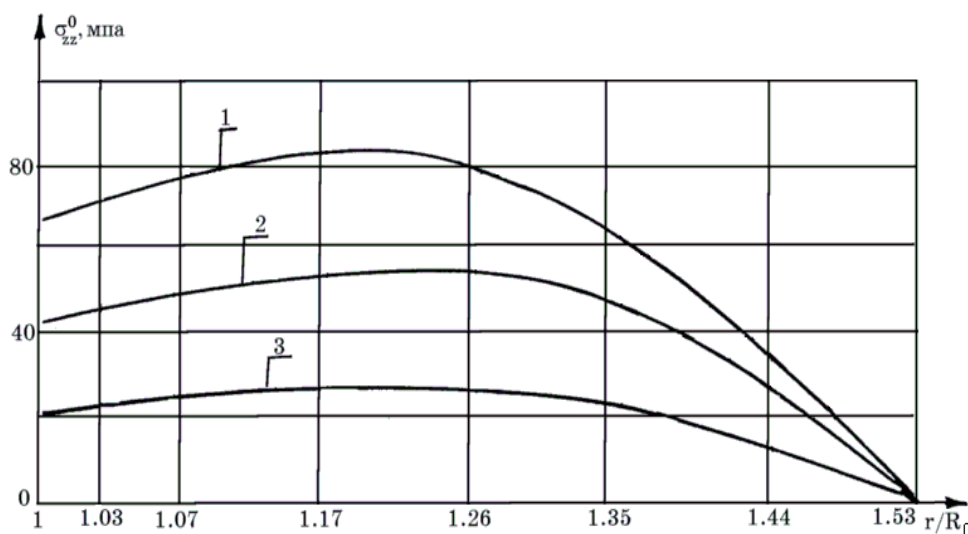


Рисунок 3.6.12 - Кривые изменения нормальных напряжений σ_{zz} в точке 0 лопатки, составленных из слоев BAL-AL (линия 1), BAL-SIC-AL (линия 2), BAL($\pm 45^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 15^\circ$) (линия 3) по длине r/R_0 .

Напряжения σ_{zz}^A , σ_{zz}^O изменяются от корневого сечения к периферийному точно также, как и напряжения σ_{cp} (рисунок 3.6.6), и имеют наибольшие значения в четвертом сечении лопатки. Как видно из рисунка 3.6.11 напряжения σ_{zz}^A имеют наименьшее значение для лопатки 3-го типа (кривая 3). Наибольшего значения напряжения σ_{zz}^A достигают для лопатки типа 1 (кривая 1). Наименьшего напряжения σ_{zz}^O достигается для лопатки 2-го типа (на рисунке 3.6.12 кривая 2). Оно связано с тем, что точка O в лопатке 2-ого типа находится вблизи слоя из менее жесткого материала (рисунок 3.6.10).

На рисунке 3.6.13 приведены уровни касательных напряжений σ_{yz} , σ_{xz} (на рисунках значения напряжений σ_{yz} отмечены знаком «●»), обусловленные начальной закрученностью лопатки. Наибольшего значения касательные напряжения достигают на кромках и по мере приближения к середине сечения уменьшаются. Касательные напряжения σ_{yz} , σ_{xz} принимают максимальное значение в четвертом сечении лопатки. Как видно из рисунка 3.6.13 уровни касательных напряжений σ_{yz} , σ_{xz} для лопаток 1-го типа распределены равномерно и наибольшее значение достигается в менее жестких слоях чистого алюминия. Уровни максимальных касательных напряжений в сравнении с напряжениями растяжения и осредненным напряжением σ_{cp} , лопатки незначительны (рисунок 3.6.13). Значения касательных напряжений σ_{xz} в два-три раза превышают значения напряжений σ_{yz} , (рисунок 3.6.13).

Уровни напряжений σ_{xz} для лопатки изменяются скачкообразно по сечению лопатки. При переходе от слоя к слою напряжения σ_{xz} меняют знак. Это обусловлено тем, что при угле укладки боралюминия $+45^\circ$, $+30^\circ$, $+15^\circ$ параметр упругости $c_{33}^i + c_{35}^i \tau \cos \alpha$ в формуле (3.6.5) имеет отрицательное значение (рисунок 3.6.14).

Уровни касательных напряжений σ_{yz} , для лопатки 3-го типа распределены равномерно (рисунок 3.6.15). Уровни максимальных касательных напряжений σ_{xz} в три раза меньше осредненных напряжений σ_{cp} . Однако, малая сдвиговая прочность, присущая перекрестно-армированным материалам под действием нагрузки

может привести к разрушению материала. Кроме того, в тонких слоях кромки лопатки, где размещены 2-3 слоя арматуры, при использовании перекрестно-армированных материалов возникают напряжения межслоевого сдвига, равные 10-15 МПа. Как известно величина прочности при межслоевом сдвиге для слоистых материалов очень мала. Вследствие этого возникновение вышеуказанных величин касательных напряжений в лопатках может оказаться не допустимым. Экспериментально установлено, что запас прочности по касательным напряжениям между слоями в настоящее время не должно быть меньше трех [126].

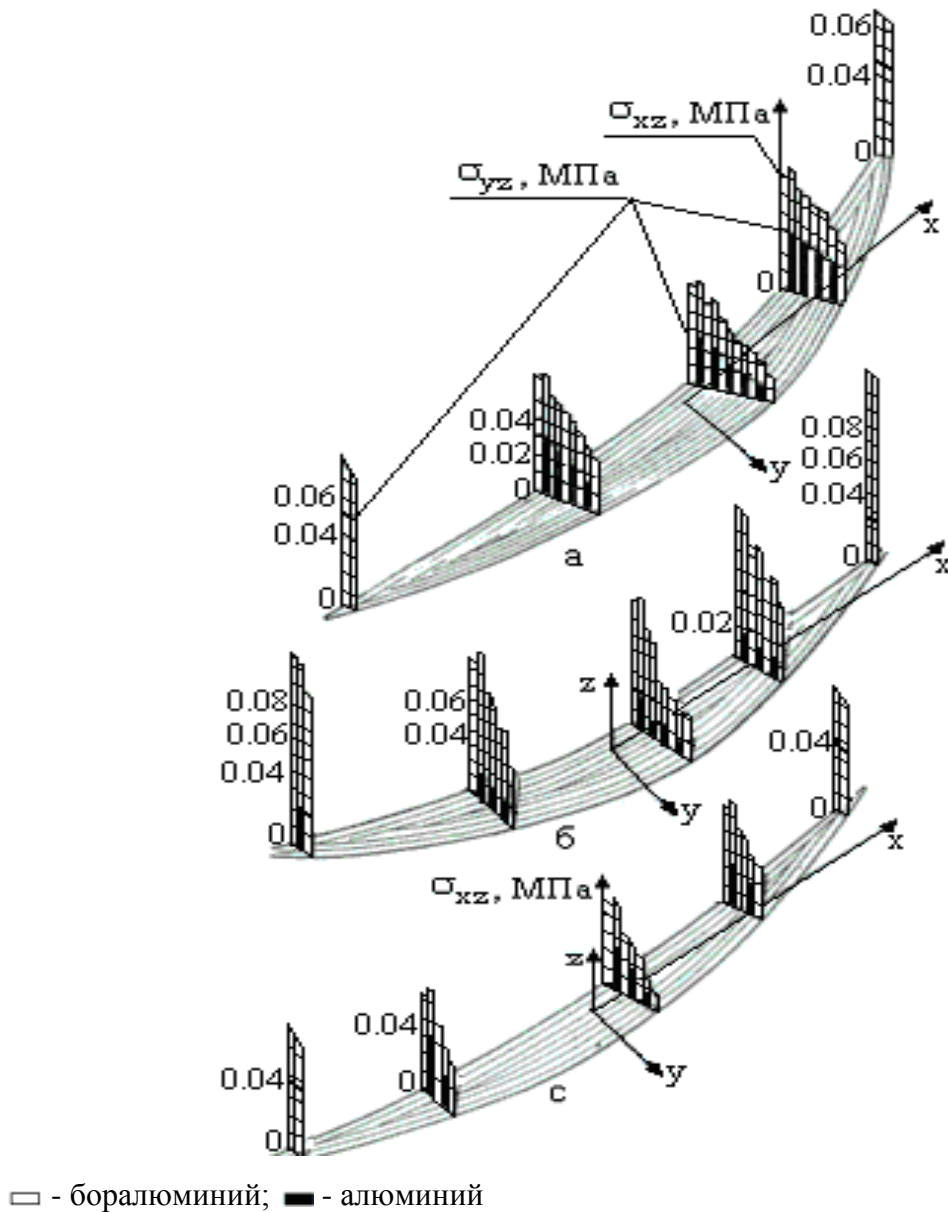


Рисунок 3.6.13 - Уровни касательных напряжений σ_{yz} , σ_{xz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (с) лопатки, армированной волокнами боралюминия и алюминия

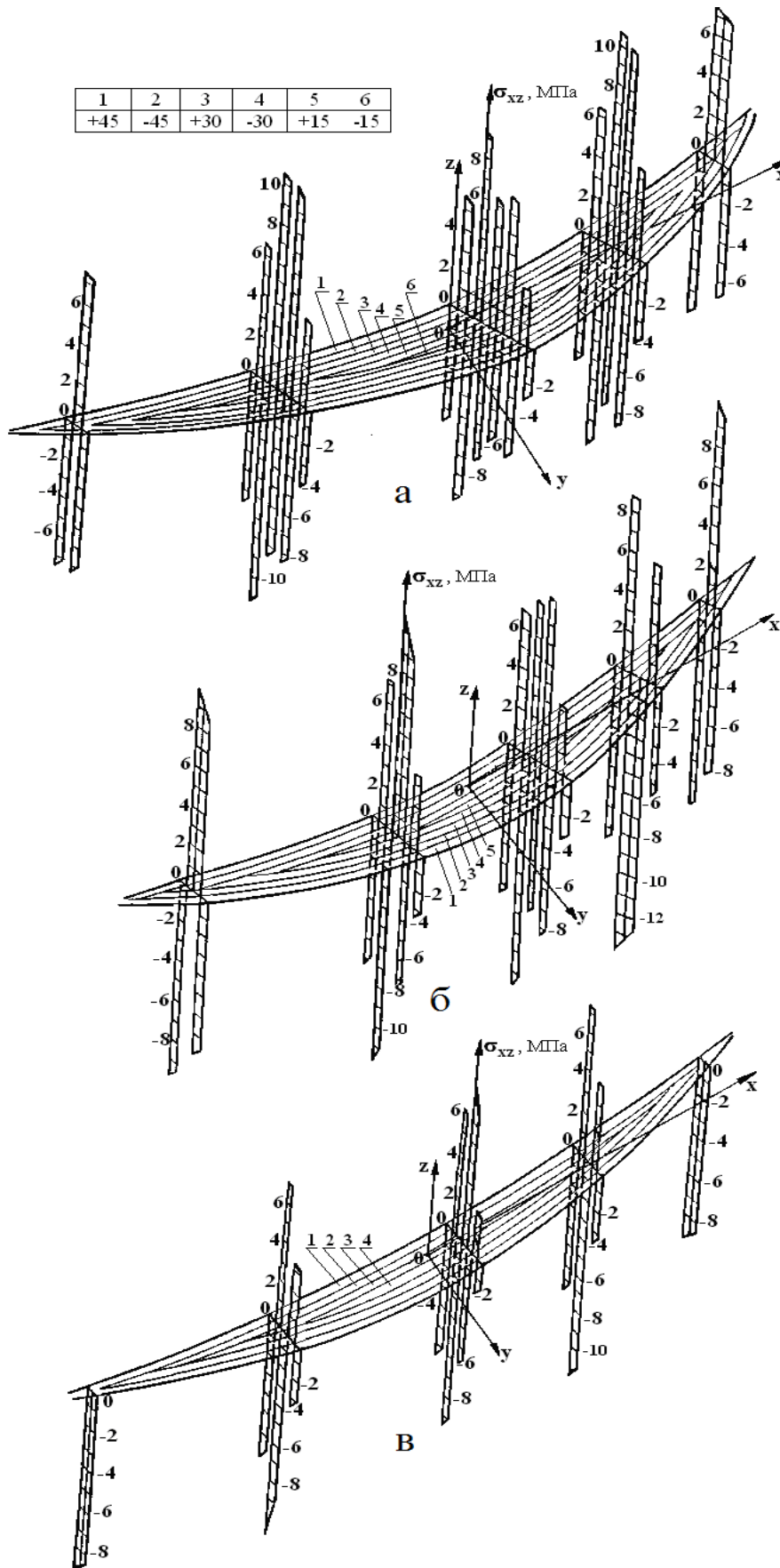


Рисунок 3.6.14 - Уровни касательных напряжений σ_{xz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия под углами $+45^{\circ}$ (1), -45° (2), $+30^{\circ}$ (3), -30° (4), $+15^{\circ}$ (5), -15° (6).

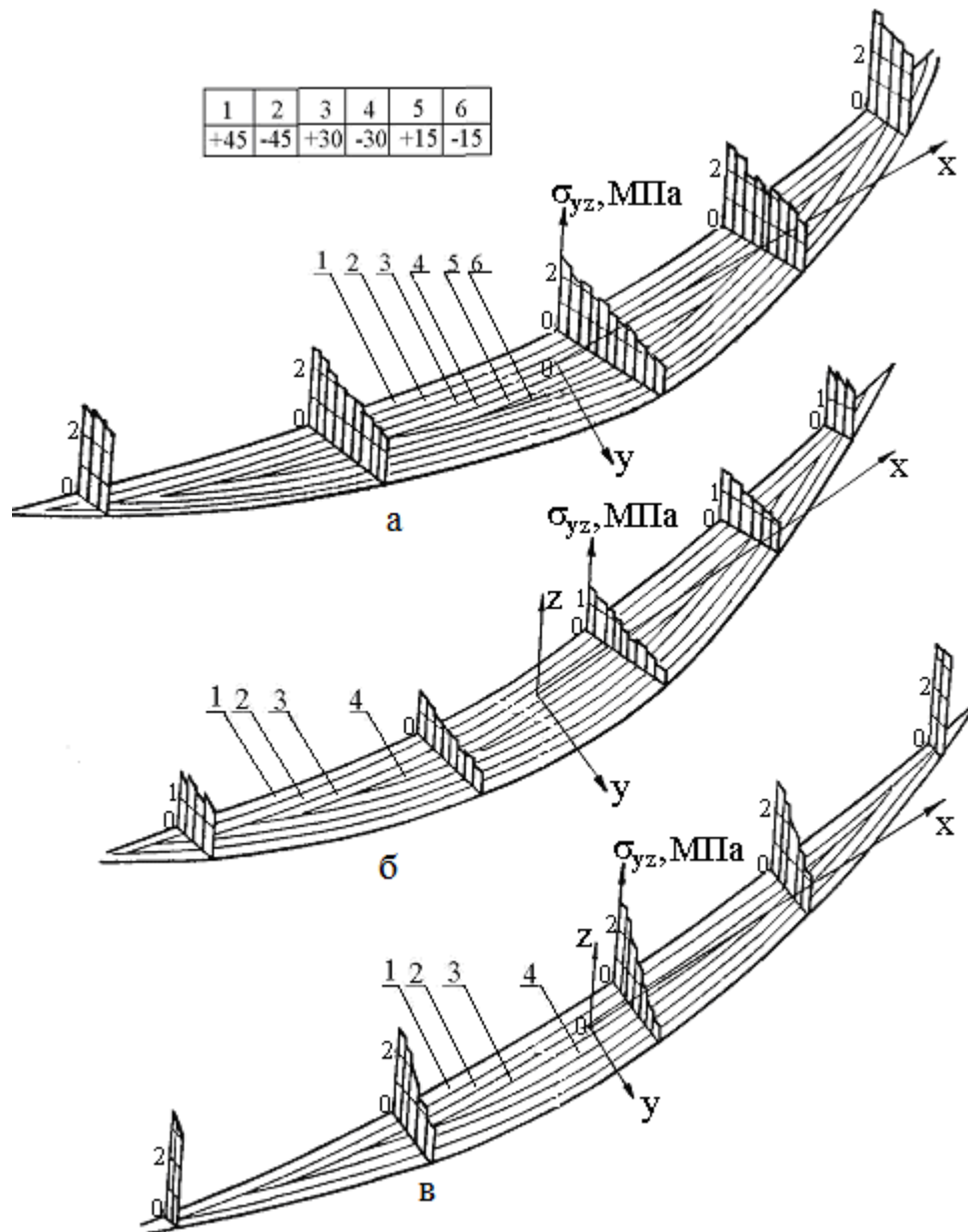


Рисунок 3.6.15 - Уровни касательных напряжений σ_{yz} во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия под углами $+45^{\circ}$ (1), -45° (2), $+30^{\circ}$ (3), -30° (4), $+15^{\circ}$ (5), -15° (6).

Выводы

Разработана методика определения НДС лопатки из КМ с учетом слоистости материала. Расчет лопатки по этой методике позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами и его положения в теле лопатки. Составленная по этой методике программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретной лопатки из ранее выбранного класса КМ. Эффективность и достоверность разработанной программы под-

тверждена сравнением расчетных результатов с данными испытаний на растяжение естественно-закрученных стержней прямоугольного сечения.

Проведенные расчеты лопаток конкретных типов показали, что угол раскрутки периферийного сечения лопатки можно уменьшить, как увеличивая жесткость на кручение посредством перекрестного армирования слоев, так и применяя в пакете материала слоев из жесткого материала на растяжение. При возрастании уровня характеристик жесткости слоев неравномерность нормальных напряжений в поперечном сечении и величина касательных напряжений между слоями увеличиваются. Наличие больших касательных напряжений между слоями возникает из-за различной жесткости контактирующих слоев. Необходим плавный переход свойств материала от слоя к слою.

Численные исследования естественно-закрученных стержней из КМ выявили зависимость угла раскрутки и степени неравномерности распределения нормальных напряжений в поперечном сечении от коэффициента упругости c_{mn}^i слоя i , а также взаимосвязанность деформации растяжения и раскрутки при растяжении.

Анализ работы многослойных КМ, в условиях близких к рабочим условиям лопаток компрессоров позволил выявить ряд особенностей распределения напряжений в армированных материалах. Установлено, что при растяжении лопаток из КМ, в поле центробежных сил во внешних слоях происходит увеличение нормальных напряжений в 2-4 раз по сравнению со средними их величинами.

Разработанная программа может служить основой машинного проектирования рабочих лопаток из КМ.

СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ АРМИРОВАННОЙ ЛОПАТКИ КОМПРЕССОРА В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ (ГЛАВА 3) И СРЕДСТВАМИ ПАКЕТА ANSYS

Рабочие лопатки компрессоров и турбин относятся к самым высоко нагруженным и ответственным деталям газотурбинных двигателей, и в большинстве случаев выход из строя двигателей связан с поломкой этих деталей. Дело в том, что лопатка представляет собой тело сложной геометрической формы. При этом в рабочем режиме наряду с газодинамическими силами она подвержена значительным центробежным и тепловым воздействиям. Эти силовые факторы вызывают связанные между собой деформации удлинения, изгиба и кручения (раскрутка).

Известно несколько подходов к расчету таких лопаток. Методы расчета рабочих лопаток авиационных газотурбинных двигателей разрабатывались в продолжение и развитие методов расчета воздушных винтов и рабочих лопаток, в основе которых лежала классическая теория тонких изогнуто-закрученных стержней Кирхгофа-Клебша. Согласно этой теории деформации стержня (удлинение, изгиб, относительная закрученность) связаны с соответствующими внутренними усилиями (продольной силой, изгибающим и крутящим моментами) и разными выражениями для формул теории призматических стержней. Задачи в такой постановке рассматривались Д.Ю. Пановым [127], С.А. Тумаркиным [128], П.М. Ризом, А.И. Пожалостиным [129], И.А. Биргером [97] и другими. Указанная постановка не позволяла объяснить раскрутку винтов и лопаток от центробежных сил. Расчет закрученных стержней с точки зрения теории упругости проводится в работе П.М.Риза [130], А.И.Лурье и Г.Ю. Джанелидзе [93], В.М. Марченко [131] и других и отличается большой математической сложностью. В работах Н.К. Меерович [132], С. Бедчер [133] динамический расчет строится на основе теории оболочек. Однако совершенствование методов расчета шло как в теоретическом плане, так и по линии учета ряда особенностей лопаток авиадвигателей (тонкие

кромки сечений, сложные закона изменения площадей сечений и т.п.). Это обусловило развитие специальных приближенных способов расчета раскрутки закрученных стержней под действием растягивавшей силы. Таковы работы Вуда и Пернига [134], В.П. Ветчинкина и Н.Н. Поляхова [135], И.А. Биргера [97], Б.Ф. Шорра [49]. В последних двух работах деформация раскручивания изучается в условиях изгибно-крутильной связанности.

В данной главе исследуется напряженно-деформированное состояние естественно-закрученной лопатки, изготовленной из композиционного материала и находящейся в поле центробежных сил.

4.1 Основные соотношения

Рассматривается естественно-закрученная армированная лопатка, находящаяся в поле центробежных сил (рисунок 5.5.1). На рисунке 5.5.1 ось Oy совпадает с осью вращения, плоскость xOz - плоскость вращения. Система координат $Oxyz$ считается неподвижной.

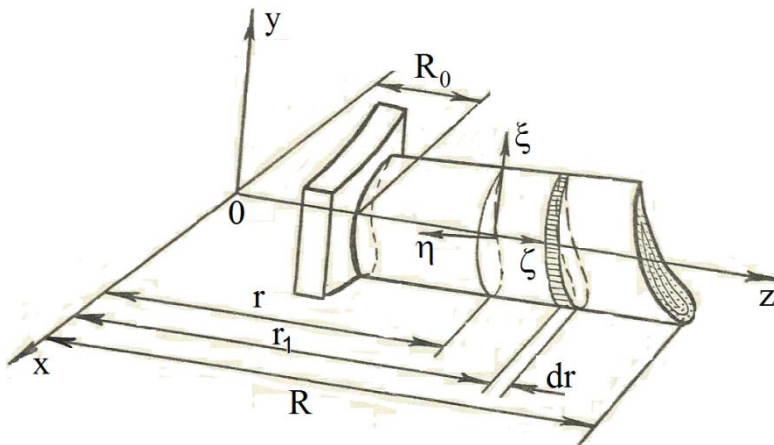


Рисунок 5.5.1 - Рабочая лопатка компрессора и системы координат.

Следуя работе [125], положим, что лопатка имеет большой угол естественной закрутки. Это означает связанность деформаций удлинения, поворота и изгиба. Начальную относительную закрутку обозначим через $\tau_0(r)$. Оно определяется по

формуле $\tau_0(r) = \frac{d\alpha_0(r)}{dr}$, где α_0 - угол закрутки (в радианах) в данном сечении.

Под действием центробежных сил растяжения точки сечений испытывают поступательные смещения, которым соответствуют удлинения центральных элементов стержня ε_z^i в слое i (3.3.4).

Для общности также предположим, что сечения испытывают повороты вокруг главных его осей x и y , т.е. лопатка изгибается. В этом случае продольные деформации в армированной слоистой лопатке определяются выражениями (3.1.10)

$$\varepsilon_z^i = \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0 r^2. \quad (4.1.1)$$

Здесь χ_y, χ_x - составляющие кривизны, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Известно, что вследствие малого сопротивления на межслоевой сдвиг, удлинение вдоль оси армированного стержня на 10-20% больше, чем металлического [39, 233]. Кроме того, основными нагрузками, вызывающими деформации лопатки, являются продольные центробежные, и поперечные газодинамические силы. Поэтому кинематические соотношения (4.1.1) учитывают различия осевых удлинений и изменений кривизн слоя, в то время, как для угла раскручивания τ такое разделение не производилось.

Считая материал слоев лопатки ортотропным, для нормальных и касательных напряжений можно записать (3.3.5) (см. глава 3)

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^i &= \varepsilon^b (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{35}^i Q_1 N_1 + \beta_{33}^i T^i, \\ \sigma_{23}^i &= \varepsilon^b \tau_0 c_{44}^i \sin \alpha - c_{44}^i Q_2 N_2, \\ \sigma_{13}^i &= \varepsilon^b (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{55}^i Q_1 N_1 + \beta_{13}^i T^i, \\ \varepsilon^b &= \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0 r^2 \tau. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Из соотношений (4.1.1) и (4.1.2) видно, что нормальные напряжения изменяются в сечении по параболическому закону. В лопатках с малым углом естественной закрутки последними членами в равенстве (4.1.1) пренебрегалось, так как $\tau_0(r_1)$ в этом случае мало, а $|\tau_0(r_1)|$ не превосходит эту малую величину $\tau_0(r_1)$. Для решения задачи используется принцип минимума потенциальной энергии (3.2.6) в виде

$$\delta\Pi = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\text{где } \Pi = W_\ell - L \quad (4.1.4)$$

В этой формуле W_ℓ - энергия упругого деформирования, L - работа внешних сил.

Для определенности рассматриваются сечения лопатки на расстоянии r ($R_0 \leq r \leq R$) от оси вращения. По методу сечения действие на тело отсеченной части заменяется поверхностными силами, приложенными к плоскости, этого сечения. Поэтому слагаемые в выражении (4.1.4) вычисляются по следующим формулам.

$$W_{\ell t} = \int_V \sigma_{kj}^i \varepsilon_{kj}^i dV \quad (4.1.5)$$

$$L = L_p + L_{iz} + L_{kp}, \quad (4.1.6)$$

где L_p - работа поверхностных сил, L_{iz}, L_{kp} - работы изгибающих и крутящих моментов, возникающих от действия на закрученную лопатку центробежных сил.

Для определения работы внешних сил необходимо найти перемещения w по формулам

$$w = \int_{R_0}^r \varepsilon_z dr_1 = \int_{R_0}^r (\varepsilon - \chi_2 x + \chi_1 y + \tau_0 r^2) dr_1. \quad (4.1.7)$$

Работа поверхностных сил вычисляется по формуле

$$L_p = \int_F P w dF = \int_{R_0}^r [P(r) \int_F \varepsilon_z dF] dr_1, \quad (4.1.8)$$

где напряжения в сечении определяются выражениями

$$P(r) = \rho^i \Omega^2 \frac{\int r_1 F(r_1) dr_1}{F(r)} = \frac{P(r)}{F(r)}. \quad (4.1.9)$$

Здесь ρ_i - плотность материала в слое i , Ω - угловая скорость вращения, $P(r)$ - центробежные силы, действующие, на сечение r .

Изгибающие моменты от центробежных сил. Главные центральные оси сечений обозначены как ζ, η , причем ζ - ось наименьшей жесткости. Угол α между осями ζ и x определяет установку профилей [125].

Различают роторы правого и левого вращения. На рис. 5.1.2 показан ротор правого вращения, который вращается по часовой стрелке, если смотреть по направлению потока газа. В этом случае по соображению газодинамики угол $\alpha > 0$.

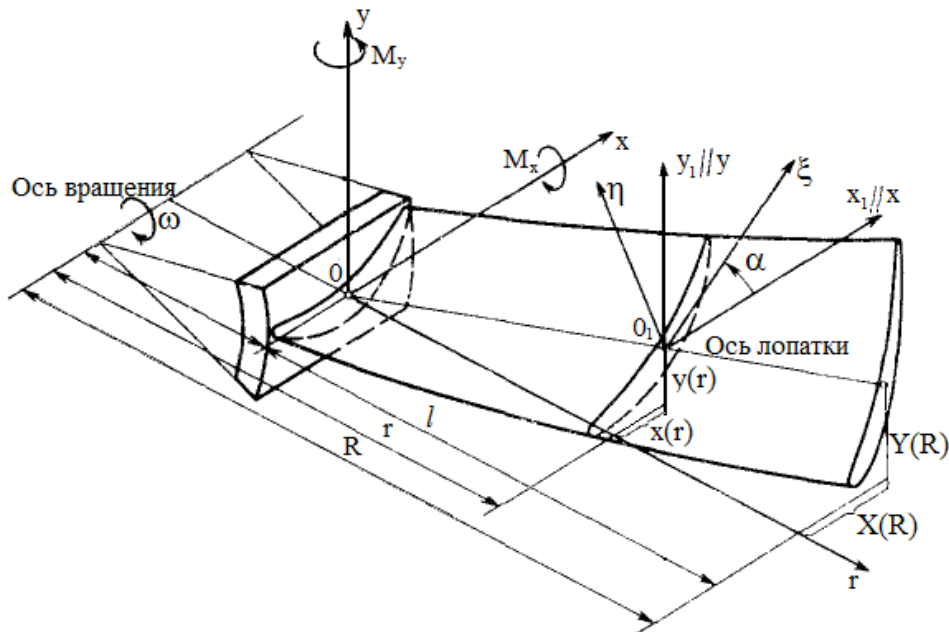


Рисунок 4.1.2 - Система координат при расчете лопаток

Отклонение оси лопатки от радиального направления (выносы центров тяжести сечений) могут быть связаны с технологией изготовления лопатки или специально предусмотренными для разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами. Выносы центра тяжести приводит к появлению изгибающих моментов от центробежных сил, которые приближенно (для корневого сечения) могут быть определены по формулам (рисунок 4.1.3) [125]

$$M_x(r_0) \approx \frac{r_0}{r_{cp}} y(r_{cp}) P(r_0), \quad M_y(r_0) \approx -x(r_{cp}) P(r_0), \quad (4.1.10)$$

где $y(r_{cp}), x(r_{cp})$ - выносы оси лопатки на среднем радиусе $x(r_{cp}) = 0.5(R - r_0)$, $P(r_0)$ - центробежная сила всей профильной части (пера) лопатки, определяемая по формуле (4.1.11) при $r = r_0$:

$$P(r) = \rho \omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) dr_1, \quad (4.1.11)$$

где R - наружный радиус лопаточного венца.

Изгибающие моменты от технологических выносов следует учитывать при больших окружных скоростях $u_R > 250 \text{ м/с}$, если их отношение к длине лопатки превышает 1% (при $u_R > 250 \div 350 \text{ м/с}$.) и 0,3% при $u_R > 350 \text{ м/с}$ [125].

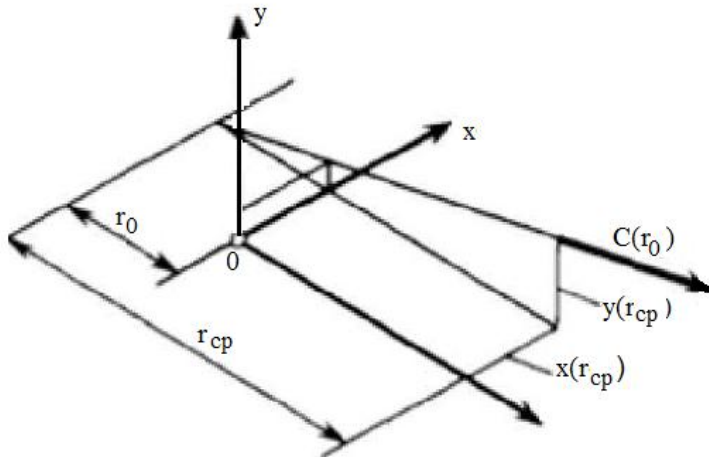


Рисунок 4.1.3 - К расчету изгибающих моментов от центробежных сил.

Для разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами осуществляют наклон оси лопатки по отношению к замку в сторону спинки (рисунок 4.1.4, а) или смещают ось лопатки вместе с замком в сторону вогнутой части профиля (рисунок 4.1.4, б) [125].

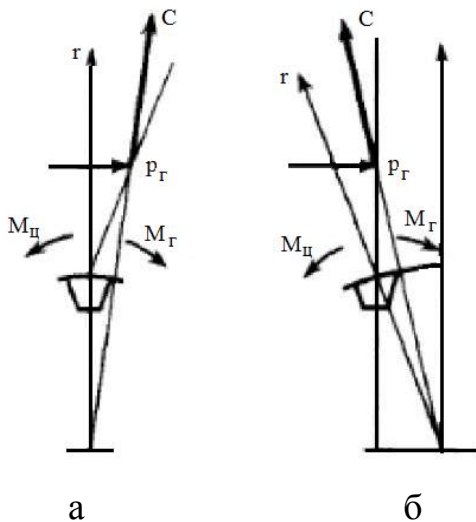


Рисунок 4.1.4 - Конструктивные способы разгрузки лопатки от изгиба газовыми силами.

В уточненных расчетах находят распределение изгибающих моментов от центробежных сил по всей длине лопатки по формулам [125]

$$M_{x1}(r) = \rho\omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) \left[y(r_1) \frac{r}{r_1} - y(r) \right] dr_1; \quad (4.1.12)$$

$$M_{y1}(r) = -\rho\omega^2 \int_r^R r_1 F(r_1) [x(r_1) - x(r)] dr_1,$$

где $r \leq r_1 \leq R$, $x(r_1)$, $y(r_1)$ - координаты центра тяжести сечения после деформации в неподвижной системе координат. Оси ξ, η , относительно которых подсчитываются моменты (4.1.13), представляют местную, не повернутую декартову систему координат с началом в центре тяжести сечения.

Моменты относительно главных осей инерции находят по формулам

$$M_\xi(r) = M_{x1}(r) \cos \alpha(r) + M_{y1}(r) \sin \alpha(r), \quad (4.1.13)$$

$$M_\eta(r) = -M_{x1}(r) \sin \alpha(r) + M_{y1}(r) \cos \alpha(r).$$

Изгибающие моменты от газовых и центробежных сил суммируют с учетом их знаков. Работа изгибающих моментов определяется формулой

$$L_{iz} = -M_\xi \int_{R_0}^r \chi_\eta dr_1 + M_\eta \int_{R_0}^r \chi_\xi dr_1. \quad (4.1.14)$$

Здесь M_ξ, M_η определяется из формулы (4.1.13). Изгибающие моменты M_{x1}, M_{y1} от центробежных сил в сечении $r=r_1$ определяются равенствами (4.1.12) [125]. При изучении деформации кручения работа крутящего момента от центробежных сил будет

$$L_{kp} = - \int_{R_0}^r M_{kp}(r) \tau(r_1) dr_1 = -M_{kp} \int_{R_0}^r \tau(r_1) dr_1 \quad (4.1.15)$$

$$M_{kp} = \left| \rho\omega^2 \int_r^R I_{\xi\eta}(r_1) dr_1 \right|. \quad (4.1.16)$$

Здесь $I_{\xi\eta}$ - центробежный момент инерции относительно осей ξ, η .

5.2 Условия равновесия и расчетные формулы

Полагая четыре параметров деформации $\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau$ независимыми, принцип минимума потенциальной энергии (4.1.4) можно представить в виде равенства

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{\partial\Pi}{\partial\chi_2}\delta\chi_2 + \frac{\partial\Pi}{\partial\chi_1}\delta\chi_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\delta\tau = 0,$$

которое, вследствие произвольности вариаций этих параметров, приводит к четырем уравнениям

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon = \frac{\partial\Pi}{\partial\chi_2}\delta\chi_2 = \frac{\partial\Pi}{\partial\chi_1}\delta\chi_1 = \frac{\partial\Pi}{\partial\tau}\delta\tau = 0 \quad (4.2.1)$$

относительно указанных четырех параметров.

Перед варьированием выражения (4.1.5) проводится интегрирование по поверхности сечения F в соотношениях (4.1.6), (4.1.7), (4.1.10). При этом учитываются формулы (4.1.2) и (4.1.9). Предполагается, что физические свойства композиции меняются как вдоль пера лопатки, так и по сечению.

Откуда легко получить разрешающую систему уравнений (3.2.4) (см. глава 3) [43,118]

$$\bar{P} = (K + 0.5\tau_0^2 L)\bar{\varepsilon} + \bar{q} + \bar{s} + \bar{\theta}, \quad (4.2.2)$$

в котором вектор обобщенных сил $P = \{P, M_2, M_1, M_t\}$ определяется через вектор обобщенных деформаций $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau\}$ и векторы $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$, устанавливающие влияние поперечных сил, напряжений в плоскости сечения и температуры. Компоненты матриц K, L и векторов $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$, приведены в (3.2.5).

Система уравнений (4.2.2) является нелинейной относительно компонент вектора обобщенных деформаций $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau\}$.

Максимальная деформация поперечного сечения ε_{j3}^{ci} ($j=1,2$) может быть выражена через заданные поперечные силы Q_j [97] энергетическим методом (см. п. 4.2). По найденным величинам ε_{j3}^{ci} вычисляются компоненты (4.2.2) вектора \bar{q} в слое i . Влияние напряжений и деформаций, действующих в плоскости поперечного сечения, может быть установлено итерационными методами, предложенными в [97] и главе I, путем решений плоской задачи теории упругости.

Координаты центра кручения могут быть найдены из условий (3.2.12)

$$k_{j4} = 0 \quad (j=2,3),$$

исключающих влияние кручения на деформации изгиба. Из условий (3.2.13) ко-

ординаты центра кручения O_k относительно систем координат K_ξ вычисляются по формуле и исключают влияние кручения на деформацию изгиба.

$$\xi_k = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{F_i} r^2 \xi c_1^i dF_i}{\sum_{i=1}^N \left(\int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i + \int_{F_i} \xi \eta c_1^i dF_i / \int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i \right)},$$

$$\eta_k = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{F_i} r^2 \eta c_1^i dF_i}{\sum_{i=1}^N \left(\int_{F_i} \eta^2 c_1^i dF_i + \int_{F_i} \xi \eta c_1^i dF_i / \int_{F_i} \xi^2 c_1^i dF_i \right)},$$
(4.2.3)

В работах [49], [92], [97], [98], [105], уравнения (4.2.1) используются в линеаризованной форме

$$\bar{P} = K\bar{\varepsilon} + \bar{\theta},$$
(4.2.4)

которая, при необходимости, может быть уточнена в соответствии с (3.2.2). Из (3.2.12) следует, что

$$\bar{\varepsilon} = K^{-1}(\bar{P} + \bar{\theta}),$$
(4.2.5)

которое используется для оценки деформированного состояние стержней, находящихся под воздействием усилия P , заданных моментов M_1 , M_2 , M_t и температуры. В дальнейшем с помощью соотношений (4.1.2) вычисляются напряжения в каждом слое i в рамках предположений, принятых при получении уравнений (4.2.5).

Применение точной теории естественно-закрученных стержней произвольного поперечного сечения на базе общих уравнений теории упругости связано с большими математическими трудностями и приводят к сложным решениям, и поэтому этот путь для разработки практических методов расчета не рационален.

В связи с этим, получена приближенная теория закрученных слоистых стержней произвольного сечения основана на определенных гипотезах, позволяющих разделить компоненты напряжений и деформаций на главные и второстепенные (см. п.2.4), которыми в ряде уравнений пренебрегаются. Достоверность приближенной теории закрученных слоистых стержней, проверяется сопоставлением с известными для некоторых частных простых случаев решениями [49], [97]

(см. п. 3.3) и сравнением результатов расчетов с экспериментальными данными (см. п. 3.4).

Физико-геометрические характеристики в (4.2.2) были введены при наиболее общих предположениях относительно формы профиля сечения, распределения физических свойств, произвольности расположения начала местных координатных осей и направлений их. В силу этого, а также из-за произвольности угла закручивания τ_0 и наличия параметра c_1^i слоя, деформации относительного удлинения, изменения кривизн и параметр раскручивания оказываются связанными между собой условиями равновесия (4.2.1) и (4.2.1). В армированном слоистом теле, таким образом, связанность деформаций усиливается по сравнению с однородным телом за счет параметров взаимодействия составляющих слоев композиционного материала. При соответствующих упрощающих геометрических и физических предположениях уравнения (4.2.2) переходят в условие равновесия однородной лопатки, полученных Биргером И.А [97] и Шорром Б.Ф. [49]. Определим из второго и третьего уравнений изменения кривизн χ_2, χ_1 и подставим их в оставшиеся уравнения в (4.2.2). Разрешая последнее уравнение относительно τ , найдем с принятой точностью выражения для вычисления параметров

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{P}{G_3^i F} - \tau_0 \frac{(I_p^i - I_d^i)}{I_g^i F} M_t, & \chi_1 &= \frac{M_1}{G_3^i I_x} - \tau_0 \frac{(I_{12}^i + I_{30}^i - T_1^i)}{I_x^i I_g^i} M_t, \\ \chi_2 &= \frac{M_2}{G_3^i I_y} + \tau_0 \frac{(I_{21}^i + I_{03}^i - T_2^i)}{I_y^i I_g^i} M_t, \\ \tau &= \frac{M_t}{I_g^i} - \frac{\tau_0}{I_g^i} \left[\frac{I_k^i}{F} P - \frac{(I_{21}^i + I_{03}^i - T_2^i)}{I_y^i} M_2 + \frac{(I_{12}^i + I_{30}^i - T_1^i)}{I_x^i} M_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Здесь приведены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F &= \int_{F_i} dF_i, & S_y^i &= \int_{F_i} x dF_i, & S_x^i &= \int_{F_i} y dF_i, & I_p^i &= \int_{F_i} r^2 dF_i, & I_{px}^i &= \int_{F_i} y r^2 dF_i, \\ I_{xy}^i &= \int_{F_i} x y dF_i, & I_x^i &= \int_{F_i} y^2 dF_i, & I_{12}^i &= \int_{F_i} y x^2 dF_i, & I_{30}^i &= \int_{F_i} y^3 dF_i, \end{aligned}$$

$$T_1^i = \int_{F_i} (r^2 - \phi'_{\psi}) x dF_i, \quad T_2^i = \int_{F_i} (r^2 - \phi'_{\psi}) y dF_i, \quad I_{py}^i = \int_{F_i} x r^2 dF_i, \quad (4.2.7)$$

$$I_{03}^i = \int_{F_i} x^3 dF_i, \quad I_{21}^i = \int_{F_i} y^2 x dF_i, \quad I_d^i = \int_{F_i} (r^2 - \phi'_{\psi}) dF_i,$$

$$I_n^i = \int_{F_i} \phi'_y x dF_i, \quad I_m^i = \int_{F_i} \phi'_x y dF_i, \quad I_k^i = \int_{F_i} \phi'_{\psi} dF_i, \quad I_{\ell}^i = \int_{F_i} (\phi'_{\psi})^2 dF_i,$$

$$I_g^i = \int_{F_i} (G_2^i I_y^i + G_1^i I_x^i + G_2^i I_n^i - G_1^i I_m^i) dF_i.$$

$$G_3^i = (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha),$$

$$G_1^i = (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha),$$

$$G_2^i = (c_{44}^i \tau_0 \sin \alpha).$$

Эти выражения для деформаций раскручивания и относительного удлинения центрального волокна сходны с формулами Биргера И.А [97] и Шорра Б.Ф. [49] и при соответствующих упрощениях совпадают с ними.

4.3 Соотношения для частных теорий и вариантов задачи

Условия равновесия и расчетные формулы предыдущего параграфа выводились при самых общих предположениях относительно распределения геометрических и физических параметров. При этом считалось, что величины $\varepsilon_z, c_1^i, \rho$ зависят как от продольной координаты z , так и от координат в сечения x и y , а величины $\varepsilon, \chi_1, \chi_2, \tau, \tau_0$ зависят только от z . Во многих важных практических случаях распределение указанных величин и параметров в теле слоистой лопатки значительно проще. Поэтому при различных упрощающих предположениях относительно распределения этих параметров можно получить соответствующие частные случаи задачи. Ниже приводятся несколько таких вариантов.

а) Армированная лопатка постоянного поперечного сечения имеет равномерную начальную закрутку τ_0 .

В этом случае во всех формулах предыдущего параграфа надо положить

$$\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0, \quad \tau_0(r) = \tau = const.$$

Кроме того, во всех формулах следует считать постоянными чисто геометрические параметры в формуле (4.2.2).

б) Упругие параметры c_1^i, ρ постоянны как вдоль пера армированной лопатки, так и по его сечению.

При таких предположениях в (4.2.2) упругие параметры композиционного материала можно вынести за знак интеграла и выбрать начало и направления осей координат в текущем сечении так, что

$$\int_F x dF = \int_F y dF = \int_F xy dF = 0, \quad \tau_0(r) = \tau = const.$$

Тогда в формулах (4.2.2), (4.2.3) и т.д. следует положить

$$S_x = S_y = I_{xy} = 0.$$

Вследствие этого в условиях равновесия (4.2.2) исчезает связность:

в первом уравнении (уравнения равновесия продольных сил) - от изменений кривизн;

в втором уравнении (уравнение моментов относительно оси y) - от осевых удлинений, изменений кривизн относительно оси x , напряжений от силы P ;

в третьем уравнении (уравнения моментов относительно главной оси x) - от осевых удлинений, изменений кривизн относительно оси y , напряжений от силы P .

Таким образом, изменения кривизн будут связаны только с соответствующими изгибающими моментами и углами раскрутки. Угол раскрутки определяется выражением

$$\tau = \frac{M_t}{I_g^i} - \frac{\tau_0}{I_g^i} \left[\frac{I_k}{F} P - \frac{(I_{21}^i + I_{03}^i - T_2^i)}{I_y^i} M_2 + \frac{(I_{12}^i + I_{30}^i - T_1^i)}{I_x^i} M_1 \right]. \quad (4.3.1)$$

Кроме того, в качестве частных случаев задачи можно рассмотреть варианты, когда некоторые внешние силовые факторы отсутствуют (или ими пренебрегается).

в) Отсутствуют повороты вокруг осей x, y , т.е. изгибающие моменты и изменения кривизн равны нулю.

Это означает, что $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0$, т.е. сечение лопатки, оставаясь плоским, испытывает только поступательное смещение и поворот вокруг оси z . Такое деформированное состояние характерно для лопатки с бесконечно большой жесткостью на изгиб. Тогда угол раскрутки определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_t}{I_g^i} - \frac{\tau_0}{I_g^i} \frac{I_k^i}{F} P. \quad (4.3.2)$$

Аналогично упрощаются выражения для деформации и напряжений.

г) Отсутствует внешний крутящий момент $M_{кр}$.

В этом случае деформации удлинения и раскрутки вызывают только растягивающие усилия. К соотношениям пункта следует добавить $M_{кр} = 0$. Деформация относительного удлинения центрального элемента определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{P}{G_3^i F},$$

для раскрутки будем иметь

$$\tau = -\frac{\tau_0}{I_g^i} \left[\frac{I_k^i}{F} P - \frac{(I_{21}^i + I_{03}^i - T_2^i)}{I_y^i} M_2 + \frac{(I_{12}^i + I_{30}^i - T_1^i)}{I_x^i} M_1 \right]. \quad (4.3.3)$$

д) Однородная теория для слоистых композиционных лопаток. В работе Каримбаева Т.Д. и Горшкова Л.А. [233] был проведен расчет напряженно-деформированного состояния армированной лопатки на основе технической теории закрученных стержней. При этом были использованы расчетные формулы однородной теории с модулями упругости, изменяющимися от слоя к слою. Вследствие этого, например, выражение для раскрутки (4.3.1) переходит в формулу совпадающую с выражением для угла раскрутки работы [233].

е) Однородная теория для металлических лопаток.

При равномерном распределении физических свойств материала получаются формулы классической теории для однородных лопаток, для этого надо вынести параметры упругости в (4.2.15) за знак интеграла. При этом, например, формулы для раскрутки (4.3.1) совпадают с выражением работы Биргера И.А. [103] и Шорра Б.Ф. [49].

Анализ напряженно-деформированного состояния слоистых композиционных лопаток является в математическом отношении весьма сложной проблемой. При реализации задач на ЭВМ необходимо учесть целый комплекс таких особенностей деформирования лопатки, как сложность геометрии тела, переменность физических свойств, специфику действия нагрузки и т.д. Поэтому, разработанная программа для ЭВМ состоит из блоков: формирование раскрыя сечения по заданной толщине слоя и координатам точек контура (см.п.1.5); поэлементный подсчет интегральных физико-геометрических характеристик для каждого слоя (см.п.1.5.3), вычисление внешних усилий для данного сечения, определение искоемых величин для каждого расчетного сечения лопатки (см.п.3.6). При этом программа составлена таким образом, что позволяет путем выбора упругих параметров слоев при неизменных геометрических характеристиках управлять углом раскрутки и нормальными и касательными напряжениями (см. п. 3.6).

Для композиций, используемых в качестве несущих конструкционных материалов, наиболее характерным является регулярность их внутренней структуры. На рисунке 1.3.2 (см. глава 1) приведены результаты машинного раскрыя слоистой лопатки, для восьми различных сечений, повернутых друг относительно друга.

В главе 1 дано подробное описание принципов построения алгоритмов раскрыя и подсчеты физико-геометрических характеристик, приведена блок-схема программы. В качестве примера было проведено численное определение углов раскрутки по формуле (4.3.2) зависимости от угловой скорости Ω .

Для определения НДС лопаток, находящихся в поле центробежных сил были проведены численные эксперименты по прикладной программе Ansys (см.п.4.4). Для этой программы были заданы геометрия слоистого сечения (8 сечений) компрессорной лопатки (см. рис.1.5.2), вычисленные по специальной программе на алгоритмическом языке фортран (см. п. 1.5) и была создана ее твердотельная модель на Ansys. В этой программе послойная разбивка (каждый слой составлен из различных ортотропных материалов) на конечные элементы по длине лопатки привели к конфликтным ситуациям в программе Ansys. Это связано с тем, что лопатка имеет переменную ширину и толщину, и это приводит к появлению ко-

ротких лепестков из разнородных материалов по длине лопатки. Такая ситуация не позволяет в программе Ansys разбивать на конечные элементы лопатку по длине. Для решения этой проблемы нужно разбить структуру лопатки на мелкие конечные элементы. В этом случае появляется необходимость склеивания внутренних слоев из разнородных материалов и использование более мощных ЭВМ. Однако, если материал лопатки считать однородным (или ввести эффективные параметры упругости сечения) по длине стержня, то расчеты по этой программе можно получить. В этом случае учет ряда особенностей лопаток авиадвигателей (тонкие кромки сечений, сложные законы изменения площадей сечений, влияние отдельного слоя на НДС и т.п.) будет пропущены. Для сравнения с результатов расчета НДС компрессорной лопатки находящихся в поле центробежных сил, полученными в п.4.6, были проведены в аналогичной постановке расчеты на НДС с использованием прикладной программы Ansys. Рассматривается компрессорная лопатка из одного материала - боралюминия. Результаты расчета согласуется с результатами расчетов п.3.6.

4.4 Численное определение напряженно-деформированного состояния композиционных лопаток компрессора в поле центробежных сил средствами пакета ANSYS

Естественно-закрученная слоистая композиционная лопатка находится под действием растягивающих сил. Лопатка, исследуемая в данной программе представлена восемью сечениями (см. глава1, рисунок 1.5.2)

Очертание лопаток турбомашин в перспективных двигателях становятся более сложными. Наблюдается переход в конструкциях лопаток вентиляторов, компрессоров и турбин от очертаний, близких к стержням с закруткой и большим относительным удлинением, к очертаниям типа пластин с малым относительным удлинением, большой закруткой и кривизной. Вместо современных металлических сплавов начинают применять интерметаллические соединения, композиты с металлической матрицей и композиты с керамической матрицей. По мере совер-

шенствования методов расчета современных реактивных двигателей геометрические характеристики, аэродинамические и температурные нагрузки на диски и барабаны с лопатками становятся более определенными, что дает возможность применять численные методы для определения напряженно-деформированного состояния НДС лопаток. Перспективные, модели воздушных винтов имеют лопасти с большим углом стреловидности, закрученные по размаху и изогнутые, относительно оси вращения. Эти лопасти должны работать в весьма сложных и тяжелых аэромеханических условиях.

Подобные конструкции известны уже давно, но до сих пор отсутствовали средства для их расчета и материалы для их изготовления. В настоящее время благодаря появлению быстродействующих ЭВМ и сложного инженерного программного обеспечения, а также наличию современных композиционных материалов стало возможным более тщательный и точный анализ лопастей перспективных турбовинтовых двигателей. Поэтому, используя профиль компрессорной лопатки (рисунок 1.5.2), численно определено НДС лопаток из композиционного материала [137].

Входными параметрами программы являются координаты линии, ограничивающие отдельное произвольное плоское сечение (количество их 8), обычно задаваемое в рабочих чертежах проекта.

Входными параметрами для программы являются растягивающее усилие P от центробежных сил, который определяется с заданием параметра частоты вращения (обор/мин), а также 13 (1.3.7) упругих постоянных для текущего сечения лопатки и ρ плотность материала сечения лопатки.

1. Описание исследуемой лопатки. Рассматриваемая модель лопасти является уменьшенным вариантом натурной компрессорной лопатки. Геометрия лопатки полностью описана в пункте 4.6. Относительный угол закрутки на единицу длины лопатки τ_0 - равен 0.006 рад/мм. На рисунке 4.4.1 приведена разбивка на конечные элементы лопатки и на рисунке 4.4.2 – 4 сечение [137].

2. Расчетные варианты. В качестве примера по программе была рассчитана лопатка из композиционного материала в поле центробежных сил. При этом рас-

сматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев боралюминия (BAL).

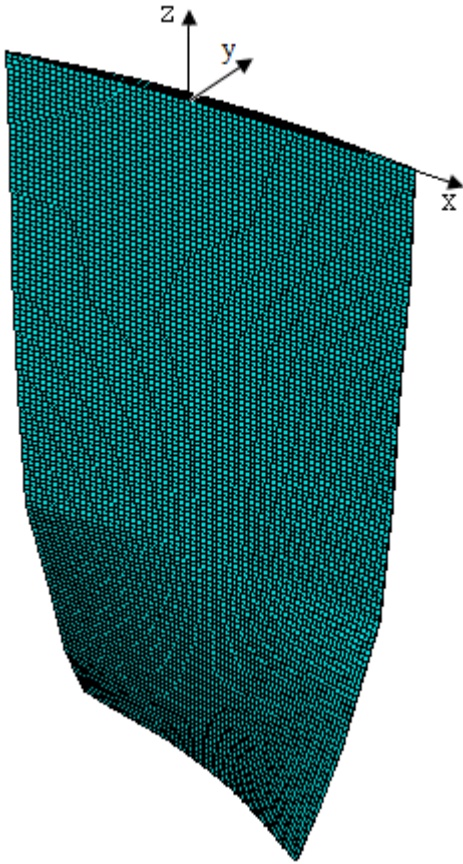


Рисунок 4.4.1 - Разбивка на конечные элементы корытца лопатки

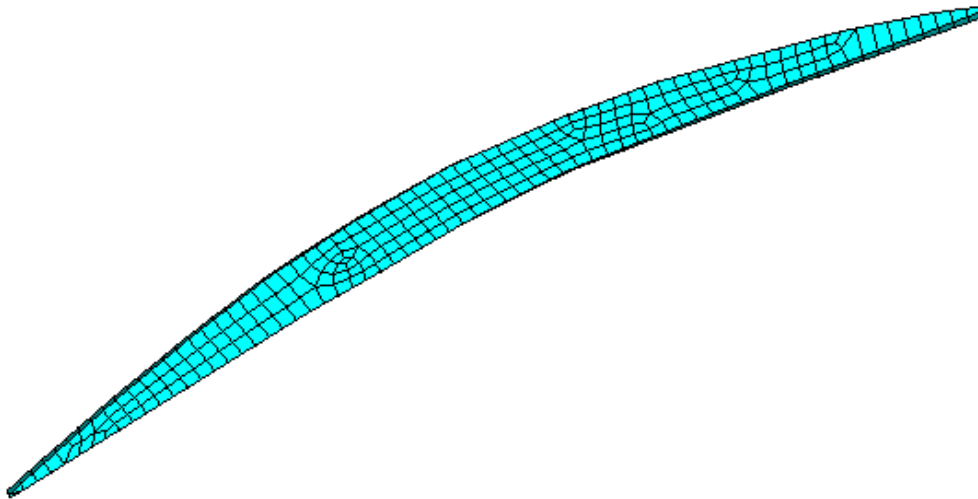


Рисунок 4.4.2 - Разбивка на конечные элементы 4-го сечения лопатки

3. Анализ результатов расчетов. Осредненные значения растягивающих напряжений σ_{cp} в условно незакрученной лопатке достигают наибольшего значения в третьем сечении. Это связано с тем, что усилие P в третьем сечении отличается

от усилия в корневом на 17%, в то время как их площади отличаются на 45% (см.п. 3.6, глава 3) [155].

По результатам расчетов построены изолинии распределения перемещения W, U, V по длине лопатки для спинки (выпуклая сторона сечения) и корытца (вогнутая сторона сечения) (рисунок 4.4.3).

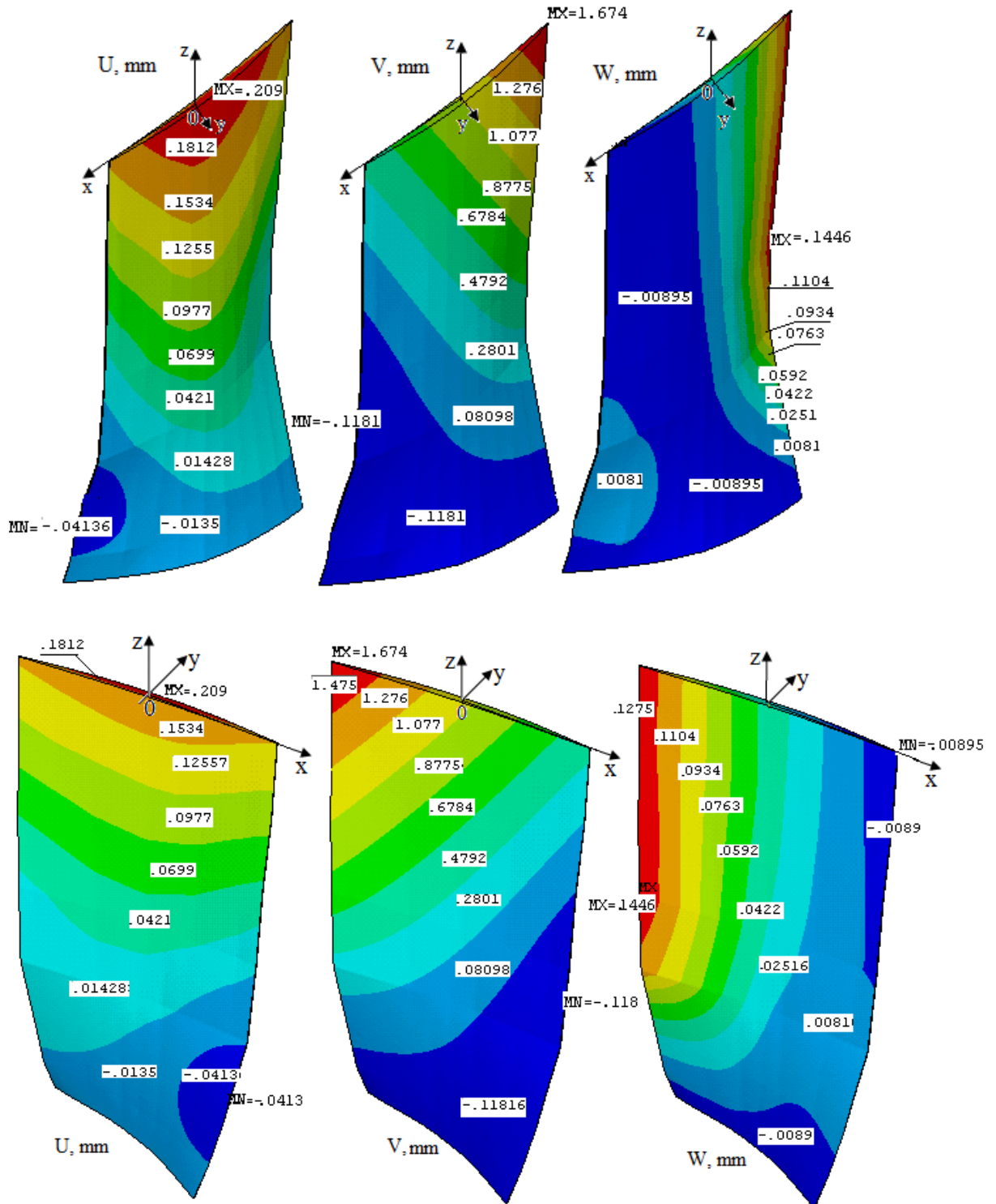


Рисунок 4.4.3 - Распределения перемещения U, V, W на спинке и корытце по длине лопатки из алюминия

Как видно из рисунка нормальные перемещения W на периферийном сечении имеют максимальные значения (точка MX). На входной кромке спинки от корневого сечения до третьего сечения перемещения W растут 4-5 раз, а на тонких выходных кромках они растут 10 раз. Распределение нормального перемещения W и перемещений U, V на спинке более равномерно по сравнению с корытцем лопатки. На корытце концентрация больших перемещений W наблюдается уже в четвертом сечении лопатки. Поэтому, чтобы увеличить прочность лопатки необходимо слои со стороны корытца заменить материалами более жесткими на растяжение.

На рисунке 4.4.4 приведена деформация лопатки U_x, V_y, W_z относительно оси $0x, 0y, 0z$. Наибольшее изменение происходит на втором сечении лопатки. Значение сжимающей деформации относительно оси $0x$ на выходной кромке в 3-4 раза больше чем на входной кромке лопатки. Вследствие этого в тонких слоях выходной кромки может происходить местные потери прочности и поэтому эти слои необходимо заменить материалами со свойствами более прочными на сжатие.

Наибольшее изменение деформация лопатки относительно оси $0y$ происходит на третьем сечении лопатки. Значение растягивающих деформации относительно оси $0y$ на выходной кромке в 2 раза больше чем на выходной кромке второго сечения лопатки и по своему значению больше в 3 раза чем сжимающая деформация относительно оси $0x$. Следовательно в тонких слоях выходной кромки, чтобы избежать потери прочности от сжимающих и растягивающих деформации эти слои необходимо заменить материалами со свойствами более прочными на растяжение и сжатие.

На рисунке 4.4.5 приведено распределение напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ на спинке и на корытце по длине лопатки. Наибольшее нормальное напряжение распределено на корневом сечении лопатки (точка MX), так как корневое сечение лопатки жестко закреплено. Если это не учитывать, то наибольшие напряжения достигаются в третьем сечении лопатки и концентрация нормальных напряжений на корытце больше 1.5-2 раза по сравнению нормальными напряжениями на спинке. Концентрация нормальных напряжений в третьем сечении меньше в 4-5 раз по сравнению с его значениями в корневом сечении. На периферийных сечениях

спинки появляются сжимающие напряжения, обусловленные взаимосвязанностью изгиба, кручения и растяжения. Средние напряжения по сравнению с напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} в 1,5-2 раза больше и по ним нельзя определить области сжимающих напряжений (рисунок 4.4.6). Следовательно, для определения НДС лопатки необходимо вычислять все компоненты напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} .

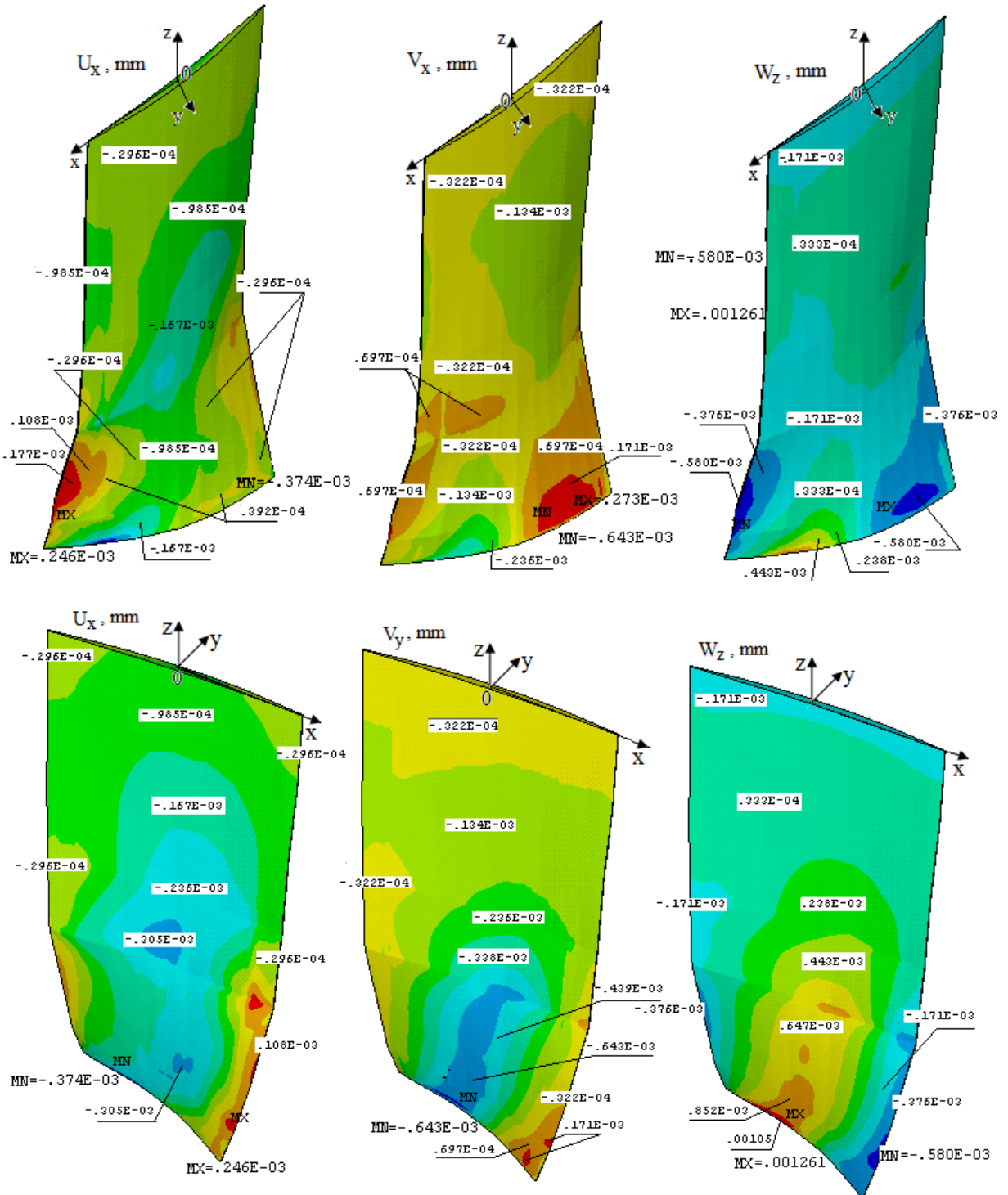


Рисунок 4.4.4 - Распределения деформации U_x , V_y , W_z на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

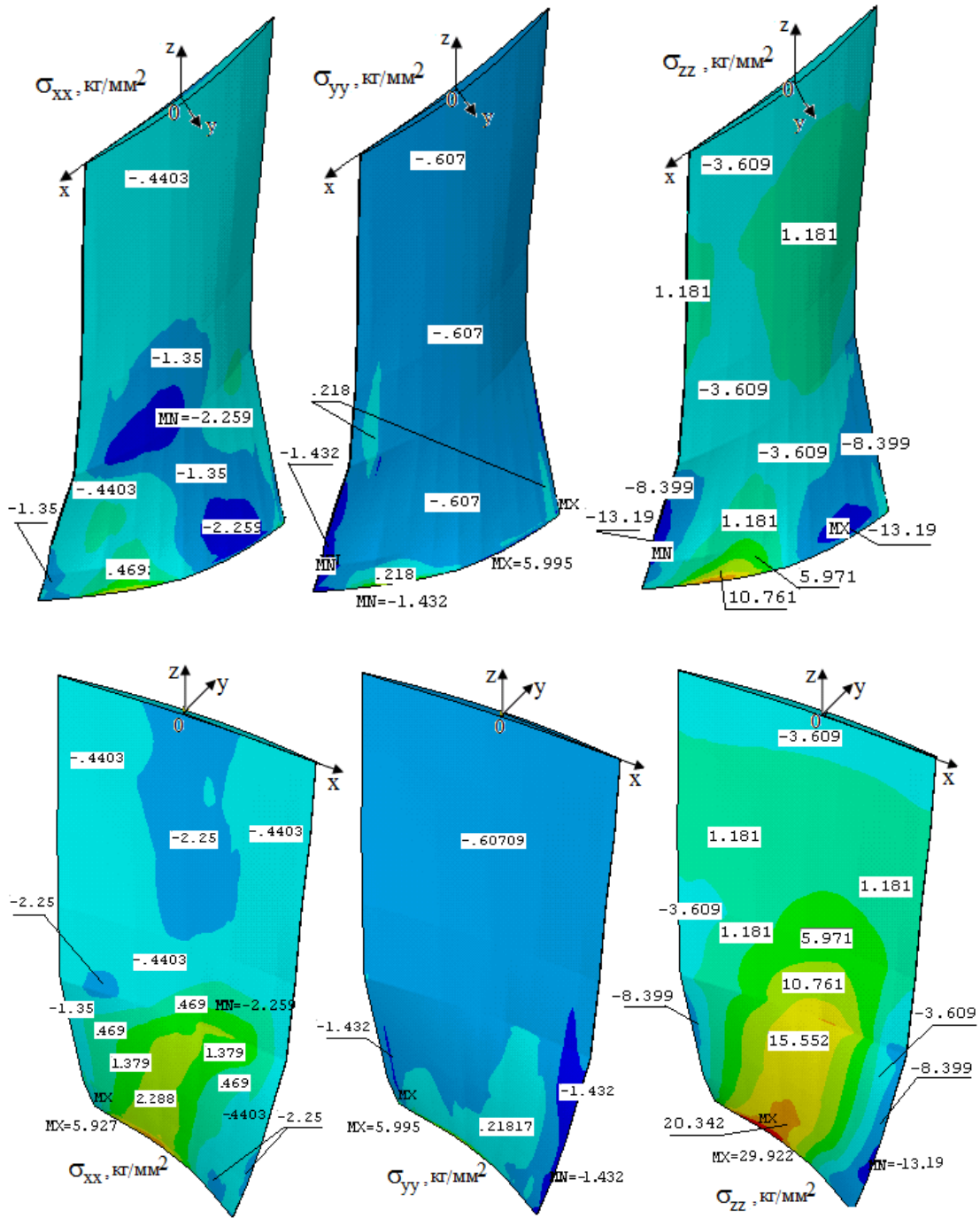


Рисунок 4.4.5 - Распределения напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

На рис. 4.4.7 приведены распределение касательных напряжений σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{xy} на спинке и на корытце по длине лопатки. Наибольшее касательное напряжение действует в третьем сечении лопатки. Локальное наибольшее касательное напряжение σ_{xz} достигается в третьем сечении у входной кромки спинки и на выходной кромке корытце и его значение (точка MN) больше в 2 раза по сравнению со значениями σ_{xz} у входной кромкой спинки (точка MX).

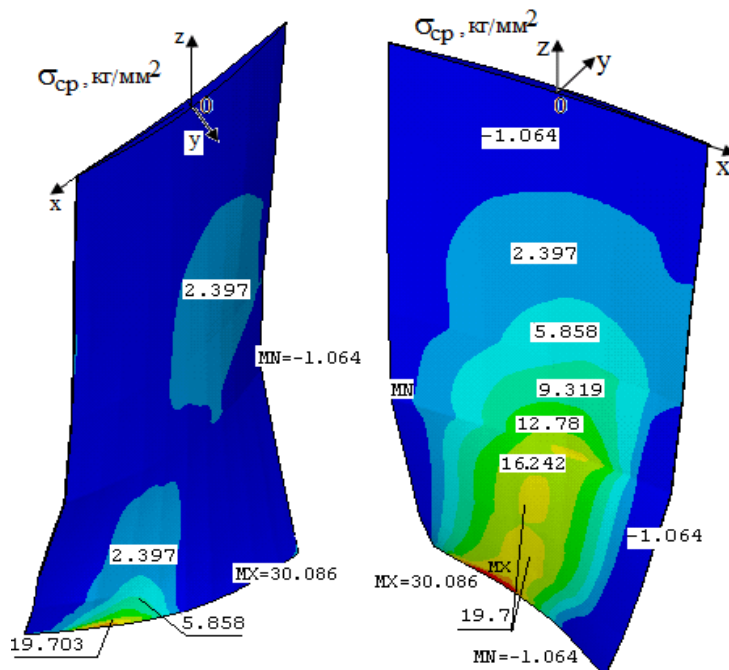


Рисунок 4.4.6 - Распределения осредненного напряжения $\sigma_{ср}$ на спинке и на корытце по длине лопатки из боралюминия.

Как известно в тонких слоях такие концентрации касательных напряжений могут привести к местной потере прочности лопатки. Вследствие этого возникновение вышеуказанных величин касательных напряжений в лопатках может оказаться не допустимым. Экспериментально установлено, что запас прочности по касательным напряжениям между слоями в настоящее время не должно быть меньше трех [126]. Касательные напряжения σ_{yz} по величине в два раза меньше чем касательные напряжения σ_{xz} и распределяется относительно на толстых слоях спинки и корытца. Поэтому по сравнению с касательными напряжениями σ_{xz} их влияние на общую прочность лопатки незначительны.

Касательные напряжения σ_{xy} своего наибольшего значения достигают в третьем сечении (точка *MX*) (рисунок 4.4.7). По сравнению с значениями касательных напряжений σ_{yz} , σ_{xz} касательное напряжение σ_{xy} незначительно. Поэтому можно его и не учитывать при расчетах.

На рисунке 4.4.8 приведена изолиния распределения перемещений в 4-ом сечении лопатки. Из рисунка видно, что зона перемещений на корытце больше по своему значению на 25% от перемещений на спинке и наибольшие перемещения в середине спинки сечение лопатки. Наибольшие перемещения U происходит в

близлежащих к центру тяжести слоев спинки, а перемещения V , W на выходной кромке лопатки (точка MX). Вследствие этого необходимо подбирать материалы слоев близлежащих к центру тяжести и выходных кромках сечения с свойствами более прочными на растяжение.

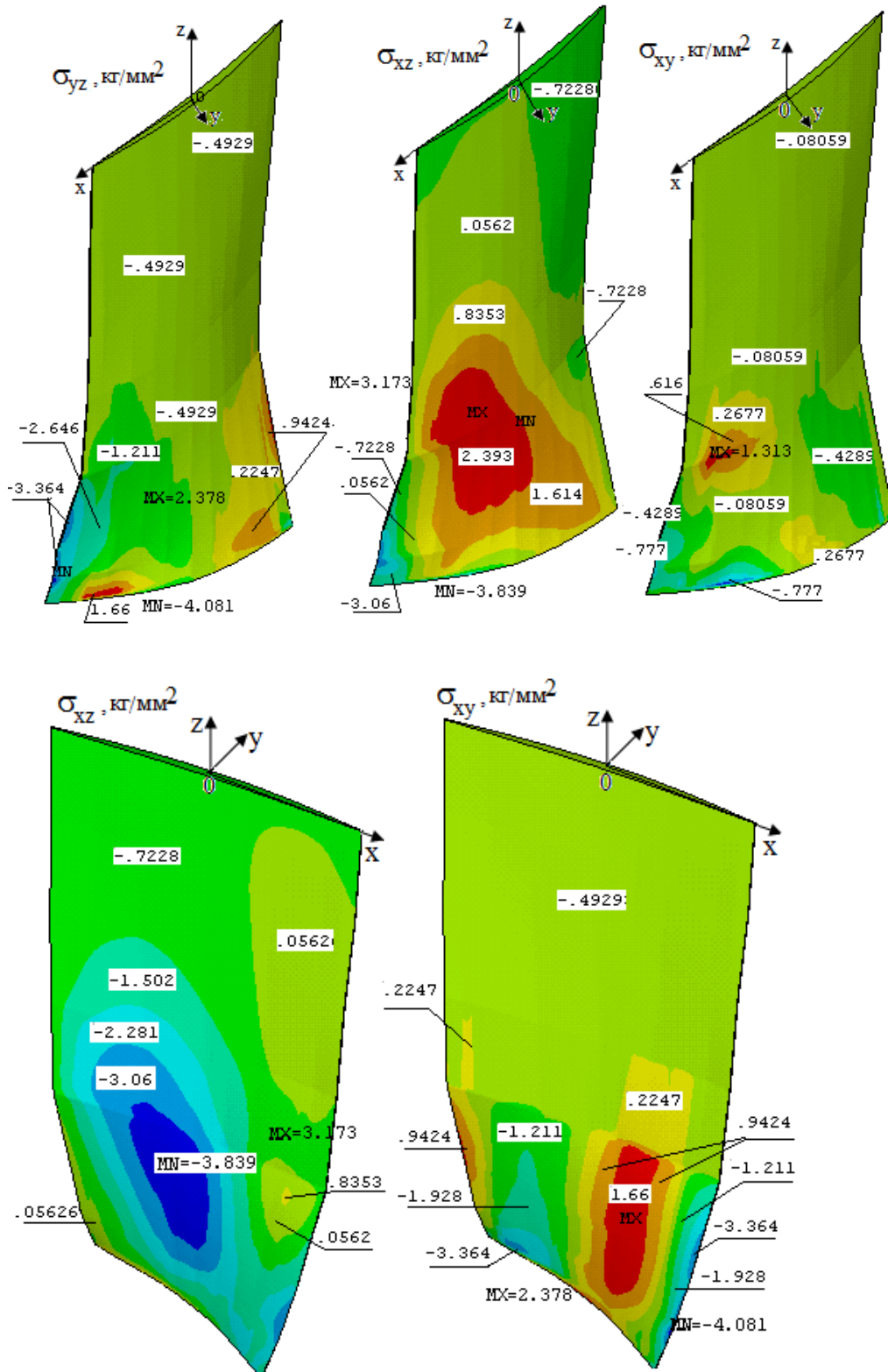


Рисунок 4.4.7 - Распределения касательного напряжения σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{xy} на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

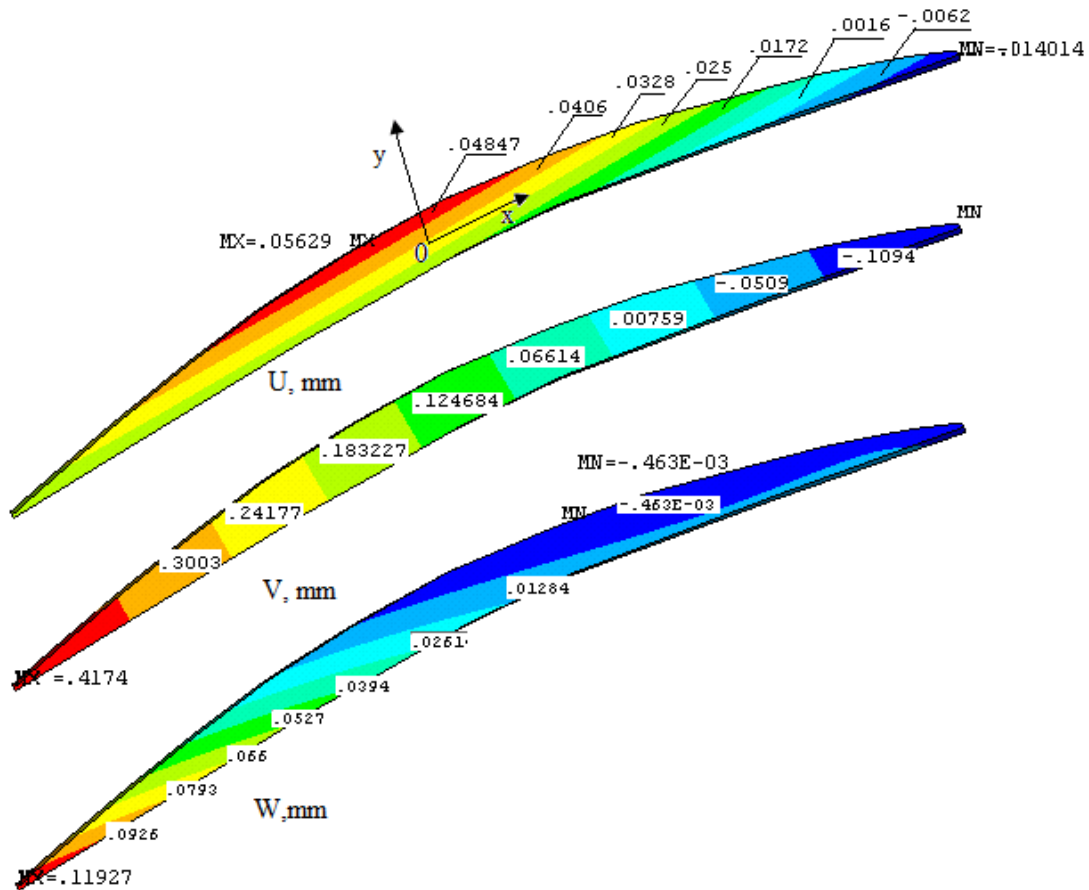


Рисунок 4.4.8 - Распределения перемещения U , V , W на 4-ом сечение лопатки из боралюминия.

На рисунке 4.4.9 приведены изолинии распределения напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} в 4-ом сечение лопатки. Из рисунка видно, что зона концентрации нормального напряжения σ_{zz} на корытце больше по своему значению в 20 раз от нормальных напряжений σ_{zz} на спинке и наибольшие нормальные напряжения приходятся на середину корытца сечения лопатки. Наибольшие нормальные напряжения σ_{zz} действуют в точках близлежащих к центру тяжести слоев корытца и сравнимы с величинами среднего напряжения (рисунок 4.4.11). Вследствие этого необходимо подбирать материалы слоев близлежащих к центру тяжести сечения с свойствами более прочными на растяжение.

Таким же образом распределение касательного напряжения σ_{xy} (рисунок 4.4.10) в 4-ом сечении лопатки показывает, что зона концентрации касательного напряжения σ_{xy} меньше по своему значению на 200%-300% от нормальных напряжений σ_{zz} . Наибольшие касательные напряжения σ_{xy} действуют в близлежа-

щих к центру тяжести слоев корытца. В тонких слоях (4 сечение) входной и выходной кромках лопатки сдвигающие касательные напряжения распределены равномерно. Значения касательных напряжений σ_{xy} в зонах концентрации сравнимы со значениями напряжений σ_{yz} , σ_{xz} . Поэтому материалы в слоях близлежащих к центру тяжести должны иметь свойства более прочные на растяжение и сжатие

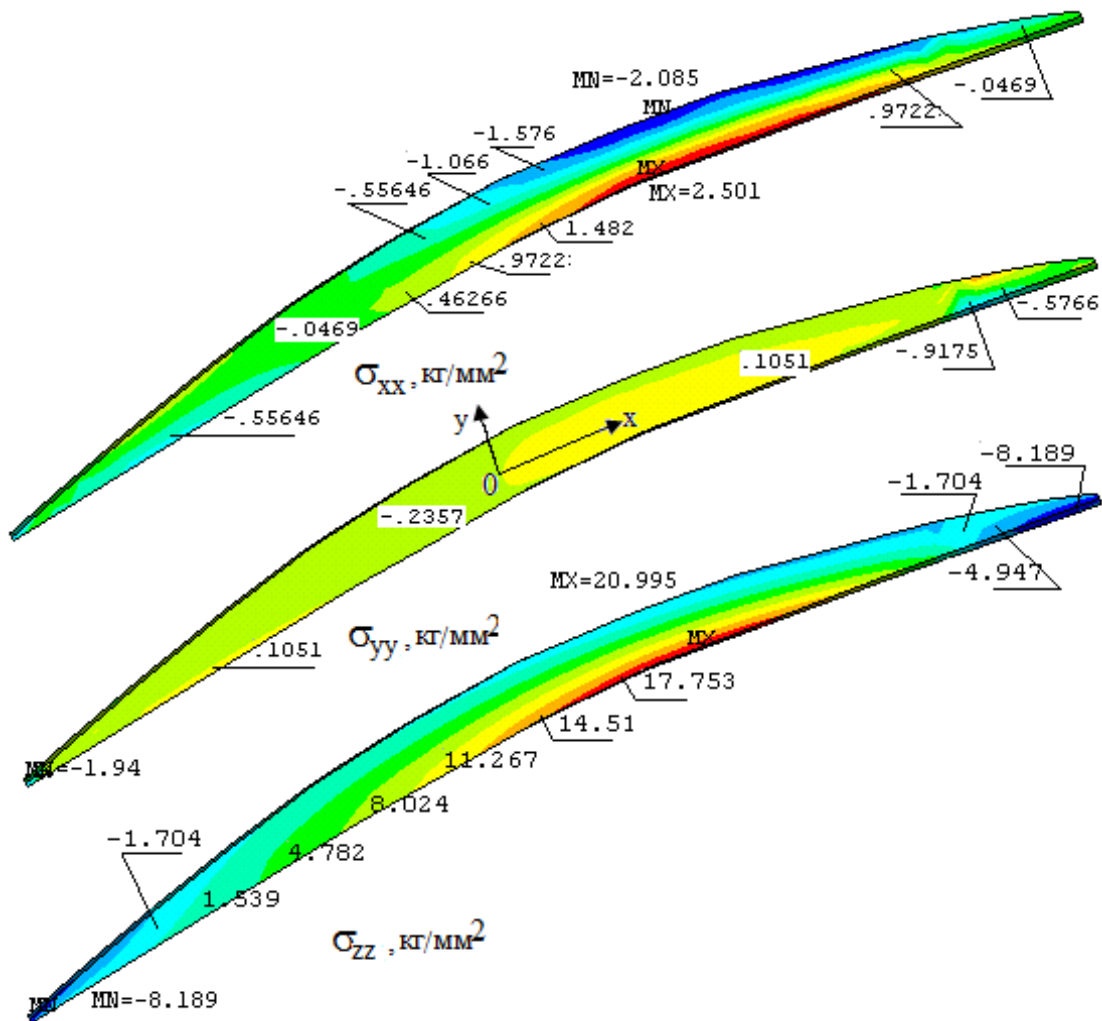


Рисунок 4.4.9 - Распределения напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} на 4-ом сечение лопатки из боралюминия

Изолинии распределения касательного напряжения σ_{yz} в 4-ом сечении лопатки показывают, что зона распределения касательного напряжения σ_{yz} меньше по своему значению на 15-20 раз от нормальных напряжении σ_{zz} . Наибольшие касательные напряжения σ_{yz} распределяется в слоях входной кромки лопатки и по своему значению незначительны.

Изолинии распределения касательного напряжения σ_{xz} в 4-ом сечении лопатки показывают, что зона распределения касательного напряжения σ_{xz} меньше по своему значению в 5-7 раз от нормальных напряжений σ_{zz} . Наибольшие касательные напряжения σ_{xz} распределяются в слоях средней части спинки, корытце. В тонких слоях (4 сечение) выходной кромки лопатки касательные напряжения распределены равномерно и по своему значению незначительны. Наибольшие касательные напряжения σ_{xz} по своему значению больше в 4-6 раз по сравнению со значениями касательного напряжения σ_{yz} , а от значения нормального напряжения меньше в 5-7 раз. Поэтому для слоистых тонких стержней учет влияния касательного напряжения σ_{xz} необходим.

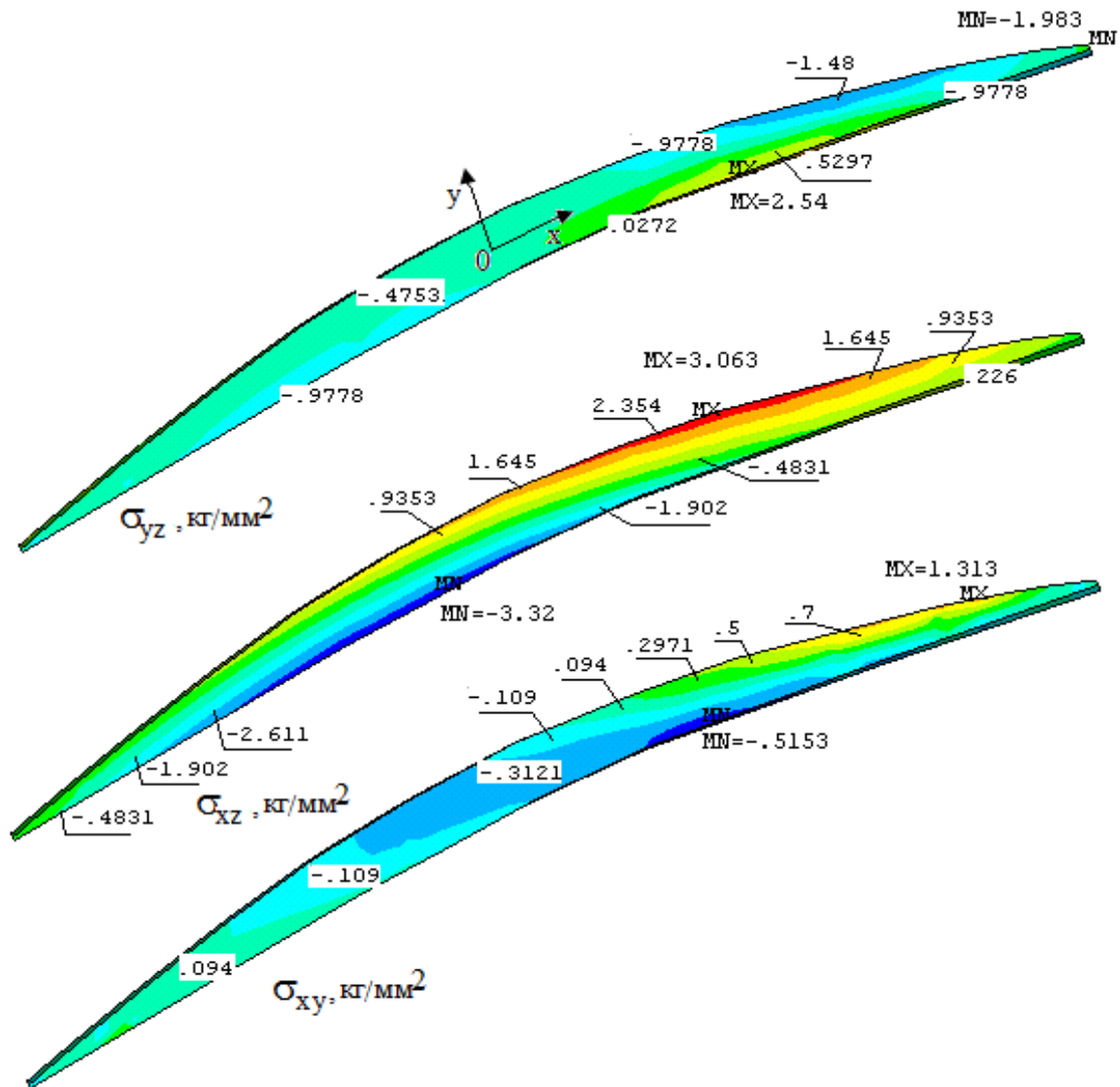


Рисунок 4.4.10 - Распределения напряжения σ_{yz} , σ_{xz} , σ_{xy} на 4-ом сечении лопатки из бора-люминия

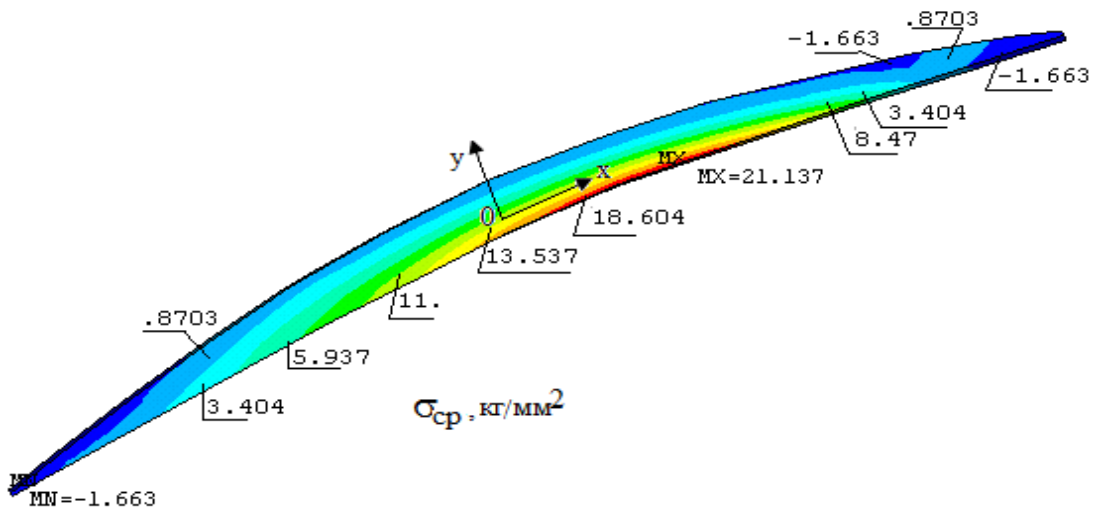


Рисунок 4.4.11 - Распределения напряжения $\sigma_{ср}$ на 4-ом сечение лопатки из бороалюминия

Выводы

Таким образом, в исследованных примерах показано, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же физических оборотах ротора. Для лопаток из изотропного материала такой широкой возможности регулирования не имеется.

Таким образом, при заданной геометрической форме лопатки, выбираемой из аэродинамических соображений, посредством перекрестного армирования ее слоев уровень напряжений σ_{zz} можно уменьшить, одновременно избежав больших сжимающих напряжений на кромках профиля и достичь более равномерного распределения их (σ_{zz}) по сечению.

Проведенные расчеты лопаток конкретных типов показали, что угол раскрутки периферийного сечения лопатки можно уменьшить, как увеличивая жесткость на кручение посредством перекрестного армирования слоев, так и применяя в пакете материал слоев из жесткого материала на растяжение. При возрастании уровня отношения свойств контактирующих слоев, неравномерность нормальных напряжений в поперечном сечении и величина касательных напряжений между слоями увеличиваются. Наличие больших касательных напряжений между слоями происходит из-за различной жесткости контактирующих слоев. Необходим плавный переход свойств материала от слоя к слою.

Анализ работы многослойных КМ, в условиях близких к рабочим условиям лопаток позволил выявить ряд особенностей распределения напряжений в армированных материалах. Установлено, что при растяжении лопаток из КМ в поле центробежных сил, во внешних слоях происходит увеличение нормальных напряжений в 2-4 раза по сравнению со средними их величинами.

Численные результаты определения НДС композиционной лопатки с помощью пакета ANSYS совпадает с результатами пункта 3.6 (см. глава 3) для лопатки из однонаправленного боралюминия.

Однако, определение НДС для многослойных стержней и лопаток (см. пункт 3.6) в пакете ANSYS невозможно из-за конфликтных ситуаций. Это связано с появлением коротких лепестков с различными физическими свойствами по длине стержня. Появляются конфликтные ситуации и в программах Ansys, Nastran, и др. с задачами склеивания этих лепестков по длине в слоистом стержне. Такую же задачу эти программы могут решать (Ansys, Nastran, и др.), если физические характеристики слоистого сечения стержня рассматривать анизотропными с эффективными параметрами по длине и по сечению (см. глава 4). В этом случае учет физической неоднородности и слоистости сечения, особенно, в части влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость при кручении и НДС слоистых стержней произвольного сечения не учитывается. Следовательно, чтобы улучшить количественные показатели необходимо увеличить количество конечных элементов в расчетах ANSYS, что требует для расчета более мощных ЭВМ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ЛОПАТОК КОМПРЕССОРА

Используемые в практической деятельности человека материалы, как правило, неоднородны. В таких материалах, как металлические сплавы, характерный размер неоднородности (d) мал по сравнению расстояниями (L), характеризующими "неоднородность" деформации ($L \gg d$). Для КМ, полученных армированием материала матрицы волокнами наполнителя, характерный размер (ℓ) неоднородности структуры (например, толщина слоя, обусловленная диаметром волокна d_1), намного больше, чем для металлических сплавов ($\ell > d_1 \gg d$). Поэтому возможны такие условия динамического нагружения композиционных тел, когда характерный размер "неоднородности" деформации (L) не сильно превышает характерный размер "неоднородности" структуры (ℓ). Теория армированных слоистых сред [138,139] позволяет описать такие деформации ($L > \ell > d_1$), если эти размеры обеспечивают справедливость осреднения параметров по фазам композиции [140], т.е. они отличаются хотя бы на порядок. В первой части данной главы получены основные вариационные принципы связанной и несвязанной упругости армированного слоистого тела в условиях динамического деформирования.

5.1 Основные соотношения динамической упругости армированных слоистых тел

При нестационарном деформировании армированных слоистых сред движение их элементарного объема в слое в слое i описывается уравнениями

$$\sigma_{kj,j}^i + X_k^i = \rho^i \ddot{u}_k^i, \quad (i,j,k=1,2,3), \quad (5.1.1)$$

где $\rho^i = \rho^i v^i$, причем ρ^i - плотность материала слоя и v^i объемное содержание материала слоя i . Здесь и ниже запятая означает дифференцирование в направлении индекса, стоящего после запятой.

Поскольку для призматического стержня упругие перемещения в общем случае определяются по формулам [4], [49]

$$\begin{aligned} u &= \chi_2 \frac{z^2}{2} - \tau zy, \\ v &= -\chi_1 \frac{z^2}{2} + \tau zx, \\ w &= \varepsilon z - \chi_2 xz + \chi_1 yz + \tau \varphi(x, y), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

где ε – удлинение, χ_2, χ_1 – компоненты кривизны оси стержня; τ – относительная закрученность, $\varphi(x, y)$ – функция депланация, то для закрученного стержня с принятой точностью перемещения определяются в виде [49]

$$\begin{aligned} u &= \chi_2 \frac{z^2}{2} - \tau zy + \frac{G_3^i}{G_1^i} \tau_0 \chi_2 z \varphi, \\ v &= -\chi_1 \frac{z^2}{2} + \tau zx + \frac{G_3^i}{G_1^i} \tau_0 \chi_1 z \varphi, \\ w &= \varepsilon z - \chi_2 xz + \chi_1 yz + \left[\tau - \frac{1}{G_3^i} \tau_0 \varepsilon_z^0 \right] \varphi, \\ \varepsilon_z^0 &= \varepsilon - \chi_2 x + \chi_1 y + \tau \tau_0 r^2, \quad r^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Здесь $G_3^i = (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha)$, $G_1^i = (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha)$, $G_2^i = (c_{44}^i \tau_0 \sin \alpha)$, τ – относительный угол закручивания и τ_0 – начальный угол закручивания на единицу длины стержня, ε – удлинение, χ_2, χ_1 – компоненты кривизны оси стержня; $c_{33}^i, c_{35}^i, c_{44}^i, c_{55}^i$ – параметры упругости слоя i (1.3.7). Из формул (5.1.3) видно, что в закрученном слоистом стержне депланация плоского поперечного сечения связан не только с упругим кручением, как в призматическом стержне, но и со всеми другими видами деформации, и что при повороте сечения относительно осей x, y контур поперечного сечения искажается.

В соответствии с (5.1.3) основные деформации ε_{kj}^i в поперечном сечении $z=0$ в слое i описываются выражениями (3.3.4).

Соответственно для напряжений σ_{kj}^i в поперечном сечении $z=0$ в слое i описываются выражениями (3.3.5).

Следует заметить, что в (3.3.4) все компоненты тензора деформации не зависят от координат z . Если подставить соотношение (3.3.5) с учетом (5.1.3), (3.3.4) в выражения (5.1.1), то получатся уравнения движения армированной слоистой среды в перемещениях:

$$c_{kjm n}^i u_{m,nj}^i + X_k^i = \rho^i \ddot{u}_k^i + \beta_{kj}^i T_{,j}^i. \quad (5.1.4)$$

В этих формулах точка над переменной величиной означает дифференцирование по времени, и $k, j, m, n = 1, 2, 3$. Система трех уравнений (5.1.3) содержит в качестве неизвестных 4 переменных: 3 смещений и температуры T^i . Для замыкания системы необходимо добавить уравнения теплопроводности армированной среды:

$$\lambda_{kj}^i T_{,kj}^i + \Delta^i = T^i \beta_{kj}^i \dot{\varepsilon}_{kj}^i + c_{\varepsilon}^i \dot{T}^i. \quad (5.1.5)$$

Здесь Δ^i - члены, характеризующие внутренние источники тепла; λ_{kj}^i - постоянные по величине компоненты симметричного тензора теплопроводности; c_{ε}^i - коэффициенты теплоемкостей материала слоя при постоянной деформации; T^i - начальные температуры материалов слоя i .

Удельная энергия деформирования имеет вид: $W_{\ell}^i = c_{kjm n}^i \varepsilon_{kj}^i$.

В зависимости от условий на границе S слоистого тела могут быть сформулированы следующие краевые задачи.

I краевая задача - на поверхности S заданы смещения и температуры:

$$u_j^i = f_j^i, \quad T^i = \theta^i. \quad (5.1.6)$$

II краевая задача - на поверхности S заданы напряжения и температуры:

$$\sigma_{kj}^i n_j = P_j^i, \quad T^i = \theta^i. \quad (5.1.7)$$

III краевая смешанная задача 1-го типа –

на части поверхности S_u ($S_u \subset S$) заданы $u_j^i = f_j^i$,

$$\text{а на } S_{\sigma} \text{ заданы } \sigma_{kj}^i n_j = P_j^i, \quad (5.1.8)$$

на S заданы $T^i = \theta^i$ ($S = S_u + S_{\sigma}$).

IV краевая смешанная задача 2-го типа:

на S_1 заданы ($S_1 \in S$) $u_j^i = f_j^i$, $\sigma_{kj}^i n_j = P_j^i$,

на S_2 ($S_1 + S_2 = S$) заданы $u_j^i = f_j^i$, $\sigma_{kj}^i n_j = P_j^i$, $T^i = \theta^i$. (5.1.9)

Начальные условия имеют вид:

при $t=t_0=0$ на $S+V$ заданы $u_j^i = g_j^i$, $\dot{u}_j^i = h_j^i$, $T^i = \theta^i$. (5.1.10)

Если на поверхности тела S или на его части будут заданы тепловые потоки вместо температур T^i , аналогично формируются условия I, II, III и IV краевых задач и начальных условий. В формулах (5.1.7)- (5.1.9) n_j - направляющие косинусы, величины f_j^i , P_j^i , θ^i являются заданными функциями, $k, j=1,2,3$.

Система уравнений (5.1.4) содержит температурные члены, а система (5.1.5) - деформационные члены. Следовательно, совокупность этих систем уравнений вместе с соответствующими граничными и начальными условиями будет представлять собой связанную задачу динамической упругости слоистых тел. Если система уравнений (5.1.4) не будет содержать деформационные члены, то задача становится несвязанной. Поэтому температурные члены в правых частях уравнений (5.1.4) являются известными функциями - решением соответствующей задачи теплопроводности.

5.2 Основная энергетическая теорема и принцип виртуальных работ динамической упругости многослойных армированных тел

Вариационные теоремы в теории упругости имеет большое значение. Они позволяют не только получать простым путем дифференциальные уравнения, условия равновесия различных механических систем, но и проводить к ряду методов решения рассматриваемых задач. Этим вопросам посвящены многочисленные работы [141], [234] и т.д.

К перемещениям u^i, v^i, w^i , возникшим в материалах слоя i под действием изменяющихся во времени нагрузок, добавим виртуальные приращения δu_j^i , которые предполагаются непрерывными вместе со своими производными до второ-

го порядка. Приращения являются произвольными, но согласованными с условиями, ограничивающими деформацию тела. На части тела, где заданы смещения, следует положить, например $\delta u^i = 0, \delta v^i = 0, \delta w^i = 0$ [141, 246]. Рассматривается виртуальная работа массовых X_j^i и поверхностных P_j^i сил

$$\delta L_1 = 2 \int_V (X_1^i \delta u_j^i + X_2^i \delta v_j^i + X_3^i \delta w_j^i) dV + \int_S (P_1^i \delta u_j^i + P_2^i \delta v_j^i + P_3^i \delta w_j^i) dS \quad (5.2.1)$$

Во втором интеграле заменяя поверхностные напряжения P_j^i напряжениями σ_{kj}^i , согласно условиям III краевой задачи, и используя теорему Гаусса-Остроградского, можно получить выражение

$$\delta L_1 = 2 \int_V (X_j^i + \sigma_{kj,j}^i) \delta u_j^i dV + \int_V \sigma_{kj,j}^i \delta \varepsilon_{kj}^i dV \quad (5.2.2)$$

При этом использовано очевидное равенство

$$\sigma_{kj,j}^i \delta u_{k,j}^i = \sigma_{kj}^i (\delta \varepsilon_{kj}^i + \delta w_{kj}^i) = \sigma_{kj}^i \delta \varepsilon_{kj}^i,$$

в котором w_{kj} - кососимметричный тензор.

С учетом уравнений движения (5.1.1) первый интеграл в (5.2.2) можно преобразовать. Сравнение выражения (5.2.1) с полученным результатом приводит к уравнению

$$\int_V (X_j^i - \rho^i \ddot{u}_j^i) \delta u_j^i dV + \int_S P_j^i \delta u_j^i dS = \int_V \sigma_{kj}^i \delta \varepsilon_{kj}^i dV \quad (5.2.3)$$

Равенство (5.2.3) выражает принцип виртуальных работ динамики слоистых армированных сред, согласно которому виртуальная работа массовых, поверхностных сил и сил инерции слоистого армированного тела равна сумме работ сил упругого, вязкого взаимодействия компонентов композиции на виртуальных разностях смещений и работе напряжений на вариациях деформаций. Оно справедливо для упругих, так и неупругих слоистых армированных тел, для линейных и нелинейных соотношений между напряжениями и соответствующими деформациями [246, 247].

Подстановка в равенство (5.2.3) соотношений (1.3.4) позволяет использовать принцип для исследования линейно деформируемого упругого слоистого армиро-

ванного тела, находящегося под воздействием динамических нагрузок. При этом тело может находиться в температурном поле, независящем от деформаций.

Для приращения δu^i , δv^i , δw^i справедливы соотношения [141].

$$\begin{aligned} \delta u^i &= \frac{\partial u^i}{\partial t} dt = \theta_1^i dt; & \delta v^i &= \frac{\partial v^i}{\partial t} dt = \theta_2^i dt; \\ \delta w^i &= \frac{\partial w^i}{\partial t} dt = \theta_3^i dt; & \delta W_\ell^i &= \frac{\partial W_\ell^i}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Введем следующую величину

$$\begin{aligned} K &= \int_V \rho^i \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^i}{\partial t} \right)^2 \right] dV = \\ &= \int_V \rho^i \left[(\theta_1^i)^2 + (\theta_2^i)^2 + (\theta_3^i)^2 \right] dV. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Здесь K - кинетическая энергия армированного слоистого тела; W_ℓ^i - удельная энергия деформирования.

С учетом (5.2.5) и подставляя (5.2.4) в выражение (5.2.3), после простых преобразований получим основное энергетическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (K + W_\ell^i) &= 2 \int_V (X_1^i \theta_1^i + X_2^i \theta_2^i + X_3^i \theta_3^i) dV + \\ &+ \int_S (P_1 \theta_1^i + P_2 \theta_2^i + P_3 \theta_3^i) dS. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Уравнения (5.2.6) выражает закон сохранения энергии, который может быть использовано при доказательстве единственности решения дифференциальных уравнений движения (5.1.4) для несвязанной задачи при соответствующих начальных и граничных условиях.

5.3 Обобщенный принцип Гамильтона для динамической упругости многослойных армированных анизотропных тел

Рассмотрим непрерывно изменяющийся во времени между моментами $t=t_0$ и $t=t_1$ процесс деформирования. Приравняем действительные перемещения

u^i, v^i, w^i к перемещениям $u^i + \delta u^i, v^i + \delta v^i, w^i + \delta w^i$. Варьировать будем так, чтобы

$$\delta u^i \Big|_{t=t_0} = \delta u^i \Big|_{t=t_1} = 0, \quad \delta v^i \Big|_{t=t_0} = \delta v^i \Big|_{t=t_1} = 0, \quad \delta w^i \Big|_{t=t_0} = \delta w^i \Big|_{t=t_1} = 0. \quad (5.3.1)$$

В этом случае принцип виртуальных работ (5.2.3) имеет вид

$$\delta L_1 - 2 \int_V \rho^i (\ddot{u}^i \delta u^i + \ddot{v}^i \delta v^i + \ddot{w}^i \delta w^i) dV = \delta \int_V W_\ell^i dV, \quad (5.3.2)$$

где δL_i определяется из уравнения (5.2.1).

Проинтегрируем равенство (5.3.2) по времени от t_0 до t_1 :

$$\int_{t_0}^{t_1} W_{\ell t} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L_1 dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho^i (\ddot{u}^i \delta u^i + \ddot{v}^i \delta v^i + \ddot{w}^i \delta w^i) dV, \quad (5.3.3)$$

где $W_{\ell t} = \int_V \sigma_{kj}^i \varepsilon_{kj}^i dV$, вследствие физических соотношений (5.1.4) содержит температурные члены. Определим вариацию кинетической энергии (5.2.5)

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho^i (\dot{u}^i \delta \dot{u}^i + \dot{v}^i \delta \dot{v}^i + \dot{w}^i \delta \dot{w}^i) dV = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho^i (\dot{u}^i \delta u^i + \dot{v}^i \delta v^i + \dot{w}^i \delta w^i)) dV - \int_V \rho^i (\ddot{u}^i \delta u^i + \ddot{v}^i \delta v^i + \ddot{w}^i \delta w^i) dV. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это выражение по времени от $t=t_0$ до $t=t_1$. Тогда с учетом выражений (5.3.1) справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = -2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho^i (\ddot{u}^i \delta u^i + \ddot{v}^i \delta v^i + \ddot{w}^i \delta w^i) dV.$$

Поэтому уравнение (5.3.3) имеет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W_{\ell t} - K) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L_1 dt. \quad (5.3.4)$$

Равенство (5.3.4) и есть обобщенный на слоистую среду принцип Гамильтона. В левой части равенства (5.3.4) знак вариации вынесен за знак первого интеграла по той причине, что величины $W_{\ell t}, K$ являются функциями состояния - величинами, зависящими от мгновенного состояния тела независимо от того, каким способом это состояние достигнуто. В правой части равенства (5.3.4) знак вариации

ции δ можно вынести за знак интеграла только тогда, когда внешние силы обла- дают потенциалом

$$\delta L_1 = -2 \left(\frac{\partial U^i}{\partial u^i} \delta u^i + \frac{\partial U^i}{\partial v^i} \delta v^i + \frac{\partial U^i}{\partial w^i} \delta w^i \right) = -2 \delta \left(\frac{\partial U^i}{\partial u^i} u^i + \frac{\partial U^i}{\partial v^i} v^i + \frac{\partial U^i}{\partial w^i} w^i \right),$$

тогда $\delta \int_{t_0}^{t_1} (W_{\ell t} - K + U) dt = 0$. Обозначая через $\Pi = W_{\ell t} + U$ потенциальную

энергию, получим принцип Гамильтона в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0, \quad (5.3.5)$$

где $(K-\Pi)$ - функция Лагранжа. Из (5.3.5) видно, что действие по Гамильтону

$\int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt$ принимает экстремальное значение. Для статической задачи когда

$K=0$, тогда принцип Гамильтона сводится к принципу минимума потенциальной энергии $\delta \Pi = 0$.

Полученные на основе предложенной в [141] линейной модели нестационарного деформирования слоистых сред, вариационные принципы (5.2.3) и (5.3.4) позволяют исследовать динамические явления в слоистых армированных телах.

5.4 Единственность решения дифференциальных уравнений динамической упругости многослойных армированных сред

Необходимо доказать, что если существует решение уравнений динамической упругости слоистой армированной среды (5.1.1) при начальных (5.1.10) и граничных, например, (5.1.8) условиях, то оно единственно.

Доказательство проведем обратным предположением. Пусть имеется два семейства решений уравнений (5.1.8) $u^i, v^i, w^i, u'^i, v'^i, w'^i$, удовлетворяющих граничным (5.1.11) и начальным условиям (5.1.10). Введем дополнительную функцию

$$\hat{u}^i = u'^i - u^i, \quad \hat{v}^i = v'^i - v^i, \quad \hat{w}^i = w'^i - w^i. \quad (5.4.1)$$

Видеть, что эти функции являются решением системы однородных уравнений движения

$$c_{kjmn}^i (u_{m,nj}^i + u_{n,mj}^i) = \rho^i \ddot{u}_k^i + \beta_{kj}^i \hat{T}_{,j}^i, \quad (5.4.2)$$

при этом, в силу линейности кинематических (5.1.3) и физических (5.1.1) соотношений они удовлетворяют однородным граничным (5.1.8) и начальным условиям (5.1.10) [246]

$$\hat{P}_j = 0 \text{ на } S_\sigma, \quad \hat{u}_j^i = \hat{f}_j^i = 0 \text{ на } S_u (S_u \subset S), \quad (5.4.3)$$

$$\hat{T}^i = \hat{\theta}^i = 0 \text{ на } (S=S_u + S_\sigma),$$

при $t=t_0=0$

$$\hat{u}_j^i = \dot{\hat{u}}_j^i = \hat{T}^i = 0. \quad (5.4.4)$$

Равенство (5.4.2), (5.4.3), (5.4.4) означают, что функции \hat{u}_j^i, \hat{T}^i соответствуют упругому слоистому армированному телу, внутри которого отсутствуют источники тепла и массовые силы, а поверхность не нагружена и находится в условиях нулевой температуры. В этом случае основная энергетическая теорема для такого состояния принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\hat{K}_j^i + \hat{W}_\ell) \leq 0. \quad (5.4.5)$$

Из этого неравенства следует, что выражение в скобках есть величина невозрастающая при $t>0$. Кроме того, начальные условия (5.4.4) однородны, поэтому сумма $(\hat{K}_j^i + \hat{W}_\ell)$ в начальный момент времени равна нулю, а при $t>0$ это сумма неотрицательна при положительных значениях параметров ρ^i, T^i . Следовательно, она должна быть равной нулю для всех $t>0$, т.е. в (5.4.5) должен выполняться знак равенства. Поэтому равна нулю каждая из слагаемых, заключенных в скобках. Значит $\hat{u}^i = \hat{v}^i = \hat{w}^i = \hat{T}^i = 0$.

Следовательно $u'^i = u''^i, v'^i = v''^i, w'^i = w''^i$, т.е. смещения и температура, а также деформации и напряжения совпадают. Поэтому решение единственно.

5.5 Собственные частоты колебаний многослойного стержня с переменными физико-геометрическими параметрами

Задача расчета собственных частот и форм колебаний стержней, балок, закрученных рабочих лопаток с точки зрения однородной теории рассматривалась в литературе неоднократно. Методы расчета таких задач достаточно подробно описаны в работах Бицено К.Б. и Граммеля Р. [143], Хролина Д.В. [144], Шорра Б. Ф. [49], Биргера И.А. [145] и многих других исследователей. Можно выделить три основных подхода к данному вопросу: решение на основе классической теории тонких стержней [129, 145, 148], рассмотрения деформаций с точки зрения общих уравнений теории упругости [94] и решения на основе теории пластин и оболочек [146]. Также различные специальные подходы к изучению вопросов колебания таких тел рассмотрены в работах [147-149].

В работах Сана С.Т. [150], Бреховских Л.М. [151], Ахенбаха Дж. [152] и некоторых других, рассмотрены колебания и волны в слоистых и композитных телах, где использовались соотношения изотропной или анизотропной однородной теорий упругости. Структурный подход к волновым процессам позволяет описать ряд их интересных особенностей. Например, в работе Каримбаева Т.Д.Байшагирова Х.Ж. [138,246] показана возможность распространения в неограниченной армированной среде четырех типов волн. Ниже исследуются свободные колебания многослойных армированных стержней. В целях определения особенностей слоистых стержней, выяснения роли некоторых её параметров рассматривались наиболее простые формы колебания.

Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из КМ (рис. 5.5.1).

Считая материал тела ортотропным, для изгибных напряжений эти соотношения можно записать в виде (3.2.1) [43]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^i = & (c_{13}^{ii} \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^{ii} \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^{ii} \mathcal{E}_{33}^i + c_{35}^{ii} \mathcal{E}_{13}^i) + \\ & + (c_{33}^{ii} \varepsilon_{33}^i + c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^{0i}) + c_{35}^{ii} \varepsilon_{13}^i + \beta_{33}^i T^i , \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

в которой ε_{k3}^{ci} - соответствуют значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами Q_j [97]; величины \mathcal{E}_{k3}^i позволяют оценить влияние перемещений u^i, v^i, w^i в плоскости поперечного сечения на сдвиговые деформации и $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$ деформации элементов поперечного сечения. Здесь $\beta \approx \tau_0 r \alpha^2 = (\tau_0 z)^2 \ll 1$; $\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$.

$$\varepsilon_{33}^i = \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1 + \tau_0 r^2.$$

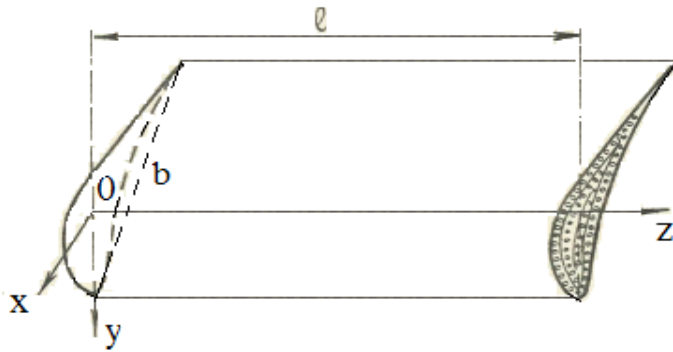


Рисунок 5.5.1 – Многослойный армированный стержень с профилем произвольной формы.

В последующих исследованиях ограничимся формами колебаний, длины волн в которых заметно превосходят характерные структурные размеры армированного слоистого тела, положим,

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (5.5.2)$$

где $v_i(z, t)$ - поперечные смещения точек i -го слоя стержня.

При этих условиях выражение принципа Гамильтона (5.3.4) принимает вид:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_\ell - K) dt = 0, \quad (5.5.3)$$

где величина

$$w_\ell = \int_0^\ell \iint_{0F} \sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i dF dz = \int_0^\ell \iint_{0F} c_{33}^{i1} \varepsilon_{33}^{i2} dF dz, \\ K = \iiint_V \rho^i (\dot{v}^i)^2 dV; \quad \dot{v}^i = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t}, \quad (5.5.4)$$

где ρ^i – плотность, $c_{33}^i = (\lambda^H + 2\mu^H)v^H + (\lambda^M + 2\mu^M)v^M$ свойства материала слоя i и v^H, v^M объемное содержание материала наполнителя и матрицы.

С учетом формулы (5.5.1) и (5.5.2) для w_ℓ можно получить

$$w_\ell = \frac{1}{2} \int_0^\ell I_1 \left(\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 dz, \quad (5.5.5)$$

где величина

$$I_1 = \iint_F c_{33}^i y^2 dF, \quad (5.5.6)$$

является физическим моментом инерции, позволяющим вести расчет при неравномерном распределении физических свойств компонентов многослойного армированного тела, с произвольной формой поперечного сечения.

Допустим, что существуют только периодические колебания с собственной круговой частотой ω , представим $v^i(z, t)$ в виде [154,246,247]

$$v^i(z, t) = X(z) \sin \omega t. \quad (5.5.7)$$

Задачу будем решать методом Ритца [154], полагая

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z), \quad (5.5.8)$$

где $X_n(z)$ - допустимые функции, A_n - неопределенные параметры. В качестве допустимых функций можно выбрать собственные функции стержня в виде [154]:

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left[\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x + \frac{\operatorname{sh} k_n - \sin k_n}{\operatorname{ch} k_n + \cos k_n} (\sin k_n x - \operatorname{sh} k_n x) \right], \quad (5.5.9)$$

удовлетворяющих граничным условиям консольного закрепления:

$$X_n(0) = X_n'(0) = 0; \quad X_n''(1) = X_n'''(1) = 0; \quad (5.5.10)$$

В (5.5.9) $x = \frac{z}{\ell}$, а волновое число k_n удовлетворяет характеристическому уравнению $1 + \operatorname{ch} k_n \cos k_n = 0$ [170] и принимает значения, данные в таблице 5.5.1, ℓ - длина стержня.

Таблица 5.5.1. Значение волновых чисел

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $n \rightarrow \infty$ |
|----|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|------------------------|
| kn | 1.875 | 4.694 | 7.854 | 10,996 | 14,137 | 17,279 | 20,42 | $\frac{2n-1}{2}\pi$ |

Балочные функции, являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X_n'' X_p'' dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad (5.5.11)$$

Варьирование интеграла (5.5.3), сводится к дифференцированию его по неизвестным параметрам A_n . После подстановки (5.5.7) в (5.5.4) и (5.5.3) с учетом (5.5.8), (5.5.10) и (5.5.11), дифференцирования по A_n и интегрирования по t можно получить

$$\frac{I_1}{\ell^4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n^4 \delta A_n - 2\omega^2 \rho^i F \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta A_n = 0,$$

где $F = \iint_F dF$ площадь слоистого поперечного сечения. После упрощения предыдущее выражение преобразуется к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n [I_1 k_n^4 - 2\omega^2 \rho^i F \ell^4] \delta A_n = 0.$$

Так как в этом уравнении коэффициенты A_n равны нулю и произвольны, то получим следующие выражения для круговых (ω) и технических (f_n) частот свободных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{I_1}{\rho^i} \frac{k_n^4}{F \ell^4}; \quad (5.5.12)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F} \frac{k_n^2}{\ell^2}}, \quad (5.5.13)$$

где I_1 определяется выражением (5.5.6). По полученной формуле можно подсчитать низшие собственные частоты многослойного армированного стержня с произвольным поперечным сечением.

Значение I_1 позволяет учесть неравномерное распределение физических параметров композиции в слоистом сечении. Для авиационных профилей этот интеграл можно просчитать послойно или поэлементно на ЭВМ по формуле (1.3.15) [51,156]. Если материал стержня изотропный, то из выражения (5.5.13) следует формула Рэлея-Ритца.

Каримбаевым Т.Д. были проведены эксперименты по определению собственных частот для стержня прямоугольного сечения, изготовленного из стеклоткани, имеющего следующие физические и геометрические характеристики [235], [239], [246], [248].:

$$\begin{aligned}\lambda^H &= 0.119 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & \lambda^M &= 0.046 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ \mu^H &= 0.179 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & \mu^M &= 0.0307 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ \rho^H &= 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & \rho^M &= 542 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & \nu^H &= 0.6, & \nu^M &= 0.4, \\ \ell &= 0.12 \text{ м}, & h &= 0.003 \text{ м}, & b &= 0.03 \text{ м}.\end{aligned}$$

Для сравнения собственных частот стержня с данными экспериментов проведен численный анализ формулы (5.5.13).

Для простоты численного анализа рассматривается стержень прямоугольного сечения с равномерным распределением физических свойств. Тогда после интегрирования (5.5.6) выражение для определения собственных частот (5.5.13) можно представить в виде:

$$f_n = \frac{hk_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{c_{33}^i}{12\rho^i}}. \quad (5.5.14)$$

Как видно из таблицы 5.5.2, расчетные значения частот превышает экспериментальные на 3-5%. Понижение f_n при $n > 1$ (см. таблице 5.5.2) подтверждает экспериментально наблюдаемый эффект смещения узловой линии [49] к месту закрепления.

Следовательно, использование теории многослойных армированных сред, обобщенной на основе принципа Гамильтона, при расчете элементов конструкций из многослойного композиционного материала позволяет получить удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Таблица 5.5.2 Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

| Частота, гц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------------------|-----|-----|------|------|------|-------|-------|
| Экспериментальная | 121 | 765 | 2100 | - | - | - | - |
| По формуле (5.5.14) | 125 | 780 | 2181 | 4275 | 6966 | 10556 | 14743 |

Формулы (5.5.13), (5.5.14) устанавливают непосредственную зависимость собственных частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов слоистой композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

5.6 Влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел

На примере многослойного стержня исследуется влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел. При сильном взаимодействии компонентов многослойного КМ, полученное уравнение частот определяет одну собственную частоту, величина которой мало отличается от частот, найденных на основе теории "эффективных" модулей. При слабом взаимодействии компонентов многослойной композиции, что реализуется при больших частотах с малой длиной волны, колебанию многослойного стержня соответствуют две собственные частоты, отличающиеся от частот двух стержней идентичных размеров, но изготовленных отдельно из материала матрицы и отдельно из материала наполнителя.

Определенные на основе полученных соотношений значения собственных частот низших (первых трех) форм колебания стержня прямоугольного поперечного сечения из стеклопластика удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

При анализа изгибных колебаний незакрученного многослойного армированного стержня, имеющего лопаточный профиль постоянной толщины, используется обобщенный на слоистые среды принцип Гамильтона (5.3.4). Согласно

этому принципу минимум накопленных за время (t_0, t_1) в теле энергии деформации w_e , кинетической энергии K соответствует действительному его состоянию, т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_e - K) dt = 0. \quad (5.6.1)$$

Для многослойной ортотропной среды связь между продольными напряжениями и деформациями, записывается в виде (5.5.1).

Если для каждого слоя стержня из КМ принять гипотезу плоских сечений, то деформации определяются равенствами [235-239], [246]

$$\varepsilon_{33}^i = -\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} y, \quad (5.6.2)$$

через перемещения $v_i(z, t)$. В соответствии с (5.6.1), (5.6.2) можно получить

$$w_e = \frac{1}{2} \iint_V c_{33}^i \left(\frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2} \right)^2 y^2 dV, \quad (5.6.3)$$

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho^i \dot{v}^2 dV, \quad \dot{v} = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t},$$

и интегрирование осуществляется по объему V стержня.

Возможные смещения точек при колебаниях стержня описывается как

$$v^i(\bar{z}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(\bar{z}) \sin \omega t,$$

в которых A_n – амплитудные значения смещений, ω – круговая частота, $\bar{z} = z/\ell$.

В качестве допустимых функций $X_n(\bar{z})$ целесообразно выбрать собственные функции стержня в виде (5.5.9), удовлетворяющие условиям консольного закрепления (5.5.10) и равенствам (5.5.11).

Минимизация интеграла (5.6.1) по параметрам A_n позволяет получить системе n уравнений [246-248],

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \gamma_n) A_n \delta_m^n = 0, \quad (5.6.4)$$

в которой

$$\delta_m^n = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n; \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\alpha_n = a_n - \omega^2 F \rho^i; \quad \gamma_n = -F b^4;$$

$$a_n = \frac{a^i k_n^4}{\ell^4} + F b^2; \quad a^i = I_1^i.$$

Здесь $I_1 = \int_F c_{33}^i y^2 dF$ осевой момент инерции и F площадь, b размеры слоистого поперечного сечения.

Система уравнений (5.6.4) имеет нетривиальное решение ($A_n \neq 0$), если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных A_n , равен нулю. Это условие записывается в виде произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 - \gamma_n^2) = 0,$$

каждый сомножитель, которого представляет собой уравнение собственной частоты колебания по n -ой гармонике. Последнее уравнение с учетом принятых обозначений удобно записать в форме

$$(\Delta^2 - \Delta_1^2)^2 - B(\Delta^2 - 1) = 0 \quad (5.6.5)$$

относительно безразмерного параметра частоты

$$\Delta^2 = \frac{\omega^2 \ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}.$$

В (5.6.5) принято

$$\Delta_0^2 = \frac{a^i}{F \rho^i}; \quad B = b^2 \frac{2}{\rho^i} \frac{\ell^4}{k_n^4 \Delta_0^2}; \quad \Delta_1^2 = \frac{a^i}{F \rho^i \Delta_0^2} = 1. \quad (5.6.6)$$

Здесь коэффициент B для стержня заданной длины и состава композиции является функцией волнового числа k_n и стремится к нулю с уменьшением длины волны (ростом k_n). При малых значениях волнового числа k_n и "сильном" взаимодействии слоев стержня из композиционного материала ($B \gg 1$) уравнение (5.6.5) определяет один корень $\Delta^2 = 1$, которому соответствуют технические частоты

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{a^i}{\rho^i F}}. \quad (5.6.7)$$

Выражение (5.6.7) совпадает с формулой (5.5.14), полученной при сильных ограничениях на деформацию тела (5.5.2).

Вычисленные по формуле (5.6.7) частоты, мало отличаются от частот

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{E_3 I_1^*}{2\rho(1-\nu_1\nu_3)F}}, \quad (5.6.8)$$

полученных на основе «эффективных» модулей композиционного материала,

где E_3 модуль упругости, $I_1^* = \int_F y^2 dF$.

Параметры собственных частот Δ_1^2 совпадают с параметрами

$$\Delta^2 = \frac{I_1}{F\Delta_0^2\rho^i} \quad (5.6.9)$$

собственных частот двух стержней, изготовленных отдельно из материала матрицы и материала наполнителя. Тем самым устанавливается, что сплошность армированной среды, являющейся композицией двух твердых тел, обеспечивается указанным параметром. Физически одновременное сосуществование двух форм колебаний в армированной среде при высоких частотах оправдано тем, что в колебательном движении находится каждый из компонентов композиции [246]. Однако на его свободное колебание накладывается влияние окружающего его другого материала. Этот эффект оценивается выражениями (5.6.9) [138, 246]. С этими выводами перекликаются некоторые результаты работы Л.П. Хорошуна и В.З. Тындюка [140]. В этой работе при исследовании колебания двухфазного композитного слоя отмечается, что каждому волновому числу соответствуют две частоты. Выражения (5.6.9) позволяют управлять частотами с помощью параметра B . Из уравнения (5.6.4) устанавливается также соотношение (A_n) амплитуд колебания матрицы и наполнителя.

Собственные функции $X_n(z)$ для рассматриваемого стержня имеют форму, как показано на рисунке 5.6.1 (см. рисунок 5.6.1).

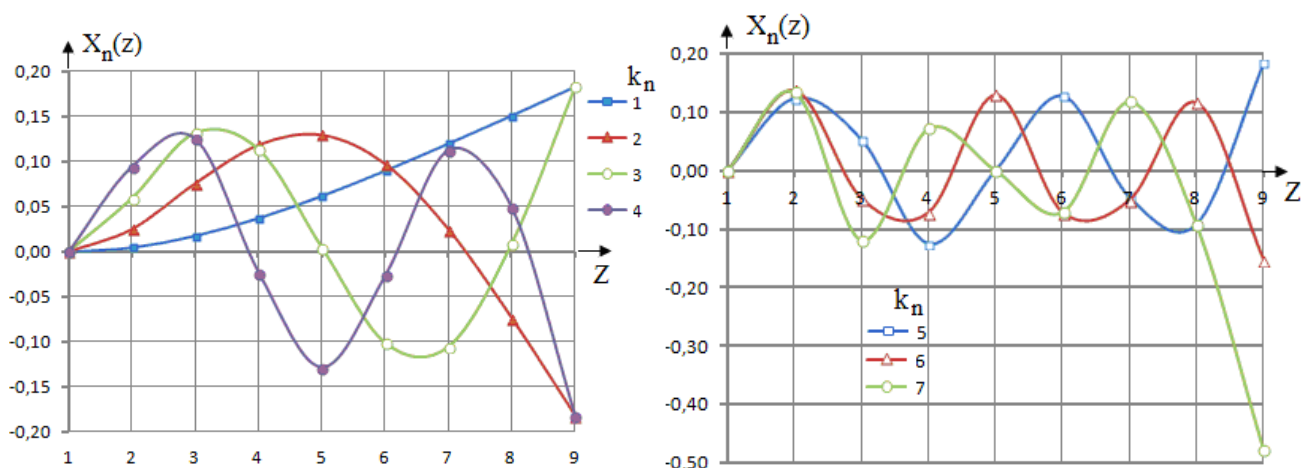


Рисунок 5.6.1 – Изменение формы собственных функций $X_n(z)$ по длине стержня при различных k_n : 1 - $k_n=1.875$; 2 - 4.694; 3,4,5,6,7 – соответствующие данные таблицы 5.5.1.

Численные сравнения экспериментальных данных приведены для стеклопластикового стержня прямоугольного сечения со следующими физическими и геометрическими характеристиками [246-248]:

$$\lambda^H = 0.095 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^H = 0.0173 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\lambda^M = 0.1775 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^M = 0.0074 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\rho^H = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^M = 1230 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \nu^H = 0.68, \quad \nu^M = 0.32,$$

$$\ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Результаты расчетов собственных колебаний первых трех изгибных форм колебаний, соответствующих малым значениям k_n волнового числа (большим B), приведены в таблице 5.6.1. Из таблицы 5.6.1 видно, что отличия расчетных значений собственных частот от экспериментальных незначительны и, в целом, находятся в пределах разброса экспериментальных данных.

Таблица 5.6.1 Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

| Частота, гц | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|-----|-----|------|
| Экспериментальная | 122 | 770 | 2100 |
| По формуле (5.6.7) | 124 | 775 | 2170 |
| По формуле (5.6.8) | 125 | 795 | 2200 |

Таким образом, данный анализ позволяет путем выбора материала компонентов композиции слоистой армированной среды управлять собственными частотами колебаний деталей без изменения их геометрических размеров и формы, что важно в технических приложениях.

5.7 Собственные частоты колебаний неподвижных и вращающихся многослойных анизотропных стержней и лопаток

Ниже рассматриваются консольные неподвижные и вращающиеся, равномерно закрученные на угол τ_0 слоистые анизотропные стержни, составленные из различных анизотропных материалов. Рассматриваются четыре типа многослойных стержней (15 слоев) прямоугольного сечения, составленных из чередующих слоев: 1-й стержень состоит из алюминия; 2 - боралюминия и алюминия; 3 - боралюминия, карбида кремния и алюминия; 4 - боралюминия армированных волокнами под углами $\pm 45^0, \pm 30^0, \pm 15^0$ к оси стержня. Упругие свойства боралюминия (BAL) приведены в таблице 1.3.2 (см. п. 1.3).

Стержень прямоугольного сечения имеет следующие геометрические параметры: $l=118$ мм, $b=60$ мм, $h=4.8$ мм, $\tau_0 = 0$. В этом случае значение, определенные по формуле (5.6.7), первых шесть собственных технических частот изгибных колебаний приведены в таблице 5.7.1. На рисунке 5.7.1 приведены кривые изменения технических частот f_n от волновых чисел k_n .

Расчеты (см. таблицу 5.7.1) устанавливают непосредственную зависимость технических частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

При практических расчетах собственных частот учет влияния действующих на стержень или лопатку нагрузок осуществляется с использованием результатов анализа их НДС (см. п.4.6). Сравнения первых трех собственных частот стержня прямоугольного сечения, вычисленные по формуле (5.6.7), с результатами экспе-

римента (см. п. 5.6.6) дают хорошие результаты. Однако, чтобы получить результаты расчета собственных частот и форм высоконагруженных стержней или лопаток компрессора при условии их консольного закрепления в корневом сечении, анализ НДС которых проводился в п. 4.6, необходимо провести расчеты собственных частот для различных рабочих режимах конструкции. Таким образом, для достоверного определения собственных частот колебаний многослойных стержней или компрессорных лопаток из КМ, необходимо использовать результаты статического расчета при различных рабочих нагрузках конструкции, который должен предшествовать решению задачи определения собственных частот (см. глава 6). Как известно [156], величина переменных составляющих газовых сил, приложенных к лопатке, обычно достигают нескольких процентов от их среднего значения. Однако они могут возрасти при резонансе (совпадения частоты газового потока или вращения лопатки и одной из собственных частот лопатки). Особенно легко возбуждаются колебания по низшей изгибной форме, реже возникают колебания по второй или третьей изгибной, первой или второй крутильной, а также пластиночным формам. Для компрессорных лопаток наиболее сильными гармониками возбуждения к частоте вращения ротора являются гармоники с числами кратности $k=1,2,3,4,5,6$.

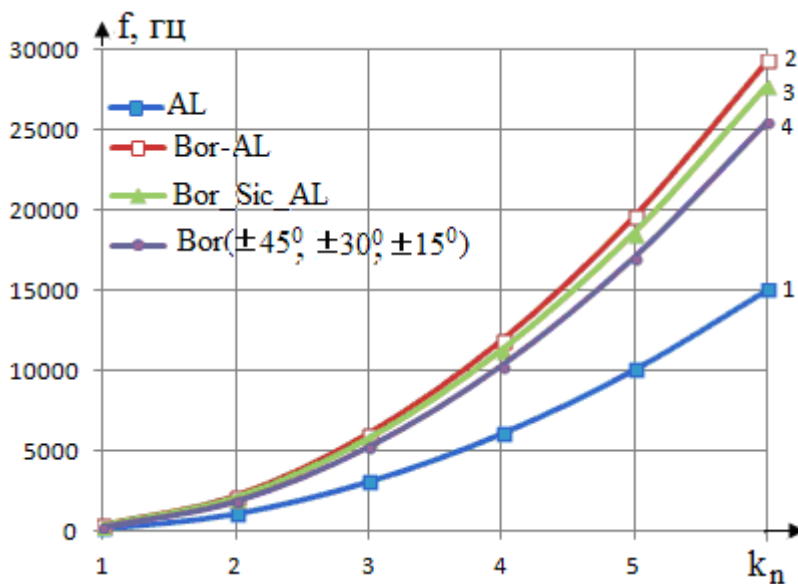


Рисунок 5.7.1 – Зависимость расчетных технических частот f_n от волновых чисел k_n (1-AL, 2 – Bor-AL, 3 - Bor($\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ$)).

Таблица 5.7.1 Значение расчетных технических частот f_n волновых чисел.

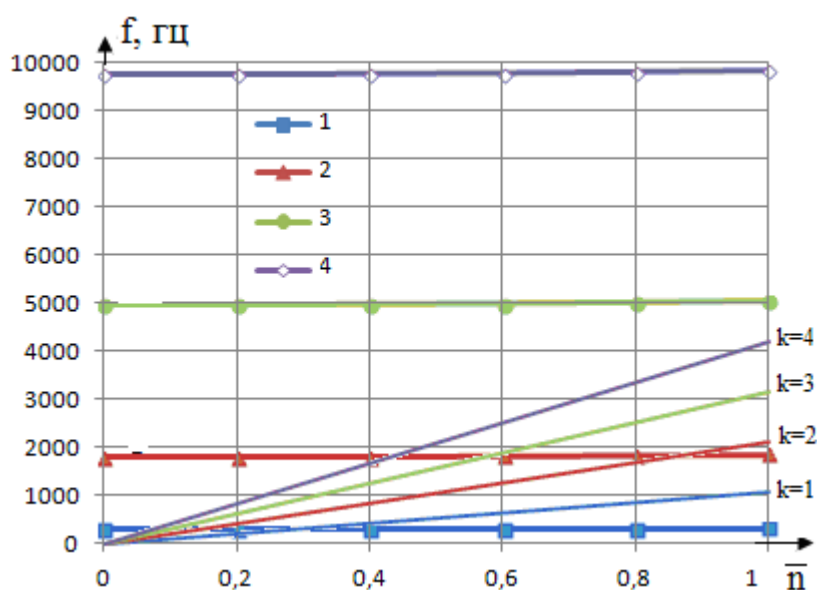
| | | | | | | |
|---------------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_n | 1,875 | 4,694 | 7,854 | 10,996 | 14,137 | 17,279 |
| AL | 177,3 | 1111,4 | 3111,4 | 6098,4 | 10081 | 15059 |
| Bor-AL | 345,5 | 2165,6 | 6062,9 | 11883 | 19644 | 29344 |
| Bor-Sic-AL | 326,5 | 2046,8 | 5730,2 | 11231 | 18566 | 27734 |
| Bor($\pm 45^0, \pm 30^0, \pm 15^0$) | 300,3 | 1882,1 | 5269,1 | 10327 | 17072 | 25502 |

Поэтому, на этапе эскизного проектирования лопатки необходимо решить задачу отстройки ее от зон возможных резонансов. Для этого после определения собственных частот и форм колебаний многослойных лопаток из КМ на различных режимах нагружения строится резонансная диаграмма лопатки, на которой наносят кривые изменения собственных частот колебаний лопатки с учетом влияния центробежных или газовых сил и лучи гармоник к частоте вращения. Точки пересечения кривых собственных частот с лучами гармоник определяют резонансные частоты, от которых необходимо отстроить лопатку. В этом случае собственные частоты колебаний лопатки отстраивают от резонанса, изменяя закон распределения толщин по срединной поверхности лопатки [156] или с помощью изменения свойств многослойной лопатки из КМ с учетом НДС.

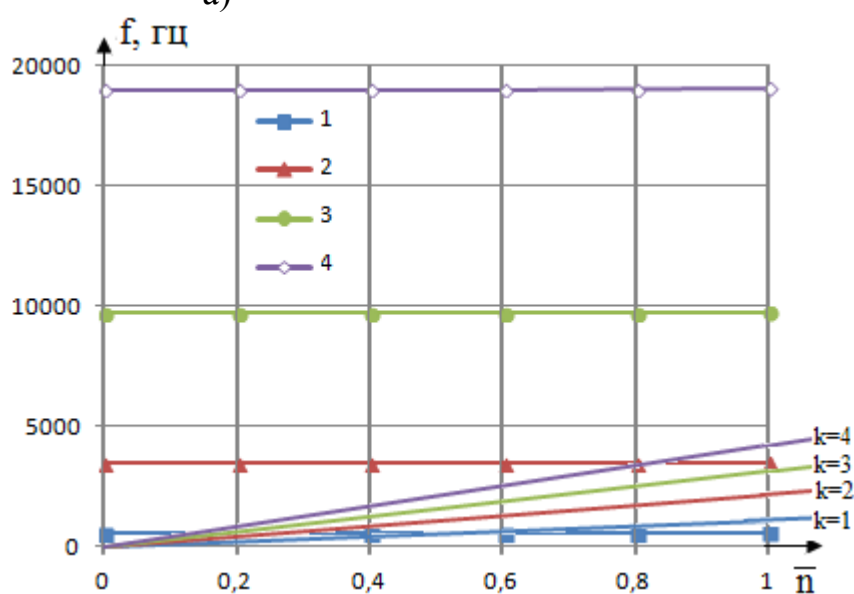
В качестве примера приводятся резонансные диаграммы изгибных колебаний для многослойного стержня прямоугольного сечения, геометрические параметры которых приведены выше. На рисунке 5.7.2 изображена резонансная диаграмма изгибных колебаний для отстройки от первых четырех гармоник возбуждения на рабочем режиме $\bar{n}=1$. Для данного многослойного стержня прямоугольного сечения, как видно из рисунка (рис. 5.7.2), отстройки от первых четырех гармоник возбуждения на рабочем режиме $\bar{n}=1$ не потребуется.

Применение стержневой теории к сложной модели, каковой является компрессорная лопатка, показывает, что формы колебаний будут смешанными и имеют и изгибные, и крутильные, и продольные перемещения одновременно. Поэтому особый интерес представляет поведение второй изгибной и первой крутильной форм из-за возможности возникновения на определенных рабочих режи-

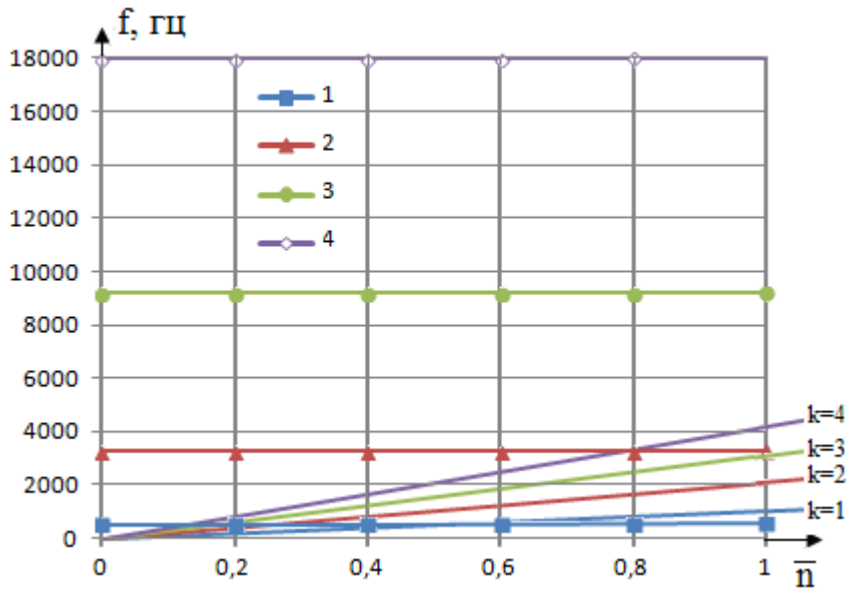
мах изгибно-крутильного флаттера. Необходимо отметить, что вопросы прогнозирования возможности возникновения флаттера выходят за рамки данной работы. Однако, имеется определенный эффект возникновения которого необходимо избежать на этапе эскизного проектирования лопатки из КМ. Один из таких эффектов - инверсия собственных форм. Инверсия собственных форм, соответствующих двум различным частотным функциям, это взаимный обмен характеризующими их качественными признаками. При возникновении инверсии собственных форм колебаний вероятность появления изгибно-крутильного флаттера лопаток достаточно велика [156,162].



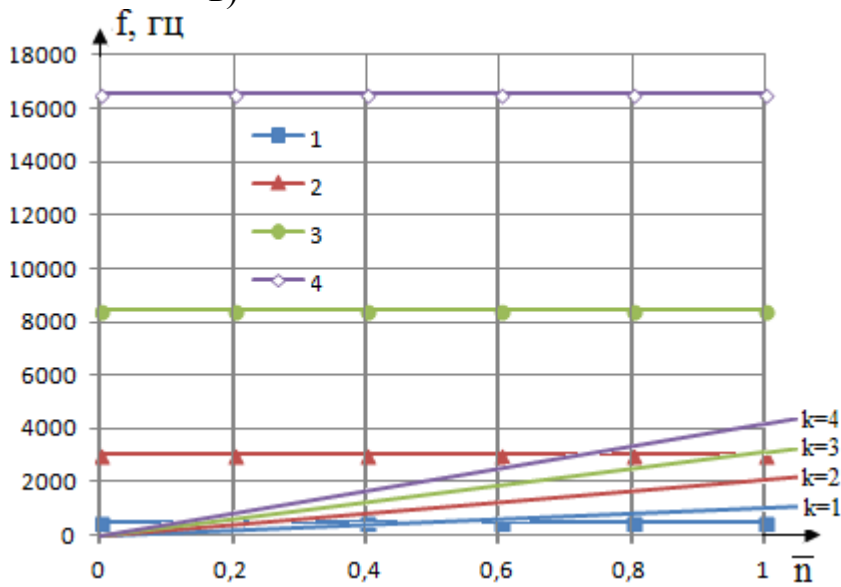
а)



б)



в)



с)

Рисунок 5.7.2. – Резонансная диаграмма изгибных колебаний многослойного стержня, составленного из чередующих слоев из алюминия (а), боралюминия и алюминия (б), боралюминия, карбида кремния и алюминия (в), боралюминия с углами армирования $\pm 45^\circ, \pm 30^\circ, \pm 15^\circ$ (с) для отстройки от первых четырех гармоник (1,2,3,4) возбуждения на рабочем режиме $\bar{n}=1$.

РАСЧЕТ ЗАКРУЧЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

6.1 Современное состояние вопроса анализа собственных частот и форм колебаний стержневых конструкции и лопатки компрессора из композиционных материалов

Проведем обзор и анализ работ по вопросам нахождения частот и форм колебаний стержневых конструкции и лопатки компрессора для их последующего использования для многослойных анизотропных стержневых конструкций из КМ на этапе эскизного проектирования.

1. Аэроупругие явления в ГТД. Широкий диапазон аэроупругих процессов, которому подвергается конструкция при взаимодействии с потоком газа (жидкости), в одних случаях может вызвать развитие усталостных трещин, приводящих к преждевременному исчерпыванию ресурса конструкции. В других случаях при интенсивных переходных режимах может привести к исчерпанию несущей способности системы из-за хрупкого разрушения материала или малоциклового усталости. Наибольшее влияние аэроупругие процессы имеют на авиационные конструкции. В самолётах аэроупругим деформациям подвергаются: крыло, оперение, фюзеляж, органы управления; у вертолётов - лопасть несущего винта; в газотурбинных двигателях - лопатки компрессора и турбины.

Одним из основных требований, предъявляемых к современным авиационным ГТД, является получение максимальных удельных параметров, что, в свою очередь, приводит к необходимости снижения массы всего двигателя. Данная тенденция приводит к тому, что вновь проектируемые лопатки имеют всё меньшие относительные толщины профилей и большие относительные удлинения, истончаются замковые соединения и диски, происходит переход на беззамковые рабочие колеса, исключая конструктивное демпфирование. Эти процессы сопровождаются повышением уровня аэроупругих колебаний лопаток, возрастани-

ем вероятности проявления различных аэроупругих явлений. Особенно остро проблема прогнозирования динамического поведения лопаток возникает при проектировании или модернизации перспективных вентиляторных ступеней, которые являются наиболее нагруженными. Подавляющее число поломок лопаток ГТД имеет усталостный характер [159]. Эти поломки вызываются высокими вибрационными напряжениями, возникающими в рабочих лопатках при резонансных колебаниях [159].

Нестационарные аэроупругие явления в ГТД можно разделить на 2 типа: вынужденные колебания лопаток и флаттер (автоколебания).

На сегодняшний день наиболее распространенным методом определения резонансных режимов работы двигателя является построение диаграммы Кэмпбелла, (рис. 6.1.1) на которой ищутся точки пересечения возбуждающих частот (например, кратных частоте вращения ротора), и собственных частот колебаний лопатки [160].

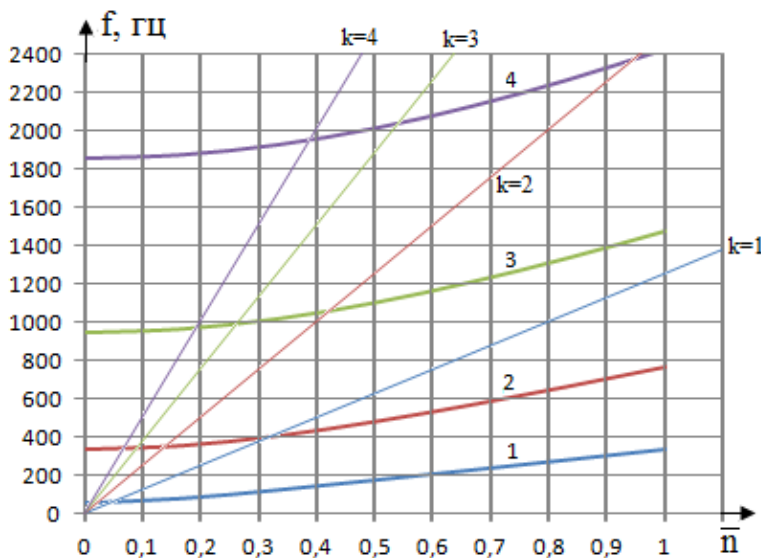


Рисунок 6.1.1 - Пример диаграммы Кэмпбелла. Жирные линии - собственные частоты колебаний, тонкие линии - возбуждающие гармоники, кратные частоте вращения ротора.

Наиболее легко возбуждается и представляет наибольшую опасность первая изгибная форма колебаний с самой низкой частотой [253]. Поэтому на этапе проектирования в обязательном порядке проводится отстройка основной формы колебаний лопатки от резонансов на максимальном рабочем режиме. Для анализа результатов расчета строится диаграмма возбуждения лопатки (диаграмма Кэмпбелла).

пбелла). Пример диаграммы представлен на рис. 6.1.1, где по оси абсцисс отложены числа оборотов вращения ротора, по оси ординат - частоты собственных колебаний лопаток f , которые наносятся на диаграмму по данным расчетов. Лучи, проведенные из начала координат, представляют собой частоты возбуждения, кратные числам оборотов n [253]. Кратность k указана для каждого луча. Точки пересечения лучей с кривыми f_{cob} и определяют частоты вращения двигателя, при которых возникают резонансные колебания лопаток. Необходимо, чтобы данные частоты вращения отличались от рабочей частоты $n_{раб}$ вращения ротора двигателя. Для достижения этого при проектировании лопаток ГТД проводится ряд расчетов форм и частот их собственных колебаний. Изменяя геометрию лопаток, добиваются отстройки от резонанса на максимальном режиме работы двигателя (рис. 6.1.2) [253].

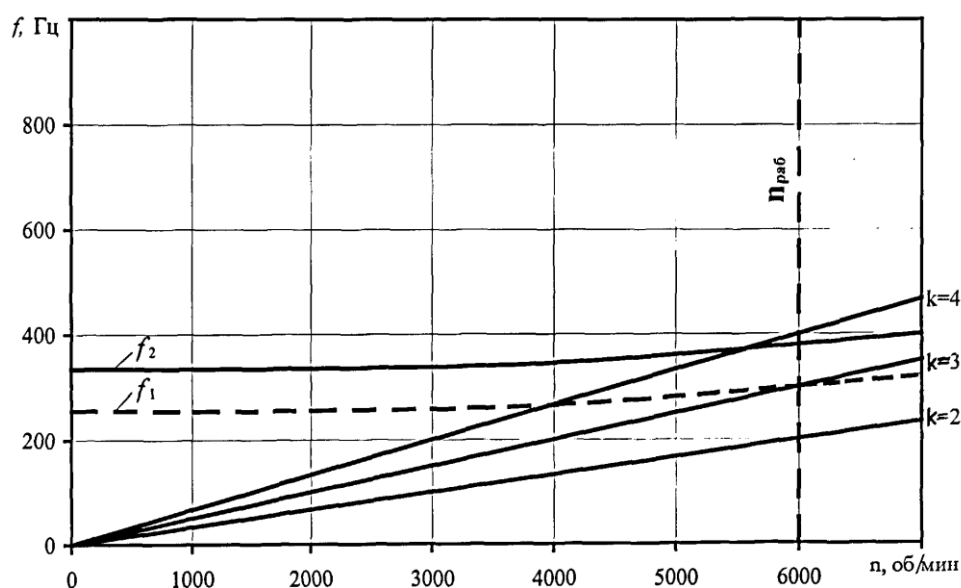


Рисунок 6.1.2 - Частотная диаграмма для исследования резонансных колебаний лопаток: f_1 - исходная геометрия; f_2 - отстроенные лопатки

Реальные детали имеют не одну, а целый спектр собственных форм колебаний и соответствующих им частот [253]. Изменяя конфигурацию детали, места и жесткость узлов крепления, можно изменить спектр частот собственных колебаний так, чтобы ещё на стадии проектирования отстроиться от возможных резонансов с большими переменными нагрузками на основных рабочих режимах [252]. Ввиду сложности расчетного определения величины вибрационных напря-

жений лопаток ГТД в рабочих условиях в настоящее время их измеряют экспериментально прямым тензометрированием в составе двигателя. Для этого лопатки препарируют тензорезисторами и исследуют их вибрационные характеристики на всех режимах работы двигателя при его доводке [253]. Для регистрации результатов этих исследований применяют магнитографы, катодные и шлейфовые осциллографы. Амплитудно-частотный анализ переменных во времени сигналов проводится с помощью анализаторов спектров частот. Этот комплекс расчетно-экспериментальных работ по обеспечению вибрационной прочности рабочих лопаток ГТД является трудоемкой, сложной инженерной задачей [253]. Исключение резонанса лопатки на максимальном рабочем режиме является важнейшим условием обеспечения надежной работы двигателя. Поэтому расчету форм и частот собственных колебаний лопаток ГТД на этапе проектирования всегда уделяется особое внимание [253].

Как показаны в [254], [255], наибольшими являются центробежные силы, действующие на лопатки при вращении. В зависимости от рабочей частоты вращения турбины, а также размеров лопатки, численные значения действующих на нее центробежных сил могут изменяться в очень широких пределах, достигая для лопаток последних ступеней низкого давления нескольких меганьютонов. Если в лопатках постоянного сечения центробежные силы, в основном, вызывают напряжения растяжения, то в закрученных лопатках переменного сечения, помимо напряжений растяжения, возникают также значительные напряжения изгиба и кручения. Усилия, действующие на лопатку от потока пара, имеют значительно меньшие численные значения, чем центробежные силы, и достигают максимальных значений, равных нескольким килоньютонам, в регулирующих ступенях мощных турбин. Поскольку действующие от парового потока силы направлены перпендикулярно оси лопатки, то они вызывают в лопатке изгибающие напряжения, так называемые напряжения парового изгиба. Кроме статических и термических напряжений, в рабочих лопатках паровых турбин в процессе эксплуатации могут возникать динамические напряжения, периодически изменяющиеся во времени. В отличие от статических напряжений, численные значения которых могут

быть найдены расчетным путем, значения переменных напряжений не могут быть вычислены с требуемой для практики точностью, что объясняется недостаточностью знаний как возмущающих, так и демпфирующих сил.

Таким образом, проблема изгибно-крутильного флаттера рабочих лопаток турбомашин чрезвычайно актуальна, несмотря на недостаточное внимание, уделяемое ей в различных литературных источниках.

Являясь разновидностью динамической неустойчивости упругого тела, связанный изгибно-крутильный флаттер очень близок к явлению динамической потери устойчивости стержней при нагружении следящими силами.

2. Критериальные оценки и вероятностно-статистические подходы. В работе [256] показаны, что на начальном этапе развития теории флаттера существенное развитие получили так называемые критериальные оценки, являющиеся в основном одно- или двухпараметрическими зависимостями [162, 163], зависимости от большего числа параметров встречаются значительно реже [164]. Самым распространенным и одним из наиболее простых критериев является число Струхаля (приведенная частота), вычисляемое по формуле:

$$Sh = \frac{\omega c}{U},$$

где ω - круговая частота собственных колебаний лопатки; c - длина хорды лопатки; U - скорость набегающего потока. Физический смысл числа Струхаля состоит в отношении нестационарной составляющей силы, действующей на профиль и вызванной колебаниями лопатки, к стационарной нагрузке, определяемой скоростным напором [256]. С увеличением числа Струхаля поведение лопатки становится всё более отличным от квазистационарного. Критериями устойчивости к флаттеру в работе [164] являются значения $Sh > 0.8$ при рассмотрении колебаний по изгибной форме, $Sh > 1.4$ - по крутильной. В [165] соответствующими критическими значениями являются $Sh = 0.3$ и $Sh = 1.6$. Наиболее перспективным подходом является использование численных методик определения устойчивости лопаток к флаттеру в трехмерной постановке, учитывающих все геометрические и физические особенности объекта [256].

3. Численные методы анализа. Следует отметить, что обычный способ улучшения параметров ГТД на основе традиционных подходов, ориентированных наряду с расчетами в основном на дорогостоящие эксперименты, практически исчерпал себя [256]. В силу ограниченных возможностей наземных экспериментальных установок, их дороговизны и длительности испытаний в практике двигателестроения и других областях техники интенсивно развивается направление, ориентированное на создание и анализ математических моделей объектов, базирующейся на широком применении и синтезе современных численных методов механики сплошной среды и ЭВМ. При численном решении задачи о совместных колебаниях твердого тела и газового потока исследователи сталкиваются с рядом трудностей. Во - первых, это много дисциплинарные задачи - при её решении приходится пользоваться методами теории упругости, аэродинамики и теории колебаний. Во-вторых, нестационарность протекающих процессов, в частности, подвижность границ расчетной области, зависимость нестационарных газовых сил от текущего положения и предыстории движения лопатки. В - третьих, при решении связанных задач имеются сложности математического плана вследствие отсутствия унифицированного математического аппарата для комплексного описания её поведения [256]. Вследствие указанных факторов многие исследователи, используют упрощенные модели, позволяющие, так или иначе, свести задачу к последовательному решению газодинамической и твердотельной задач или к одной из них с использованием аналитических зависимостей для другой [256]. Такие подходы Дж. Маршалл и М. Имриган [166] называют «классическими». В группу «интегрированных» данные авторы относят методы, в которых проводится попытка решения совместной задачи. Большой обзор методов решения задачи флаттера приведен также в работах [167-169].

До недавних пор основным методом расчетов НДС и вибрационных характеристик была «стержневая» теория, рассматривающая лопатку как тонкий, естественно закрученный стержень [170], [172], [173], [254]. Лопатки условно подразделялись на гибкие и жесткие и для каждого класса вводились свои дополнительные предположения. Для жестких лопаток упругие прогибы и углы поворота сечений

считаются малыми и не изменяющими геометрическую форму ее осевой линии. В этом случае напряжения в лопатке от действия центробежных сил и паровых усилий можно определять отдельно. Для расчета жестких лопаток используется теория прямых стержней (теория балок) [174-175]. К жестким стержням относится большинство лопаток паровых турбин: все ступени высокого и среднего давления, а также лопатки первых ступеней низкого давления [254]. Особенность расчета гибких естественно закрученных лопаток заключается в том, что при рассмотрении их деформации необходимо учитывать взаимосвязанность деформаций растяжения, изгиба и кручения. Кроме того, при вычислении изгибающего и крутящего моментов нельзя считать малыми упругие прогибы и углы поворотов сечений и пренебрегать ими, как это делается при расчете жестких лопаток [254].

Формы колебаний закрученных стержней являются пространственными, они не имеют узлов как неподвижных точек оси стержня, которые позволяют достаточно просто классифицировать формы колебаний незакрученного стержня. Начальную закрученность стержней двусимметричного поперечного сечения учитывает классическая теория стержней Кирхгофа-Клебша [176]. Однако поперечные сечения рабочих лопаток имеют явно выраженную несимметрию. Несимметрия сечения приводит к взаимосвязи различных видов колебаний. Инерционная связь изгибных и крутильных колебаний возникает вследствие несовпадения центра масс и центра изгиба сечения. Учет этого несовпадения уточняет классическую теорию стержней Кирхгофа-Клебша, но не является достаточным для описания колебаний закрученных лопаток несимметричного сечения.

Техническая теория закрученных стержней учитывает, кроме того, деформацию продольных винтовых волокон при упругом кручении стержня. Даже для стержня с двусимметричным поперечным сечением при этом возникает связь продольной и крутильной деформаций. У стержня с несимметричным поперечным сечением продольные деформации при кручении вызывают не только продольную силу, но и изгибающие моменты. Изгиб же закрученного стержня с несимметричным сечением за счет поперечных составляющих деформаций винтовых волокон вызывает деформацию кручения. Таким образом, возникает дефор-

мационная связь изгибных, крутильных и продольных колебаний [177-178].

При необходимости проводятся серии однотипных расчетов, в частности, в процессе приведения собственных частот колебаний проектируемой лопатки в соответствие с требованиями норм прочности [257]. В этом случае для перебора множества конфигураций за ограниченное время возникает потребность в высокой скорости расчета.

В работе [252] показаны, что модель стержня в работах И.А. Биргера [173, 174] и Б.Ф. Шорра [172] применена для развития различных вариантов теории закрученных стержней и является весьма эффективной при моделировании динамики лопаток. Практически с начала внедрения ГТД до настоящего времени продолжается процесс совершенствования стержневой модели для проектирования лопаток турбомашин. Опираясь на классические работы Г. Кирхгофа, А. Клебша, А. Лява [175-178], используя результаты исследований Г.Ю. Джанелидзе, А.И. Лурье, СП. Тимошенко, П.М. Риза, [93, 178], основанные на применении теории упругости к анализу НДС закрученных стержней, И.А. Биргер, Ю.С. Воробьев и Б.Ф. Шорр разработали различные варианты теории естественно закрученных стержней для расчета лопаток турбомашин. Подробные обзоры работ в этом направлении приведены в [179,180]. Данный подход позволил учесть влияние таких факторов, как начальная закрутка, депланация сечения, сдвиг и т.д. [252].

Это позволило получать удовлетворительные результаты при расчете НДС и частот собственных колебаний компрессорных лопаток большого удлинения, для которых справедлива гипотеза свободного кручения.

Уравнения равновесия прямолинейных естественно закрученных стержней также можно найти у В.А. Светлицкого [241], [257]. В работе Ю.М. Темиса и В.В. Карабана [182] была реализована нелинейная модель предварительно закрученного стержня, использующая для описания деформации члены второго порядка малости, что позволило существенно повысить точность расчетов и учесть нелинейные эффекты, такие как изменение центробежной нагрузки, действующей на вращающуюся лопатку в процессе ее деформирования [257].

Необходимо отметить, что каждая уточняющая модификация стержневой

модели лопатки сопряжена с усложнением этой модели. В частности, модель А.И.Ушакова [183], предложившего свой вариант нелинейной теории тонкостенных стержней произвольной формы для расчета лопаток с кривой осью, косыми торцами и переменной по длине геометрией, позволяет учесть не только деформацию средней линии поперечного сечения, но также и деформацию стенки. Эта модель, хотя и позволяющая верно оценить величины низших частот колебаний широкохордных лопаток компрессоров, вентиляторов и некоторых типов охлаждаемых лопаток турбин, является чрезмерно сложной, поскольку вместо одномерной стержневой модели сводится фактически к объемному анализу таких конструкций [183]. К настоящему времени опубликовано большое число работ отечественных и зарубежных исследователей, посвященных этой проблеме.

В литературе описаны различные способы расчета форм и частот собственных колебаний лопаток. Их общим недостатком является то, что результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными значениями только в конкретных частных случаях для определенных конструкций лопаток [252, 253]. В настоящее время все еще не предложено единой универсальной методики обеспечения вибрационной прочности лопаток ГТД, основанной на точном решении задачи расчета вибрационных характеристик современных рабочих колес сложной конструкции.

4. Энергетический подход. При использовании энергетического подхода предполагается [256], что все лопатки колеблются по одной и той же форме колебаний, с одной амплитудой и частотой (данные параметры являются константами задачи). В работе [184] показано, что такая постановка соответствует случаю с наименьшей устойчивостью решений. Описание метода одним из первых было дано в [185]. Алгоритм решения задачи согласно энергетическому подходу можно условно описать следующим образом [256]:

Определение собственных форм и частот колебаний лопатки без учета нестационарных аэродинамических нагрузок.

Выбор тех форм и частот, возникновение автоколебаний по которым наиболее вероятно (как правило, это первые изгибная и крутильная формы [186]).

Задавшись некоторым законом колебаний лопаток (формой и частотой, амплитудой и фазовым сдвигом), проводится нестационарный аэродинамический расчет обтекания колеблющейся решетки профилей.

По знаку работы газа над лопаткой за один период колебаний определяется устойчивость по соответствующей собственной форме. Положительная работа свидетельствует о «склонности» лопатки к автоколебаниям, отрицательная - об устойчивости [256].

Как отмечается в работе [187] энергетический подход обладает низкими по сравнению с аналогами требованиями к вычислительным ресурсам и позволяет определить запасы устойчивости во всей рабочей области.

Результаты расчетов по энергетическому методу затем можно использовать для расчета прочности путём гармонического анализа (поиска отклика системы на гармонические нагрузки).

Основным достоинством энергетического подхода, по сравнению с решением сопряженной задачи, является относительная простота, а недостатком - возможность моделировать только установившиеся колебательные процессы без учета обратного влияния газового потока на колебания лопатки.

5. Решение задачи прочности в частотной области. В отличие от энергетического подхода метод решения аэроупругой задачи на собственные значения опирается главным образом на решение твердотельной составляющей задачи, упрощая аэродинамическую составляющую. В этом случае проводится анализ уравнений свободных колебаний лопаток в предположении, что аэроупругие силы являются только функциями перемещений.

Для этого расчетным или иным путём определяется набор аэродинамических параметров (подъемных сил и моментов, возникающих при различных смещениях профиля), которые затем используются в качестве коэффициентов в матрицах жесткости и демпфирования [256]. Далее задача сводится к задаче о собственных значениях. Действительная часть полученных комплексных частот соответствует частоте собственных колебаний, мнимая – характеризует уровень аэродемпфирования [163], [256].

Анализ в частотной области обладает теми же преимуществами, что и энергетический подход – относительной простотой и более низкими требованиями к вычислительным ресурсам.

Указанных выше недостатков удастся избежать, применяя различные расчетные методы анализа конструкций. Расчетные методы анализа прочности конструкций, как правило, разделяют на аналитические и численные.

Аналитические методики исследования напряженно-деформированного и вибрационного состояния основаны, как правило, на упрощенных соотношениях теории стержней, оболочек, а также теории колебаний. Преимуществом аналитических методик является относительная простота использования и удобство при проведении оценочных расчетов на начальных этапах проектирования.

6. Изгибно-крутильные колебания естественно закрученных лопаток. Главной особенностью естественно закрученной лопатки является взаимная связанность растяжения и изгиба с кручением: растягивающая сила и изгибающие моменты в сечениях лопатки вызывают не только изгиб, но и кручение. Соответственно, крутящий момент вызывает не только закручивание лопатки, но и растяжение-сжатие и изгиб. Чтобы учесть эту взаимную связанность рабочие лопатки турбомашин наиболее часто моделируют в виде тонкостенных естественно закрученных стержней [188], совершающих изгибно-крутильные или крутильно-продольные колебания. Однако в настоящее время отсутствуют методы аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающих изгибно-крутильно-продольные колебания закрученной лопатки переменного сечения.

Нахождение собственных частот колебаний рабочих лопаток является одной из основных задач при проектировании любой турбомшины. А поскольку аналитическое решение системы дифференциальных уравнений изгибно-крутильно-продольных колебаний закрученной лопатки переменного сечения отсутствует, разработан ряд приближенных методов (методы Рэлея, Ритца, метод последовательных приближений и т. д.) [189], позволяющих оценивать собственные частоты колебаний рабочих лопаток.

Одним из вариантов оценки собственных частот колебаний закрученных ло-

патов является методика расчета [191] с помощью таблиц. При использовании этой методики собственные частоты консольных закрученных балок рассчитываются по стандартным формулам [191].

Как показывает практика расчетных и экспериментальных исследований НДС лопаток [192], для повышения достоверности получаемых расчетных результатов наиболее целесообразно использовать численные методы. Достоинством численных методов является возможность решения сложных задач механики деформируемого твердого тела и механики конструкций при гораздо, меньших затратах, чем при экспериментальных исследованиях.

7. Анализ состояния проблемы колебания ГТД изготовленных из КМ. В работе [209] показано, что создание современных газотурбинных двигателей (ГТД) характеризуется заменой в ряде деталей традиционных конструкционных материалов (сталей и титановых сплавов) на современные КМ, имеющие более высокие удельную прочность и жесткость. Такие работы проводят все ведущие двигателестроительные фирмы мира (General Electric, Pratt and Whitney, CFM International и др.). Исследованиями в этой области также занимаются ФГУП ЦИАМ, ФГУП ВИАМ, ОАО «НПП «Мотор», ОАО «Пермский моторный завод» и др. В настоящее время одним из основных направлений по применению КМ в газотурбинных двигателях является создание лопатки из углепластика, лопатки из титанового сплава, армированного волокнами карбида кремния, лопатки составной конструкции и лопатки из КМ на металлической матрице [209].

В [204] показано, что растущий интерес к демпфирующим конструкциям из КМ стимулирует разработку методов определения их собственных частот и коэффициентов механических потерь. Этот интерес обусловлен в первую очередь тем, что диссипативные свойства конструкционных КМ значительно превосходят аналогичные характеристики подавляющего большинства металлов и сплавов и могут быть использованы в качестве параметров проектирования конструкций с заданными свойствами. При создании КМ и изделий из них важнейшее значение имеет прогнозирование упругих и диссипативных характеристик конструкций по известным свойствам отдельных монослоев. Для этого необходимо располагать

полным набором упругих и диссипативных характеристик материалов монослоев, компонуемых в конструкцию. Вопросы определения полного набора комплексных модулей получили достаточное освещение в современной литературе [195-198]. Определенный прогресс в этом направлении достигнут для элементов конструкций, состоящих из жестких конструкционных КМ [199-201]. При переходе к слоистым конструкциям, состоящим из совокупности жестких и мягких слоев, ситуация становится еще сложнее и известны несколько работ, посвященных исследованию их затухающих колебаний [203-206]. Ни в одной из указанных работ не были учтены эффекты трансверсального сжатия, учет которого позволит более полно выявить особенности поведения указанных конструкций. Учитывая сложность поставленной задачи, естественно выбрать объект исследования, с одной стороны, максимально простой, с другой - учитывающей все характерные особенности исследуемого явления [204].

Не останавливаясь на детальном анализе многообразия существующих подходов к исследованию колебаний слоистых анизотропных пластин, отметим только наиболее существенные особенности их деформирования.

Модули поперечного сдвига современных КМ обычно очень малы по сравнению с модулями упругости в плоскости, в результате чего деформации сдвига могут влиять на поведение таких материалов гораздо существеннее, чем на поведение однородных изотропных материалов [207]. Например, определяемые по классической теории пластин собственные частоты для пластин с отношением длины стороны к толщине, равным 10, на 25% превышают частоты, определенные по теории, учитывающей деформации сдвига [207].

Дифференциальные уравнения, которые получаются при использовании принципа минимума потенциальной энергии, позволяет достаточно хорошо описать глобальное поведение пластины и стержней, т.е. определить прогибы, собственные частоты и критические нагрузки. Однако, для исследования распределения напряжений по толщине пластины и стержней в областях разрыва непрерывности, например, на границах, требуется более сложная теория. На границах межслойные напряжения создают "эффект пограничного слоя", в соответствии с ко-

торым напряжения между слоями различных материалов отличны от нуля.

Приведенный краткий обзор позволяет заключить, что для построения математической модели собственных колебаний квазиоднородных слоистых анизотропных пластин и стержней целесообразно воспользоваться уточненной технической теорией, поскольку исследуется глобальное поведение конструкции.

В работе [206] для анализа упругих и диссипативных характеристик многослойных пластин из КМ используется модель слоистой регулярной структуры, предложенная в [207-208]. Представим композит в виде совокупности чередующихся слоев с существенно различными свойствами. Одна группа слоев, названная в [206] жесткими, имитирует армирующие элементы композита (стеклопластики, углепластики и т.п.). Другая группа, мягкие слои, моделирует свойства демпфирующих вязкоупругих слоев. Жесткие слои воспринимают основные усилия в плоскости армирования, а мягкие слои несут ответственность за межслойный сдвиг. Одной из существенных сторон теории [206,207] является совокупность кинематических гипотез. Деформации слоистой конструкции полностью задаются перемещениями жестких слоев, для каждого из которых учитывается влияние деформаций сдвига. На поверхности контакта жестких и мягких слоев выполняется условие непрерывности перемещений. В то же время поля деформаций могут иметь разрывы. Применение вариационного принципа Гамильтона позволяет построить лучшее в энергетическом смысле приближение полей перемещений, деформаций и напряжений к истинным полям.

В работе [209] приведена методика расчета на прочность лопатки компрессора газотурбинного двигателя из гибридного КМ, отличающаяся тем, что позволяет определять напряжения в матричном материале и в армирующих волокнах, оценивать по ним прочность лопатки и, рассматривая различные схемы армирования, выбирать из них вариант, обеспечивающий минимизацию напряжений в наиболее опасных точках лопатки. Рассматривается расчетная модель для определения эффективных характеристик жесткости гибридного КМ на основе магниевой матрицы, армированной углеродными и борными волокнами, включающую формирование представительного элемента гибридного композита. Построение

конечно элементной модели композита и анализ точности получаемых результатов реализован в рамках пакета ANSYS.

Колебания и аэроупругость композиционных лопастей рассматриваются в работах [210-223]. Нелинейным аэроупругим колебаниям посвящены работы [224-228]. Некоторым вопросам, относящимся к математическим моделям упругих лопастей и численным методам их расчета, посвящены работы [229-231].

Таким образом, при создании работоспособной лопатки из КМ одним из важнейших направлений является максимальное снижение напряжений в местах перехода от пера лопатки к ее хвостовику и в угловых точках на боковых гранях хвостовика, где и происходит разрушение лопатки из традиционных материалов. В отличие от однородных материалов в лопатке из КМ, напряжения в опасных зонах можно снижать не только за счет геометрической формы лопатки, но и за счет выбора рациональной схемы ее армирования. Эффективность этого подхода до настоящего времени в лопатках ГТД детально еще никто не анализировал, хотя это может дать весьма заметный положительный эффект [209]. Для реализации такой возможности необходима методика расчета НДС лопатки из КМ с учетом его реальной структуры. При создании такой методики необходимо решить ряд актуальных научных задач: разработать методику экспериментального определения упругих и прочностных характеристик КМ; разработать методику расчета коэффициентов жесткости композитов при различных схемах армирования с одним или двумя видами армирующих волокон; разработать методику расчета НДС лопатки из КМ с определением напряжений в матрице и армирующих волокнах и выбрать наиболее рациональную схему армирования с наименьшими напряжениями в наиболее опасных точках лопатки. Решение указанных задач является в настоящее время весьма актуальным, обладающим существенной новизной и имеющим важное практическое значение [209].

6.2 Общие сведения

Рассмотрим деформируемый стержень, у которого длина значительно пре-

вышает два других линейных размера поперечного сечения. Различают прямые стержни - с прямолинейной осью и кривые стержни, оси которых искривлены по различным законам. Длина прямого стержня определяется как расстояние между его концевыми сечениями, длина кривых стержней - как длина искривленной оси.

Форма поперечного сечения является важнейшей характеристикой стержня. Выделяют сечения двусимметричные с двумя осями симметрии, симметричные с одной осью симметрии и несимметричные. У стержня переменного поперечного сечения величина или форма сечения может изменяться вдоль по длине стержня непрерывно или скачками.

У закрученных стержнях боковая поверхность образуется винтовым движением контура плоского поперечного сечения относительно его оси. Такие стержни могут быть прямыми и кривыми, постоянного и переменного сечения. В настоящей работе рассматриваются прямые или слабо искривленные закрученные стержни, как имеющие наибольшее практическое применение. Чтобы подчеркнуть, что закрутка стержня имела место до процесса изучаемой деформации, ее называют начальной. В ряде работ прикладного характера начальная закрученность называется естественной [49, 93, 95, 125, 231]. Такое определение иногда подчеркивает, что закон начальной закрученности вызван функциональными требованиями к соответствующему конструктивному элементу. Например, закрученные стержни являются моделями лопаток осевых паровых и газовых турбомашин, компрессоров и воздушных винтов, законы закрученности которых определяются требованиями аэродинамики соответствующих рабочих процессов. Закрученность может быть равномерной по длине (линейной) или нелинейной, описываемой различными законами. Поэтому закрученные стержни представляют собой тип стержней, требующий самостоятельного рассмотрения.

При рассмотрении закрученных стержней используются две основные системы координат [258]: неподвижная (K_x) и местная (K_ξ) (см. рис. 1.5.1, 6.1.1). В качестве неподвижной принимается прямоугольная правая система $Oxyz$. Начало координат O расположено в центре масс начального сечения. При этом ось z направляется вдоль длины, ось x перпендикулярно волокнам, но в плоскости слоя и ось

y , перпендикулярно слою. Оси ξ, η неподвижной системы координат $\xi\eta\zeta$ при движении вдоль оси поворачивается вместе с сечением, оставаясь главными центральными осями любого сечения. Ось ζ совпадает с осью z .

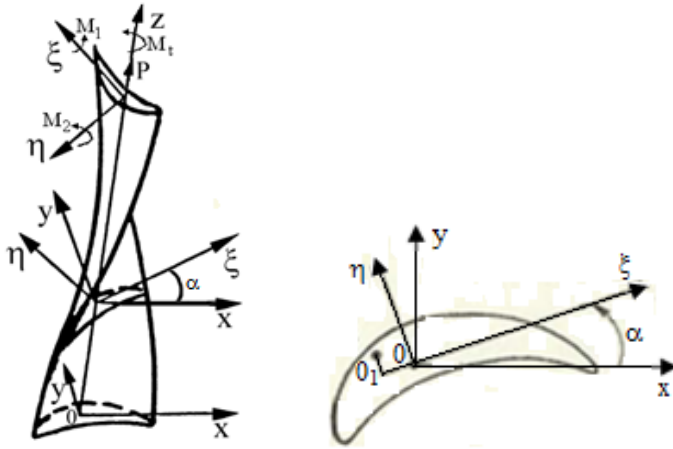


Рисунок 6.1.1 - Основные системы координат для закрученных стержней.

Угол $\alpha(z)$, отсчитываемый между осями x и ξ против направления вращения часовой стрелки, называется углом установки текущего сечения или углом начальной закрученности стержня. В этом случае неподвижная (K_x) и связанная с текущим поперечным сечением (K_ξ) системы координат находятся из преобразования [29]

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (6.2.1)$$

где H - матрица направляющих косинусов осей координат,

$$H = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.2.2)$$

Относительная закрученность (степень закрутки) стержня в данном сечении

$$\tau_0 = d\alpha/dz, \quad (6.2.3)$$

Стержень равномерно закручен, если $\tau_0 = const$. Тогда

$$\alpha(z) = \alpha(0) + \tau_0 z; \quad \tau_0 = \frac{\alpha(\ell) - \alpha(0)}{\ell}, \quad (6.2.4)$$

где ℓ - длина стержня.

Примером равномерно закрученных стержней являются спиральные сверла и витые манометрические трубки. Закрученность некоторых турбинных и компрессорных лопаток близка к равномерной.

Произвольная точка A_0 в поперечном сечении z_0 находится на расстоянии

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (6.2.5)$$

от оси вращения стержня. Траектория перемещения точки A_0 при увеличении z образует винтовое волокно [49], [125], [131]. При смещении сечения вдоль оси на величину Δz произойдет приращение угла закрученности и эта точка опишет в плоскости сечения дугу длиной $\Delta s = [\alpha(z + \Delta z) - \alpha(z)]r_0$. Основные положения линейной теории стержней применимы к стержням, у которых $(\Delta s / \Delta z)^2 \ll 1$ или

$$(\tau_0 r)^2 \ll 1. \quad (6.2.6)$$

Можно сказать, что соответствующие точки различных сечений закрученного стержня располагаются на винтовых линиях, углы наклона которых к оси стержня будет $\beta_0 = \arctg(\tau_0 r)$. Тогда область рассмотрения стержней может ограничиваться малыми углами наклона винтовых линий

$$(\beta_0)^2 \ll 1. \quad (6.2.7)$$

Это неравенство эквивалентно критерию (6.1.6), так как при малых углах наклона $\beta_0 \approx \tau_0 r$. Необходимо отметить, что понятие винтовой линии или винтового волокна используется для наглядности и при некоторых подходах к построению приближенной теории закрученных стержней, но не является необходимым при построении общей теории закрученных стержней.

Некоторые особенности поведения закрученных стержней зависят от абсолютного угла закрученности α (от взаимного положения сечений), другие - от степени закрутки τ_0 (от скорости изменения по длине взаимного положения сечений).

6.3 Геометрические соотношения закрученного многослойного стержня

Положение любого поперечного сечения стержня полностью определяется

координатой z . В теории стержней принято рассматривать пространственные перемещения некоторой характерной точки сечения и углы поворота сечения, которые являются функцией одной координаты z . Перемещения же любой точки сечения определяются линейными и угловыми перемещениями в выбранной характерной точке сечения и гипотезами о поведении сечения при деформировании стержня.

Например, гипотеза плоских сечений состоит в предположении, что поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее. Существует гипотеза, предполагающая малые искажения плоского сечения (депланацию), определяемые соответствующими производными перемещений характерной точки. После введения таких гипотез трехмерная задача о деформации стержня сводится к одномерной задаче определения компонент перемещений характерной точки сечения, являющихся функциями координаты z . Производные по координате z в дальнейшем будут обозначаться штрихами.

Пусть компоненты линейных перемещений характерной точки сечения в системе координат xuz обозначаются соответственно $u(z), v(z), w(z)$, компоненты угловых перемещений сечения - $\gamma_x(z), \gamma_y(z), \gamma_z(z)$, а компоненты перемещений в системе координат $\xi\eta\zeta$ соответственно $u_\xi(z), v_\eta(z), w_\zeta(z), \gamma_\xi(z), \gamma_\eta(z), \gamma_\zeta(z)$. Тогда можно получить геометрические соотношения (см.рис. 6.2.1) [49]

$$w_\zeta = w; \quad \gamma_\zeta = \gamma_\zeta = 0; \quad (6.3.1)$$

$$\begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\eta \\ w_\zeta \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}. \quad (6.3.2)$$

Для компонент кривизны стержня в разных системах координат зависимости имеют вид

$$\begin{pmatrix} \chi_\xi \\ \chi_\eta \end{pmatrix} = H_0 \begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (6.3.3)$$

Степень закрутки (относительная закрученность) стержня при деформации

$$\tau = \theta' \quad (6.3.4)$$

а удлинение оси

$$\varepsilon = w' \quad (6.3.5)$$

В местной системе координат $\xi\eta\zeta$ компоненты угловых перемещений [49]

$$\gamma_\eta = u'_\xi - \tau_0 v_\eta, \quad -\gamma_\xi = v'_\xi + \tau_0 v_\eta, \quad (6.3.6)$$

а компоненты кривизны

$$\chi_\xi = v''_\xi + 2\tau_0 u'_\xi - \tau_0^2 v_\eta + 2\tau'_0 u_\xi, \quad -\chi_\eta = u''_\xi - 2\tau_0 v'_\eta - \tau_0^2 u_\xi - 2\tau'_0 v_\eta.$$

При малых перемещениях

$$\gamma_\eta = u'_\xi, \quad -\gamma_\xi = v'_\xi, \quad \chi_\eta = u''_\xi, \quad \chi_\xi = -v''_\eta. \quad (6.3.7)$$

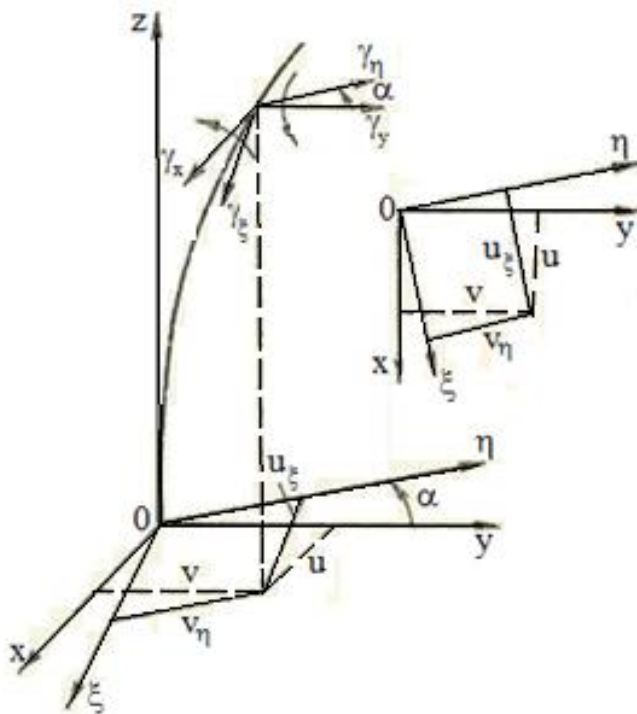


Рисунок 6.2.1 - Компоненты линейных и угловых перемещений в неподвижной и подвижной системах координат.

Для консольной жестко закрепленной по корневому сечению стержня кинематические граничные условия имеют вид

$$w(0) = u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = w'(0) = \theta(0) = 0, \quad (6.3.8)$$

на торцевом сечении выполняются условия

$$w'(l) = u''(l) = v''(l) = \theta'(l) = 0, \quad (6.3.9)$$

С учетом граничных условий (6.3.8) получим

$$w^i = \int_0^z \varepsilon dz, \quad u^i = \iint_{00}^{zz} \chi_2 dz^2, \quad v^i = -\iint_{00}^{zz} \chi_1 dz^2, \quad \theta^i = \int_0^z \tau dz. \quad (6.3.10)$$

6.4 Основные соотношения закрученных стержней несимметричного поперечного сечения

Для закрученных стержней несимметричного поперечного сечения необходимо, согласно результатам гл. III, учитывать связь изгибной, крутильной и продольной деформаций. В то же время следует обеспечить возможность достаточно эффективного решения практических задач для стержней переменного сечения. Стремление удовлетворить оба требования и привело к построению технической теории закрученных слоистых анизотропных стержней.

Предполагается, что центр поворота сечения O_I в своей плоскости совпадает с центром тяжести или изгиба сечения. В каждом сечении вводятся местные системы координат $\xi\eta$ с началом в центре тяжести или изгиба, оси которых параллельны осям систем xu с началом в центре масс сечения (см. рис. 6.1.1). Зависимости для перемещений любой точки стержня будут отличаться от зависимостей классической теории (Кирхгофа-Клебша) учетом депланации поперечного сечения при кручении (3.1.12). Эта депланация, согласно известным решениям [49, 125] полагается пропорциональной относительно углу упругого кручения $\tau_0 \theta r^2$. Перемещения любой точки стержня в системе xuz определяются зависимостями

$$\begin{aligned} U &= u - \tau_0 y, \\ V &= v + \tau_0 x, \\ W &\approx w - xu' + yv' + \tau_0 \theta r^2. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

При определении продольной деформации ε_z учет депланации приводит к появлению дополнительных по сравнению с выражением Кирхгофа-Клебша членов (см.(3.1.10))

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33}^i &= \varepsilon^b \cos \beta, \\
\varepsilon^b &= \varepsilon_{33}^0 \cos \beta \{ (1 + 0.5r^2 \tau_0 \varepsilon_{33}^0 \cos \beta) + \\
&+ \tau_0 \tau [rp + \frac{\tau \cos \beta}{2\tau_0} (r^2 + 2rp_c + r_k^2 + \tau_0 r^2 p_c \cos \beta)] \}, \\
\varepsilon_{33}^0 &= \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2,
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

При условии (6.1.6) и (6.1.7) [49], [125] имеем

$$\beta_0 \approx \tau_0 r.$$

В дальнейшем не учитываются также члены τ_0^2, τ^2 . Окончательно выражения для деформаций приобретают вид (см. (3.3.4))

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33}^i &= \varepsilon^b \approx w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2, \\
\varepsilon_{23}^i &= \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon_{33}^i + Q_2 N_2, \\
\varepsilon_{13}^i &= \tau_0 \cos \alpha \cdot \varepsilon_{33}^i - Q_1 N_1, \quad \alpha = \tau_0 \zeta, \\
\varepsilon_{11}^i &= \varepsilon_{22}^i = 0,
\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

а напряжения –

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^i &= c_1^i \varepsilon^b - c_{35}^i Q_1 N_1 = c_1^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2) - c_{35}^i Q_1 N_1, \\
\sigma_{23}^i &= \tau_0 \varepsilon^b c_{44}^i \sin \alpha + c_{44}^i Q_2 N_2 = c_{44}^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2) \tau_0 \sin \alpha + c_{44}^i Q_2 N_2, \\
\sigma_{13}^i &= \tau_0 c_1^i \varepsilon^b - c_{55}^i Q_1 N_1 = \tau_0 c_1^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2) - c_{55}^i Q_1 N_1, \\
c_1^i &= (c_{33}^i + c_{35}^i \cos \alpha), \quad \alpha = \tau_0 \zeta.
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформации закрученного слоистого анизотропного стержня определяется выражением -

$$\Pi = \int_0^\ell \iint_s (\sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i + \sigma_{23}^i \varepsilon_{23}^i + \sigma_{13}^i \varepsilon_{13}^i) ds dz. \tag{6.4.4}$$

Если исключить поперечные силы ($Q_j=0$) и учесть условие (6.3.3), то получим

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_0^\ell \iint_s (\sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i + \sigma_{23}^i \varepsilon_{23}^i + \sigma_{13}^i \varepsilon_{13}^i) ds dz = \\
&= \int_0^\ell \iint_s [(c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0) (\varepsilon^b)^2 + c_{44}^i \tau_0^2 \alpha^2 \cdot (\varepsilon^b)^2 + (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0) \tau_0 \cdot (\varepsilon^b)^2] ds dz.
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Тогда потенциальная энергия деформации закрученного слоистого анизотропного стержня определяется через деформации -

$$\Pi = \int_z^\ell [\varepsilon^2 F + I_x \chi_2^2 + I_y \chi_1^2 + \tau_0^2 I_p \tau^2 + 2\tau_0 \tau (I_p \varepsilon - I_{xp} \chi_2 + I_{yp} \chi_1) - 2I_{xy} \chi_2 \chi_1] dz, \tag{6.4.6}$$

через перемещения -

$$\Pi = \int_z^{\ell} [I_w w'^2 F + I_x v''^2 + I_y u''^2 + \tau_0^2 I_{p^2} \theta'^2 + 2\tau_0 \theta' (I_p w' - I_{xp} v'' + I_{yp} u'') - 2I_{xy} u'' v''] dz. \quad (6.4.7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} c_1^i &= c_{33}^i + c_{35}^i \cos \alpha, & c_2^i &= c_{35}^i + c_{55}^i \cos \alpha, & c_3^i &= c_1^i + c_{44}^i \tau_0^2 \alpha^2 + c_2^i, \\ I_{p^2}^i &= \int_F c_3^i (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dF = I_{04}^i + 2I_{22}^i + I_{40}^i, & I_{xy}^i &= \int_F c_3^i xy dF, \\ I_3^i &= \int_F c_3^i (x^2 + y^2) dF, & I_{yp}^i &= \int_F c_3^i (x^3 + xy^2) dF, & F &= \int_F c_3^i dF, \\ I_{xp}^i &= \int_F c_3^i (yx^2 + y^3) dF, & I_x^i &= \int_F c_3^i x^2 dF, & I_y^i &= \int_F c_3^i y^2 dF. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

По сравнению с классической теорией закрученных стержней здесь вводятся дополнительные физико-геометрические характеристики слоистого анизотропного сечения стержня (см.(1.5.15)):

$$I_{mn}^k = \int_F H^k(x, y) x^n y^m dx dy,$$

$0 \leq m \leq 4$, $0 \leq n \leq 4$ ($0 \leq n+m \leq 4$), и жесткость на кручение закрученного слоистого анизотропного стержня, определенная по Сен-Венану (см. глава II)

$$C_0 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^N \int (\xi \sigma_{yz}^i - \eta \sigma_{xz}^i) dF_i, \quad (6.4.9)$$

где N количество анизотропных слоев в сечении.

Здесь физико-механические свойства слоя $H^k(x, y)$ содержат различные параметры (например, модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, коэффициент линейного расширения и т.д.) в зависимости от номера k .

Для определения геометрических характеристик слоистого анизотропного стержня составлена специальная программа на алгоритмическом языке Фортран (см. глава 1 п.1.5).

Физико-геометрические характеристики слоистого анизотропного стержня в системе координат $\xi\eta$ определяется по формуле (1.5.22) (см. глава 1, п.1.5).

Величины P_z, M_ξ, M_η определяются как равнодействующая сила и моменты в поперечном сечении от нормальных напряжений (см. глава 3, п. 3.2) [258]

$$\sigma_{33} = c_{33}^i \varepsilon^b + 0.5c_{35}^i [\varepsilon^b \cos \alpha \sin \beta - Q_1 N_1 + 0.5(\tau_0(\eta + 2\tau\xi) - \chi_2)], \quad (6.4.10)$$

где ε^b берется из зависимостей (6.3.3):

$$P = \int_F \sigma_{33}^i dF, \quad M_1 = \int_F \sigma_{33}^i \eta dF, \quad M_2 = -\int_F \xi \sigma_{33}^i dF. \quad (6.4.11)$$

При определении крутящего момента M_t необходимо учесть, что напряжения σ_{33}^i , действующие вдоль винтовых волокон под углом $\beta = \tau_0 r$ к поперечному сечению, имеют проекцию на поперечное сечение $\sigma_{33}^i r \tau_0$, которая вызывает дополнительный крутящий момент (см. глава 4, п.4.2) [258]. Поэтому

$$M_t = \int_F (\sigma_{yz}^i \xi - \sigma_{xz}^i \eta) dF + \tau_0 \int_F r p \sigma_{zz}^i dF, \quad p = r - p_c. \quad (6.4.12)$$

В системе координат $\zeta\eta z$ зависимости между силовыми и кинематическими характеристиками деформаций (6.2.11), (6.2.12) слоистых анизотропных стержней имеет вид (см. глава 3, п. 3.2):

$$\begin{pmatrix} P_z \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \chi_\xi \\ \chi_\eta \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (6.4.13)$$

а зависимости между силовыми и кинематическими характеристиками перемещений, при выполнении условий (6.2.7) будет

$$\begin{pmatrix} P_z \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w' \\ u'' \\ v'' \\ \theta' \end{pmatrix}, \quad (6.4.14)$$

где элементы матрицы k_{mn} определяется по формуле (3.2.5) (см. глава 3).

Коэффициенты матриц, входящие в (6.4.13) являются эффективными жесткостями сечения слоистого анизотропного стержня.

Дифференциальные уравнения, отражающие совместные деформации слоистого анизотропного закрученного стержня, можно получить с помощью уравнений равновесия, либо с помощью принципа Остроградского-Гамильтона (5.3.5).

6.5 Уравнения равновесия закрученных стержней несимметричного поперечного сечения

В системе координат x, y, z компоненты главного вектора внутренних сил обозначаются P_z, P_x, P_y , главного момента - M_z, M_x, M_y , а компоненты распределенных внешних нагрузки и момента соответственно q_z, q_x, q_y и m_z, m_x, m_y . Тогда уравнения равновесия элемента стержня можно записать в обычном виде [17]:

$$\begin{cases} P'_x + q_x = 0; \\ P'_y + q_y = 0; \\ P'_z + q_z = 0; \\ M'_x - P_y + m_x = 0; \\ M'_y + P_x + m_y = 0; \\ M'_z + m_z = 0. \end{cases} \quad (6.5.1)$$

Исключая поперечные силы, получаем для изгибающих моментов уравнения

$$\begin{cases} M''_x - q_y + m'_x = 0; \\ M''_y + q_x + m'_y = 0. \end{cases} \quad (6.5.2)$$

В подвижной системе координат ξ, η, z компоненты главных вектора и момента внутренних сил описываются соотношениями

$$\begin{cases} \left\| \begin{matrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_z \end{matrix} \right\| = H \left\| \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\|, & \left\| \begin{matrix} P_\xi \\ P_\eta \\ P_z \end{matrix} \right\| = H \left\| \begin{matrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{matrix} \right\|, \end{cases} \quad (6.5.3)$$

где H определяется из (6.2.2)

Уравнения равновесия (6.5.1) с учетом зависимостей (6.5.3) приобретают вид

$$\begin{cases} P'_\xi - P_\eta \tau_0 + q_\xi = 0; \\ P'_\eta - P_\xi \tau_0 + q_\eta = 0; \\ P'_z + q_z = 0; \\ M'_\xi - M_\eta + P_\eta + m_\xi = 0; \\ M'_\eta + M_\xi + P_\xi + m_\eta = 0; \\ M'_z + m_z = 0. \end{cases} \quad (6.5.4)$$

Для изгибающих моментов в системе координат $\xi\eta z$ уравнения могут быть приведены к виду [49]

$$\begin{aligned} M''_{\xi} - 2\tau_0 M'_{\eta} - \tau_0^2 M_{\xi} - 2\tau'_0 M'_{\eta} - q_{\eta} - \tau_0 m_{\eta} - m_{\xi} &= 0; \\ M''_{\eta} + 2\tau_0 M'_{\xi} - \tau_0^2 M_{\eta} + \tau'_0 M_{\xi} + q_{\xi} + \tau_0 m_{\xi} + m_{\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

Откуда уравнения равновесия (6.5.4) имеет вид:

$$\begin{cases} P'_{\zeta} - P_{\eta}\tau_0 + q_{\zeta} = 0; \\ M''_{\xi} - 2\tau_0 M'_{\eta} - \tau_0^2 M_{\xi} - 2\tau'_0 M'_{\eta} - q_{\eta} - \tau_0 m_{\eta} - m_{\xi} = 0; \\ M''_{\eta} + 2\tau_0 M'_{\xi} - \tau_0^2 M_{\eta} + \tau'_0 M_{\xi} + q_{\xi} + \tau_0 m_{\xi} + m_{\eta} = 0. \\ M'_z + m_z = 0. \end{cases} \quad (6.5.6)$$

или

$$\begin{aligned} P'_z + q_z &= 0; \\ M''_x - q_y + m'_x &= 0; \\ M''_y + q_x + m'_y &= 0, \\ M'_z + m_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Граничные условия для уравнений (6.5.1) будут [49]:

$$\begin{aligned} \delta w N \Big|_0^{\ell} = 0, \quad N = P_z, \quad \delta v' M_x \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta \theta M_z \Big|_0^{\ell} = 0, \\ \delta u \{ (M_y)' - m'_y \} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta v \{ (M_x)' - m'_x \} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta u' M_y \Big|_0^{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия для уравнений (6.5.6) будут [49]:

$$\begin{aligned} \delta w N \Big|_0^{\ell} = 0, \quad N = P_z, \\ \delta u_{\xi} \{ (M_{\eta})' + \tau_0 M_{\xi} - m'_{\eta} \} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta v_{\eta} \{ (M_{\xi})' - \tau_0 M_{\eta} - m'_{\xi} \} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad (6.5.8) \\ \delta (u'_{\xi} - \tau_0 v_{\eta}) M_{\eta} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta (v'_{\eta} - \tau_0 u_{\xi}) M_{\xi} \Big|_0^{\ell} = 0, \quad \delta \theta M_z \Big|_0^{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Уравнения деформации стержня и соответствующие граничные условия получают также часто с помощью обобщенного принципа Остроградского-Гамильтона:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \Pi - \int_0^{\ell} \sum_i q_i \delta v_i + \sum_j m_j \delta \gamma_j] dz + J dt, \quad (6.5.9)$$

где q_i , m_j - компоненты обобщенной внешней нагрузки, а v_i и γ_j - соответствующие им линейные и угловые перемещения.

Использование принципа Остроградского-Гамильтона допускает также прямое решение задачи без перехода к уравнениям деформации стержня. Независимо от метода решения задачи каждая принятая математическая модель стержня имеет свою область применимости, зависящую от системы используемых гипотез. Для надежного практического применения математической модели область ее применимости должна уточняться путем экспериментальных исследований.

6.6 Некоторые энергетические характеристики многослойного стержня

Кинетическая энергия закрученного слоистого стержня с прямой осью определяется в общем случае формулой [49]

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{\ell} \{ F^i [(\dot{u}^i)^2 + (\dot{v}^i)^2 + (\dot{w}^i)^2] + I_x^i (\dot{v}^i)^2 + I_y^i (\dot{u}^i)^2 + I_p^i (\dot{\theta}^i)^2 + 2I_{xy}^i \dot{v}^i \dot{u}^i \} dz, \quad (6.6.1)$$

а при гармонических колебаниях (в амплитудах)

$$T_{max} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\ell} [F^i [(u^i)^2 + (v^i)^2 + (w^i)^2] + I_x^i (v^i)^2 + I_y^i (u^i)^2 + I_p^i (\theta^i)^2 + 2I_{xy}^i v^i u^i] dz. \quad (6.6.2)$$

Потенциальная энергия деформации лопатки может быть выражена в нескольких эквивалентных формах:

а) в смешанной форме

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (N \varepsilon - M_{\xi} \chi_{\eta} + M_{\eta} \chi_{\xi} + M_z \theta) dz, \quad (6.6.3)$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (N w' - M_{\xi} v'' + M_{\eta} u'' + M_z \theta') dz.$$

Знак минус у вторых членов связан с принятым правилом знаков для момента и кривизны.

б) Через внутренние усилия

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell [k'_{11} N^2 - k'_{22} M_\eta^2 + k'_{33} M_\xi^2 + k'_{44} M_z^2 + \\ + 2(k'_{12} N M_\eta - k'_{13} N M_\xi + k'_{14} M_z N - \\ - k'_{23} M_\xi M_\eta - k'_{24} M_z M_\xi - k'_{34} M_z M_\xi)] dz, \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

в) Через деформации

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell [k'_{11} \varepsilon^2 - k'_{22} \chi_\xi^2 + k'_{33} \chi_\eta^2 + k'_{44} \tau^2 + \\ + 2\tau(k'_{14} \varepsilon + k'_{24} \chi_\xi + k'_{34} \chi_\eta) + 2k'_{23} \chi_\xi \chi_\eta] dz, \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

г) Через перемещения

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell [k'_{11} w'^2 - k'_{22} u''^2 + k'_{33} v''^2 + k'_{44} \theta'^2 + \\ + 2\theta'(k'_{14} w' + k'_{24} u'' + k'_{34} v'') + 2k'_{23} u'' v''] dz, \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

где элементы k'_{nm} определяется по формуле (3.2.5) (см. глава 3).

Нагрузки, действующие на лопатку [5], в общем случае складываются из нагрузок от газовых сил - q_r , инерционных нагрузок, связанных с вращением лопатки на роторе - q_ω , инерционных нагрузок, возникающих при колебаниях лопатки относительно диска - q_p и, наконец, нагрузок от кориолисовых сил - q_k , возникающих при колебаниях вращающейся лопатки. Нагрузки от газовых сил, в свою очередь, состоят из нагрузок постоянных (или медленно меняющихся) - q_r^0 , переменных нагрузок - \bar{q}_r , связанных с внешней пространственной или временной неравномерностью газового потока, и переменных нагрузок - $\bar{\bar{q}}_r$, возникающих при колебаниях самой лопатки (или других лопаток в венце). В соответствии с сформулированной в начале главы постановкой задачи статического расчета лопатки, примем $\bar{q}_r = \bar{\bar{q}}_r = q_p = q_k = 0$, $q_r = q_r^0$ и $q_\Omega = q_\Omega^0$, считая обороты ротора n (или его окружную скорость Ω) величиной постоянной.

Работа внешних нагрузок закрученного слоистого стержня с прямой осью определяется в общем случае формулой [49]:

а) От переменных составляющих

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (uq_x + vq_y + wq_z - v'm_x + u'm_y + \theta m_z) dz, \quad (6.6.7)$$

т.е. с учетом (6.6.2) – в амплитудах

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \lambda \int_0^{\ell} [F(u^2 + v^2 + w^2) + I_x \dot{v}'^2 + I_y \dot{u}'^2 + I_p \dot{\theta}'^2 + 2I_{xy} \dot{v}'\dot{u}'] dz + \right. \\ \left. + \mu \int_0^{\ell} [F(v^2 + w^2) + I_y \dot{u}'^2 + I_p \dot{\theta}'^2 + (I_y - I_x) \theta^2] dz \right. \quad (6.6.8)$$

б) от постоянных составляющих (6.6.4)

$$A^0 = \mu \int_0^{\ell} (Frw + I_{xy} \theta) dz + \int_0^{\ell} (q_{rx}^0 u + q_{ry}^0 v) dz. \quad (6.6.9)$$

Из приведенных энергетических соотношений, используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

$$\delta S = \delta \int_0^{\ell} (T - \Pi + A) dt = 0 \quad (6.6.10)$$

можно снова подучить дифференциальные уравнения равновесия (6.4.6) и соответствующие граничные условия (6.5.7), (6.3.8), (6.3.9).

6.7 Расчет многослойных композиционных стержней на статическую прочность

Под статическим расчетом слоистой композиционной стержня и лопатки понимают определение напряжений и деформаций, возникающих в ней под действием постоянных центробежных и газовых сил. Точнее, указанные сила могут меняться, но достаточно медленно, чтобы их воздействие на лопатку было статическим, для чего характерное время процесса должно быть существенно больше периода собственных колебаний лопатки.

Вопросы, связанные с определением газовых сил, в работе не рассматриваются.

1. Принятые системы координат, характеризующее расположение лопатки на диске, показаны на рис. 6.7.1. Здесь ξ, η, ζ - главная подвижная система координат, ось ζ направлена по оси большей жесткости; x, y, z неподвижная относительно диска система; ось z направлена по радиусу, проходящему через центр тяжести корневого сечения O ; ось x - параллельно оси вращения (положительное направление - по движению потока газа); ось y расположена в плоскости вращения, образуя вместе с x, z правую систему координат; ξ, η, ζ - подвижные оси, соответственно параллельные осям x, y, z , но с началом в центре тяжести O_1 текущего сечения; α - угол между осями ζ и x (угол установки текущего сечения). В лопатке с прямой радиальной осью направления ζ и z совпадают.

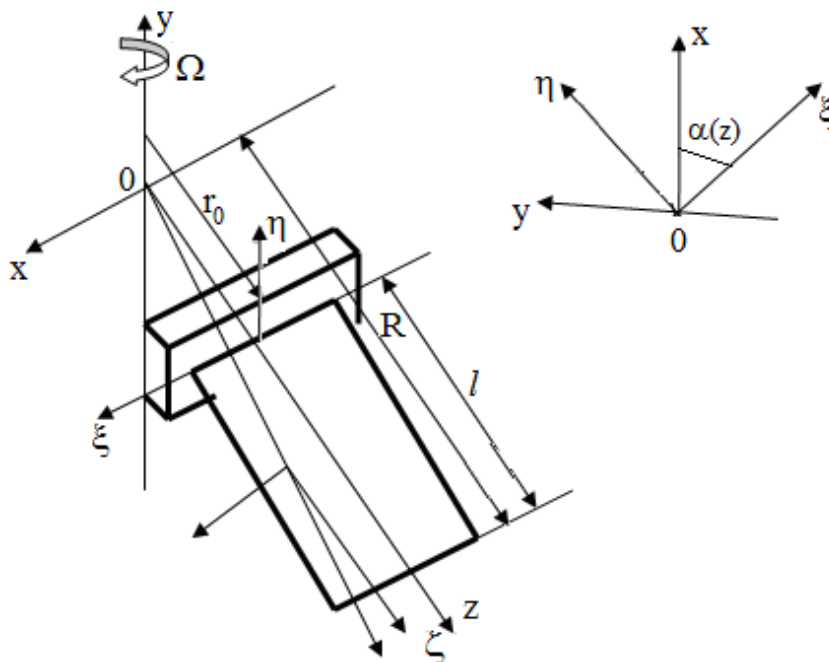


Рисунок 6.7.1 - Основные системы координат при расчете лопатки.

Компоненты деформации $\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau$ связаны с перемещениями центра тяжести сечения u, v, w в направлении x, y, z с углом поворота сечения θ относительно оси стержня известными геометрическими соотношениями (6.2.2)

$$\varepsilon = w', \quad \chi_1 = u'' \cos \alpha + v'' \sin \alpha, \quad \chi_2 = -u'' \sin \alpha + v'' \cos \alpha, \quad \tau = \theta'. \quad (6.7.1)$$

Для консольной жестко закрепленной по корневому сечению лопатки кинематические граничные условия имеют вид

$$w(0) = u(0) = v(0) = w'(0) = u'(0) = v'(0) = \theta(0) = 0. \quad (6.7.2)$$

на торцевом сечении выполняются условия (6.3.9)

$$w'(\ell) = u''(\ell) = v''(\ell) = \theta'(\ell) = 0.$$

Разрешив (6.7.1) относительно перемещений, получим с учетом граничных условий (6.7.2) уравнение (6.3.11)

$$\begin{aligned} w &= \int_0^z \varepsilon dz, \\ u &= \int_0^z \int_0^z (\chi_\xi \cos \alpha - \chi_\eta \sin \alpha) dz^2, \\ v &= \int_0^z \int_0^z (\chi_\xi \sin \alpha + \chi_\eta \cos \alpha) dz^2, \\ \theta &= \int_0^z \tau dz. \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

Продольная сила N и крутящий момент M_t в системах ξ, η, ζ и x, y, z одинаковы, а изгибающие моменты связаны соотношениями (4.1.13) [125]

$$\begin{aligned} M_\xi(r) &= M_{x1}(r) \cos \alpha(r) + M_{y1}(r) \sin \alpha(r), \\ M_\eta(r) &= -M_{x1}(r) \sin \alpha(r) + M_{y1}(r) \cos \alpha(r). \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

Подставляя в матричные уравнения (6.5.6) выражения (6.7.1) и (6.7.3) приходим к преобразованным соотношениям

$$\|P_x\| = \|H_x\| \cdot \|K_x\| \quad (6.7.5)$$

$\|P_x\|$ — силовая матрица в системе x, y, z

$$\|P_x\| = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ -M_x \\ M_t \end{Bmatrix}, \quad (6.7.6)$$

$\|K_x\|$ — матрица упругой деформации в системе x, y, z

$$\|K_x\| = \begin{Bmatrix} w' \\ u'' \\ v'' \\ \theta' \end{Bmatrix}, \quad (6.7.7)$$

а коэффициенты матрицы упругой жесткости

$$\|H_x\| = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{vmatrix}. \quad (6.7.8)$$

определяются выражениями (3.2.5)-(3.2.9).

2. Внутренние усилия и моменты, действующие в текущем сечении лопатки, связаны с компонентами внешней нагрузки q_z, q_x, q_y и распределенного момента m_z, m_x, m_y уравнениями равновесия, которые в общем случае следует относить к деформированному состоянию лопатки (см. рис. 6.6.2) [49]:

$$\begin{aligned} Q'_x + q_x &= 0, & Q'_y + q_y &= 0, & N'_z + q_z &= 0, \\ M'_x - Q_y + Nv' + m_x &= 0, \\ M'_y - Q_x + Nu' + m_y &= 0, \\ M'_z + Q_yu' - Q_xv' + m_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

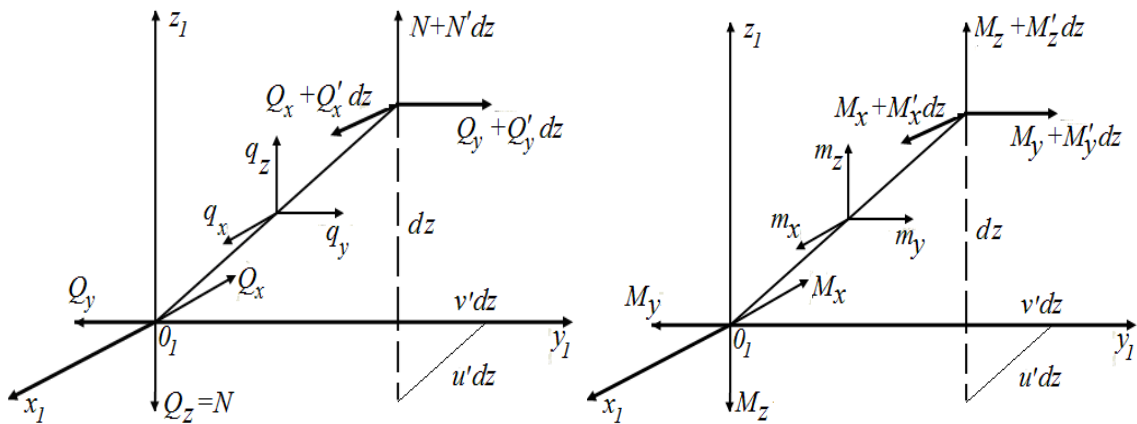


Рисунок 6.6.2 - К выводу уравнений равновесия элемента лопатки.

Исключая из уравнений (6.7.9) поперечные силы Q_x, Q_y получим

$$\begin{aligned} N'_z + q_z &= 0, \\ (M'_x + Nv' + m_x)' + q_y &= 0, \\ (M'_y + Nu' + m_y)' - q_x &= 0, \\ M'_z + (M'_x + m_x)u' - (M'_y + m_y)v' + m_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.7.10)$$

При колебаниях лопатки, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω , к

внешним нагрузкам в соответствии с принципом Даламбера, следует отнести инерционные сила и моменты относительно движения [49]

$$\begin{aligned} q_{px} &= -\rho F \ddot{u}, & q_{py} &= -\rho F \ddot{v}, & q_{pz} &= -\rho F \ddot{w}, \\ m_{px} &= \rho (I_x \dot{v}' + I_{xy} \dot{u}'), & m_{py} &= -\rho (I_y \dot{u}' + I_{xy} \dot{v}'), & m_{pz} &= -\rho I_p \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (6.7.11)$$

где точной обозначены производные по времени, а штрихом, как и раньше, производные по координате z ;

инерционные нагрузки переносного (вращательного) движения, отнесённые к деформированному состоянию лопатки [49]:

$$\begin{aligned} q_{\omega x} &= 0, & q_{\omega y} &= -\rho F \Omega^2 v, & q_{\omega z} &= -\rho F \Omega^2 (r + w), \\ m_{\omega x} &= 0, & m_{\omega y} &= -\rho \Omega^2 (I_y u' + I_{xy} v'), & m_{\omega z} &= -\rho \Omega (I_{xy} + (I_y - I_x) \theta), \end{aligned}$$

и нагрузки от кориолисовых сил инерции [49]

$$\begin{aligned} q_{kx} &= 0, & q_{ky} &= 2\rho \Omega F \dot{w}, & q_{kz} &= -2\rho \Omega F \dot{v}, \\ m_{kx} &= -2\rho \Omega I_{xy} \dot{\theta}, & m_{ky} &= -2\rho \Omega I_y \dot{\theta}, & m_{kz} &= -2\rho \Omega I_y \dot{u}' + I_{xy} \dot{v}'. \end{aligned}$$

Нагрузки от газовых сил, считаются постоянными не зависящими от колебательного движения лопатки. Значения I_x, I_y, I_{xy} , и значения угла α_0, τ_0 следует, определять с учетом статической деформации лопатки. Статический изгиб оси лопатки не учитывается.

Для упрощения задачи, влиянием кориолисовых сил будем пренебрегать, как это обычно принято в динамических расчетах вращающихся лопаток [49]. Тогда нагрузки от газовых сил определяется из выражения [125]

$$\begin{aligned} q_p &= \lambda F u, & q_{py} &= (\lambda + \mu) F v, & q_{pz} &= (\lambda + \mu) F w, \\ -m_x &= \lambda (I_x v' + I_{xy} u'), & m_y &= (\lambda + \mu) (I_y u' + I_{xy} v'), \\ m_z &= [\lambda I_p + \mu (I_y - I_x)] \theta. \end{aligned}$$

Принятое допущение позволяет считать все переменные синфазными гармоническими функциями времени

$$f(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{i\omega t},$$

где ω - собственная частота колебаний лопатки, и относить все дальнейшие уравнения к амплитудам соответствующих функций. Тогда для переменных состав-

ляющих нагрузки получим

$$\begin{aligned}
 q_x &= \lambda Fu, \\
 q_y &= (\lambda + \mu)Fv, \\
 q_z &= (\lambda + \mu)Fw, \\
 -m_x &= \lambda(I_{xy}u' + I_x v'), \\
 m_y &= (\lambda + \mu)(I_y u' + I_{xy}v'), \\
 m_z &= [\lambda I_p + \mu(I_y - I_x)]\theta.
 \end{aligned} \tag{6.7.12}$$

Здесь введены обозначения $\mu = \rho_l \Omega^2$, $\lambda = \rho_l \omega^2$.

Интегрируя уравнения (6.7.10) с учетом граничных условий (6.7.2), получим

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w' \\ u'' \\ v'' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_z \\ L_y = q_x + m_y \\ L_x = q_y - m_x \\ L_\theta = -m_z = 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.7.12}$$

где элементы матрицы k_{mm} определяется по формуле (3.2.5) (глава 3, п. 3.2).

Коэффициенты матриц, входящие в (6.7.12) являются эффективными жесткостями сечения слоистого анизотропного стержня.

Основные отличия полученной теории закрученных слоистых анизотропных стержней от классической (Кирхгофа-Клебша) состоят в учете в выражениях для продольной деформации ε_z члена $\tau_0 \theta' r^2$, отражающего деформации растяжения - сжатия вследствие изменения длины продольных винтовых волокон при кручении стержня с начальной закрученностью. Даже для стержня с двусимметричным поперечным сечением при этом возникает связь продольной и крутильной деформаций. У стержня с несимметричным поперечным сечением деформации винтовых волокон при кручении вызывают не только продольную силу, но и изгибающие моменты. Изгиб же закрученного стержня с несимметричным сечением за счет поперечных составляющих деформаций винтовых волокон вызывает деформацию кручения. Таким образом, возникает связь изгибных, крутильных и продольных деформаций [49].

Область применимости полученной теории закрученных слоистых анизо-

тропных стержней определяется критериями (6.2.6), (6.2.7).

В работе [259] предложен метод определения оптимальной структуры армирования консольно закрепленных лопаток газотурбинных двигателей, изготовленных из волокнистых композиционных материалов. Показана высокая работоспособность лопаток с рассчитанными структурами.

6.8 Влияния вращения на колебания многослойного стержня

Для закрученных анизотропных стержней, большую роль играет вращение вокруг оси перпендикулярной оси стержня z . Ось x ориентирована параллельно оси вращения, ось z вдоль радиуса относительно оси вращения, а начало системы координат расположено на расстоянии R по длине этого радиуса. Стержень вместе с системами координат ξ, η, z вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда перемещения элементарного объема стержня в прямоугольной глобальной системе координат xuz , ось x которой будет осью вращения, определяется по формулам [49,154]

$$\begin{aligned} u_{\Omega} &= u_0, \\ v_{\Omega} &= (R + z + w_0) \sin \Omega t + (v_0 + y) \cos \Omega t, \\ w_{\Omega} &= (R + z + w_0) \cos \Omega t - (v_0 + y) \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

где u_0, v_0, w_0 – перемещения стержня в системе координат xuz .

В этом случае кинетическая энергия вращающегося стержня определяется по формуле [49, 154]

$$\begin{aligned} K_{\Omega} &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \int_F \rho [(\dot{u}_{\Omega}^2 + \dot{v}_{\Omega}^2 + \dot{w}_{\Omega}^2) dF dz] = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \int_F \rho (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) dF dz + \\ &= \frac{\Omega^2}{2} \int_0^{\ell} \int_F \rho [(v_0 + y)^2 + (w_0 + R + z)^2] dF dz + \\ &+ \Omega \int_0^{\ell} \int_F \rho [w_0(v_0 + y) + v_0(w_0 + R + z)] dF dz, \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

в которой имеются выражения кинетической энергии колебаний не вращающегося стержня, работы центробежных сил и работы кориолисовых сил. В последних двух выражениях следует учитывать величины второго порядка малости при оп-

ределении u_0, v_0, w_0 .

При угловом перемещении θ точка поперечного сечения A с координатами x_1, y_1 совершает перемещение θr_1 , проекции которого на оси x и y и соответственно u_θ, v_θ (см. рисунок 6.7.1). Из подобия треугольников AA_1B и O_1CD следует [49, 154]

$$\frac{v_\theta}{\theta r_1} = \frac{x_1 - 0.5u_\theta}{r_1}, \quad \frac{u_\theta}{\theta r_1} = \frac{y_1 - 0.5v_\theta}{r_1}. \quad (6.8.3)$$

Если пренебречь значением $\frac{\theta^2}{4}$ по сравнению с единицей, то находим

$$u_\theta = -(\theta y_1 + 0.5\theta^2 x_1), \quad v_\theta = -(\theta x_1 + 0.5\theta^2 y_1). \quad (6.8.4)$$

В результате перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 - \theta y_1, & v &= v_1 + v_2 - \theta x_1, \\ w &= w - u'_1 x - v'_1 y + u'_2 \chi + v'_2 \Psi + \theta' \varphi, \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

где перемещения u_1, v_1 - при изгибе, u_2, v_2 - при сдвиге, Ψ - функции депланации при сдвиге, происходит изменение координаты любой точки сечения на величину

$$\text{(рисунок 6.8.1)} \quad -\Delta z = \int_0^z [1 + u'^2 + v'^2]^{0.5} dz - z.$$

$$\text{Откуда имеем: } -\Delta z = 0.5 \int_0^z [u'^2 + v'^2 + \theta'^2 r_1^2 + 2\theta'v'x_1] - 2\theta'u'y_1] dz.$$

Следовательно, перемещения в системе координат xuz принимают вид [49], [154]

$$\begin{aligned} u_0 &= u - 0.5\theta^2 x_1 + 0.5wu'_1, \\ v_0 &= v - 0.5\theta^2 y_1 + 0.5wv'_1, \\ w_0 &= w - \Delta z. \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

После подстановки значения перемещений в уравнение кинетической энергии (6.8.2) учитывается инерция вращения стержня. В этом случае выражение работы центробежных сил при колебаниях стержня принимает вид [49], [154]:

$$\begin{aligned}
A = & \frac{\Omega}{2} \int_0^{\ell} \rho [(v^2 + w^2 + 2v\theta x_s)F + \theta^2(I_y + x_s^2 F - I_x) + u_1'^2 I_y + u_1' v_1' I_{xy} + \\
& + \theta'^2 I_{p^2} - 2\theta' u_1' I_{x\varphi} + 2\theta' w' S_{\varphi} - (u'^2 + v'^2)] \int_0^{\ell} [(R+z)F dz - \\
& - \theta'^2 \int_0^{\ell} [(R+z)I_p dz + 2u'\theta'^2 \int_0^{\ell} [(R+z)y_s dz - 2v'\theta' \int_0^{\ell} [(R+z)x_s dz] dz].
\end{aligned} \tag{6.8.7}$$

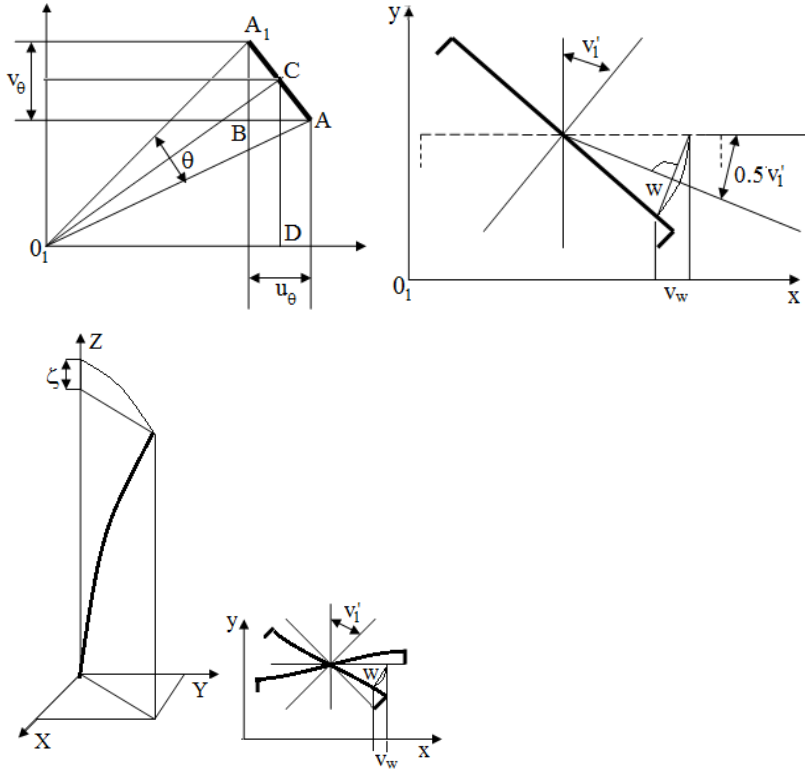


Рисунок 6.8.1 - Перемещения при деформации стержня

Нагрузки от центробежных сил при колебаниях стержня на основании выражения работы [17], [86] определяются в виде

$$\begin{aligned}
q_x^{\Omega} &= 0, \quad q_{xc}^{\Omega} = q_{yc}^{\Omega} = 0, \\
q_y^{\Omega} &= \rho \Omega^2 (v + \theta x_s) F, \\
q_z^{\Omega} &= \rho \Omega^2 (w F + S_{\varphi} \theta'), \\
m_x^{\Omega} &= -m_{xc}^{\Omega} = -\rho \Omega^2 \left[v' \int_z^{\ell} [(R+z)F dz - \theta' \int_z^{\ell} [(R+z)x_s dz] \right], \\
m_y^{\Omega} &= \rho \Omega^2 (I_y u_1' + I_{xy} v_1' - J_{x\varphi} \theta') - m_{yc}^{\Omega}, \\
m_{yc}^{\Omega} &= \rho \Omega^2 \left[u' \int_z^{\ell} [(R+z)F dz - \theta' \int_z^{\ell} (R+z)F y_s dz \right],
\end{aligned}$$

$$m_z^\Omega = \rho\Omega^2 [\theta(I_y + x_s^2 F - I_x) + x_s F v - (I_\varphi \theta' - I_{x\varphi} u_1' + S_\varphi w)'] + \\ + [\theta']_z^\ell (R+z) I_p dz - u_1' \int_z^\ell (R+z) F y_s dz + v' \int_z^\ell (R+z) F x_s dz]', \quad (6.8.8)$$

$$\text{где } S_\varphi = \int_F \varphi dF, \quad I_{\eta\varphi} = \int_F \eta\varphi dF, \quad I_\varphi = \int_F \varphi^2 dF, \quad I_{\xi\varphi} = \int_F \xi\varphi dF.$$

В теории тонкостенных стержней I_φ называется секториальным моментом инерции, S_φ секториальным статическим моментом. Если начало системы координат расположено в центре тяжести сечения и выбраны главные направления осей $\xi\eta$ координат, то обеспечивается выполнение условий

$$S_\varphi = I_{\xi\eta} = I_{\eta\varphi} = I_{p\eta} = I_{\xi\varphi} = 0. \quad (6.8.9)$$

Также если не учесть стесненность кручения, то $I_\varphi = 0$.

В этом случае можно определить центр жесткости сечения ξ_s, η_s из выражения

$$\xi_s = I_{\xi\varphi} / I_\xi, \quad \eta_s = -I_{p\eta} / I_\eta.$$

Поэтому нагрузки от центробежных сил определяется в виде

$$q_x^\Omega = 0, \\ q_y^\Omega = -\rho\Omega^2 v F, \\ q_z^\Omega = \rho\Omega^2 w F, \\ m_x^\Omega = -v' \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z) F dz, \\ m_x'^\Omega = -v'' \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z) F dz = -P_z v'', \\ m_y^\Omega = \rho\Omega^2 I_y u_1' - \rho\Omega^2 u_1' \int_z^\ell (R+z) F dz, \\ m_y'^\Omega = \rho\Omega^2 I_y u_1'' - P_z u_1'', \quad (6.8.10)$$

$$m_z^\Omega = \rho\Omega^2 \{ \theta(I_y - I_x) + [\theta']_z^\ell (R+z) I_p dz \}' = \rho\Omega^2 \theta(I_y - I_x) + \theta'' P_0,$$

$$P_0 = \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z) I_p dz,$$

где $P_z = \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z) F dz$ центробежная растягивающая сила в сечении z .

6.9 Колебания закрученного многослойного стержня несимметричного поперечного сечения

1. Колебания невращающегося закрученного анизотропного стержня. При колебаниях закрученного стержня каждая точка совершает перемещения согласно зависимостям (6.3.1). Тогда кинетическая энергия стержня при колебаниях имеет вид:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho \{ [\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{\theta}(\dot{v}x_s - \dot{u}y_s)] F + I_p \theta^2 \} dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho \{ [\dot{w}^2 + \dot{u}_{\xi}^2 + \dot{v}_{\eta}^2 + 2\dot{\theta}(\dot{v}_{\eta}^2 \xi_s - \dot{u}_{\xi}^2 \eta_s)] F + I_p \theta^2 \} dz.
 \end{aligned} \tag{6.9.1}$$

где x_s, y_s - координаты центра масс в системе $xу$, а ξ_s, η_s в системе $\xi\eta$.

Компоненты нагрузки в уравнениях (6.8.2) при колебаниях будут [49]:

$$\begin{aligned}
 q_z &= -\rho F \ddot{w}; \\
 q_y &= -\rho F (\ddot{v} + \ddot{\theta} x_s); \\
 q_x &= -\rho F (\ddot{u} - \ddot{\theta} y_s); \\
 m_z &= -\rho \dot{\theta} I_p - \rho F (\ddot{v} x_s - \ddot{u} x_s) = -\rho \dot{\theta} I_p - \rho F (\ddot{v}_{\eta} \xi_s - \ddot{u}_{\xi} \eta_s) = 0; \\
 q_{\eta} &= -\rho F (\ddot{v}_{\eta} + \ddot{\theta} \xi_s); \\
 q_{\xi} &= -\rho F (\ddot{u}_{\xi} - \ddot{\theta} \eta_s); \\
 m_x &= m_y = m_{\eta} = m_{\xi} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.9.2}$$

Откуда уравнения равновесия имеет вид (6.7.10):

$$\begin{aligned}
 P'_z + q_z &= 0, \\
 M''_y + m'_y + q_x &= 0, \\
 M''_x + m'_x - q_y &= 0, \\
 M'_z + m_z &= 0,
 \end{aligned} \tag{6.9.3}$$

где исключены поперечные силы (6.7.9) $Q_x = 0, Q_y = 0$.

После интегрирования уравнения (6.9.3) с учетом граничных условий (6.5.7), (6.3.8), (6.3.9) и после подстановки в нее инерционных нагрузок из выражений (6.9.2), уравнения колебаний (6.9.3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'_z \\ -u''_z \\ v''_z \\ \theta'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho F \ddot{w} \\ -\rho F (\ddot{u} - \ddot{\theta} y_s) \\ -\rho F (\ddot{v} + \ddot{\theta} x_s) \\ -\rho \ddot{\theta} I_p - \rho F (\ddot{v} x_s - \ddot{u} x_s)_z \end{pmatrix}, \quad (6.9.4)$$

где F - площадь сечения, x_s, y_s - координаты центра масс сечения закрученного слоистого анизотропного стержня в системе x, y , ρ - плотность материала слоя.

Пусть дана система (например, стержень), совершающая малые колебания около положения равновесия. В предположении гармонического характера колебаний получаем, что все отклонения от положения равновесия (т.е. функции u, w, v, θ входящие в (6.9.4)) имеют вид, например,

$$\begin{aligned} w(z, t) &= w_0(z) e^{i\omega t}, & u(z, t) &= u_0(z) e^{i\omega t}, \\ v(z, t) &= v_0(z) e^{i\omega t}, & \theta(z, t) &= \theta_0(z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (6.9.5)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= i u_0 \omega e^{i\omega t}; & \frac{\partial v}{\partial t} &= i v_0 \omega e^{i\omega t}; & \frac{\partial w}{\partial t} &= i w_0 \omega e^{i\omega t}, & \frac{\partial \theta}{\partial t} &= i \theta_0 \omega e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u_0 \omega^2 e^{i\omega t}; & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -v_0 \omega^2 e^{i\omega t}; & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -w_0 \omega^2 e^{i\omega t}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= -\theta_0 \omega^2 e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u_0}{\partial z} e^{i\omega t}; & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v_0}{\partial z} e^{i\omega t}; & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} e^{i\omega t}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial \theta_0}{\partial z} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}, \dots$$

т.е. все элементы системы колеблются с одинаковой круговой частотой ω и одинаковой фазой, все они одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают своего наибольшего отклонения.

Следовательно, подставляя (6.9.6) в (6.9.4) получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'_0 \\ -u''_0 \\ v''_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_z \\ q_x \\ q_y \\ m_z \end{pmatrix}, \quad (6.9.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
q_z &= \lambda w_0 = \rho \omega^2 F w_0, & q_y &= \lambda (v_0 + \theta_0 x_s) = \rho \omega^2 F v_0, \\
q_x &= \lambda (u_0 - \theta_0 y_s) = \rho \omega^2 F u_0, & m_z &= \rho \omega^2 \theta_0 I_p + \rho \omega^2 F (v_0 x_s + u_0 y_s), \\
\lambda &= \rho \omega^2 F.
\end{aligned}$$

Система линейных дифференциальных уравнений (6.9.7) для консольного стержня длиной ℓ , заземленного при $\zeta=0$ удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\begin{aligned}
&\text{при } \zeta = 0, & w &= 0, & v &= 0, & u &= 0, & \theta &= 0, \\
&\text{при } \zeta = \ell, & w' &= 0, & \theta' &= 0, & u'' &= 0, & v'' &= 0.
\end{aligned} \tag{6.9.8}$$

Если исключить поперечные силы, то нормальные и касательные напряжения через перемещения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^i &= c_1^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2), \\
\sigma_{23}^i &= \tau_0 c_{44}^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2) \sin \alpha, \\
\sigma_{13}^i &= \tau_0 c_1^i (w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2), \\
c_1^i &= (c_{33}^i + c_{35}^i \cos \alpha), & \alpha &= \tau_0 \zeta.
\end{aligned} \tag{6.9.9}$$

Полагая

$$w_0 = \tilde{w} X_n(z); \quad u_0 = -\tilde{u} X_n(z); \quad v_0 = \tilde{v} X_n(z); \quad \theta_0 = \tilde{\theta} X_n(z) \tag{6.9.10}$$

где $X_n(z)$ - допустимые функции, \tilde{w} , $\tilde{\theta}$, \tilde{u} , \tilde{v} - неопределенные параметры, в качестве допустимых функций можно выбрать функции стержня в виде:

$$X_n(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} (A \sin k_n \bar{\zeta} + B \cos k_n \bar{\zeta} + C \operatorname{sh} k_n \bar{\zeta} + D \operatorname{ch} k_n \bar{\zeta}). \tag{6.9.11}$$

В (6.9.11) $\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{\ell}$, а постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий,

ℓ - длина стержня. Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
\bar{\zeta} = 0, & \quad X_n(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n'(\bar{\zeta}) = 0, \\
\bar{\zeta} = 1, & \quad X_n'(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n''(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n'''(\bar{\zeta}) = 0,
\end{aligned} \tag{6.9.12}$$

т.е. на жестко закрепленном конце перемещения и угол поворота сечения равны нулю, на свободном конце равны нулю изгибающий момент, поперечные силы.

Подставляя в выражение (6.9.12) значения собственных функций (6.9.11) получаем систему алгебраических уравнения относительно постоянных интегриро-

вания A, B, C, D . Решение этой системы уравнения позволяют определить постоянные интегрирования A, B, C, D :

$$\Rightarrow \begin{cases} B = -D, & C = A, \\ A(-\sin k_n + shk_n) + D(\cos k_n + chk_n) = 0, \\ A(\cos k_n + chk_n) + D(\sin k_n + shk_n) = 0. \end{cases} \quad (6.9.13)$$

Тогда собственная функция (6.9.12) имеет вид:

$$X_n(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} [shk_n \bar{\zeta} + \sin k_n \bar{\zeta} + \frac{\sin k_n - shk_n}{\cos k_n + chk_n} (chk_n \bar{\zeta} - \cos k_n \bar{\zeta})]. \quad (6.9.14)$$

Из системы (6.9.13) находится значение k_n ($n=1,2,3,\dots$) величины $\bar{\zeta}$, при которых определитель Δ обращается в нуль, определяют значения ω частоты возбуждения ω , при которых амплитуда колебаний точек стержня достигает больших значений. Раскрывая определитель Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} (-\sin k_n + shk_n)(\cos k_n + chk_n) \\ (\cos k_n + chk_n)(\sin k_n + shk_n) \end{vmatrix} = \\ &= -\sin^2 k_n + sh^2 k_n - \cos^2 k_n - 2chk_n \cos k_n - ch^2 k_n = -2(1 + chk_n \cos k_n) = 0 \end{aligned}$$

частотное уравнение можно представить в виде

$$1 + chk_n \cos k_n = 0. \quad (6.9.15)$$

В (6.9.14) волновое число k_n удовлетворяет характеристическому уравнению $1 + chk_n \cos k_n = 0$ и принимает значения, данные в таблице 5.5.1, ℓ - длина стержня. Балочные функции являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X'_n X'_p dz = \begin{cases} \frac{k_n^2}{\ell^2}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X''_n X''_p dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases}$$

что удовлетворяет условиям (6.9.12). Из (6.9.7) получим:

$$\begin{vmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho \tilde{w} \omega^2 F \\ \rho F \omega^2 (\tilde{u} + \tilde{\theta} x_s) \\ \rho F \omega^2 (\tilde{v} - \tilde{\theta} y_s) \\ \rho \omega^2 \tilde{\theta} I_p + \rho \omega^2 F (\tilde{u} x_s + \tilde{v} x_s) \end{vmatrix}. \quad (6.9.16)$$

Если сократить правую часть первых трех уравнений (6.9.16) на ρF и по-

следнее уравнение на ρI_p , то получим

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{12} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & (k'_{24} - x_s) \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & (k'_{34} + y_s) \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если центр локальной системы координат расположен в центре тяжести (x_s, y_s) ($x_s = 0, y_s = 0$) сечения, тогда

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{12} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.17)$$

$$\begin{aligned} k'_{11} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{11}}{\rho}, & k'_{12} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{12}}{\rho}, & k'_{13} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{13}}{\rho}, & k'_{14} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{14}}{\rho}, \\ k'_{21} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{12}}{\rho}, & k'_{22} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{22}}{\rho}, & k'_{23} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{23}}{F}, & k'_{24} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{24}}{\rho}, \\ k'_{31} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{13}}{\rho}, & k'_{32} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{23}}{\rho}, & k'_{33} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{33}}{\rho}, & k'_{34} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{34}}{\rho}, \\ k'_{41} &= \frac{k_n^2}{I_p \ell^2} \frac{k_{14}}{\rho}, & k'_{42} &= \frac{k_n^4}{I_p \ell^4} \frac{k_{24}}{\rho}, & k'_{43} &= \frac{k_n^4}{I_p \ell^4} \frac{k_{34}}{\rho}, & k'_{44} &= \frac{k_n^2}{I_p \ell^2} \frac{k_{44}}{\rho}. \end{aligned} \quad (6.9.18)$$

где k_n принимает значения, данные в таблице 5.5.1.

Система уравнений (6.9.7) позволяет определить свободное колебание слоистых закрученных стержней и лопаток.

2. Влияния вращения на колебания закрученного анизотропного стержня. Уравнения равновесия (6.9.3) после подстановки в нее нагрузки от центробежных сил (6.8.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w' \\ -u'' \\ v'' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho F \ddot{w} - \rho \Omega^2 w F \\ -\rho F(\ddot{u} - \ddot{\theta} y_s) - \rho \Omega^2 I_y u_1' + P_z u' \\ -\rho F(\ddot{v} + \ddot{\theta} x_s) + \rho \Omega^2 F v - P_z v' \\ -\rho \dot{\theta} I_p - \rho F(\ddot{v} x_s - \ddot{u} x_s) - \rho \Omega^2 \theta (I_y - I_x) - \theta' P_0 \end{pmatrix}, \quad (6.9.19)$$

где $P_0 = \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z)(I_y + I_x) dz$, u_1 - перемещения изгиба относительно оси x

[49]. Если не учитывать в системе координат ξ, η, ζ перемещения изгиба u_1 , то из (6.9.19) с учетом (6.9.5)-(6.9.8) получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.20)$$

Выбором начало координат в центре тяжести сечения и главных направлений осей координат $\xi\eta$ система уравнений (6.9.20) приводится к виду:

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & 0 & 0 & k'_{14} \\ 0 & (k'_{22} - \omega^2) & 0 & k'_{24} \\ 0 & 0 & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.9.21)$$

$$k'_{11} = \frac{m^2 k_{11} + \mu F}{\rho F}, \quad k'_{12} = \frac{m^4 k_{12}}{\rho F}, \quad k'_{13} = \frac{m^4 k_{13}}{\rho F}, \quad k'_{14} = \frac{m^2 k_{14}}{\rho F},$$

$$k'_{21} = \frac{m^2 k_{12}}{\rho F}, \quad k'_{22} = \frac{m^4 k_{22} - m^2 P_z}{\rho F}, \quad k'_{23} = \frac{m^4 k_{23}}{\rho F}, \quad k'_{24} = \frac{m^2 k_{24}}{\rho F},$$

$$k'_{31} = \frac{m^2 k_{13}}{\rho F}, \quad k'_{32} = \frac{m^4 k_{23}}{\rho F}, \quad k'_{33} = \frac{m^4 k_{33} - \mu F + m^2 P_z}{\rho F}, \quad k'_{34} = \frac{m^2 k_{34}}{\rho F},$$

$$k'_{41} = \frac{m^2 k_{14}}{\rho I_p}, \quad k'_{42} = \frac{m^4 k_{24}}{\rho I_p}, \quad k'_{43} = \frac{m^4 k_{34}}{\rho I_p}, \quad k'_{44} = \frac{m^2 k_{44} + \mu(I_y - I_x) + m^2 P_0}{\rho I_p}.$$

где $\mu = \rho \Omega^2$, $m = \frac{k_n}{\ell}$, $n = 1, 2, \dots$, ω - собственные круговые частоты колебаний.

После определения из системы (6.9.21) собственных чисел несимметричной вещественной матрицы, находится продольные, крутильные и изгибные собственные частоты слоистого стержня. После вычисления собственных векторов, соответствующих отдельному собственному числу матрицы (6.9.21), определяются формы колебания слоистого стержня по формуле (6.9.11).

Если рассматривается стержень двусимметричного сечения при таких же ус-

ловиях, то решается система уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & 0 & 0 & k'_{14} \\ 0 & (k'_{22} - \omega^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (k'_{33} - \omega^2) & 0 \\ k'_{41} & 0 & 0 & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.22)$$

При этом система (6.9.22) распадается на две независимые системы уравнений. Для крутильно-продольных колебаний система уравнений приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{14} \\ k'_{41} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.23)$$

В этом случае система уравнений (6.9.23) определяет крутильно-продольные колебания многослойного анизотропного закрученного стержня двусимметричного сечения. Решения системы (6.9.23) совпадает с решением работы [49] в случае, если рассматривается свободное колебание стержня из однородного изотропного материала. В этом случае собственные частоты крутильно-продольных колебаний однородных стержней определяются по формуле [49]

$$(\omega_{1,2}^2)_n = 0.5[\omega_w^2 + \omega_\theta^2 \pm \sqrt{(\omega_w^2 - \omega_\theta^2) + 4\omega_w^4 \tau_0^2 \frac{I_p}{F}}]_n, \quad k = \frac{2n-1}{2\ell} \pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где ω_w, ω_θ собственные частоты парциальных продольных и крутильных колебаний [5]:

$$(\omega_w)_n = k \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\omega_\theta)_n = k \sqrt{\frac{GI_d}{\rho I_p}}, \quad (6.9.24)$$

где $GI_d = 2GI_p + \tau_0^2 EI_r$, dF жесткость на кручение закрученного стержня из изотропного материала, $I_r = \int_F (x^2 + y^2)^2$, $I_p = \int_F (x^2 + y^2) dF$.

Из формулы (6.9.21) следует

$$(\omega_w^2)_n = \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{11}}{\rho}, \quad (\omega_w)_n = \frac{k_n}{\ell} \sqrt{\frac{c_1^i}{\rho}},$$

$$(\omega_{\theta}^2)_n = \frac{k_n^2}{I_p \ell^2} \frac{k^2 k_{44}}{\rho}, \quad (\omega_{\theta}^2)_n = \frac{k_n}{\ell} \sqrt{\frac{k_{44}}{\rho I_p}},$$

$$k_{44} = \tau_0^2 \sum_{i=1}^N \int r^4 c_{33}^i dF_i + C_0, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

где C_0 - жесткость на кручение закрученного слоистого анизотропного стержня, а также $c_1^i = c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha$.

Как показано в работе [49] влияние связи крутильных и продольных колебаний зависит от степени начальной закрутки τ_0 , значения $\frac{I_p}{F}$, отношения парциальных частот

$$\frac{\omega_w}{\omega_{\theta}} = \sqrt{\frac{1+\nu}{\delta_d + 2(1+\nu)\tau_0^2 r_p^2 \delta_p}} = \sqrt{\frac{\frac{E}{2G}}{2 + \frac{E}{G} \tau_0^2 \frac{I_r}{I_p}}},$$

где $r_p^2 = \frac{I_p}{F}$, $\delta_d = \frac{I_d}{I_p}$, $\delta_p = \frac{I_r}{r_p^2 I_p}$, $I_d = \int_F (x^2 + y^2 + \phi_{\psi}') dF \approx 2 \int_F (x^2 + y^2) dF$.

и взаимовлияние сильнее для более близких частот.

Собственные формы крутильно-продольных колебаний консольного стержня имеет вид (6.9.21). Тогда отношение амплитуд можно определить из первого уравнения системы (6.9.21)

$$\frac{w_0}{\theta_0} = \frac{-\tau_0 E I_p}{EF - \rho F \frac{\omega_{1,2}^2}{k^2} \tau_0^2 \frac{I_p}{F}} = \frac{-\tau_0 \frac{I_p}{F}}{1 - \frac{\omega_{1,2}^2}{\omega_w^2}}.$$

Для меньшей из частот продольно крутильных колебаний отношение $\frac{\omega_1^2}{\omega_w^2} \ll 1$ и поэтому отношение амплитуд будет $\frac{w_0}{\theta_0} = -\tau_0 \frac{I_p}{F}$. Это форма является преимущественно крутильной и знаки перемещений различны. Для большей из частот продольно крутильных колебаний $\frac{\omega_2^2}{\omega_w^2} > 1$, но очень близки к единице. В

этом случае отношение амплитуд крутильных колебаний мало по сравнению с амплитудой продольных колебаний и знаки перемещений совпадают [49].

Уравнения для стержня, совершающего пространственные изгибные колебания, нагруженного силами инерции, для двусимметричного сечения в системе координат ξ, η, ζ ($I_{\xi\eta} = S_\xi = S_\eta = 0$) имеют вид

$$\begin{pmatrix} (k'_{22} - \omega^2) & 0 \\ 0 & (k'_{33} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|\tilde{u}\| \\ \|\tilde{v}\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9.25)$$

Граничные условия при этом определяются из выражения [49]

$$\delta u \{ M'_\eta - m_\eta \} \Big|_0^\ell = 0,$$

$$\delta v \{ M'_\xi - m_\xi \} \Big|_0^\ell = 0,$$

$$\delta u' M_\eta \Big|_0^\ell = 0,$$

$$\delta v' M_\xi \Big|_0^\ell = 0,$$

а начальные условия для функции $u(z, t)$, $v(z, t)$ будут

$$u(z, t_0) = u_0, \quad v(z, t_0) = v_0, \quad \dot{u}(z, t_0) = \dot{u}_0, \quad \dot{v}(z, t_0) = \dot{v}_0.$$

При этом система (6.9.19) распадается на две независимые системы уравнений. Собственные частоты колебаний в направлениях главных жесткостей определяется из выражений

$$(\omega_\eta)_n = \sqrt{k'_{33}}, \quad (\omega_\xi)_n = \sqrt{k'_{22}},$$

где

$$\begin{aligned} k'_{33} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{33}}{\rho} - \Omega^2 + \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{P_z}{\rho}, \\ k'_{22} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{22}}{\rho} - \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{P_z}{\rho}, \end{aligned} \quad (6.9.26)$$

Здесь $k_n = \frac{2n-1}{2} \pi$, $n = 1, 2, \dots$, $k_{22} = \sum_{i=1}^N \int \xi^2 c_1^i dF_i$, $k_{33} = \sum_{i=1}^N \int \eta^2 c_1^i dF_i$.

Если рассматривается свободное колебание слоистого закрученного анизотропного стержня, то собственные частоты определяются из выражений

$$(\omega_\eta)_n = \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{k_{33}}{\rho F}}, \quad (\omega_\xi)_n = \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{k_{22}}{\rho F}}. \quad (6.9.27)$$

Формулы (6.9.27) совпадают с выражением для круговых (Ω) и технических (f_n) частот свободных колебаний (5.6.7) и (5.5.13):

$$\omega^2 = \frac{k_n^4}{\ell^4} \frac{I_1}{F \rho^i}; \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{k_n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F}},$$

где величина $I_1 = \iint_F c_{33}^i \eta^2 dF$.

Если рассматривается незакрученный стержень из однородных изотропных материалов, то из выражения (6.9.25) вытекают формулы собственных частот колебания незакрученного изотропного стержня работы [49]:

$$\omega_\eta = \frac{\lambda_\eta^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI_\xi}{\rho F}}, \quad \omega_\xi = \frac{\lambda_\xi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI_\eta}{\rho F}}$$

и формы колебаний определяются из формулы

$$v_0(z) = (C_1 \sin \lambda_\eta \frac{z}{\ell} + C_2 \cos \lambda_\eta \frac{z}{\ell} + C_3 \operatorname{sh} \lambda_\eta \frac{z}{\ell} + C_4 \operatorname{ch} \lambda_\eta \frac{z}{\ell}),$$

$$v(z, t) = v_0(a \sin \omega_\eta t + b \cos \omega_\eta t),$$

где значения параметров λ_η , λ_ξ и коэффициенты C_k определяются граничными условиями, коэффициенты a , b – начальными.

В качестве примера определяется технические частоты стержня прямоугольного сечения, находящихся в поле центробежных сил. Рассматриваются консольные неподвижные и вращающиеся стержни из дюралюминия

($E = 7.2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$, $\mu = 0.34$, $\rho = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{кг}/\text{мм}^3$) с геометрическими размерами

$\ell = 140 \text{мм}$, $h = 4.8 \text{мм}$, $b = 60 \text{мм}$ и получены пять технические частот колебаний

(три изгибные в плоскости меньшей жесткости $f_v^{(i)}$, крутильная f_θ , изгибная f_u в плоскости большей жесткости). Эти результаты сравниваются с результатами расчета проведенные в пакете программ Ansys для различных частот вращения N стержня. Результаты расчета, проведенные для различных частот вращения N

стержня по формуле (6.9.22) и по программе Ansys приведены в таблице 6.9.1.

Таблица 6.9.1. Результаты расчета

| N, тыс. об/мин | $f_v^{(1)}$, Гц | | $f_v^{(2)}$, Гц | | f_u , Гц | | $f_v^{(3)}$, Гц | | f_θ , Гц | |
|-------------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| | Расчет (6.9.22) | Расчет Ansys | Расчет (6.9.22) | Расчет Ansys | Расчет (6.9.22) | Расчет Ansys | Расчет (6.9.22) | Расчет Ansys | Расчет (6.9.22) | Расчет Ansys |
| 0 | 203.35 | 203.46 | 1274.5 | 1278.6 | 2341.9 | 2226.9 | 2941.1 | 3104.6 | 1030 | 970 |
| 2 | 206.7 | 206.69 | 1279.7 | 1281.4 | 2342.3 | 2227.2 | 2991.6 | 3105.6 | 1035.6 | 970.4 |
| 4 | 214 | 208.28 | 1295.3 | 1288.4 | 2343.3 | 2227.9 | 2992.2 | 3108.8 | 1037.1 | 970.17 |
| 6 | 226.6 | 210.86 | 1320.8 | 1300 | 2345.4 | 2229.1 | 2993.2 | 3114.1 | 1039.6 | 970.38 |
| 8 | 243.17 | 214.33 | 1355.7 | 1316.1 | 2348.1 | 2230.7 | 2994.6 | 3121.4 | 1043.2 | 970.68 |

Результаты расчетов технических частот найденные из решения системы уравнений (6.9.22) с расчетами по программе Ansys дают отличие в среднем 5%, при этом в одних случаях получали большие, а в других – меньшие частоты.

На рисунке 6.9.1 представлены узловые линии первой изгибной формы технических частот колебаний при $\bar{n}=0$ на поверхности стержня прямоугольного сечения (геометрические параметры стержня приведены выше).

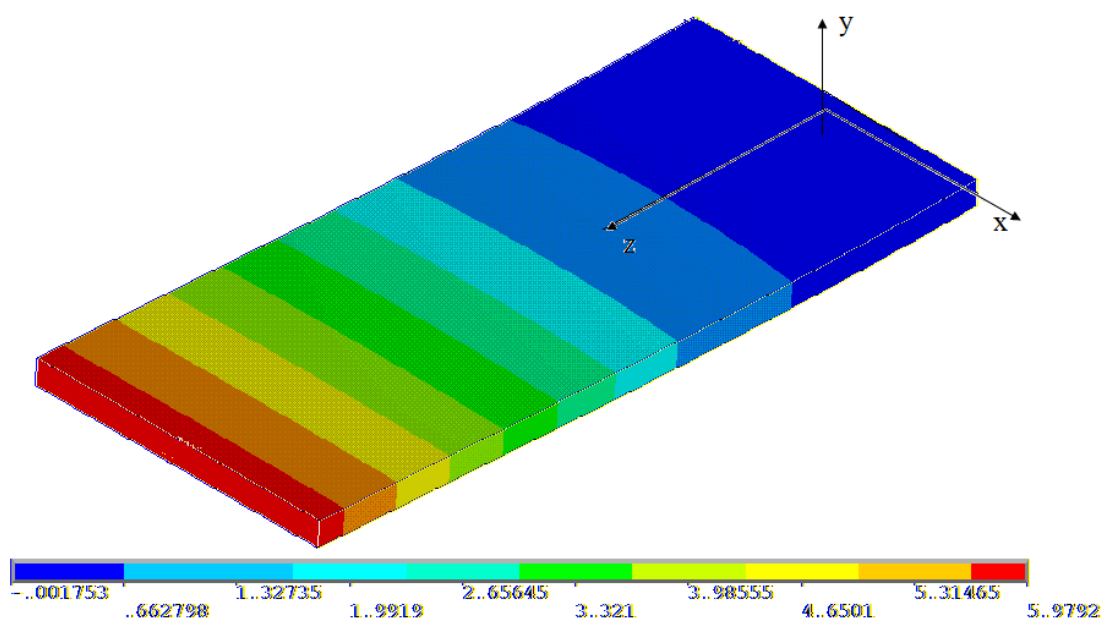


Рисунок 6.9.1 – Узловые линии первой изгибной формы

На рисунке 6.9.2 представлены узловые линии второй (f_θ - первая крутиль-

ная) и третьей (рис. 6.9.3 – изгибная $f_v^{(2)}$) формы технических частот колебаний при $\bar{n}=0$ на поверхности стержня. На рисунке 6.9.4 представлены узловые линии четвертой f_u и пятой (рис. 6.9.5 - $f_v^{(3)}$) формы технических частот колебаний при $\bar{n}=0$ на поверхности стержня.

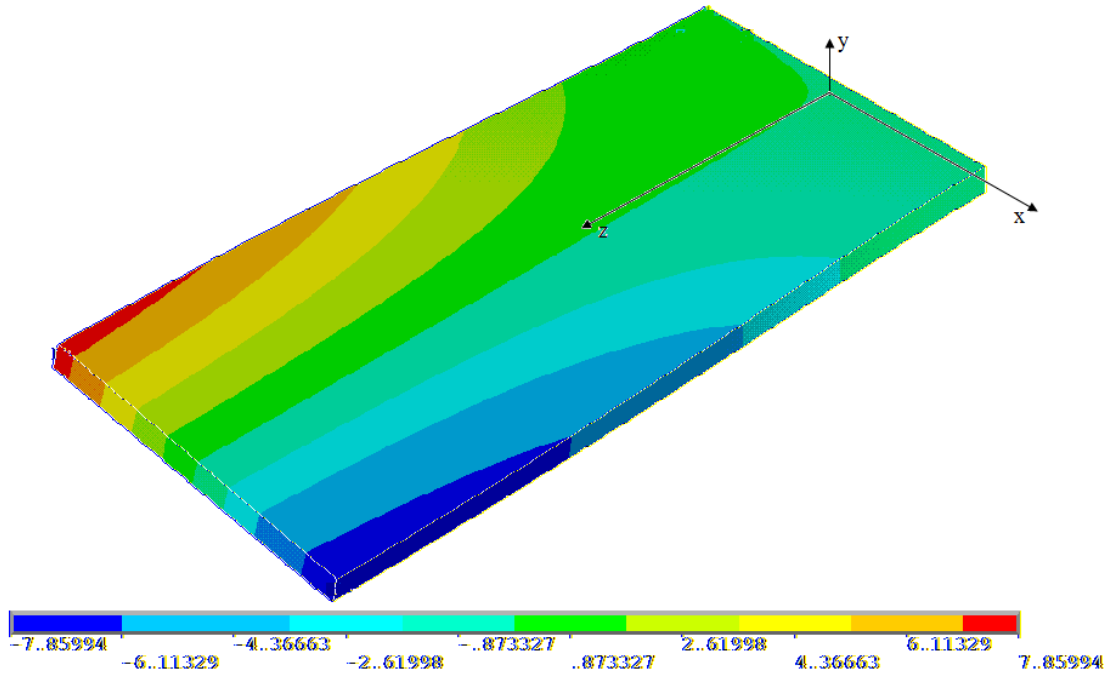


Рисунок 6.9.2 – Узловые линии первой крутильной формы

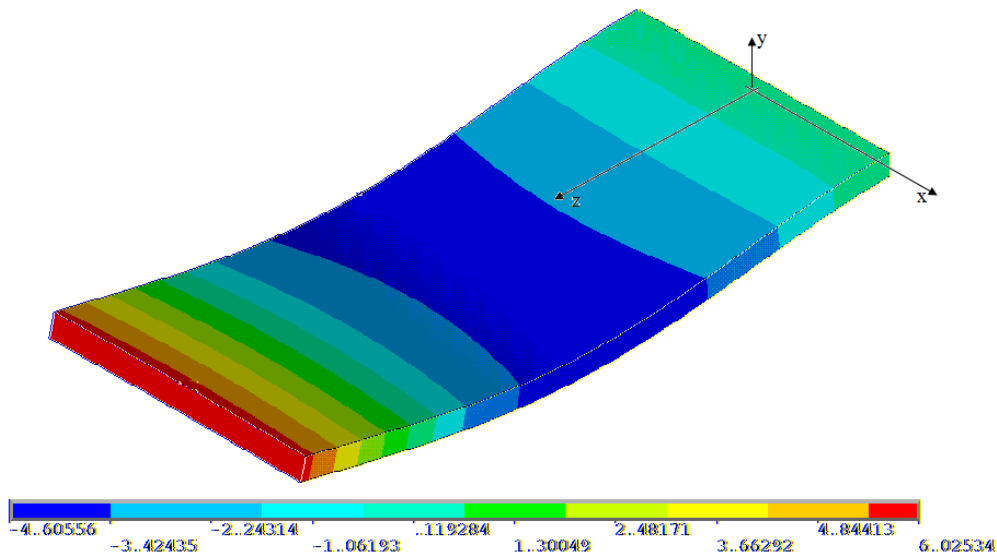


Рисунок 6.9.3 – Узловые линии второй изгибной формы.

Таким образом, на этапе эскизного проектирования, система уравнения (6.9.21) позволяет определить технические частоты закрученных анизотропных стержней, находящихся в поле центробежных сил. Совпадение формулы техниче-

ских частот, в частных случаях, с известными результатами доказывает достоверность полученных результатов.

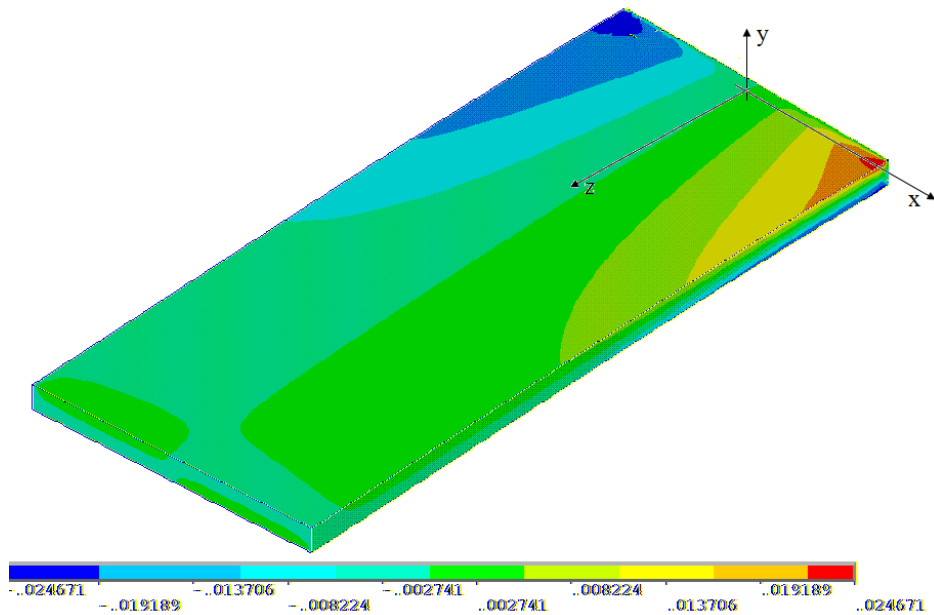


Рисунок 6.9.4 – Узловые линии изгибной формы (f_u в плоскости большой жесткости).

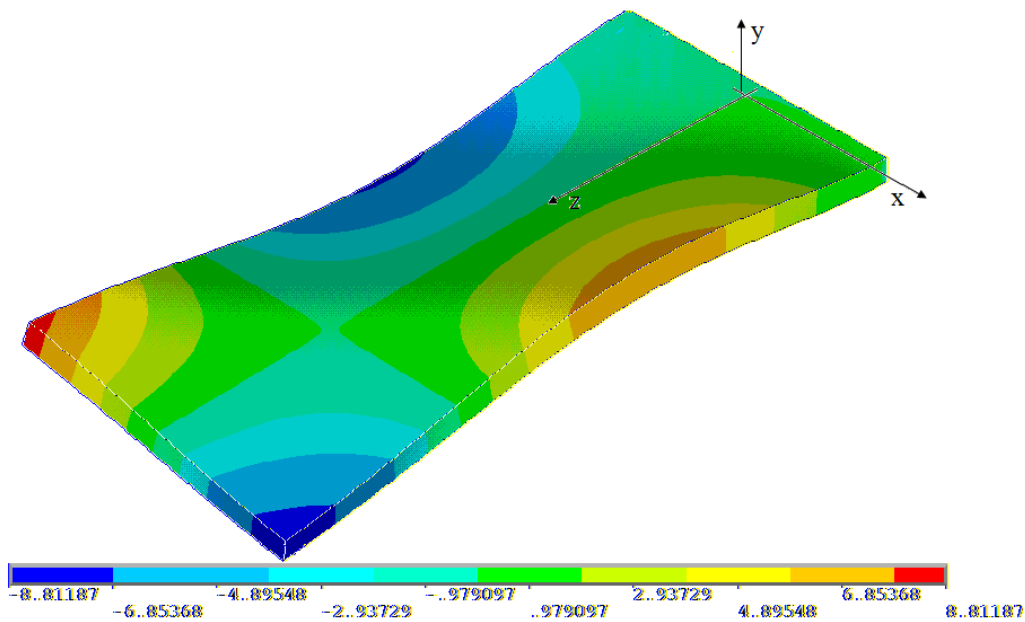


Рисунок 6.9.5 – Узловые линии изгибно-крутильной формы.

Для достоверности полученных соотношений (6.9.22) в п. 6.10 приведены сравнения результатов, вычисленные по формуле (6.9.22) с известными решениями определения собственных частот (изгибные и крутильные). Необходимо отметить, что использованные для сравнения результаты были получены в результате вычисления на пакете программ Ansys [183] и по программе использующие рас-

четные формулы [232].

При колебаниях закрученного стержня центробежные силы повышают частоты его собственных колебаний, что отражено в работе [49].

6.10 Собственные частоты колебаний неподвижных и вращающихся закрученных стержней произвольного сечения

В работе [183, 232] рассматриваются консольные неподвижные и вращающиеся стержни, равномерно по длине закрученные на угол τ_0 из титанового сплава ($E = 1.127 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0.3$, $\rho = 4.59 \text{ кг/м}^3$) длины 140 мм и получены пять собственных частот колебания (три изгибные в плоскости меньшей жесткости $f_v^{(i)}$, крутильная f_θ , изгибная в плоскости большой жесткости f_u). Используется для расчета 50 стержневых конечных элементов в пакете программ Ansys. Эти результаты сравниваются с результатами, взятыми из работы [232], где учитываются стесненность кручения стержневой модели для различных углов закрутки τ_0 и частот вращения N .

В таблице 6.10.1 приведены сравнения этих собственных частот с результатами решения уравнения (6.9.22). Результаты расчетов собственных частот найденные из решения системы уравнений (6.9.22) с известными расчетами [183], [232] дают отличие в среднем 5%, при этом в одних случаях получали большие, а в других – меньшие частоты.

В качестве примера приводятся резонансные диаграммы для компрессорной лопатки из боралюминия. На рисунке 6.10.1 изображена резонансная диаграмма для от первых пяти гармоник возбуждения на рабочем режиме $\bar{n} = 1$.

Для данной компрессорной лопатки из боралюминия (геометрические параметры компрессорной лопатки приведены в главе 3), как видно из рисунка (рис. 6.10.1), отстройки потребуются от четвертой гармоники возбуждения на рабочем режиме $\bar{n} = 1$.

Таблица 6.10.1. Сравнения собственных частот

| | N, тыс. об/мин | $\tau_0=0$ | | | $\tau_0=0.477$ | | | $\tau_0=1.347$ | | |
|---------------------|-------------------|--------------------|-----------------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|
| | | Расчет (6.9.22) | Расчет [183] | Расчет [232] | Расчет (6.9.22) | Расчет [183] | Расчет [232] | Расчет (6.9.22) | Расчет [183] | Расчет [232] |
| $f_v^{(1)}$, Гц | 0 | 59.9 | 60.13 | 60.24 | 59.9 | 60.34 | 60.04 | 59.88 | 61.78 | 61.6 |
| | 7 | 179.4 | 187.6 | 187.6 | 179,4 | 187.8 | 188.6 | 179.4 | 189.4 | 188.4 |
| | 10 | 252.6 | 258.6 | 258.6 | 252.6 | 258.7 | 258.1 | 252.6 | 260.4 | 263.1 |
| | 15 | 376 | 377.8 | 378.1 | 376 | 378 | 375.3 | 376 | 379.7 | 376.8 |
| $f_v^{(2)}$, Гц | 0 | 375.3 | 376.8 | 377.4 | 378.2 | 342.3 | 342.9 | 275.2 | 236.5 | 237.7 |
| | 7 | 554.5 | 617.2 | 617.7 | 554.8 | 562.5 | 561.9 | 451.7 | 414.2 | 411.5 |
| | 10 | 692.3 | 790.1 | 790.6 | 692.3 | 715 | 712.7 | 592.3 | 534.5 | 529.3 |
| | 15 | 948.4 | 1099 | 1100 | 948.4 | 967.5 | 966 | 848.4 | 737.5 | 721.5 |
| f_u , Гц | 0 | 979.5 | 1055 | 1057 | 980 | 1005 | 1005 | 837 | 861.6 | 856.8 |
| | 7 | 1229.1 | 1263 | 1227 | 1241.1 | 1248 | 1235 | 1009.07 | 1107 | 1096 |
| | 10 | 1235 | 1282 | 1247 | 1298.9 | 1376 | 1346 | 1269.9 | 1305 | 1343 |
| | 15 | 1292.7 | 1327 | 1293 | 1412,7 | 1513 | 1476 | 1622.7 | 1670 | 1662 |
| $f_v^{(3)}$, Гц | 0 | 1150.6 | 1244 | - | 1650.6 | 1736 | - | 1296 | 1331 | - |
| | 7 | 1239.8 | 1346 | 1348 | 1439.8 | 1476 | 1449 | 1780 | 1945 | 1880 |
| | 10 | 1410 | 1585 | 1587 | 1410 | 1627 | 1608 | 1910 | 2092 | 2025 |
| | 15 | 1959 | 2040 | 2043 | 1958.9 | 2026 | 2016 | 2158.9 | 2326 | 2272 |
| f_θ , Гц | 0 | 535.8 | 528.3 | 556.2 | 585 | 578.7 | 605.3 | 850.7 | 849 | 858.9 |
| | 7 | 548.3 | 571.7 | 585.8 | 596.4 | 618.6 | 642.4 | 858.65 | 876.8 | 896.6 |
| | 10 | 561 | 612.8 | 614.6 | 608.1 | 657 | 694.2 | 866.8 | 924.5 | 962.2 |
| | 15 | 591 | 701.6 | 678.4 | 635.9 | 770.9 | 814.9 | 986.5 | 1098 | 1154 |

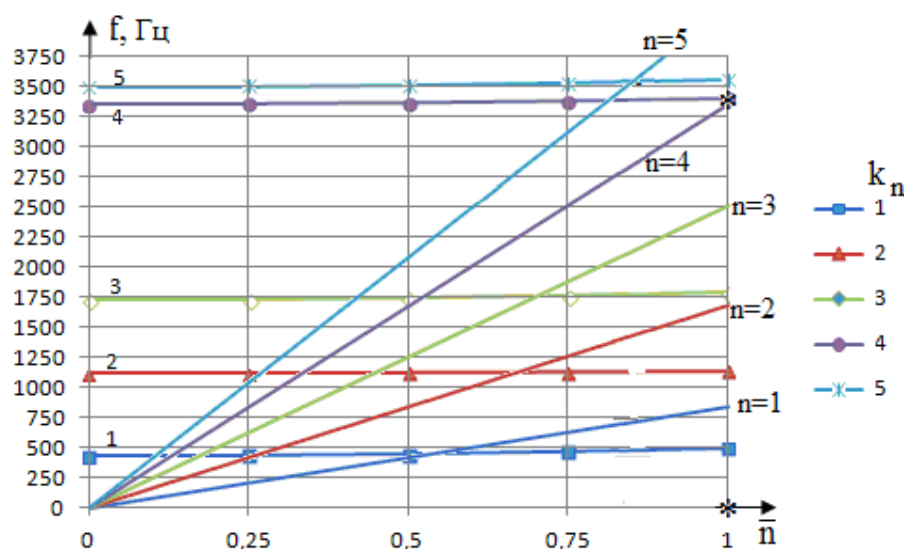


Рисунок 6.10.1 – Резонансная диаграмма компрессорной лопатки из боралюминия для отстройки от первых пяти гармоник (1,2,3,4,5) возбуждения на рабочем режиме $\bar{n}=1$. * - возможный режим возникновения автоколебания.

В таблице 6.10.2 приведены первые пять гармоник неподвижный и вращающиеся компрессорной лопатки равномерно по длине закрученные на угол

$\tau_0 = 0,006 \text{ рад/мм}$ из боралюминия длины 120 мм и получены пять технических частот колебаний (три изгибные в плоскости меньшей жесткости $f_v^{(i)}$, крутильная f_θ , изгибная в плоскости большой жесткости f_u), (геометрические параметры компрессорной лопатки приведены в главе 3).

Таблица 6.10.2 - Технические частоты

| k_n | \bar{n} | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
|-------|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | $f_v^{(1)}$ | 426,07 | 430,38 | 443,03 | 463,42 | 490,33 |
| 2 | f_θ | 1119,6 | 1120,9 | 1124,7 | 1131 | 1139,7 |
| 3 | $f_v^{(2)}$ | 1733,2 | 1736,9 | 1748,1 | 1766,6 | 1791,9 |
| 4 | f_u | 3356,7 | 3359,8 | 3368,9 | 3384 | 3404,9 |
| 5 | $f_v^{(3)}$ | 3504,2 | 3507,4 | 3517,2 | 3533,5 | 3556,1 |

На рисунке 6.10.2 представлены узловые линии первой изгибной формы $f_v^{(1)}$ технических частот колебаний при $\bar{n} = 1$ на поверхности компрессорной лопатки со стороны корытца.

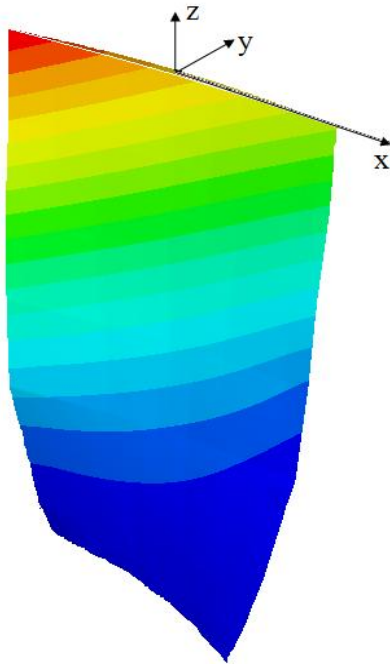


Рисунок 6.10.2 - Узловые линии на поверхности корытца (первая изгибная).

На рисунке 6.10.3 представлены узловые линии второй f_{θ} (а - первая крутильная) и третьей $f_v^{(2)}$ (б – изгибно-крутильной) формы технических частот колебаний при $\bar{n}=1$ на поверхности компрессорной лопатки со стороны корытца. На рисунке 6.10.4 представлены узловые линии четвертой f_u (а) и пятой $f_v^{(3)}$ (б) формы технических частот колебаний при $\bar{n}=1$ на поверхности компрессорной лопатки со стороны корытца.

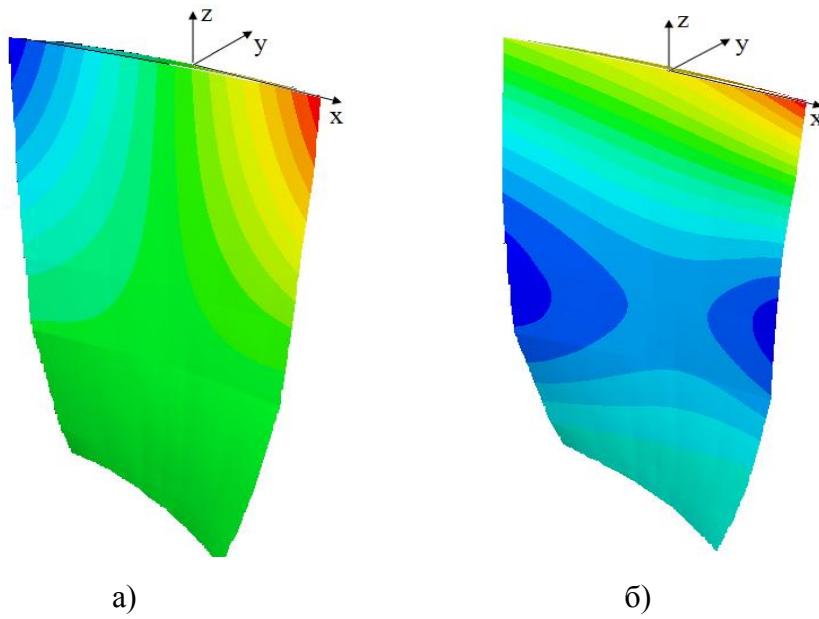


Рисунок 9.10.3 - Узловые линии на поверхности корытца (а – первая крутильная, б – изгибно-крутильная).

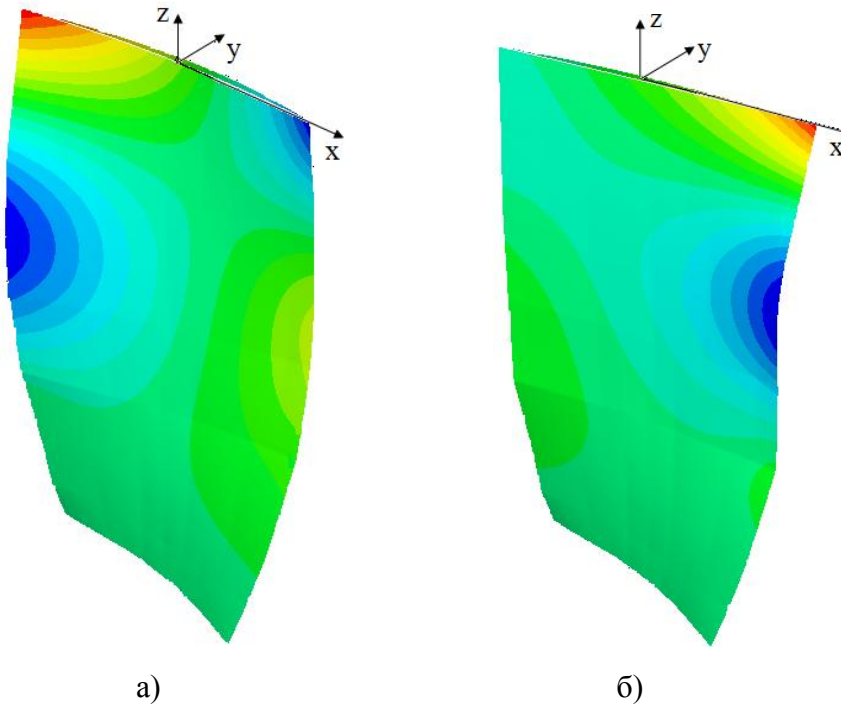


Рисунок 6.10.4 - Узловые линии на поверхности корытца.

Применение стержневой теории к сложной модели, каковой является компрессорная лопатка, показывает, что формы колебаний будут смешанными и имеют и изгибные, и крутильные, и продольные перемещения одновременно. Поэтому особый интерес представляет поведение второй изгибной и первой крутильной форм из-за возможности возникновения на определенных рабочих режимах изгибно-крутильного флаттера. Необходимо отметить, что вопросы прогнозирования возможности возникновения флаттера выходят за рамки данной работы. Однако, имеется определенный эффект возникновения которого необходимо избежать на этапе эскизного проектирования лопатки из КМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Дана математическая формулировка задачи НДС многослойного анизотропного призматического стержня произвольного сечения, находящегося под действием растягивающих сил, изгибающих и крутящего моментов. Предложен алгоритм аналитического построения решения сформулированной задачи.

2. Предложен аналитический алгоритм и разработан пакет прикладных программ для расчета стержней слоистого сечения заданной конфигурации в виде совокупности монослоев.

3. Предложен алгоритм и разработан пакет прикладных программ аналитический расчета физико-геометрических характеристик сечения многослойного анизотропного стержня с использованием механических характеристик отдельных слоев.

4. Проведено численное исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях многослойного анизотропного стержня произвольного сечения, показало возможность регулирования НДС слоистой конструкции при кручении путем назначения свойств отдельных слоев, обеспечивающих прочность стержня.

5. Впервые разработана методика количественной оценки жесткости на кручение стержня слоистой структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойной конструкции прямоугольного сечения.

6. На стадии эскизного проектирования тонкостенных многослойных анизотропных стержневых конструкции, работающих в условиях кручения предложена номограмма для оценки их характеристик жесткости на кручение C и эффективного модуля сдвига c_{55} .

7. С помощью МКЭ разработан алгоритм и реализован с помощью программы FORTRAN метод решения, который позволяет определять НДС слоистых анизотропных стержней произвольного сечения при кручении. Это дает возможность получить разрешающее уравнение в узловой точке слоя сечения и итерационный способ его решения, используя только оперативную память ЭВМ, сохранив необходимую точность решения задачи.

8. Получены кинематические соотношения для исследования НДС многослойных естественно-закрученных анизотропных стержней и результаты анализа НДС многослойной лопадки, находящихся в поле центробежных сил.

9. Разработан алгоритм и пакет программ для определения НДС в композиционных анизотропных стержнях и лопатках с учетом слоистости материала. Расчет лопаток и стержней по методике 3-й главы позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами, формы и его геометрического расположения в теле лопадки. Составленная программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретной многослойной стержня из ранее выбранного класса КМ. Эффективность и достоверность разработанной программы подтверждена сравнением расчетных величин с результатами испытаний на растяжение изотропных и анизотропных стержней прямоугольного сечения.

10. Показано, что путем выбора материала с учетом армирования отдельных слоев можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций и собственными частотами колебаний при одних и тех же физических оборотах ротора. Сравнение значений частот первых трех форм колебаний, полученных автором, показало удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х.Арутюнян, Б.Л. Абрамян - М.: Физматгиз, 1963.- 636 с.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела /В.С. Саркисян - Ереван: Изд. ЕрГУ, 1970. - 443 с.
3. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней /С.Г. Лехницкий - М.: Наука, 1971. - 240 с.
4. Сен-Венан Б. Мемуары о кручении призм. Мемуары об изгибе призм /Б.Сен-Венан - М.: Мир, 1961. - 530 с.
5. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред /Болотин В.В. //Механика полимеров. - 1965. - №5.
6. Болотин В.В. К теории слоистых плит/ В.В.Болотин //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963.- №3.
7. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций /А.Р. Ржаницын - М.: Стройиздат. - 1948.
8. Болотин В.В. О теории армированных сред / В.В.Болотин // Изв. АН СССР. Механика. - 1965. - №1.
9. Тарнопольский Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю.М.Тарнопольский, А.В. Розе - Рига: Зинатне, 1969. - 274 с.
10. Холистор Г.С. Материалы упрочненные волокнами /Г.С. Холистор, К. Томас - М.: Машиностроение, - 1969.
11. Волокнистые композиционные материалы /Пер. с англ. Под ред. Д.т.н. С.З. Бокштейна, М.: М-Ин., 1967.
12. Неметаллические композиционные материалы /Сб. статей под ред. Чл.-корр. АН СССР А.Т. Туманова ОНТИ ВИАМ, 1974.
13. Неметаллические композиционные материалы /Под ред. Чл.-корр. АН СССР А.Т.Туманова, проф. К.И. Портного ОНТИ ВИАМ, 1972.
14. Механические свойства эпоксидных боро- и углепластиков /Под ред. Чл.-корр. АН СССР А. Т. Туманова, Ю.М.Т арнопольского, А.М. Скудры ОНТИ ВИАМ, 1973.

15. Розе А.В. Механические и технологические свойства стеклопластиков с пространственно сшитой арматурой / А.В.Розе, И.Г.Жигун, М.И. Душин //ОНТИ ВИАМ и ИПП ЛССР, 1970 г.
16. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела /С.Г. Лехницкий - М.: Наука, 1975. - 415 с.
17. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян - М.: «Наука», 1961 г.
18. Гольденблат И.И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред /И.И. Гольденблат - М.; «Наука», 1955 г.
19. Болотин В.В. Об оценке погрешности уравнений в прикладной теории упругости / В.В. Болотин //В сб. «Строительная механика», М.: Изд. литер. по строительству, 1966г.
20. Королев В.И. Слоистые анизатропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королев //М.: «Наука», 1965 г.
21. Ванин Г.А. Конструкция из армированных пластмасс / Г.А.Ванин - Киев. Наукова думка, 1971.- 231 с.
22. Василиев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов /В.В. Василиев - М.: Машиностроение, 1988. -272 с.
23. Рабинович А.Л. Введение в механику полимеров / А.Л. Рабинович - М.: Наука, 1970.-482 с.
24. Скудра А.М. Прочность армированных пластиков /А.М.Скудра, Ф.Я. Булавс - М.: Химия, 1982. - 213 с.
25. Рабинович А.Л. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков / А.Л.Рабинович, И.А. Верховский //Инж. журнал, 1965 г., т. 1, в.1
26. Абольинш Д.С. Тензор податливости однонаправленного армированного упругого материала / Д.С. Абольинш // Механика полимеров, 1964, №4.
27. Shaffer B.W. Material Propcetics of Reinforsed Plastics / B.W. Shaffer // Soc. Plastic Engin. 4.1964.
28. Ekwel J.C. Elastic Propertics of Monofilanment Laminates/ J.C.Ekwel //ASME, Paper 61-av-56(1956)

29. Beer F. Die Festigkeitseigenschaften Kreuzweise bewerteten Kunststoffe / F.Beer //VDI Ztschr.,101,12,1959.
30. Хашин. Уругие модулы материалов, армированных волокнами /Хашин, Розен // Прикладная механика , серия Е, (США перю с. англ.), 1964, №2.
31. Уитни. Упругие свойства составных материалов, армированных волокнами / Уитни, Райли //Ракетная техника и космонавтика,1966, №2.
32. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов /Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов - М.: Машиностроение, 1972. - 216 с.
33. Келли А. Высокопрочные материалы / А.Келли - М.: Мир, 1976.-261с.
34. Фудзи Т., Дзюко М. Механика разрушения композиционных материалов /Т.Фудзи, М.Дзюко - М.: Мир, 1982. - 232 с.
35. Заболоцкий А. А. Исследование долговечности углеалюминия при статических и динамических нагрузках /А.А.Заболоцкий, Т.Д.Каримбаев, Ю. А.Петров, Р.С. Тихонова // Проблемы прочности, 1981.-№9. -С. 93-97.
36. Кийко В.М. Экспериментальное определение упругих- характеристик волокнистых композитов /В.М.Кийко, Л.С. Спиридонов //Механика композитных материалов. - 1986.- № 3.- С. 531-536.
37. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки /С.Г. Лехницкий - М.: ОГИЗ, 1947.
38. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов /Б.Е.Победря - М.: Изд.: МГУ. - 1984. - 336 с.
39. Лурье С.А., Юсефи Шахрам. Об определении эффективных характеристик неоднородных материалов //Механика композиционных материалов и конструкций. - 1997. - Т.3. - № 4. - С.76-92.
40. Немировский Ю.В. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов / Ю.В.Немировский, Б.С. Резников - Новосибирск: Наука, 1986. - 165 с.
41. Горшков Л.А. О рациональной схеме армирования рабочих лопаток турбомашин из композиционных материалов /Л.А. Горшков //Механика композитных материалов. - 1981. - №1. - С. 98-103.

42. Тимошенко С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко - Киев.: Наукова Думка, 1972.- 507 с.
43. Каримбаев Т.Д., Нурымбетов А.У. Кручение и растяжение слоистых анизотропных стержней - Монография. Алматы: Қазақ университеті.-2006.-160 с.
44. Саркисян В.С. Решение некоторых задач теории упругости неоднородных анизотропных тел методом малого параметра / В.С. Саркисян //Всесоюз. семинар по теории упругости неоднородного тела. Ереван, 1981. - С. 23-24.
45. Саркисян В.С. Метод решения задачи обобщенного кручения стержней /В.С. Саркисян // Механика, 1983. - Вып. 3.- С. 27-31.
46. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошных сред /А.Грин, Дж.Адкинс - М.: Мир, 1965. - 455 с.
47. Магомаев Л.Д. К теории кручения стержней с криволинейной осью /Л.Д. Магомаев // Прикл. механика.- 1984.- Т.20, № 4.- С. 68-74.
48. Голубев О.Б. Обобщение теории тонких стержней / О.Б. Голубев // Тр. ЛПИ им. М.И. Калинина, 1963. - № 226. - С. 83-92.
49. Воробьев Ю.С. Теория закрученных стержней. / Ю.С.Воробьев, Б.Ф. Шорр - Киев: Наукова думка, 1983.- 186 с.
50. Финников С.П. Дифференциальная геометрия/ С.П. Финников - М.: Изд. МГУ, 1961.-158 с.
51. Нурымбетов А.У. Автоматизированное проектирование раскроя деталей произвольного поперечного сечения из слоистых композиционных материалов /А.У. Нурымбетов // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». М.: - 2009 - №4.- С. 92-101.
52. Каримбаев Т.Д. Оценка разрушения структурных элементов композиционных материалов / Т.Д. Каримбаев В сб. "Проблемы, прочности и динамики в авиадвигателестроении". Вып. 1 //Тр.ЦИАМ 1980. -№887.- С. 151-161
53. Cockey D. Perturbation Solutions for generally anisotropic composite material Plates including transver shear deformation / D. Cockey, J.R. Vinson //The first USSR-US Symposium on mechanics of Composite materials. Riga.-23-26. VI. 1989.
54. Лехницкий С.Г. Кручение многослойного стержня прямоугольного сече-

ния / С.Г. Лехницкий // Инженерный сборник. -1956.-Т.ХХIII.-С.63-76.

55. Чудаев Я.Ф. Приближенный метод расчета призматических стержней на кручение. / Я.Ф. Чудаев - Новокузнецк: -1975.- 244 С.

56. Дехтярь Л.И. Упрощение расчета на кручение неоднородных стержней прямоугольного сечения / Л.И.Дехтярь, Б.М. Шпигель //Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.мат.-тех., 1984.- №9.- С. 71-72.

57. Нурымбетов А.У. Жесткость на кручение мелкослоистого анизотропного стержня / Т.Д.Каримбаев, А.У.Нурымбетов, И.В. Шевченко //Технология машиностроения. М.: – 2009. - № 8. – с. 31-36

58. Дудченко А.А. Прочность и проектирование элементов авиационных конструкций из композиционного материала. М.: Изд-во МАИ, 2007. – 200 с.

59. Каримбаев Т.Д. Основные соотношения механики двухкомпонентной среды и способы определения их параметров / Т.Д.Каримбаев // Тр. ЦИАМ. 1985.- № 1119.- 23 С.

60. Рытов С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды / С.М.Рытов //Акустический журнал.- 1956. - Т. II, вып. 1. - С. 71-83.

61. Хорошун Л.П. К теории изотропного деформирования //Прикладная механика. - 1966. - № 2. - С. 14-39.

62. Хилл Р. Упругие свойства составных сред / Л.П. Хорошун //Некоторые теоретические принципы механики. Сб. переводов.- 1964. -№ 5.-С.127-143.

63. Нурымбетов А.У. Решение задачи кручения слоистых композиционных стержней произвольного сечения методом конечных элементов /А.У. Нурымбетов // Строительная механика и расчет сооружений. М.: - 2009. -№4.- с.24-30.

64. Сперроу. Кручение упругих составных стержней произвольного сечения /Сперроу , Ю. // Конструирование и технология машиностроения. М.: Мир, 1968. - № 3. - С. 10-17.

65. Нурымбетов А.У. Численные решения МКЭ задачи о кручении слоистых композиционных стержней произвольного сечения /А.У.Нурымбетов //Вестник ТарГУ им. М.Х. Дулати. Тараз. - 2009. - № 3. - с. 211-216.

66. Нурымбетов А.У. Кручение многослойного призматического анизотроп-

ного стержня, составленного из ортотропных материалов /А.У.Нурымбетов //Вестник РУДН. Серия «Математика, информатика, физика». М.: - 2009 г. - № 4.- С. 64-76.

67. Нурымбетов А.У. Обобщенное кручение многослойных стержней произвольного сечения, составленных из анизотропных материалов / А.У . Нурымбетов // Строительная механика и расчет сооружений. М.: - 2009. -№6.- с.44-50.

68. Нурымбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных стержней и лопаток при кручении //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М.: 2015.- №1. - с. 59-66.

69. Крамарова И.В. Кручение физически нелинейных призматических стержней произвольного поперечного сечения / И.В.Крамарова, А.Н. Паутов // Прикладные проблемы прочности и пластичности. - Харьков, 1979.- № 3. - С. 130-136.

70. Шинкаренко Г.А. Применение метода конечных элементов в задаче кручения неоднородных стержней / Г.А.Шинкаренко, Я.Г. Сивула, В.Н. Вовк //МКЭ в строительной механике. - Горький, 1975. - С.108-117.

71. Планкетт. Кручение неоднородных упругих призматических стержней //Конструирование и технология машиностроения /Планкетт - М: Мир, 1965. - №3. - с. 146.

72. Баничук Н .В. Максимизация жесткости на кручение упругих стержней из композиционных материалов / Н .В.Баничук, А. Д. Ларичев // Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983.- Т.XXXVI.- № 6.- С. 31-38.

73. Воробьев Ю. С. Области применения различных способов определения жесткости на кручение лопаток турбомашин/ Ю. С.Воробьев, Э.В.Сапелкина, А.И. Шепель // Динамика и прочность машин.- Харьков, 1985.- № 41.- С. 38-43.

74. Крохула. Решение методом конечных элементов задачи Сен-Венана о кручении /Крохула, Лаутербах // Ракетная техника и космонавтика - М.: Мир, 1968. - № 6.- С. 12-16.

75. Данкерт Ю. Решение задачи кручения с помощью метода конечных элементов / Ю.Данкерт, З.Кочик // Динамика и прочность машин. Респуб. межвед. темат. науч.-техн. сб., 1977. - Вып. 6. - С.29-36.

76. Норри Д. Введение в метод конечных элементов. / Д. Норри, Ж. де Фриз - М.: Мир, 1981. - 304 с.

77. Бабич Ю.Н. Методы и алгоритмы автоматического формирования сетки треугольных элементов / Ю.Н.Бабич, А.С. Дыбенко - Препринт ИПП АН УССР, 1978. - 93 С.

78. Ворошко А.В. К построению эффективных программ триангуляции произвольных областей применительно к МКЭ / А.В.Ворошко, А.Л. Квитка, С.В. Кобельский, О.Н.Петренко, А.В. Рязанов // Проблемы прочности, 1981.- № 1.- С. 120-122.

79. Камель Х.А. Дискретизация для компьютерного формирования конечно-элементной модели. Ч.1-2 / Х.А.Камель, Наваби. // Конструирование и технология машиностроения.- М.: Мир, 1980. - Т.102, №3. -С. 81-92.

80. Камель Х.А. Автоматическое построение сетки в двух- в трехмерных составных областях / Х.А.Камель, Г.И. Эйзенштейн //Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. -М.: 1974.-Т.2.-С.21-35.

81. Миткеевич В.М. Автоматизация подготовки исходных данных при решении двумерных задач с применением треугольных конечных элементов /В.М.Миткеевич, В.И. Огороков // Проблемы машиностроения. - 1976. - Вып. 2. - С. 16-21.

82. Руснок. Генерация КЭС для плоских областей на основе интерактивного способа размещения узловых точек / Руснок, Ципра //Конструирование и технология машиностроения. - М.: Мир, 1985. -№3. -С. 328-342.

83. Уманский Э. Автоматическое подразделение произвольной двумерной области в конечные элементы / Э.Уманский, И.А.Дувидзон // Проблемы прочности - 1977.- № 6. - С. 89-92.

84. Шехтман Ю.В. Автоматическое разбиение плоской области на треугольные элементы. / Ю.В. Шехтман - Тр. ЦИАМ, 1978. - № 790,- С. 1-6.

85. Дыбенко А. С. Автоматическое формирование сетки треугольных элементов для произвольных плоских областей /А.С. Дыбенко, Н.Г.Ващенко, Н.Г. Крищук, В.Н. Кулаковский //Проблемы прочности. - 1980, - № 12, - С. 84-89.

86. Buell W.R. Mech Generation – A survey/ Buell W.R., Bush V.A. // J. Engr. for Industry .- 1973. - №2. - pp. 332-338.

87. Барлау. Замечание к статье "Алгоритм автоматической перенумерации ширины ленты в матрицах жесткости" / Барлау, Марилес. //Ракетная техника и космонавтика.- М.: Мир, 1969.- Т.7, №2. - С. 242-244.

88. Сакович А. И. Минимизация ширины ленты системы в методе конечных элементов / А.И.Сакович, И.А. Холмянский //Проблемы прочности, 1981. - № 1. - С. 120-122.

89. Нурымбетов А.У., Жанбосынов Р.С. Создание лопатки из слоистых полимерных композиционных материалов // Матер. V междунар. науч.-прак. конф. «Инженерные системы - 2012». М.: РУДН.- 2012.

90. Карпов А. П. Кручение ромбической призмы / А.П. Карпов //Тр. Куйбышевского политехнического института,- 1954.-С. 62-67.

91. Берт. Механика композиционных материалов Строительная механика /Берт, Френсис // Ракетная техника и космонавтика,- М.: Мир, 1973. - №9.- С. 7-26.

92. Джанелидзе Г.Ю. Соотношения Киргхофа для естественно скрученных стержней и их применения / Г.Ю.Джанелидзе //Тр. ЛПИ им. М.И. Калинина, 1946.- №1. - С. 23-32.

93. Лурье А.И. Задача Сен-Венана для естественно скрученных стержней /А.И.Лурье, Г.Ю. Джаналидзе //Дан СССР.- 1939,- Т. XXIV, №1. -С. 23-26. - №3.- С. 226-228.

94. Риз П.М. Деформация стержней, закрученных и слабоизогнутых в ненапряженном состоянии / П.М. Риз // Тр. ЦАГИ, 1940.-Вып. 471,- 27 с.

95. Рухадзе А.К. О деформации естественно закрученных стержней /А.К. Рухадзе // Прикладная математика и механика.- 1947,- II, вып. 5. -С. 533-542.

96. Нурымбетов А.У. Раскрой стержня произвольного слоистого поперечного сечения // Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2005, №1, с. 63-72.

97. Биргер И.А. Пространственное напряженное состояние в лопатках с начальной закруткой / И.А. Биргер //Тр.ЦИАМ.- 1982. - №996. - С.7-23.

98. Бердичевский В.Л. К теории естественно закрученных криволинейных стержней /В.Л.Бердичевский, А.Старосельский //Изв. АН. СССР. Механика твердого тела, 1979. - № 6.

99. Ильюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней /А.А. Ильюхин - Киев: Наук. думка, 1979.- 216 с.

100. Шорр Б.Ф. К теории закрученных тонкостенных стержней /Б.Ф.Шорр //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.- 1970. - №5.- С. 74-79.

101. Шорр Б.Ф. Основы теории закрученных лопаток с непрямой осью /Б.Ф. Шорр //Динамика и прочность авиационных двигателей. - М.: Машиностроение, 1966. - Вып. 3. - С. 188-213.

102. Шорр Б.Ф. К экспериментальной проверке теории растяжения закрученных стержней /Б.Ф.Шорр // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1972. - №5. - С. 147-153.

103. Биргер И. А. Неравномерно нагретые анизотропные стержни с переменными параметрами упругости / И.А.Биргер //Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1972.- №5. - С. 147-153.

104. Биргер И.А. Пространственное состояние в лопатках турбин /И.А. Биргер, Л.П. Селифанова //Проблемы прочности, 1973.- №3.- С. 7-10.

105. Johnson A.F. Bending and Torsion of Anisotropic Beams/ A.F. Johnson // Int. J. Solids Structures. – 1973. – vol.9.- pp. 527-551.

106. Giavotto V. Anisotropic Beam Theory and Applications/ V.Giavotto, M.Borri, P.Mantegazza, G.Ghiringhelli, V.Garmaschi, G.C.Maffioli, F.Mussi //Comput. and Struct. - 1973. – vol.16, №1.- pp.403-413.

107. Murthy P.V., Rao K.P. Analysis of gurved Laminated Beams of Bomodulus Composite Materials / P.V. Murthy, K.P. Rao // J. Compos. Mater. – vol. 15, №10.- pp. 1517-1539.

108. Reissner E. Further considerations of the Problem of Torsion and Flexure of Prismatical Beams / Reissner E. // Int. J. Solids Structures. – 1983. – vol 19, №5. - pp. 385-392.

109. Ohtsuka M. Untvvist of Rotating Blades / M.Ohtsuka //Transactions of the

ASME. J. Of Eng. For Pover. -1975. -№4. – pp. 180-187.

110. Soler A.I. Pretwisted Curved Beams of Thin-Walled Open Sectionthe/ A.I. Soler //J. Of Appl. Mech. - 1972. - №3. - pp. 779-785.

111. Shield R.T. Extension and Torsion of Elastic Bars With Initial Twist / R.T. Shield //J. of Appl.Mech. - 1982. -vol 49, №4. - pp. 779-786.

112. Rosen A. Teoretical and Experimental Investigation of the Nonlinear Torsion and Extension of Initially Bars / A. Rosen //J. of Appl. Mech. - 1983. - vol 50, №2. - pp. 321-326.

113. Reissner E. On a simple variotaniol analysis of small finite deformations of prismatic Beams / E. Reissner // “ZAMP”. - 1983. - vol 34, №5. - pp. 642-648.

114. Krenk S.A. A linear theory for pretwisted elastic Beams / S.A. Krenk // J. of Appl. Mech. - 1983. - vol 50, №1. - pp. 137-142.

115. Krenk S. The Torsion -Extention Coupling in Prewisted Elastik Beams /S. Krenk // Int. J. Solids Structure. -1982. -v.19, №1, pp.67-72.

116. Чен. Конечный изгиб и кручение тонкой ортотропной полосы с двуконвуклым поперечным сечением / Чен //Ракетная техника и космонавтика.- М.: Мир, 1974.-Т.12, №2. -С.148-150.

117. Фридман П. П. Современные исследования по аэроупругости несущего винта вертолета. / П.П.Фридман //Ракетная техника и космонавтика - М.: Мир, 1978.- Т.16, № 2. - С. 126-145.

118. Дудченко А.А. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных лопаток авиационных двигателей /Нуримбетов А.У. // Оборонный комплекс - научно-техническому прогрессу России. Москва: ФГУП «ВИМИ» 2015. -№2. -с. 46-54.

119. Даунс. Исследование лопаток турбомашин с использованием специального вида дискретизации и теории закрученных стержней /Даунс // Конструирование и технология машиностроения. - М.: Мир, 1980. - Т.102, №3.- С.101-106.

120. Нуримбетов А.У. Полупространственная теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: - 2010. - № 1. - с.46-57.

121. Hodges D.H. Torsion of Pretwisted Beams Due to Axial loading /D.H. Hodges // J.Appl. Mech.- 1980.- vol.42, №7.- pp. 393-397.1980.

122. Нурымбетов А.У., Жунисбеков М.Ш. Решение задачи о кручении многослойных анизотропных стержней прямоугольного сечения из армированных материалов // Materials of the X International scientific and practical conference, «Scientific horizons», - 2014. Volume 10. Technical sciences. Sheffield. Science and education. LTD - p.6-12..

123. Нурымбетов А.У. Исследование естественно-закрученных слоистых анизотропных стержней, лопаток из армированных материалов при кручении и растяжении /А.У.Нурымбетов // Труды Междунар. молодежной науч. Конф. "Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций", М.: РУДН, 2014. – с. 39-48.

124. Нурымбетов А.У. Расчетная оценка жесткости на кручение многослойного стержня прямоугольного сечения // Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2004, №1, с. 22-31.

125. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / Биргер И.А., Б.Ф. Шорр., Г.В. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.

126. Каримбаев Т.Д., Нурымбетов А.У., Орынбаев С., Джунибеков М.Ш. Технология изготовления композитных лопаток вентилятора согласно утверждённым математическим моделям методом вакуумно-компрессионной пропитки //Астана: Инновационный патент. - 2014. – регистрационный номер 2014/1393.1. Установка приоритета №641 от 09.01.15.

127. Панов Д.Ю. Расчет воздушного винта на прочность / // Тр. ЦАГИ, вып.288, 1937. - 123 с.

128. Тумаркин С.А. Равновесие и колебания закрученных стержней / С.А. Тумаркин // Труды ЦАГИ, 1937. вып. 341.

129. Риз П.М. Выбрации и динамическая прочность воздушных винтов /П.М.Риз, А.И.Пожалостин // Тр. ЦАГИ, 609, БНТ, 1967. - 80 с.

130. Риз П.М. Общее решение задачи кручения в нелинейной теории упругости / П.М.Риз // ПММ, 1943, вып. 3, 149- 154 с.

131. Марченко В.М. Растяжение и кручение естественно-закрученных стержней / В.М. Марченко // Труды ЦАГИ, 1958, №72.
132. Меерович И.И. Колебания слабоизогнутых и закрученных лопаток /И.И. Меерович // Труды ЦИАМ, Оборонгиз, 1956, №271.
133. Бедчер Ф.С. Частоты и формы колебаний компрессорных лопаток / Ф.С. Бедчер // Энергомашиностроение, 1964. №6.
134. Wood R. G.A. Stresses and strains in airereva with particular reference to troist / R.Wood, W.Perring // ARC 1929. (Reports Memoranda № 1274)
135. Ветчинкин В.П., Поляхов К.Н. Теория и расчет воздушного гребного винта / В.П.Ветчинкин, К.Н. Поляхов - М.: Оборонгиз, 1940.
136. Нуримбетов А.У. Решение задачи на кручение слоистых анизотропных стержней и лопаток методом конечных элементов // Труды всероссийской научно-практической конференции “Инженерные системы-2009”, М: РУДН. - 2009.- С.383-390
137. Нуримбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных лопаток с различными физико-механическими свойствами слоев / Нуримбетов А.У., Мыктыбеков Б. // Научный журнал «Известия Самарского научного центра РАН» - 2014, том 16, № 4.- с. 137-145
138. Каримбаев Т.Д. Основные соотношения механики двухкомпонентной среды и способы определения их параметров / Т.Д.Каримбаев // Тр. ЦИАМ. 1985.- № 1119.- 23 С.
139. Каримбаев Т.Д. Оценка разрушения структурных элементов композиционных материалов /Т.Д.Каримбаев - В сб. "Проблемы, прочности и динамики в авиадвигателестроении". Вып. 1 //Тр.ЦИАМ 1980. - №887.- С. 151-161
140. Хорошун Л.П. Задачи динамики двухфазных упругих тел / Л.П. Хорошун, В.З. Тындык // Прикладная механика. – 1979, т.15. - № 2. - С. 35-40.
141. Новацкий В. Теория упругости. / В.Новацкий. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
142. Каримбаев Т.Д. Нуримбетов А.У. Лупов А.А. Автоматизированное проектирование составных элементов заготовок деталей из слоистых композиционных материалов //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 1999,

№1, с. 31-34.

143. Бицено К.Б. Техническая динамика. / К.Б.Бицено, Р.Граммель. - ГИТТЛ, 1952, т.2. - 290с.

144. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов / Д.В. Хронин. - М.: Машиностроение. -1970 г.

145. Биргер И.А. Строительная механика турбомашин: Дис. ... д-ра.т.н. 01.02.04 / Биргер Исаак Аронович.- М.: 1954. - 340 с.

146. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. / И.И. Меерович. - М.: Оборонгиз, 1961 г.

147. Гринберг С.М. Применение метода Ритца к расчету изгибных колебаний консольных лопаток осевых турбомашин / С.М. Гринберг // Расчеты на прочность, М.: Машгиз, 1962, вып. 9.

148. Рудавец В.А. Исследование собственных частот и форм колебаний рабочих лопаток осевых компрессоров в поле центробежных сил на основе теории оболочек: Автореф. дис. на соискание уч. степени к.ф.-м.н. 01.02.04 / Рудавец В.А. - Ленинград, 1975. -15с.

149. Тумаркин С.А. О влиянии центробежных сил на вибрации лопастей и лопаток / С.А. Тумаркин // ЦАГИ, тех. Заметки, 1937, №155.

150. Sun S.T. Time-harmonic transverse and longitudinal motions of a laminated plate. /S.T.Sun, J.D.Achenbach. //Northwestern Univ.Struct. Vtch. Lab.T.R. №65-1. Evenston, Illinois,1969.

151. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. - М.: Изд. АН ССР, 1957. - 520с.

152. Ахенбах Дж. Д. Колебания и волны направленно-армированных композитах. / Дж. Д. Ахенбах. В кн.: Композиционные материалы - М.: Мир. 1978. – с. 354-400.

153. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике / С.Г.Михлин. - М.: ГИТТ, 1950.

154. Меерович И.И. Колебания прямоугольной плоской пластины. // Динамика авиадвигателей / И.И. Меерович. - М.: Оборонгиз, 1952. – вып.8, с. 149-208.

155. Нуримбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных лопаток из композиционного материала в поле центробежных сил /А.У. Нуримбетов //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: - 2009.- № 3. – с. 46-57.

156. Гудмундсон П. Настройка турбины: теоретический подход /П.Гудмундсон //Труды ASME. Серия А. Энергетические машины и установки (М.). –1983. - №2. –с.18-25.

157. Нуримбетов А.У., Байшагиров Х.Ж. Решение задачи кручения и растяжения слоистых лопаток ветроколеса методом конечных элементов // Матер. междунар. научно-практ. конф. “Композиционные материалы в промышленности” . - 2008г., г. Ялта, Крым. - с. 92-95

158. Нуримбетов А.У., Жунисбеков Т.М., Манатова Г.О. Кручение анизотропных стержней с сечением вида авиационного профиля // Материалы международной научно-практической конференции «Валихановские чтения-11» Кокшетау.- 2006, - С. 14-19

159. Надежность и ресурс авиационных газотурбинных двигателей /Под ред. Г.П.Свищева, И.А. Биргера. - М.: Машиностроение, 1969 - 539 с.

160. Иноземцев А.А. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок /А.А. Иноземцев, М.А. Нихамкин, Л. Сандрацкий - М.: Машиностроение, 2008. - Т. 4. - 192 с.

161. Нуримбетов А.У. Особенности деформирования естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2000, №1, с. 92-97.

162. Fransson T.H. Analysis of Experimental Time-Dependent Blade Surface Pressures from an Oscillating Turbine Cascade Using the Influence-Coefficient Technique / T.H. Fransson - // Journal de Physique III. - 1992. - Vol.2, №4. P. 575-594.

163. Shrinivasan A. V. Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades / A.V. Shrinivasan // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 1997. - V.19, n.3, P. 742-775.

164. Хориков А.А. Обеспечение отсутствия флаттера лопаток компрессоров

на различных этапах создания турбомашин /А.А. Хориков // Проблемы прочности. - 1976. - №3. - С. 25-28.

165. Кампсти Н. Аэродинамика компрессоров: Пер. с англ. / Н. Кампсти. М.: Мир, 2000. - 688 с.

166. Marshall J.G. A Review of Aeroelasticity Methods with Emphasis on Turbomachinery Applications / J.G.Marshall, M. Imregun // Journal of Fluids and Structures. - 1996. - Vol.10, Issue 3. - P. 237-267.

167. Verdon J.M. Review of Unsteady Aerodynamic Methods for Turbomachinery Aeroelastic and Aeroacoustic Applications / J.M.Verdon // AIAA Journal. 1993. - V.31, n.2. - P. 235-249.

168. Imregun M. Recent developments in turbomachinery aeroelasticity /M. Imregun / M. Imregun // Computational Fluid Dynamics. - 1998. - Vol. 2. - P. 524-533.

169. Marshall J.G. An analysis of the aeroelastic behavior of a typical fan-blade with emphasis on the flutter mechanism / J.G. Marshall, M. Imregun // International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, Jun. 10-13, 1996, Birmingham, United Kingdom. - ASME 96-GT-78.

170. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л.Бидерман. - М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

171. Нуримбетов А.У. Техническая теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения //Известия Самарского научного центра РАН - 2009. Т. 11 - №5. с. 94-101.

172. Шорр Б.Ф. Колебания закрученных стержней /Б.Ф.Шорр //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение 1961.-№3.- с.35-39.

173. Биргер И.А. Стержни, пластины и оболочки / И.А. Биргер. - М.: Физматлит, 1992. – 392с.

174. Биргер И.А. Прочность и надежность машиностроительных конструкций. Избранные труды /И.А. Биргер. - Уфа: ГМФМЛ, 1998. - 350 с.

175. Ляв А. Математическая теория упругости /А.Ляв.- М.-Л.: ОНТИ. 1935. - 674 с.

176. Kirchoff G. Vorlesungen uber mathematische Physik. Mechanik /G.Kirchoff.

- Leipzig, 1877. - 466 s.

177. Clebsh A. Theorie der Elastizitat fester Korper / A. Clebsh. - Leipzig, 1862. - 424 s.

178. Риз П.М. Деформация естественно закрученных стержней /Риз П.М. //Труды АН СССР. -1939. – Т.23, №1. - С.18-21.

179. Воробьев Ю.С. Исследование колебаний систем элементов турбоагрегатов /Ю.С.Воробьев, Н.Г. Шульженко. - Киев: Наукова Думка, 1978. - 135 с.

180. Шорр Б.Ф. Изгибно-крутильные колебания закрученных компрессорных лопаток / Б.Ф.Шорр // Прочность и динамика авиационных двигателей - М.: Машиностроение, 1964. - Вып. 1. -С. 217-246.

181. Нурымбетов А.У., Шевченко И.В. Оптимизация напряженно-деформированного состояние слоистых композиционных лопаток и стержней произвольного сечения в поле центробежных сил//Авиационная промышленность. М.: - 2009. - №4. - с. 34-41

182. Темис Ю.М. Геометрически нелинейная конечно-элементная модель закрученного стержня в задачах статического и динамического расчета лопаток /Ю.М. Темис, В.В. Карабан //Труды ЦИАМ. - 2001. - №1319. - С. 1-20.

183. Методы расчета напряженно - деформированного состояния лопаток турбомашин. // Сб. ст. ред. Ушакова А.И. - Тр. ЦИАМ, 1987. -№1177. - 524 с.

184. Vogt D. Direct Calculation of Aerodynamic Influence Coefficients Using a Commercial CFD Solver / D. Vogt, H. Martensson, T. H. Fransson // 18th International Symposium on Air Breathing Engines (ISABE), September 2-7, 2007, Beijing, China. - ISABE-2007-1233.

185. Carta F.O. Coupled Blade-Disk-Shroud Flutter Instabilities in Turbojet Engine / F. Carta // Journal of Engineering for Power. - 1967. - №7. - P. 419-426.

186. Августиневич В.Г. Численное моделирование нестационарных явлений в газотурбинных двигателях: Научное издание /В.Г.Августиневич, Ю.Н.Шмотин [и др.] - М.: Машиностроение, 2005. - 536 с. \

187. May M. Reduced Order Modeling for the Flutter Stability Analysis of a Highly Loaded Transonic Fan / M. May // Proceedings of ASME Turbo Expo 2012, June 11-

15, 2012, Copenhagen, Denmark. - GT2012-69775.

188. Бауэр В.О. Влияние расстройки частот лопаток на резонансные колебания / В.О.Бауэр, Б.Ф.Шорр // Прочность и динамика авиационных двигателей. Сб. статей, вып. 6. М.: Машиностроение, 1971. - С. 75-98.

189. Малинин Н.Н. Прочность турбомашин /Н.Н.Малинин. - М.: Машгиз, 1962. - 290 с.

190. A.Nurimbetov, A.Bekbayev, S.Orynbayev, M.Dzhamanbayev, M. Keikimanova. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research. // Applied Mechanics and Materials Vol. 736 (2015) pp 30-38, Switzerland Accepted: 17.12.2014.

191. Левин А.В. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин /А.В.Левин, К.Н.Боришанский, К.Консон. - Л.: Машиностроение, 1981. - 710 с.

192. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л.Бердичевский. - М.: 1983. - 448 с.

193. A. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Orynbayev, V.Baibutanov, I. Tumanov, M. Keikimanova. Optimization of Windmill's Layered Composite Blades to reduce Aerodynamic Noise and Use in Construction of "Green" Cities // International Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities, SPbUCEMF-2015/Procedia Engineering 117 (2015) 273 – 287.

194. Нуримбетов А.У., Бекбаев А.Б., Орынбаев С.А., Байбутанов Б.К. Оптимизация напряженного состояние слоистых композиционных лопаток с различными физико-механическими свойствами слоев в поле центробежных сил // Известия НАН РК. сер.физ.-мат., №1. – вып. 1. Алматы: 2015. – С. 20-31.

195. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В.Болотин, Ю.Н.Новичков - М.: 1980. - 375 с.

196. Екельчик В.С. Связанные изгибно-крутильные колебания анизотропных стержней из полимерных композитных материалов. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных для стержня из углепластика /В.С.Екельчик, А.А.Перрен, В.М.Рябов, Б.А.Ярцев // Механика композитных материалов. 1992. № 2. С. 232-238.

197. Зиновьев П.А Анизотропия диссипативных свойств волокнистых композитов. /П.А.Зиновьев, Ю.Н.Ермаков //Механика композитных материалов. 1985. № 5. С. 816-825.
198. Ионов А.В. Математические модели сложных демпфированных конструкций / А.В.Ионов //Материалы семинара "Борьба с вибрациями машин и установок", Л.: ЛДНТП. 1983. С. 23-28.
199. Капанья Р.К. Последние достижения в исследованиях слоистых балок и пластин. Часть I: Влияние сдвигов на устойчивость / Р.К.Капанья, С.Рачити // Аэрокосмическая техника. 1990. № 5. С. 43-57.
200. Капанья Р.К. Последние достижения в исследованиях слоистых балок и пластин. Часть II: Колебания и распространение волн / Р.К.Капанья, С.Рачити //Аэрокосмическая техника. 1990. № 5. С. 58-73.
201. Карпов А.В. Вынужденные колебания трехслойной пластины с несущим слоем с учетом рассеяния энергии колебаний в материале слоев /А.В. Карпов //Изв. вые. уч. заведений. Авиационная техника. 1966. № 1.
202. A.U.Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Orynbayev, M. Dzhamanbayev, M. Keikimanova. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research // 3rd International Conference on Recent Trends in Materials and Mechanical Engineering (ICRTMME 2015), January 15-16, 2015, Auckland, New Zealand.
203. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел /Ю.Н. Работнов. - М.: 1977. - 384 с.
204. Maekawa Z., Hamada H-, Gotoh A. Design concepts of hybrid composites with high damping and high strength properties/ Z.Maekawa, H.Hamada, A.Gotoh //37th International SAMPE Symposium. March 9-12. 1992. P. 100-114.
205. Mall S., Johnson W.S. Characterization of mode I and mixed mode failure of adhesive bonds between composite adherends /S. Mall, W.S. Johnson // Composite Materials: Testing and Design, 7th Conference. ASTM STP 893. Whitney J. M., Ed., American Society for Testing and Materials. 1986. P. 322-334.
206. Иванцова О.Н. Методы вычисления собственных частот и форм колебаний пластин и их асимптотика: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. /Иванцова

Ольга Николаевна. - Санкт-Петербург, 1998. - 122 с.

207. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates / J.N. Reddy // *J. of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. P. 745-752.

208. Reddy J.N. Geometrically nonlinear transient analysis of laminated composite plates / J.N. Reddy // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. P. 621-629.

209. Нусратуллин Э.М. Прочность композиционной лопадки компрессора газотурбинного двигателя: дис. на соискание ученой степени канд.тех.наук: 01.02.06 /Нусратуллин Эдурт Марсович. – Уфа, 2012. – 154 с.

210. Cho M.H. Aeroelastic Stability of Hingeless Rotor Blade in Hover Using Large Deflection Theory / M.H.Cho, I. Lee // *AIAA Journal*, 1994. Vol. 32. No. 7. - P. 1472-1477.

211. Eslimy-Isfahany S.H.R. Dynamic Response of Composite Beams with Application to Aircraft Wings / S.H.R. Eslimy-Isfahany, J.R. Banerjeet // *Journal of Aircraft*, 1997. Vol. 34. No. 6 -P. 785-791.

212. Friedmann P.P. Development of a Structural Optimization Capability for the Aeroelastic Tailoring of Composite Rotor Blades with Straight and Swept Tips /P.P. Friedmann, C.Venkatesan, K. Yuan // *AIAA-1992-4779*, 1992. P. 722-748.

213. Gandhi F. Influence of Balanced Rotor Anisotropy on Helicopter Aeromechanical Stability / F.Gandhi, B.Malovrh // *AIAA Journal*, 1999. Vol. 37. No. 10. - P. 1152-1160.

214. Ganguli R. Aeroelastic Optimization of a Helicopter Rotor with Composite Coupling / R.Ganguli, I.Chopra // *Journal of Aircraft*, 1995. Vol. 32. No. 6 P 1326-1334.

215. Jeon S.M. Aeroelastic Analysis of a Hingeless Rotor Blade in Forward Flight // *AIAA Journal*, 2000. Vol. 38. No. 5. P. 843-850.

216. Jeon S.M. Aeroelastic Response and Stability Analysis of Composite Rotor Blades in Forward Flight / S.M.Jeon, I.Lee // *Composites Part B: Engineering*, 2001. Vol. 32. No. 3.-P. 249-257.

217. Kim T. Nonlinear Large Amplitude Aeroelastic Behavior of Composite Rotor Blades / T.Kim, J.Dugundji // *AIAA Journal*, 1993. Vol. 31. No. 8. P. 1489-1497.

218. Lim I. Aeroelastic Analysis of Rotor Systems Using Trailing edge Flaps /I.Lim, I. Lee // Journal of Sound and Vibration, 2009. Vol. 321. P. 525-536.
219. Nagabhushanam J. Hingeless-Rotor Aeromechanical Stability in Axial and Forward Flight With Wake Dynamics / J.Nagabhushanam, G.H. Gaonkar // Journal of the American Helicopter Society, 1999. Vol. 44. P. 222-233.
220. Srinivas V. Formulation of a Comprehensive Aeroelastic Analysis for Tilt-Rotor Aircraft / V.Srinivas, I. Chopra //Journal of Aircraft, 1998. Vol. 35. No. 2 -P. 280-287.
221. Srinivas V. Aeroelastic Analysis of advanced Geometry Tiltrotor Aircraft /V.Srinivas, I.Chopra, M.W. Nixon // Journal of the American Helicopter Society, 1998. Vol. 43. - P. 212-221.
222. Dynamics Specialists Conference, Hilton Head, SC, Apr 21, 22, 1994, Technical Papers (A94-23572 06-39), Washington, DC, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1994, P. 402-415.
223. Gandhi F. Influence of Balanced Rotor Anisotropy on Helicopter Aeromechanical Stability / F.Gandhi, B.Malovrh //AIAA Journal, 1999. Vol. 37. No. 10. - P. 1152-1160.
224. Cesnik C.E.S. VABS: A New Concept for Composite Rotor Blade Cross-Sectional Modeling / C.E.S. Cesnik, D.H.Hodges // Journal of the American Helicopter Society, 1997. Vol. 42. P. 27-38.
225. Chattopadhyay A. Decomposition-Based Optimization Procedure for High-Speed Prop-Rotors Using Composite Tailoring /A.Chattopadhyay, T.R.Mc.Carthy, C.E. Seeley // Journal of Aircraft, 1995. Vol. 32. No. 5. P. 1026-1033.
226. Lu Y. Sensitivity Analysis of Discrete Periodic Systems with Applications to Helicopter Rotor Dynamics / Y.Lu, V.R.Murthy // AIAA Journal, 1992. Vol. 30. No. 8.- P. 1962-1969.
227. Bauchau O.A. Coupled Rotor-Fuselage Analysis with Finite Motions Using Component Mode Synthesis /O.A.Bauchau, J.Rodriguez, S.Y.Chen // Journal of the American Helicopter Society, 2004. Vol. 49. P. 201-211.
228. Shang X. Aeroelastic Stability of Composite Hingeless Rotors in Hover with

Finite-State Unsteady Aerodynamics/ X.Shang, D.H.Hodges, D.A. Peters // Journal of the American Helicopter Society, 1999. Vol. 44. P. 206-221.

229. Smith E.C. Aeroelastic Response, Loads, and Stability of a Composite Rotor in Forward Flight / E.C.Smith, I.Chopra // AIAA Journal, 1993. Vol. 31. No. 7. - P. 1265-1273.

230. Tracy A.L. Aeroelastic Stability Investigation of a Composite Hingeless Rotor in Hover / A.L.Tracy, I.Chopra // Journal of Aircraft, 1998. Vol. 35. No. 5 - P. 791-797.

231. Алексеев Н.В. Напряжения и деформация естественно закрученных стержней при кручении и сжатии / Н.В. Алексеев // Прочность конструкций, 1977, вып.2, с 106-113.

232. Карабан В.В. Разработка методов расчета собственных колебаний лопаток и рабочих колес турбомашин: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук: 01.02.06 / Карабан Владимир Владимирович. - М.: 1998. – 19 с.

233. Каримбаев Т.Д., Горшков Л.А. Исследование напряженного состояния лопаток осевых компрессоров. / В кн.: Тезисы докл. на Всесоюзн. Науч.-тех. Совещ. по проб. прочности двигателей. Ленинград, 1973.

234. Биргер И. А. Вариационные методы в строительной механике турбомашин //Тр. ЦИАМ,- 1969. - №323. - 28 с.

235. Каримбаев Т.Д., Нурымбетов А.У. Собственные частоты колебаний слоистого композиционного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: - 2016. - № 5. - с.46-57.

236. Каримбаев Т.Д., Нурымбетов А.У., Мыктыбеков Б. Напряженное состояние закрученных слоистых композиционных лопастей в поле центробежных сил // Матер. 6-й Московской Междунар. конф. «Теория и практика технологии производства изделий из композиционных материалов и новых металлических сплавов» (ТПКММ),-М: МГУ им. М.В.Ломоносова. - 2009. - С.123-129.

237. Нурымбетов А.У. Определение собственных частот колебаний армированных слоистых лопаток // Матер. Междунар. конф. по распространению упругих и упругопластических волн, посвященная 100-летию со дня рождения акаде-

мика, Героя Социалистического Труда Х.А. Рахматуллина. Бишкек: 2009.–с. 58-64

238. Нуримбетов А.У. Собственные частоты колебаний анизотропных многослойных лопаток и стержней с переменными физико-геометрическими параметрами // Тез. докл. первой междунар. конф. «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» («Deformation and Failure of Composite Materials and Structures» DFCMS-2014) 10-13 ноября 2014. - Москва - С. 27.

239. Нуримбетов А.У., Каримбаев Т.Д. Собственные частоты колебаний армированного слоистого стержня с переменными физико-геометрическими параметрами // Матер. Междунар. науч.-техн. конф. «Проблемы и перспективы развития двигателестроения» посвященная генеральному конструктору аэрокосмической техники академику Н.Д. Кузнецову 25-27 июня 2014 г. – г. Самара.

240. Нуримбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние естественно-закрученных слоистых анизотропных лопаток из армированных материалов //Тр. 13-ой Междунар. конф. «Авиация и космонавтика–2014», М.: -2014. – с.67-69.

241. Светлицкий В.А., Гуськов А.М. Автоколебания гибкого стержня в масляном слое // Изв. вузов. Машиностроение. - 1974. - №12. - С. 48-52.

242. Нуримбетов А.У. Математический модель деформирования нанокомпозиционных материалов и их применение для проектирования узлов и деталей энергетических установок //Матер. VI всерос. науч. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск: 2008 . – с. 269-271.

243. Нуримбетов А.У., Байшагиров Х.Ж. Кручение и растяжение закрученных слоистых лопастей компрессорной лопатки в поле центробежных сил // Матер. VI всерос. науч. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск: 2008 . – с. 275-277.

244. Нуримбетов А.У. Полупространственная задача кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения //Матер. 1-съезда математиков Казахстана, Шымкент, Ғылым. 1996. – с. 250-251

245. Нуримбетов А.У., Байшагиров Х.Ж. Напряженно-деформированное состояние лопаток из композиционного материала в поле центробежных сил // Известия НАН РК, сер.физ.-мат., №5(249). Алматы: 2006.- С. 32-36.

246. Байшагиров Х.Ж. Исследование напряженно-деформированного состояния упругих композиционных стержней и лопаток компрессора на основе двух-компонентного подхода : дис. ... канд. тех. наук : 01.02.04 /Байшагиров Хайрулла Жамбаевич. – Рига, 1984. - 178 с.

247. Нурымбетов А.У., Туреханова Г.И., Жанбосынов Р.С. Основные соотношения динамической упругости армированного слоистого стержня с переменными физико-геометрическими параметрами //Materiały X Między-narodowej naukowo-praktycznej konferencji «Naukowa przestrzeń Europy - 2014» Volume 34. Techniczne nauki.: Przemysł. Nauka i studia - str. 28-34.

248. Байшагиров Х. Ж., Ермаганбетова С.К. Собственные частоты колебаний композиционных лопастей и лопаток турбомашин // Технические науки - от теории к практике: сб. ст. по матер. LIV междунар. науч.-практ. конф. № 1(49). – Новосибирск: СибАК, 2016.

249. Нурымбетов А.У., Туреханова Г.И., Жанбосынов Р.С. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней при кручении и растяжении //Mater. IX mezinárodní vědecko – prakt. konf. «Moderní vymoženosti vědy – 2013». - Díl 73. Technické vědy: Praha. Publishing House «Education and Science» - str. 17-22.

250. Карабан В.В. Разработка методов расчета собственных колебаний лопаток и рабочих колес турбомашин: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.06 / Карабан Владимир Владимирович. - Москва, 2008. -186 с.

251. Нурымбетов А.У., Туреханова Г.И., Жанбосынов Р.С. Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими расчетами кручения, изгиба и растяжения естественно-закрученных стержней//Мат. за 9-а междунар. науч. прак. конф., «Новината за напреднали наука», - 2013. Том 57. Технологии. София.- с. 26-31.

252. Михайлов А. Л. Повышение надежности ГТД на основе компьютерных технологий проектирования и вибродиагностики повреждений лопаток методом эквивалентных масс: дис.....канд. тех. наук: 05.07.05 /Михайлов, Александр Леонидович. - Рыбинск , 2000. - 178 с.

253. Михайлов А.Л. Принципы проектирования и вибродиагностика деталей ГТД на основе математического моделирования объемного напряженно-деформированного состояния: дис.док. тех. наук: 05.07.05 //Михайлов Александр Леонидович.- Рыбинск, 2003. - 309 с.

254. Гаврилов С. Н. Усовершенствованная методика расчетов напряженно-деформированного состояния и частотных характеристик рабочих лопаток паровых турбин: дис. ... канд. тех. наук: 05.04.12./ Гаврилов Сергей Николаевич. - Санкт-Петербург, 2002. - 137 с.

255. Гаев А.В. Иерархическая последовательность моделей для исследования напряженного и вибрационного состояния рабочих лопаток паровых турбин: дис. ... канд. тех. наук: 01.02.06/Гаев Александр Валерьевич. - Санкт-Петербург, 2008. - 157 с.

256. Шуваев Н.В. Методика численного моделирования аэроупругого взаимодействия компрессорных лопаток газотурбинного двигателя с дозвуковым набегающим потоком воздуха: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.18 /Шуваев Николай Васильевич.- Пермь, 2014. - 165 с.

257. Федоров И.М. Численный анализ математических моделей динамической устойчивости и оптимизация лопаток турбомашин: дис. ... канд. тех. наук: 05.07.05 /Федоров Илья Михайлович. - Москва, 2008. - 183 с.

258. Нуримбетов А.У., Туреханова Г.И., Жанбосынов Р.С. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней при кручении и растяжении//Materiály IX mezinárodní vědecko - praktická konference «Moderní vymoženosti vědy – 2013». - Díl 73. Technické vědy: Praha. Publishing House «Education and Science» - s.17-23.

259. Кубышкин К.А., Амосов А.П, Кшнякин А.М. Оптимизация структуры армирования лопаток из композиционных материалов// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. сер. Физ.-мат. науки.- 1999. № 7. - с.146-150.

Приложение 1.

Автоматизированное проектирование раскрыя деталей произвольного поперечного сечения из слоистых композиционных материалов

Стержни из композиционных материалов могут изготавливаться из отдельных жгутов, слоев ленты или ткани. В этих случаях сечения стержня имеет слоистую регулярную структуру. В связи с этим для стержней постоянного и переменного сечения возникает специфическая для армированных стержней задача - задача укладки в сечении слоев постоянной толщины. Так как размеры сечений могут меняться вдоль длины стержня, то и число слоев в каждом сечении будет различным. В плоскости, содержащей ось стержня, отдельно слои представляются в виде лепестков. В связи с этим возникает технологическая задача раскрыя таких лепестков.

Предлагаемая программа РАС автоматического разбиения физически неоднородных составных областей произвольного очертания многостадийна. Она предполагает:

I. Определение граничных точек для исследуемой области.

II. Построение внутренних точек области так, чтобы нумерация узловых точек учитывала физическую неоднородность слоев и максимальная разность номеров была наименьшим.

I. Определение граничных точек для исследуемой области. Процесс определения граничных точек области состоит из одной процедуры. Исходные реперные точки на границе задаются вручную двумя основными опорными точками - началом и концом. Если граничные линии лежат не на одной прямой, то дополнительными точками задается число звеньев ломаной, на которое подразделяется граничная линия.

Дальнейшее построение координат внутренних слоев сечения полностью автоматизировано. Содержание программы РАС - построение координат слоев текущего сечения в дальнейшем описывается на примере сечения вида авиационного профиля.

II. Построение внутренних точек области. Исходными параметрами для установления координат отдельных слоев являются граничные координаты "спинки" x_j^c и "корытца" x_j^k ($j=1,2$), а также толщина монослоя t_c .

При проведении расчетов, на границе сечения известно множество точек разбиения для "спинки" $C_j (j=1,2,\dots,M)$ и для "корытца" $K_m (m=1,2,\dots,N)$, имеющих координаты $x_j^c, x_j^k, (j=1,2)$ соответственно и расположенных друг от друга, начиная с начала "спинки" и "корытца", на расстояниях, равных толщине t_c монослоя (рис. П1.1).

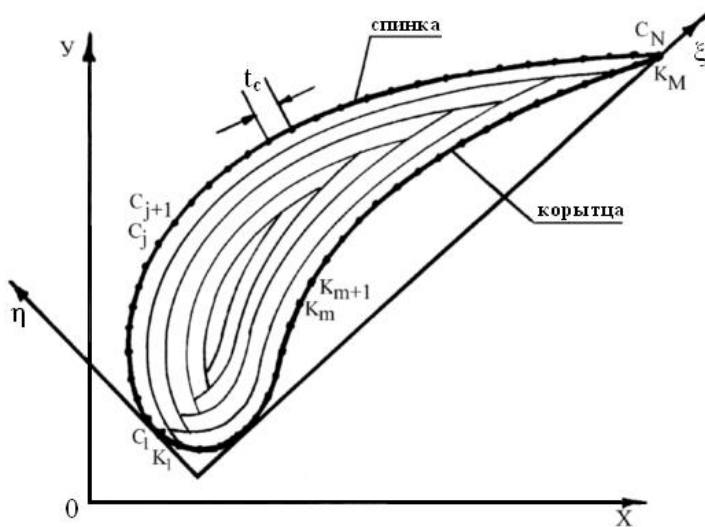


Рисунок П1.1 - Глобальная и местная система координат.

Дальнейшее построение удобно осуществлять в местной системе координат, у которой ось абсцисс ξ совпадает с линией, соединяющей середины отрезков C_1K_1 и C_MK_M начальных и конечных точек "спинки" и "корытца", т.е.

$$\begin{aligned} \xi_{H,j} &= 0.5(x_{1,j}^c + x_{1,j}^k), \quad (j=1,2) \\ \xi_{K,j} &= 0.5(x_{M,j}^c + x_{N,j}^k), \end{aligned} \quad (\text{П1.1})$$

Ось ординат $\xi_2 = \eta$ ортогональна оси $\xi_1 = \xi$ и проходит через начальную точку $\xi_{n,j}$ (рис.П1.2).

Точки C_j, K_m в местной системе будут иметь следующие координаты

$$\xi_{p,j} = r_{pn,j} v_{ij}; \quad r_{pn,j} = x_{pn,j} - \xi_{n,p}, \quad v_{11} = v_{22} = r_{kn,1} / L_{kn}; \quad (П1.2)$$

$$v_{21} = -v_{12} = r_{kn,2} / L_{kn}, \quad L_{kn}^2 = r_{k,1}^2 + r_{k,2}^2; \quad r_{kn,j} = \xi_{k,j} - \xi_{n,j}.$$

Здесь $r_{pn,j}$ - проекция на ось j расстояния между точками $x_{p,j}^\alpha$ и $\xi_{n,j}$, ($i,j=1,2$); $\alpha=c,k$; По одинаковым индексам j необходимо суммировать.

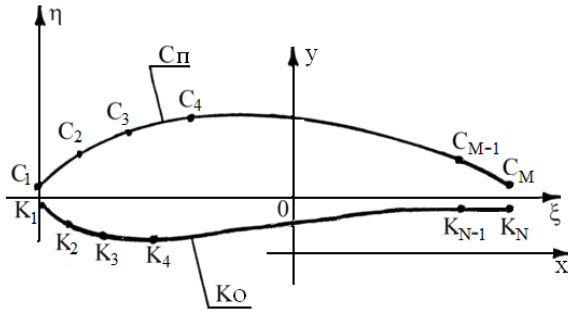


Рисунок П1.2. Сп - "спинка", Ко - "корытца"; x, y - глобальная система координат; M - количество точек на Сп (спинка), N - количество точек на Ко (корытца).

Максимальная толщина c_{max} сечения профиля определяет число слоев K_c в текущем сечении

$$K_c = \text{entier}(c_{max} / (2 \cdot t_c)) + 1. \quad (П1.3)$$

Слои прилегающие к "спинке" профиля (или к ее "корытцу"), могут пересекать линию "корытца" ("спинки"). Поэтому при проведении вычисления постоянно приходится сравнивать координаты линий, ограничивающих текущий слой и линий "корытца" или "спинки". Локальная система (ξ, η) выбрано так, что указанные сравнения ограничиваются лишь сравнением ординат линии текущего (расчетного) слоя и линий "спинки" или "корытца" профиля.

Вычисления координат точек, оформляющих внутренние слои, начинается со входной кромки (точка C_1) по линии, ограничивающей "спинку" профиля.

В точке C_1 к стороне C_1C_2 , уравнение которой

$$(\eta_2^c - \eta_1^c)\xi - (\xi_2^c - \xi_1^c)\eta = 0$$

восстанавливается перпендикуляр

$$(\eta_2^c - \eta_1^c)\eta - (\xi_2^c - \xi_1^c)\xi = 0. \quad (П1.4)$$

На расстоянии t_c от точки на прямой (П1.4) находится точка A с координатами

$$\begin{aligned}
 R &= \xi_{1,i+1}^c = \xi_1^c + t_c(\eta_2^c - \eta_1^c)/r_{21}, \\
 S &= \eta_{1,i+1}^c = \eta_1^c - t_c(\xi_2^c - \xi_1^c)/r_{21}, \\
 r_{21}^2 &= (\xi_2^c - \xi_1^c)^2 + (\eta_2^c - \eta_1^c)^2,
 \end{aligned}
 \tag{П1.5}$$

наиболее близкая к линии "корытце".

Точка $A(\xi_{1,i+1}^c, \eta_{1,i+1}^c)$ может находиться внутри или вне области, ограниченной линиями "спинки" и "корытца". Этот факт устанавливается сравнением ординаты $\eta_{1,i+1}^c$ с ординатой точки D "корытца"

$$T = \eta_j^k = \eta_j^k + (\xi_{1,i+1}^c - \xi_j^k)(\eta_{j+1}^k - \eta_j^k)/(\xi_{j+1}^k - \xi_j^k), \quad \xi_j^k \leq R \leq \xi_{j+1}^k. \tag{П1.6}$$

Если $T \leq S = \eta_{1,i+1}^c$, (случай а, рис. П1.3), то точка $A(R,S)$ может принадлежать строящемуся слою в отличие от случая $T > S = \eta_{1,i+1}^c$, (случай б, рис. П1.4). Эти случаи рассматриваются порознь.

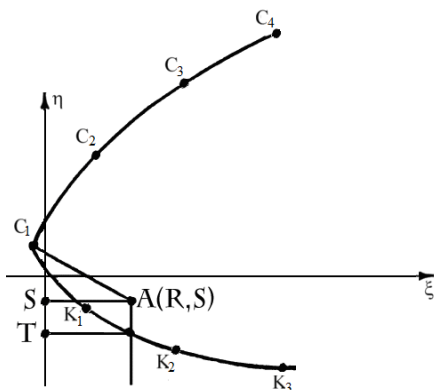


Рисунок П1.3. Построение первой точки нового слоя ($T \leq S$).

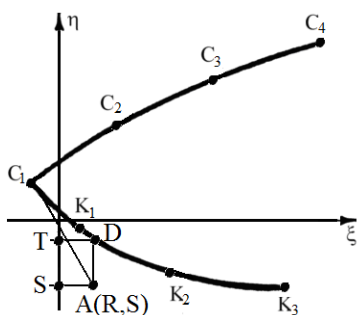


Рисунок П1.4. Случай, когда построенная точка находится вне области сечения ($T > S$).

Случай а. При $T \leq S = \eta_{1,i+1}^c$ вычисляется расстояние от точки $A(R,S)$ до прямой K_1K_2

$$d = \left| (\xi_2^k - \xi_1^k)(S - \eta_1^k) - (\eta_2^k - \eta_1^k)(R - \xi_1^k) \right| / r_{21}^k, \quad r_{21}^k = [(\xi_2^k - \xi_1^k)^2 + (\eta_2^k - \eta_1^k)^2]^{0.5}.$$

Если $d \geq t_c$, то точка A принимается за первую точку C_1^{i+1} строящегося слоя. В противном случае ($d < t_c$) через точку A проводится прямая AA' параллельная стороне C_1C_2

$$(\eta_2^c - \eta_1^c)(\xi - R) - (\xi_2^c - \xi_1^c)(\eta - S) = 0.$$

В точке K_1 восстанавливается перпендикуляр к прямой K_1K_2

$$(\xi - \xi_1^k)(\eta_2^k - \eta_1^k) + (\eta - \eta_1^k)(\xi_2^k - \xi_1^k) = 0$$

и на нем на расстоянии t_c от точки K_1 строится точка D с координатами

$$\begin{aligned} R &= \xi_{1,i+1}^k = \xi_{1,i}^k - t_c(\eta_2^k - \eta_1^k) / r_{21}^k, \\ S &= \eta_{1,i+1}^k = \eta_{1,i}^k + t_c(\xi_2^k - \xi_1^k) / r_{21}^k, \quad r_{21}^k = [(\xi_2^k - \xi_1^k)^2 + (\eta_2^k - \eta_1^k)^2]^{0.5}. \end{aligned} \quad (\text{П1.7})$$

Через точку D проводится прямая DD' параллельная прямой K_1K_2

$$(\xi - \xi_{1,i+1}^k) / (\xi_2^k - \xi_1^k) - (\eta - \eta_{1,i+1}^k) / (\eta_2^k - \eta_1^k) = 0.$$

Точка пересечения прямых AA' и DD' принимается за искомую первую точку слоев

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{1,i+1}^c &= \xi_{1,i+1}^k = (\eta_{1,i+1}^c - \eta_{1,i+1}^k + \xi_{1,i+1}^c \rho^c - \xi_{1,i+1}^k \rho^k) / (\rho^c - \rho^k), \\ \tilde{\eta}_{1,i+1}^c &= \eta_{1,i+1}^k = \eta_1^c + \rho^c (\tilde{\xi}_{1,i+1}^c - \xi_{1,i+1}^c), \\ \rho^c &= (\eta_2^c - \eta_1^c) / (\xi_2^c - \xi_1^c), \quad \rho^k = (\eta_2^k - \eta_1^k) / (\xi_2^k - \xi_1^k), \end{aligned} \quad (\text{П1.8})$$

прилегающих к "спинке" и "корытцу" соответственно (рис.5).

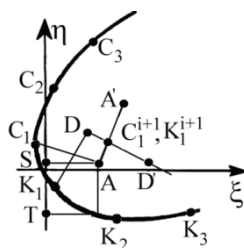


Рисунок П1.5 - Первая точка новых слоев, прилегающих к Сп и Ко ($T \leq S$).

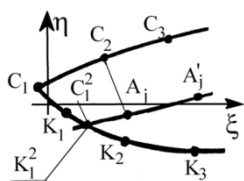


Рисунок П1.6 - Первая точка новых слоев, прилегающих к Сп и Ко ($T > S$).

Следует заметить, что точка (П1.8) принимается за точку K_j^{i+1} , если $d \geq t_c$. В противном случае за точку K_j^{i+1} принимается точка (7) $A(R,S)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае $T \leq S$ вычислены координаты точек C_j^{i+1}, K_j^{i+1} .

Случай б. При $T > S$ точка $A(\xi_{j,i+1}^c, \eta_{j,i+1}^c)$ не является внутренней точкой сечения стержня. В этом случае последовательно перебираются точки "спинки" C и в каждой из них восстанавливается перпендикуляр к прямой $(C_{j-1}C_j)$

$$(\xi_j^c - \xi_{j-1}^c)(\eta - \eta_j^c) - (\eta_j^c - \eta_{j-1}^c)(\xi_j^c - \xi_{j-1}^c) = 0,$$

на котором откладывается отрезок длиной t_c и находится точка

$$\begin{aligned} R &= \xi_{j,i+1}^c = \xi_j^c - t_c(\eta_j^c - \eta_{j-1}^c)/r_{j,j-1}, \\ S &= \eta_{j,i+1}^c = \eta_j^c + t_c(\xi_j^c - \xi_{j-1}^c)/r_{j,j-1}, \\ r_{j,j-1}^2 &= (\xi_j^c - \xi_{j-1}^c)^2 + (\eta_j^c - \eta_{j-1}^c)^2. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

После нахождения точек $A_j(R,S)$, по формуле (П1.5), в которой точка A заменяется на точку A_j , вычисляется ордината η_j^k , лежащей на корытце точки с абсциссой, равной ξ_j^c . Путем сравнения S из (П1.9) и η_j^k устанавливается принадлежность точки A_j области сечения профиля ($S \leq \eta_j^k$). Если $S > \eta_j^k$ то, рассматривается следующий отрезок C_jC_{j-1} , "спинки". Это продолжается до тех пор пока не найдется точка A_j , принадлежащая сечению стержня, или не переберутся все точки "корытца". В последнем случае счет прекращается из-за того, что точки "корытца" лежат на расстоянии, меньшем толщины слоя. Если точка A_j попала во внутрь сечения профиля ($S \leq \eta_j^k$), то находится точка пересечения D прямой $A_jA'_j$ параллельной C_jC_{j+1}

$$(\xi - R)(\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) - (\eta - S)(\xi_{j+1}^c - \xi_j^c) = 0,$$

и с отрезком K_jK_{j+1} "корытца" (рис.П1.6)

$$\begin{aligned}
\xi_{j,i+1}^c &= \xi_{m,i+1}^k = (\eta_m^k - \eta_j^c + \rho_j^c \xi_j^c - \rho_m^k \xi_m^k) / (\rho_j^c - \rho_m^k), \\
\eta_{j,i+1}^c &= \eta_{m,i+1}^k = \eta_j^c + \rho_j^c (\xi_{j,i+1}^c - \xi_j^c), \\
\rho_m^k &= (\eta_{m+1}^k - \eta_m^k) / (\xi_{m+1}^k - \xi_m^k), \quad \rho_j^c = (\eta_{j,i+1}^c - \eta_j^c) / (\xi_{j,i+1}^c - \xi_j^c).
\end{aligned}
\tag{П1.10}$$

Точка D принимается за первую точку, строящегося у "спинки" C_j и у корытца K_m слоя. Точке C_j придается номер j , если

$$\xi_{j,i+1}^c - \xi_j^c \leq \xi_{j+1}^c - \xi_{j,i+1}^c$$

и $j+1$ в противном случае. Аналогично, точке K_m придается номер m , если

$$\xi_{m,i+1}^k - \xi_m^k \leq \xi_{m+1}^k - \xi_{m,i+1}^k$$

и $m+1$ в противном случае (рис. П1.7).

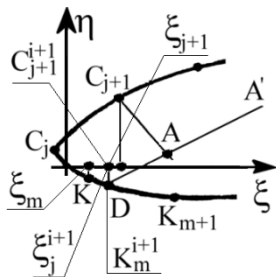


Рисунок П1.7 - Координату точки C_{j+1}^{i+1} придается номер $j+1$ для начала нового слоя Сп, для K_m^{i+1} - m .

Описанная процедура используется при построении первой точки вновь строящегося у "спинки" и "корытца" слоя.

Построение слоя у "спинки". Пусть предварительно построена точка $C_j^{i+1}(\xi_{j,i+1}^c, \eta_{j,i+1}^c)$ и следует найти следующую точку C_{j+1}^{i+1} нового слоя. С этой целью рассматривается угол $\beta = \angle C_j^i C_{j+1}^i C_j^{i+1}$ треугольника $C_j^i C_{j+1}^i C_j^{i+1}$ с известными вершинами. Нетрудно определить

$$\begin{aligned}
\cos \beta &= [\rho_1 - \rho_2 - (\xi_{j,i+1}^c - \xi_{j+1}^c)^2 - (\eta_{j,i+1}^c - \eta_{j+1}^c)^2] / \sqrt{\rho_1 \rho_2}, \\
\rho_1 &= |C_j^{i+1} C_j^i|, \quad \rho_2 = |C_{j+1}^i C_j^i|.
\end{aligned}$$

Угол β характеризует степень отставания или опережения точки C_j^{i+1} относительно C_j^i (рис. П1.8).

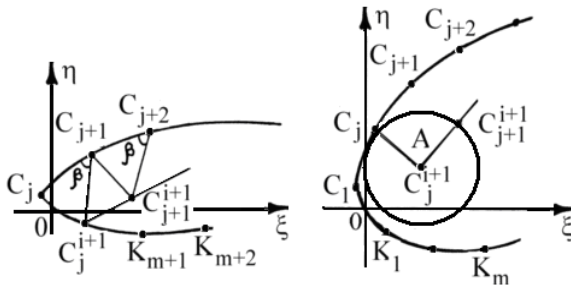


Рисунок П1.8 - Степень отставания или опережения точки C_j^{i+1} относительно C_j .

Случай $T = \cos\beta \leq 0.2$. Около точки C_j^{i+1} , как около центра строится окружность

$$(\xi_j^c + \xi_{j,i+1}^c)^2 + (\eta_j^c + \eta_{j,i+1}^c)^2 = t_c^2 \quad (\text{П1.11})$$

радиусом t_c . В точке C_j восстанавливается к прямой $C_j C_{j+1}$ перпендикуляр и на расстоянии t_c от точки C_j на перпендикуляре фиксируется точка $A_j(R_j, S_j)$

$$\begin{aligned} R_j &= \xi_{j,i+1}^c = \xi_j^c + t_c(\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) / r_{12}, \\ S_j &= \eta_{j,i+1}^c = \eta_j^c - t_c(\xi_{j+1}^c - \xi_j^c) / r_{12}, \\ r_{12}^2 &= (\xi_{j+1}^c - \xi_j^c)^2 + (\eta_{j+1}^c - \eta_j^c)^2. \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Через точку $A_j(R_j, S_j)$ проводится прямая, параллельная отрезку $C_j C_{j+1}$

$$(\eta - S_j)(\xi_{j+1}^c - \xi_j^c) - (\xi - R_j)(\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) = 0. \quad (\text{П1.13})$$

Пересечение прямой (П1.13) с окружностью (П1.11) определяет координаты искомой точки C_{j+1}^{i+1} (рис. П1.8)

$$\begin{aligned} \xi_{j+1,i+1}^c &= \xi_j^c + (\sqrt{(1 + \rho_j^2)t_c^2 - \xi - \rho_j \xi}) / (1 + \rho_j^2), \\ \rho_j &= (\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) / (\xi_{j+1}^c - \xi_j^c), \quad \xi = S_j - \eta_{j,i+1}^c + \rho_j(\xi_{j,i+1}^c - R_j), \\ \eta_{j+1,i+1}^c &= \eta_j^c + \rho_j(\xi_{j+1,i+1}^c - \xi_{j,i+1}^c) + \xi, \end{aligned} \quad (\text{П1.14})$$

Если абсцисса точки C_{j+1}^{i+1} такова, что $\xi_{j+1,i+1}^c \leq \xi_j^c$, т.е. если вновь построенная точка C_{j+1}^{i+1} по абсциссе, от рассматриваемого участка $C_j C_{j+1}$ строится точка C_{j+2}^{i+1} . После построения точки C_{j+1}^{i+1} сразу на линии "корытце" по формуле (1.5), в

которой точка A , заменена на C_{j+1}^{i+1} находится ордината $\tilde{\eta}_{j+1}^k$ точки, имеющей абсциссу $\xi_{j+1,i+1}^c$. Если $\eta_{j+1,i+1}^c > \tilde{\eta}_{j+1}^k$, то точка C_{j+1}^{i+1} принадлежит строящему слою. В этом случае координаты новой точки вычисляются по формуле (П1.10). В противном случае ($\eta_{j+1,i+1}^c < \tilde{\eta}_{j+1}^k$) отыскиваются координаты точки пересечения прямой $C_j C_{j+1}^{i+1}$ с прямой $K_j K_{j+1}$. Точка пересечения будет иметь координаты

$$\tilde{\xi}_{j+1,i+1}^c = \xi_{m,i+1}^k (\eta_m^k - \eta_{j,i+1}^c - \rho^k \xi_m^k) / (\rho^c - \rho^k), \quad (\text{П1.15})$$

$$\tilde{\eta}_{j+1,i+1}^c = \eta_{m,i+1}^k = \eta_{j,i+1}^c + \rho^k (\tilde{\xi}_{j+1,i+1}^c - \xi_{j,i+1}^c),$$

$$\rho^c = (\eta_{j+1,i+1}^c - \eta_{j,i+1}^c) / (\xi_{j+1,i+1}^c - \xi_{j,i+1}^c), \quad \rho^k = (\eta_{m+1}^k - \eta_m^k) / (\xi_{m+1}^k - \xi_m^k).$$

Точка $\tilde{C}_{j+1}^{i+1}(\tilde{\xi}_{j+1,i+1}^c, \tilde{\eta}_{j+1,i+1}^c)$ и совпадающая с ней точка $K_m^{i+1}(\xi_{m,i+1}^k, \eta_{m,i+1}^k)$ принимается за последнюю точку строящихся около "спинки" и "корытца" линий. При этом точке C_{j+1}^{i+1} придается номер j , если

$$\tilde{\xi}_{j+1,i+1}^c - \xi_{j,i+1}^c \leq \xi_{j+1,i+1}^c - \tilde{\xi}_{j+1,i+1}^c$$

и $j+1$ в противном случае. Аналогично, точке K_m^{i+1} придается номер m , если

$$\xi_{m,i+1}^k - \xi_m^k \leq \xi_{m+1}^k - \xi_{m,i+1}^k$$

Случай $\cos\beta > 0.2$. Проверяется удаленность точки C_j^{i+1} от прямой $C_j C_{j+1}$, которая определяется расстоянием

$$d^o = \left| (\xi_{j+1}^c - \xi_j^c)(\eta_{j,i+1}^c - \eta_j^c) - (\eta_{j+1}^c - \eta_j^c)(\xi_{j,i+1}^c - \xi_j^c) \right| / r_{21},$$

$$r_{21}^2 = (\xi_{j+1}^c - \xi_j^c)^2 + (\eta_{j+1}^c - \eta_j^c)^2.$$

Если расстояние $d^o < t_c$, то отыскивается пересечение прямой $C_{j-1}^{i+1} C_j^{i+1}$ и прямой параллельной отрезку $C_j C_{j+1}$ и отстоящей от нее на расстояние t_c . Уравнение последней прямой определяется выражением

$$\eta - \eta_{j+1}^c - \rho(\xi - \xi_{j+1}^c) = 0, \quad \rho = (\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) / (\xi_{j+1}^c - \xi_j^c),$$

$$\tilde{\xi}_{j+1}^c = \xi_{j+1}^c - t_c(\eta_{j+1}^c - \eta_j^c) / r_{21}, \quad \tilde{\eta}_{j+1}^c = \eta_{j+1}^c + t_c(\xi_{j+1}^c - \xi_j^c) / r_{21}.$$

Координаты точки пересечения указанных прямых находятся из равенств

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{j,i+1}^c &= (\eta_{j,i+1}^c - \tilde{\eta}_{j+1}^c + \rho \tilde{\xi}_{j+1}^c - \gamma \xi_{j,i+1}^c) / (\rho - \gamma), \\ \eta_{j,i+1}^c &= \eta_{j,i+1}^c + \gamma (\tilde{\xi}_{j,i+1}^c - \xi_{j,i+1}^c), \quad \gamma = (\eta_{j,i+1}^c - \eta_{j-1,i+1}^c) / (\xi_{j,i+1}^c - \xi_{j-1,i+1}^c),\end{aligned}\quad (\text{П1.16})$$

в которых ρ по прежнему находится из (П1.14). После проведенного анализа точка $C_j^{i+1}(\xi_{j,i+1}^c, \eta_{j,i+1}^c)$ и вместо нее в дальнейшем участвует точка $C_j^{i+1}(\tilde{\xi}_{j,i+1}^c, \tilde{\eta}_{j,i+1}^c)$ из (П1.16) с измененными координатами.

Если расстояние $\overset{o}{d} \geq t_c$, то никакие действия не производятся. В любом из этих случаев происходит уточнение номера построенной точки и дальнейшие операции производятся относительно следующей по порядку $C_{j+1}C_{j+2}$ ломаной, ограничивающей "спинку" до тех пор, пока не будут просмотрены все участки ломаной линии, представляющих линию "спинки".

Слой у корытца" сечения профиля. Ранее (соотношения (П1.7), (П1.8), (П1.10)) были найдены координаты первой точки K_m^{i+1} строящегося у "корытца" слоя. Только в случае, определяемом равенствами (П1.10), точка K_m^{i+1} лежит на линии "корытца", а не на расстоянии t_c от нее. В этом случае проверяется удаленность точки K_m^{i+1} от прямой $K_m K_{m+1}$. При этом одним из неперемных условия должно быть $\xi_m^k \leq \xi_{m+1,i+1}^k \leq \xi_{m+1}^k$.

Если расстояние

$$\begin{aligned}d &= \left| \xi_m^k - \xi_{m-1}^k (\eta_{m,j+1}^k - \eta_m^k) - (\eta_m^k - \eta_{m-1}^k) (\xi_{m,j+1}^k - \xi_m^k) \right| / r_{m,m-1}, \\ r_{m,m-1}^2 &= (\xi_m^k - \xi_{m-1}^k)^2 + (\eta_m^k - \eta_{m-1}^k)^2,\end{aligned}\quad (\text{П1.17})$$

окажется меньше t_c толщины монослоя, то рассматривается следующая точка C_{j+1}^{i+1} , координатам которой придается K_{m+1}^{i+1} . Если расстояние (П1.17) превысит значение t_c , то отыскивается пересечение прямой $K_m^{i+1} K_{m+1}^{i+1}$ с прямой, параллельной стороне $K_m K_{m+1}$ и отстоящей от нее на расстоянии t_c (рис.П1.9). Координаты указанной точки находятся из равенств

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k &= (\eta_{m+1}^k - S - \xi_{m+1,i+1}^k \rho + R \rho^k) / (\rho^k - \rho), \\ \tilde{\eta}_{m+1,i+1}^k &= \eta_{m+1,i+1}^k + \rho (\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k - \xi_{m+1,i+1}^k),\end{aligned}\quad (\text{П1.18})$$

где

$$\begin{aligned}\rho &= (\eta_{m+1,i+1}^k - \eta_{m,i+1}^k) / (\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k - \xi_{m+1,i+1}^k), \quad \rho^k = (\eta_{m+1}^k - \eta_m^k) / (\xi_{m+1}^k - \xi_m^k), \\ R &= \xi_m^k + t_c (\eta_{m+1}^k - \eta_m^k) / r_{km}, \\ S &= \eta_m^k - t_c (\xi_{m+1}^k - \xi_m^k) / r_{km}, \quad r_{km}^2 = (\xi_{m+1}^k - \xi_m^k)^2 + (\eta_{m+1}^k - \eta_m^k)^2.\end{aligned}$$

Далее сравнивается абсцисса точки $\tilde{K}_{m+1}^{i+1}(\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k, \tilde{\eta}_{m+1,i+1}^k)$ с абсциссами точек K_m^{i+1} и K_{m+1}^{i+1} . Если $\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k - \xi_m^k \leq \xi_{m+1,i+1}^k - \tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k$, то точке K_m^{i+1} придается координаты $\tilde{K}_{m+1}^{i+1}(\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k, \tilde{\eta}_{m+1,i+1}^k)$. В противном случае точка K_m^{i+1} будет иметь координаты (П1.18). Одновременно к точке K_m^{i+1} подтягивается точка C_{j-1}^{i+1} .

Если

$\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k - \xi_{j,i+1}^c \leq \xi_{j+1,i+1}^c - \tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k$, то $C_j^{i+1} = \tilde{K}(\tilde{\xi}_{m+1,i+1}^k, \tilde{\eta}_{m+1,i+1}^k)$, в противном случае $C_{j+1}^{i+1} = \tilde{K}_{m+1}^{i+1}$.

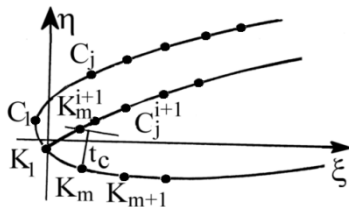


Рисунок П1.9 - Первая точка K_m^{i+1} нового слоя "корытца"

Таким образом, строится в рассмотренных случаях точка K_m^{i+1} удаленная от линии "корытца" на расстоянии t_c и являющаяся первой. Если ранее была установлена точка K_m^{i+1} , то точка K_{m+1}^{i+1} строится также как и при построении слоя у "спинки". После того, как координаты новой точки K_{m+1}^{i+1} до соответствующего по абсциссе участка нового слоя, построенного у "спинки". Также как у входной кромки оформляется точка пересечения ломанных $C_j C_{j+1}$ и $K_m K_{m+1}$ у входной кромки. Тем самым, завершается построение прилегающих к "спинке" и "корыт-

цу" слоев.

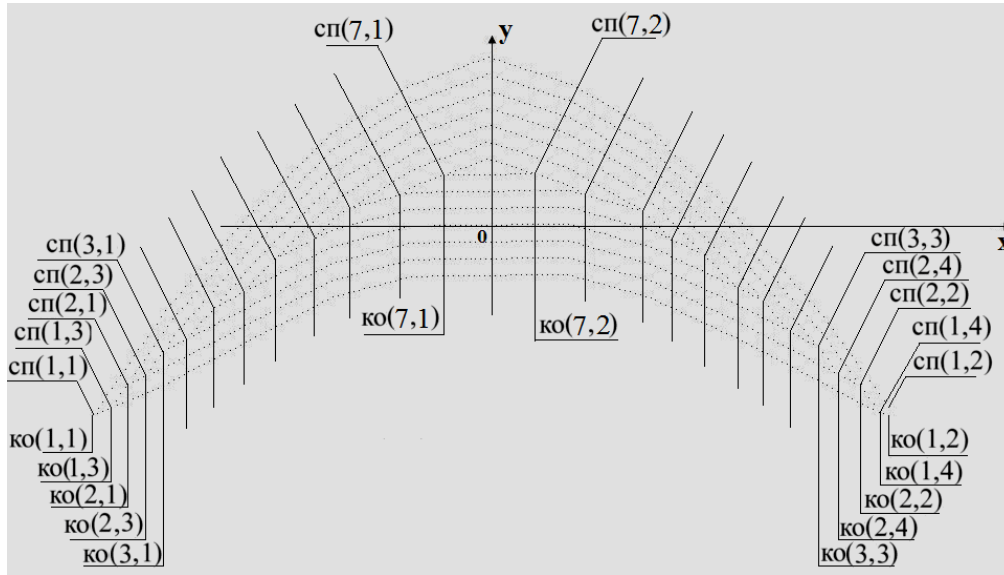


Рисунок П1.10 - Номера точки начала и конца слоев "спинки" и "корытца". $Сп(i,1)$, $Кo,1)$, $(Сп(i,2), Кo(i,2))$ – номер точки начало (конца) i -го слоя "спинки" и "корытца" соответственно; $Сп(i,3)$, $Кo(i,3)$, $(Сп(i,4), Кo(i,4))$ – номер точки пересечения начало (конца) $i+1$ -го слоя "спинки" i -ым слоем "корытца" для "спинки" и "корытца" соответственно.

После построения множества точек C_j и K_m , окаймляющую внутреннюю поверхность нового слоя у "спинки" и "корытца", соответственно, их координаты являются исходными для установления координат следующего слоя. Это продолжается до тех пор, пока не будут найдены координаты всех возможных слоев K_C в рассматриваемом сечении профиля. После построения слоя уточняются координаты пересечения нового слоя со старым слоем "корытца", а также начало и конец каждого слоя "спинки" и "корытца" (рис. П1.10).

Здесь необходимо отметить процесс построения начала и конца каждого слоя "спинки" ("корытца") со старой линией "корытца" ("спинки") и определяются независимо друг от друга.

Такой порядок нумерации, во-первых, позволяет свести разность номеров узловых точек к минимуму. Например, для эллипса и авиационного профиля, максимальное значение разности узловых номеров, среди 1300 и 1678 точек, было 4 и 6, а для ромба с 1260 точками составляло 2. Следовательно, при решении различных задач МКЭ, автоматически получается оптимальная ширина ленты матрицы

жесткости системы [51, 63]. Координаты и номера построенных точек сохраняются в памяти ЭВМ и при необходимости можно получить их изображение с помощью отдельной процедуры (рис.11).

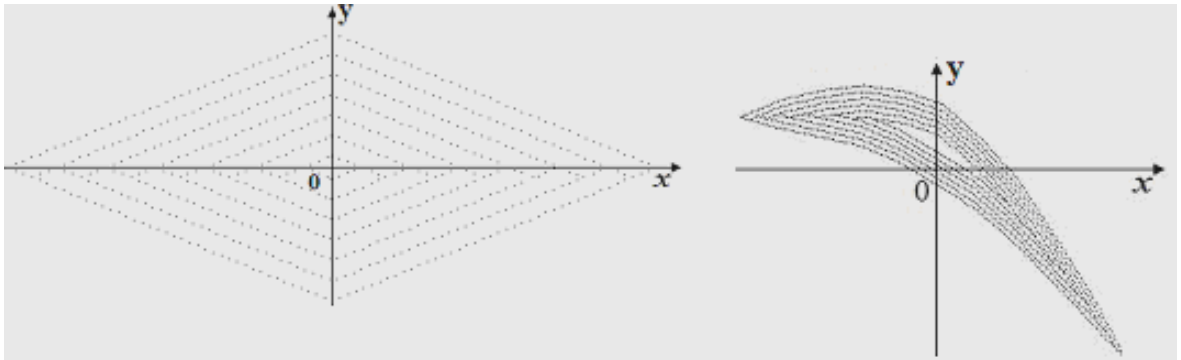
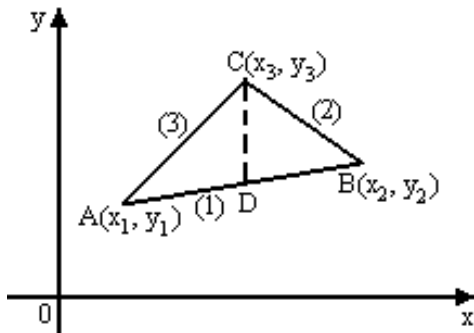


Рисунок П1.11. Машинный раскрой по точкам сечения ромбовидной формы и авиационного профиля слоистого стержня

Приложение 2. Вывод формулы (1.5.16).



$$y = d_1x + b_1 \sim (1),$$

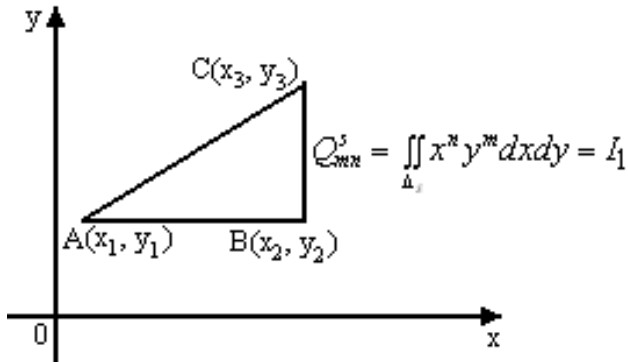
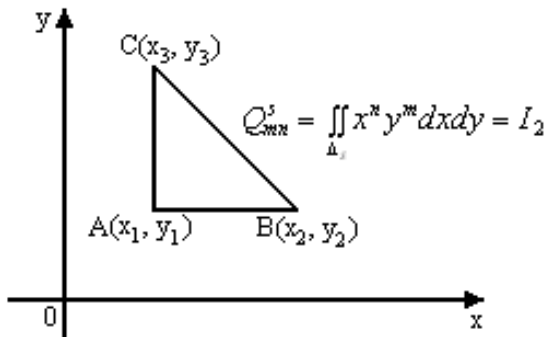
$$y = d_2x + b_2 \sim (2),$$

$$y = d_3x + b_3 \sim (3).$$

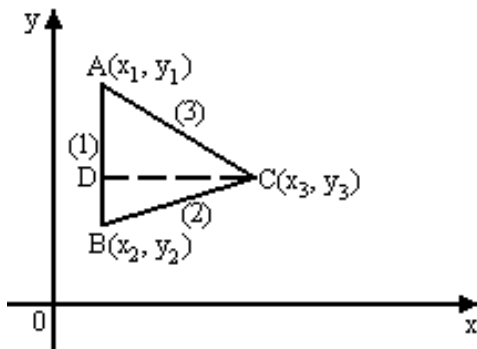
$d_j = (y_{j+1} - y_j) / (x_{j+1} - x_j)$, $b_j = y_j - d_j x_j$ ($j = 1, 2, 3$), если $j+1=4$, то $j+1=1$.

$$\iint_{\Delta_s} x^n y^m dx dy = \int_A^D x^n dx \int_{(1)}^{(3)} y^m dy + \int_D^B x^n dx \int_{(1)}^{(2)} y^m dy = I_1 + I_2;$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^{x_3} x^n \frac{1}{m+1} [(d_3x + b_3)^{m+1} - (d_3x + b_1)^{m+1}] dx = \\ &= \frac{1}{m+1} \int_{x_1}^{x_3} x^n \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k d_3^k b_3^{m+1-k} x^k - \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k d_1^k b_1^{m+1-k} x^k \right) dx = \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (d_3^k b_3^{m+1-k} - d_1^k b_1^{m+1-k}) \int_{x_1}^{x_3} x^{n+k} dx \right) = \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{n+k+1} C_{m+1}^k (d_3^k b_3^{m+1-k} - d_1^k b_1^{m+1-k}) (x_3^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}), \\ I_2 &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{n+k+1} C_{m+1}^k (d_2^k b_2^{m+1-k} - d_1^k b_1^{m+1-k}) (x_2^{n+k+1} - x_1^{n+k+1}). \\ Q_{mn}^s &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$



Вывод формулы (1.5.18).



$$x = y/d_1 + \alpha_1 \sim (1),$$

$$x = y/d_2 + \alpha_2 \sim (2),$$

$$x = y/d_3 + \alpha_3 \sim (3).$$

$$\alpha_j = x_j - y_j/d_j \quad (j=1,2,3).$$

$$Q_{mn}^s = \iint_{\Delta_s} x^n y^m dx dy = \int_{(1)}^{(3)} x^n dx \int_A^D y^m dy + \int_{(1)}^{(2)} x^n dx \int_B^D y^m dy.$$

Приложение 3.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016662153

«Решения задачи кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов»

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU)**

Авторы: **Нуримбетов Алибек Усипбаевич (KZ),
Дудченко Александр Александрович (RU)**

Заявка № **2016619560**Дата поступления **09 сентября 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **31 октября 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев

Приложение 4. Определения центра изгиба произвольного слоистого сечения

В главе 1 (см. п. 1.5.3) приведены соотношения, позволяющие вычислить ряд геометрических характеристик и центр тяжести поперечного сечения слоистой ортотропной лопатки (см. рис. П4.1).

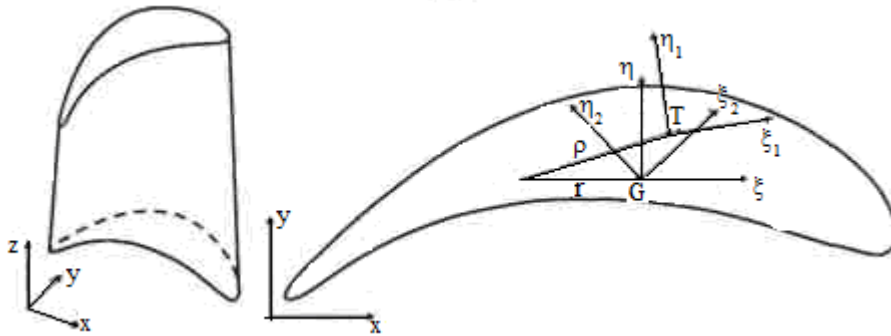


Рисунок П4.1 - Перо естественно закрученной лопатки и его поперечное сечение

Если относительно местной системы координат (ξ, η) интегралы по площади F сечения вида

$$S_{\xi} = \int_F \eta dF, \quad S_{\eta} = \int_F \xi dF, \quad (\text{П4.1})$$

(статические моменты) обращаются в 0, оси (ξ_1, η_1) являются центральными; на их пересечении лежит центр тяжести сечения G . Оси (ξ_2, η_2) относительно которых равен нулю центробежный момент инерции

$$I_{\xi\eta} = \int_F \xi\eta dF, \quad (\text{П4.2})$$

а осевые моменты инерции

$$I_{\xi} = \int_F \eta^2 dF, \quad I_{\eta} = \int_F \xi^2 dF, \quad (\text{П4.3})$$

принимают экстремальные значения, являются главными осями. Угол поворота α главных осей относительно осей некоторой системы координат (ξ, η) определяется из соотношения [125]

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{\xi\eta}}{I_{\eta} - I_{\xi}} \quad (\text{П4.4})$$

Таким образом, при любом положении точки начала координат в сечении

возможно приведение осей координат к главным.

Центр изгиба (жесткости) T - точка, относительно которой момент касательных сил при поперечном изгибе равен нулю (рис. П4.1) [125, 233]. Если равнодействующая внешних сил проходит через центр изгиба сечения, при деформации стержня оно не испытывает закрутки. Координаты (ξ_{uz}, η_{uz}) центра изгиба в системе главных осей сечения определяются по известным зависимостям [49, 125]:

$$\xi_{uz} = \frac{I_{\varphi\xi}}{I_{\xi}}, \quad \eta_{uz} = \frac{I_{\varphi\eta}}{I_{\eta}}, \quad I_{\varphi\xi} = \int_F \varphi\eta dF, \quad I_{\varphi\eta} = \int_F \varphi\xi dF, \quad (\text{П4.5})$$

Здесь $I_{\varphi\xi}$, $I_{\varphi\eta}$ - центробежные бимоменты инерции, $\varphi(\xi, \eta)$ - функция депланации Сен-Венана [4] (функция кручения [3]). Она служит решением уравнения Лапласа (см. глава 3)

$$\nabla^2 \varphi(\xi, \eta) = 0 \quad (\text{П4.6})$$

и удовлетворяет для многослойного контура граничному условию на внешних и внутренних контурах для производной по нормали $\varphi'_{,n}$ [125]:

$$\varphi'_{,n} = \eta \cos(n, \xi) - \xi \cos(n, \eta). \quad (\text{П4.7})$$

Кроме того, функция депланации выбирается так, что [4]

$$\int_F \varphi dF = 0. \quad (\text{П4.8})$$

Для численного нахождения перечисленных выше особых точек поперечного сечения слоистой лопатки в настоящей работе, в отличие от [234], [125], используется специально составленная программа на Фортане, где решается задача о кручении методом конечных элементов для слоистых произвольных сечений (см. глава 3). В рамках этого подхода с использованием стандартного алгоритма (аналогично триангуляции Делоне [235]) на плоском слоистом сечении строится по слойно сетка треугольных элементов (см рис. П4.2).

После построения сетки величины (П4.1)-(П4.4) вычисляется непосредственно суммированием по всем элементам слоя соответствующих подинтегральных выражений. Для нахождения координат центра изгиба и центробежных бимоментов (П4.5), уравнение Лапласа (П4.6) для слоистого ортотропного сечения решается МКЭ (см. глава 3), что позволяет найти значения функции депланации в уз-

лах плоской сетки конечных элементов в сечении лопатки и, после нормировки согласно условию (П4.8), координаты центра изгиба (П4.5).

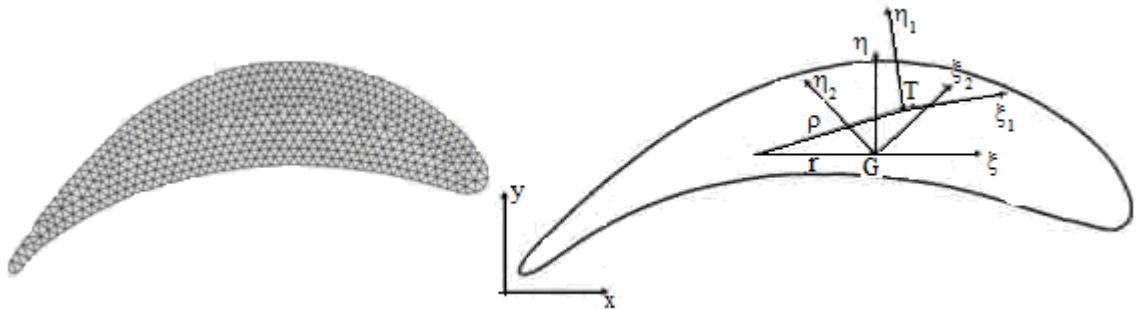


Рисунок П4.2 - Сетка треугольных конечных элементов в сечении слоистой лопатки и расположение центров тяжести G и изгиба T этого сечения

Проверка реализованного алгоритма нахождения центра изгиба обеспечивается выполнением условия (П4.8) и высокой точностью вычисления величины (П4.1)-(П4.4) с помощью специально созданной программой на фортране (см.п. 1.5.3)

Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности реализованного алгоритма нахождения центра изгиба (погрешность не превышает 3%). Упрощенная формула [125], построенная на представлении лопатки как тонкого листового профиля, проходящего через средние линии ее сечений, существенно менее пригодна для вычисления координат центра изгиба, так как полученные с ее помощью результаты разнятся с рассчитанными по методам конечных элементов на 10-15%.



МИНИСТЕРСТВО ЮСТИЦИИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

УДОСТОВЕРЕНИЕ АВТОРА

№ 89798

Настоящим удостоверяется, что Нуримбетов Алибек Усипбаевич (KZ)
и Каримбаев Тельман Джамалдинович (RU); Орынбаев Сейтжан
Ауесжанович (KZ); Джунисбеков Мухтар Шардарбекович (KZ)

является(ются) автором(ами) изобретения

(11) 30419

(54) Способ изготовления композитных лопаток ветроустановки согласно утвержденным математическим моделям методом вакуумно-компрессионной пропитки

(73) *Патентообладатель:* Республиканское государственное предприятие на праве хозяйственного ведения "Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева" Министерства образования и науки Республики Казахстан

(21) 2014/0393.1

(22) 28.03.2014

Заместитель министра юстиции
Республики Казахстан

Э. Азимова

Приложение 6



УТВЕРЖДАЮ

Технический директор ООО «Политермо»

С.П. Колганов

« ___ » _____ 20 ___ г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Нуриμβетова А.У. на тему «Стержневые и полупространственные модели деформирования слоистых закрученных изделий в поле стационарных и нестационарных нагрузок», представленную на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

Результаты исследований, полученные в представленной диссертационной работе, используются в различных отраслях народного хозяйства, в том числе на предприятии ООО «Политермо», где изготавливаются лопатки из композиционных материалов.

Разработанная Нуриμβетовым Алибеком Усипбаевичем методика расчета напряженно-деформированного состояния композиционной лопатки является важной составной частью алгоритма оценки технического состояния композиционной лопатки. Позволяет проводить численные эксперименты и, при необходимости, на основе этих результатов, определить координаты расположения слоев в сечении лопатки с наибольшими деформациями, а также выявлять причины появления дефектов и принимать меры по снижению опасных деформаций в композиционной лопатке.

Результаты диссертационной работы Нуриμβетова А.У. «Стержневые и полупространственные модели деформирования слоистых закрученных изделий в поле стационарных и нестационарных нагрузок» приняты для применения при проектировании пресс форм и при создании трехмерной модели композиционной лопатки из стеклопластика. Внедрение осуществлено путем проектирования пресс формы и изготовления лопатки из стеклопластика по заданной трехмерной модели. Изготовленная слоистая стеклопластиковая лопатка будет применяться для роторов ветроэнергетической установки.

Использование композиционной лопатки из стеклопластика позволит выбрать и реализовать рациональные варианты проектирование лопатки по критериям прочности, жесткости и минимума затрат на изготовления лопатки, что обеспечит снижение себестоимости проектов и сокращение плановых сроков проведения конструкторско-технологических разработок.

На практике эти решения могут быть использованы как методика прогнозирования, обеспечения оптимальных режимов работы механизмов и машин.

Главный инженер ООО «Политермо»

Кабанов В. Ф.