ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

На правах рукописи

Иванов Сергей Валерьевич

ВЫБОРОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Специальность 05.13.18 —
математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Кибзун

Москва, 2020

Оглавление

Введение **7**

1 Построение и исследование свойств двухэтапных и двухуровневых моделей принятия решений **30**

1.1. Двухэтапная модель принятия решений 30

1.1.1. Описание модели 31

1.1.2. Свойства задач, моделирующих процесс принятия решений 33

1.1.3. Об эквивалентности априорных и апостериорных постановок задач . 39

1.1.4. Применение доверительного метода 41

1.2. Двухэтапные модели экономических систем 42

1.2.1. Моделирование планирования производства 43

1.2.2. Свойства модели планирования производства 45

1.2.3. Модель выбора энергосберегающих проектов 50

1.3. Двухуровневая модель с асимметричной информацией 52

1.3.1. Описание модели 52

1.3.2. Моделирование взаимодействия производителя продукции и поставщика ресурсов 55

1.3.3. Модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты . . 57

1.3.4. Двухуровневая модель со случайными коэффициентами в целевой функции последователя 60

1.3.5. Модель определения налоговой ставки 65

1.4. Двухуровневая модель с симметричной информацией 67

1.4.1. Описание модели 67

1.4.2. Скалярный случай 68

1.4.3. Случай гауссовского распределения 70

1.4.4. Модель инвестирования производства 71

1.5. Стохастические двухуровневые модели конкурентного размещения предприятий 73

1.5.1. Модель конкурентного размещения предприятий с асимметричной информацией . . . 75
1.5.2. Модель конкурентного размещения предприятий с симметричной информацией . . . 78
1.6. Выводы по главе 1 . . . 79

2 Дискретизация вероятностной меры в задачах стохастического программирования с вероятностными критериями 81

2.1. Исследование класса задач, для которых возможно построение детерминированного эквивалента . . . 81
2.1.1. Аппроксимации задач стохастического программирования с вероятностными критериями . . . 82
2.1.2. Вспомогательные результаты . . . 83
2.1.3. Детерминированные эквиваленты . . . 86
2.1.4. Теоремы о сходимости . . . 89
2.2. Выборочные аппроксимации задач стохастического программирования с вероятностными критериями . . . 93
2.2.1. Выборочная аппроксимация одноэтапной задачи . . . 93
2.2.2. Используемый математический аппарат и известные результаты . . . 97
2.2.3. Гипосходимость выборочных функций вероятности . . . 101
2.2.4. Сходимость выборочных аппроксимаций задачи стохастического программирования с квантильным критерием . . . 104
2.2.5. Сходимость выборочных аппроксимаций двухэтапной линейной задачи с квантильным критерием . . . 110
2.2.6. Сходимость выборочных аппроксимаций двухуровневой задачи со случайными коэффициентами в целевой функции последователя . . . 115
2.3. Оценивание необходимого объёма выборки . . . 117
2.3.1. Максимизация вероятности при конечном множестве стратегий . . . 118
2.3.2. Максимизация вероятности при ограниченном множестве стратегий . 122
2.3.3. Минимизация квантили . . . 125
2.4. Выводы по главе 2 . . . 127

3 Численные методы решения задач стохастического программирования, основанные на дискретизации вероятностной меры 129

3.1. Метод сведения двухэтапных линейных задач к детерминированным задачам при дискретном распределении случайных параметров 129

3.1.1. Задача с вероятностным критерием 130

3.1.2. Задача с квантильным критерием 132

3.2. Метод сведения двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием к смешанной целочисленной задаче 136

3.3. Метод решения двухуровневой задачи размещения предприятий 144

3.3.1. Эквивалентная детерминированная двухуровневая задача 144

3.3.2. Верхние и нижние оценки критериальной функции задачи 148

3.3.3. Алгоритм локального поиска 149

3.3.4. Результаты численных экспериментов 150

3.4. Численный метод решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием и функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру 152

3.4.1. Постановка задачи 153

3.4.2. Применение доверительного метода 154

3.4.3. Дискретизация вероятностной меры 156

3.4.4. Процедура решения задачи 157

3.5. Алгоритм решения одноэтапной задачи, основанный на поиске с чередующимися окрестностями 159

3.5.1. Постановка задачи 160

3.5.2. Выборочная аппроксимация задачи 161

3.5.3. Построение эквивалентной задачи комбинаторной оптимизации . . . 162

3.5.4. Алгоритм 166

3.6. Алгоритм решения двухэтапной задачи, основанный на поиске с чередующимися окрестностями 170

3.6.1. Постановка задачи 170

3.6.2. Сведение к одноэтапной задаче 172

3.6.3. Выборочная аппроксимация 173

3.6.4. Применение доверительного метода . . . 174

3.6.5. Алгоритм . . . 175

3.7. Выводы по главе 3 . . . 178

4 Построение доверительных множеств поглощения в стохастических системах 179

4.1. Методы построения доверительных множеств поглощения . . . 179

4.1.1. Свойства множеств поглощения . . . 179

4.1.2. Построение внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения . . . 182

4.1.3. Выборочный метод построения доверительного множества поглощения 186

4.1.4. Построение доверительных множеств поглощения в модели планирования производства . . . 187

4.2. Построение множества допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома . . . 190

4.2.1. Постановка задачи . . . 190

4.2.2. Алгоритм построения доверительного множества поглощения . . . 191

4.2.3. Вычислительный эксперимент . . . 194

4.3. Выводы по главе 4 . . . 196

5 Комплекс программ, реализующих выборочные методы решения задач стохастического программирования 198

5.1. Описание архитектуры комплекса программ . . . 198

5.1.1. Модуль решения одноэтапной линейной задачи . . . 200

5.1.2. Модуль решения двухэтапной билинейной задачи . . . 201

5.1.3. Модуль решения двухуровневой задачи стохастического программирования . . . 203

5.1.4. Модуль решения задачи распределения инвестиций . . . 204

5.2. Решение одноэтапной задачи . . . 206

5.2.1. Пример 1 . . . 206

5.2.2. Пример 2 . . . 210

5.2.3. Примеры большой размерности . . . 210

5.3. Решение двухэтапной задачи 212

5.4. Решение задачи выбора энергосберегающих проектов 216

5.5. Решение двухуровневой задачи планирования производства 218

5.6. Решение задачи определения налоговой ставки 221

5.7. Решение задачи оптимизации параметров взлётно-посадочной полосы 223

5.7.1. Постановка задачи 224

5.7.2. Сведение к задаче минимизации функции квантили 225

5.7.3. Алгоритм 226

5.7.4. Результаты вычислений 231

5.8. Выводы по главе 5 231

Заключение **233**

Список литературы **235**

Введение

Разработка математических моделей и методов принятия решений в сложных иерархических системах, на функционирование которых оказывают влияние случайные факторы и к надёжности которых предъявляются высокие требования, является одной из важнейших задач современной прикладной математики и системного анализа. Трудности, возникающие при моделировании подобных систем, связаны как со сложными отношениями подчинения между моделируемыми субъектами, так и с неопределённостью моделируемой системы.

В иерархических системах присутствуют несколько лиц, которые принимают решения последовательно. Такие системы можно разбить на подсистемы, каждая из которых соответствует уровню принятия решения. Ключевое свойство иерархических систем, которое необходимо учитывать при моделировании, заключается в структуре принятия решений. Решение, принимаемое на определённом уровне иерархии, задаёт условия в которых функционируют уровни, находящиеся ниже. Общая теория иерархических систем изучается в монографии М. Месаровича, Д. Мако, И. Такахара [67].

Самый простой вариант иерархической системы включает два уровня иерархии. Лицо, действующее на верхнем уровне иерархии, является лидером, а на нижнем уровне иерархии действует последователь. Поведение последователя в такой системе может быть описано с помощью оптимизационной модели, параметры которой зависят от поведения лидера. Одной из первых моделей такого типа была модель конкурентного рынка Г. фон Штакельберга [202]. При моделировании рынка предполагалось, что две фирмы (лидер и последователь) последовательно принимают решения об объёме производства. В монографии Ш. Демпе, В. Калашникова, Г. А. Перез-Валдеса, Н. Калашниковой [128] приводится большое количество двухуровневых моделей, связанных с энергетическим сектором. Двухуровневые иерархические модели экономики рассматривались в работе Ян Хая, М. Белла [217]. Двухуровневые транспортные модели изучались Х. Абу-Кандилом и П. Бертраном [90]. Модель проектирования сетей рассматривали П. Маркотте [169] и И. Констанин, М. Флориан [120]. Модели алюминиевой промышленности приведены в работе М. Г. Николса [174], Модели производства биотоплива рассматривались в работе Дж. Ф. Барда и соавторов [97]. В работах И. А. Нечаева, С. И. Паламарчука [77], Н. В. Дресвянской [16] приведены двухуровневые модели взаимодействия игроков на рынке электроэнергии. Модель формирования механизма государственно-частного партнёрства изучалась в работе С. М. Лавлинского, А. А. Панина, А. В. Плясунова [65]. Анализ модели конкурентного размещения предприятий проведён В. Л. Бересневым [1] и В. Л. Бересневым, А. А. Мельниковым [3].

При моделировании сложных систем необходимо учитывать случайности, связанные с их функционированием и внешними факторами. Модели, учитывающие случайные факторы называются стохастическими. Потери при функционировании такой системы можно описать функцией, зависящей от случайных факторов. При разработке стохастической модели системы необходимо учитывать объём информации, доступной лицу, принимающему решение. Это можно осуществить с помощью двухэтапных моделей. Стратегии лица, принимающего решение, можно разделить на два вида: не зависящие от случайных факторов задачи и выбираемые по факту реализации случайных параметров. Поскольку реализации случайных факторов, как правило, становятся известными в ходе функционирования системы, первый вид стратегий называют стратегиями первого этапа, а второй вид стратегий — стратегиями второго этапа. Таким образом, моделируемая система может быть разбита на две подсистемы, соответствующие этапам принятия решений. При этом подсистема, соответствующая второму этапа, функционирует в условиях, определяемых стратегией первого этапа. Моделирование выбора стратегии второго этапа может быть осуществлено посредством детерминированной оптимизационной модели, параметры которой задаются стратегией первого этапа и реализациями случайных факторов.

Несмотря на то, что двухэтапные и двухуровневые модели описывают различные объекты, структуры принятия решений в двухэтапных и двухуровневых моделях аналогичны. Это говорит о том, что для их описания может быть использован близкий математический аппарат. И в том, и в другом случае стратегии нижнего уровня (второго этапа) являются оптимальными решениями задачи оптимизации. Отличие состоит в том, что в двухуровневых моделях присутствуют два лица, каждый из которых имеет собственную цель, а в двухэтапных моделях выбор стратегий первого и второго этапа подчинён общей цели.

Для описания иерархических систем взаимодействия лидера и последователя, на функционирование которых влияют случайные факторы, могут быть использованы модели, сочетающие свойства двухэтапных и двухуровневых моделей. Данные модели называются двухуровневыми стохастическими. В зависимости от объёма информации, которым владеют лидер и последователь, можно предложить несколько вариантов двухуровневых стохастических моделей. Модель с симметричной информацией обладает тем свойством, что и лидер, и последователь принимают свои решения, не зная реализации случайных факторов. В модели с асимметричной информацией случайные факторы становятся известными после того, как лидер принимает своё решение, но до принятия решения последователем.

При моделировании сложных систем необходимо учитывать требования надёжности. Первым подходом к учёту требований надёжности в стохастических системах являлись математические модели с вероятностными ограничениями, предложенные А. Чарнсом, У. У. Купером [111, 112]. В данных моделях качество функционирования системы задаётся детерминированной функцией, а риски моделируются другой функцией, которая должна принимать значения из допустимого множества с вероятностью не меньше заданной. Описанный подход применялся для моделирования экономических систем в работе С. Дж. Гартски [133]. В работе А. Прекопы и Т. Шантая [190] модели с вероятностными ограничениями применялись для решения задачи регулирования уровня воды [190]. Э. Ядоллахи и соавторы [215] включали вероятностные ограничения в модели оптимизации поставок.

Дальнейшим развитием моделей с вероятностными ограничениями явились модели, в которых качество функционирования системы определяется квантилью потерь. Подобные модели были введены в рассмотрение С. А. Катаокой [149]. Затем свойства моделей с квантильным критерием изучались в работах Э. Райка [82, 83]. Функция квантили определяется как минимальный уровень потерь, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Другим показателем качества функционирования системы является функция вероятности, определяемая как вероятность непревышения потерями заданного уровня. Таким образом, вероятностный и квантильным критерии являются в некотором смысле обратными. Аэрокосмические приложения моделей с функциями вероятности и квантили являются предметом монографии В. В. Малышева, А. И. Кибзуна [66]. Модели с квантильным и вероятностным критериями применялись для решения задач формирования портфеля ценных бумаг в работах Ю. С. Кана и соавторов [5,12,44,46], А. И. Кибзуна, А. Н. Игнатова [50]. Модель хеджирования опционов европейского типа по квантильному критерию на неполных рынках анализировалась в цикле статей О. В. Зверева, В. М. Хаметова [20, 21]. Квантильный критерий применялся в задаче оптимизации площади взлётно-посадочной полосы в работах А. И. Кибзуна, В. Ю. Курбаковского [53] и Ю. С. Кана [15]. Модель прокладки трассы с учётом случайной стоимости работ и квантильным критерием изучалась в работе А. И. Кибзуна, О. М. Хромовой [64].

Двухэтапные оптимизационные модели с квантильным критерием широко применяются для моделирования различных систем. Можно отметить работы А. В. Наумова, А. И. Кибзуна и соавторов [4, 61, 62, 68, 69, 76]. Были решены логистическая задача оптимизации бронируемого фрахта компанией, занимающейся доставкой грузов [4], задача оптимизации энергоснабжения участка железной дороги [62], задача оптимизации самолётного парка авиакомпании [61], задача распределения ресурсов [76], задача оптимизации бюджета госпиталя [68] и задача оптимизации инвестиционного проекта [69].

Для синтеза оптимальных стратегий в двухуровневых моделях применятся теория двухуровневой оптимизации. Учёт случайных факторов требует привлечения методов стохастического программирования. Таким образом, для математического моделирования сложных иерархических систем необходимо применение методов, сочетающих подходы двухуровневой и стохастической оптимизации.

Теория стохастического программирования освещена в монографиях Дж. Р. Бёржа, Ф. Луво [103], П. Калля [146], А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Рущиньского [198], А. Прекопы [189], Д. Б. Юдина [88,89]. Задачам стохастического программирования с вероятностными критериями посвящены монографии А. И. Кибзуна, Ю. С. Кана [51,153].

При оптимизации детерминированной функции при вероятностных ограничениях возникает так называемая задача стохастического программирования с вероятностными ограничениями. В простейших случаях задачу с вероятностными ограничениями можно свести к детерминированному эквиваленту, т. е. записать в виде детерминированной задачи математического программирования. Этот подход развивался в работах А. Чарнса, У. У. Купера [112] и Г. Саймондза [204]. Для анализа более сложных вероятностных ограничений применяется изучаемая в работах А. Прекопы [185] и Д. Денчевой, А. Прекопы, А. Рущиньского [129] концепция p-эффективных точек, представляющих собой многомерный аналог квантили. В работе [129] с помощью p-эффективных точек были получены верхние и нижние оценки целевой функции в задаче стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Алгоритм решения данной задачи, основанный на использовании p-эффективных точек, в случае непрерывного распределения предложен В. ван Аккоем и соавторами [210]. Обзор методов решения задач с вероятностными ограничениями, основанных на построении внутренних и внешних аппроксимаций множества уровня функции вероятности, проведён М. Лейойне, А. Прекопой [161].

Задача оптимизации системы, качество функционирования которой описывается квантилью потерь, называется задачей стохастического программирования с квантильным критерием. Основным методом решения задач стохастического программирования с квантильным критерием является обобщённый минимаксный подход, предложенный в работе А. И. Кибзуна, А. А. Лебедева, В. В. Малышева [54] и названный позднее в монографии А. И. Кибзуна, Ю. С. Кана [153] доверительным методом. Суть метода состоит в переходе от исходной вероятностной постановки задачи к минимаксной задаче, в которой внутренний максимум берётся по реализациям случайных факторов из так называемого доверительного множества, в внешний минимум — по стратегии оптимизации и классу всех доверительных множеств (т. е. имеющих вероятностную меру не менее заданного уровня надёжности).

Доверительный метод позволяет получить верхнюю оценку функции квантили, если производить оптимизацию не по всем доверительным множествам, а только по некоторому их подклассу. Такой подход использовался в работах А. И. Кибзуна, А. В. Наумова [58] и в работах А. В. Наумова и автора [36, 74]. Для получения нижней оценки может быть использовано понятие α-ядра вероятностной меры [153]. Трудности, связанные с построением α-ядра, были решены в работах Ю. С. Кана, С. Н. Васильевой [9, 10].

Разработка методов решения задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями потребовали изучения качественных свойств непрерывности и выпуклости функций вероятности и квантили. Данным исследованиям посвящены работы Э. Тамма [85], А. Прекопы [186, 187], Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна [43], А. И. Кибзуна, Е. Л. Матвеева [55], А. И. Кибзуна, Е. А. Кузнецова [52], Ю. С. Кана [45]. Свойства дифференцируемости функций вероятности и квантили изучались Г. Третьяковым [205], С. Урясьевым [207], Р. Хенрионом [209], Г. Х. Пфлюгом [181].

Для получения точных решений задач стохастического программирования с вероятностным критерием Э. Райком [81], а для задач с квантильным критерием А. И. Кибзуном, В. Ю. Курбаковским [53], Ю. С. Каном [41, 42], А. И. Кибзуном, Е. Л. Матвеевым [56] предложены алгоритмы, основанные на статистической оценке градиента функций вероятности и квантили. Аналогичная процедура для задачи с критерием в форме интегральной квантили была предложена А. И. Кибзуном, А. И. Чернобрововым [63]. К сожалению, практическая реализация этих алгоритмов является затруднительной в связи с вычислительной сложностью построения оценок градиентов функций вероятности и квантили.

Метод детерминированного эквивалента, первоначально предложенный для задач с вероятностными ограничениями, был применён для задач с вероятностным и квантильным критериями в работе А. И. Кибзуна, Б. В. Вишнякова [11], но класс задач, к которым он применим, является достаточно узким, в частности метод разработан для монотонных функций потерь.

Особое место в задачах анализа стохастических систем по квантильному критерию занимает задача о построении множества начальных позиций системы, обеспечивающих в конечный момент времени выполнение ограничений с заданной вероятностью. Такое множество называется [153] доверительным множеством поглощения. Доверительное множество поглощения в статических стохастических системах можно рассматривать как множество уровня функции вероятности. Свойства множества уровня тесно связаны со свойствами выпуклости функции вероятности. В частности, при квазивыпуклости функции вероятности множества уровня являются выпуклыми. Условия выпуклости множеств уровня для достаточно больших значений вероятности исследуются в работе В. ван Аккоя [208]. Утверждения о свойствах квазивыпуклости функции вероятности, как правило, опираются на понятия квазивогнутых и логарифмически вогнутых вероятностных мер, изучаемые в работах А. Прекопы [186, 187], К. Борелля [104], В. И. Норкина, Н. В. Роенко [79]. Условия связности множества уровня функции вероятности получены в работе Р. Хенриона [138], достоинством которой является отсутствие каких-либо ограничений на распределение случайных параметров. Множество уровня функции вероятности нетрудно построить в тех случаях, когда вероятностные ограничения могут быть заменены на детерминированные с помощью метода детерминированного эквивалента, но, как отмечалось выше, класс таких систем достаточно узкий. В другом частном случае, когда функция потерь представима в виде максимума функций, в которые случайные параметры входят аддитивно, для построения множества уровня функции вероятности может быть применен аппарат p-эффективных точек [185]. Алгоритм, позволяющий получить множество p-эффективных точек дискретного случайного вектора, предложен М. Лейойне, Н. Нойеном [162]. Нетрудно проверить, что в случае дискретного распределения с конечным числом реализаций множество p-эффективных точек конечно, что позволяет получить детерминированное описание множества уровня функции вероятности.

Задача оптимизации двухэтапной модели принятия решений называется двухэтапной задачей стохастического программирования. Линейным двухэтапным задачам с критерием в форме математического ожидания посвящена монография Калля, Майера [147] и главы в монографиях Дж. Р. Бёржа, Ф. Луво [103], А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Рущиньского [198], где проведён подробный анализ задач данного класса и представлен ряд алгоритмов их решения. Качественные свойства задачи изучались Р. Ветсом в [212, 214], где описаны свойства выпуклости множества допустимых стратегий и целевой функции, описаны подходы к построению эквивалентной детерминированной задачи и приведены различные методы решения задачи. Свойства дифференцируемости критериальной функции в двухэтапных задачах изучались С. Сеном [196] Алгоритмы решения двухэтапных задач, основанные на методах декомпозиции и на методе внутренней точки предлагались в работах Дж. Р. Бёржа [101, 102]. Общая постановка двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания изучалась в работах К. Фройендорфера [132], А. А. Кулкарни, У. В. Шанбхага [160].

Двухэтапные задачи с вероятностными критериями менее изучены, чем с критерием в форме математического ожидания. Однако, линейный случай данных задач всесторонне исследован в работах А. В. Наумова, результаты которых изложены в диссертации [70]. Двухэтапная линейная задача с квантильным критерием была сформулирована в работе А. И. Кибзуна, А. В. Наумова [57], где были предложены методы поиска верхней оценки критериальной функции задачи. Двухэтапная задача с линейной функцией потерь и с критерием в форме интегральной квантили изучалась Р. Шульцем, С. Тидеманном [200], исследовавшими свойства задачи и предложившими алгоритм её решения. Двухэтапные задачи с квантильным критерием в случае дискретного распределения случайных параметров изучались в работе В. И. Норкина, А. И. Кибзуна, А. В. Наумова [78], где предложен подход к их сведéнию к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования. Ранее подобные методы были предложены для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями в работах С. Сена [195], А. Рущиньского [192], Й. Людтке, С. Ахмеда, Г. Л. Немхаузера [168], А. Саксены, В. Гойяла, М. А. Лежена [194]. Вычислительные аспекты оптимизации оценки функции квантили изучались К. Павликовым и соавторами [158]. Подход, основанный на сведении двухэтапной задачи с квантильным критерием к задаче стохастического программирования с квантильным критерием и полиэдральной функцией потерь разработан в работе А. В. Наумова и автора [71].

Традиционно рассматриваются двухэтапные задачи в априорной постановке. Это значит, что при принятии решения на первом этапе учитывается минимальное значение целевой функции второго этапа как функции стратегии первого этапа. Также могут быть рассмотрены двухэтапные задачи стохастического программирования в апостериорной постановке, когда стратегией второго этапа является функция реализации случайных параметров задачи. Условия эквивалентности априорной и апостериорной постановок двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания приведены в монографии А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Рущиньского [198], А. И. Кибзуном, А. В. Наумовым [57] доказана эквивалентость данных постановок для линейной задачи с квантильным критерием.

Задачам оптимизации двухуровневых моделей посвящены монографии Дж. Ф. Барда [94], Ш. Демпе [125], Ш. Демпе, В. Калашникова, Г. А. Перез-Валдеса Н. Калашниковой [128] и обзоры Ш. Демпе [122–124], Л. Н. Висенто, П. Каламая [211] и Б. Колсона, П. Маркотте, Ж. Савара [118, 119]. Различают две постановки двухуровневых задач: оптимистическую и пессимистическую. Различие между ними связаны с учётом ситуации, когда последователь имеет несколько оптимальных стратегий поведения. В оптимистической постановке предполагается, что последователь выбирает лучшую для лидера стратегию, а в пессимистической — худшую для лидера. Бóльшая часть работ по двухуровневой оптимизации посвящена оптимистической постановке. Выделяют несколько методов решения двухуровневых задач. Один из методов заключается в использовании необходимых и достаточных условий оптимальности стратегии последователя, позволяющих заменить внутреннюю задачу оптимизации на систему дополнительных ограничений. После чего для задачи могут быть использованы алгоритмы целочисленной оптимизации. Данный подход развивался в работах Ф. А. Аль-Хайяля, Р. Хорста, П. М. Пардалоса [91], Дж. Барда, Дж. Мура [96], Дж. Барда, Дж. Фалька [95], Х. Фортуни-Амата, Б. Маккарла [130], Т. Эдмундса, Дж. Барда [131]. С другой стороны, для оптимизации при наличии дополнительных ограничений могут быть использованы методы штрафных функций, описание которых для задач двухуровневой оптимизации приведены в работах В. Ф. Демьянова, Ф. Факкинея [14], Ё Исидзуки, Э. Айёси [145], А. С. Стрекаловского, А. В. Орлова, А. В. Малышева [203], и методы невыпуклой оптимизации, изложенные в работах А. С. Стрекаловского, А. В. Орлова, А. В. Малышева [84,203], Т. В. Груздевой, Е. Г. Петровой [13]. Подход, основанный на использовании функции оптимального решения задачи нижнего уровня для задания дополнительного ограничения в эквивалентной задаче, в работе Ш. Демпе, С. Франке [126].

В. Биалас, М. Карван [100] и У. Кандлер, Р. Таунсли [110] доказали, что решение линейной двухуровневой задачи достигается в вершине многогранного множества. Этот факт использовался для построения переборных алгоритмов решения двухуровневых задач, предложенных У. Кэндлером, Р. Таунслеем [110], Хоанг Туем, А. Мигдаласом, П. Вербрантом [206].

Двухуровневые задачи, учитывающие различные неопределённости, исследуются в небольшом числе работ. Одними из первых таких работ были труды М. Патрикссона и Л. Винтер [179] и С. Кристиансена, М. Патрикссона и Л. Винтер [116], где изучалась двухуровневая задача стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания. В указанных работах описаны необходимые и достаточные условия оптимальности решения, на основе которых предложен алгоритм решения задачи. Наряду со стохастическими задачами двухуровневой оптимизации в работах А. Будницкого [106] и Х. Катагири и соавторов [148] рассматриваются задачи с нечёткими факторами. Возможность описания стохастических иерархических систем с помощью двухуровневой оптимизации привела к появлению ряда прикладных работ, в том числе работы А. С. Вернера [213], посвящённой задачам телекоммуникации, работы С. М. Ализадеха, П. Маркотте, Г. Савара [92] об оптимизации транспортных систем, работы Р. М. Ковачевича, Г. Х. Пфлюга [159] о ценообразовании на рынке опционов, работы Н. Ян о модели поставок продукции [216]. Двухуровневая задача с критерием в форме математического ожидания, дискретными переменными верхнего уровня и непрерывными переменными нижнего уровня решалась И. Яникоглу, Д. Куном [218]. В [159] также предлагается общая постановка задачи стохастической двухуровневой оптимизации, однако её решение было найдено только для задачи с критерием в форме интегральной квантили. Представляет интерес работа Ш. Козух и соавторов [157], в которой изучается двухуровневая задача с вероятностным ограничением типа рюкзака. В работах Й. Буртшайдт, М. Клауса, Ш. Демпе [107] и Й. Бутшайдт, М. Клауса [108] изучаются стохастические двухуровневые задачи с произвольными когерентными мерами риска, для которых получен ряд условий, обеспечивающих непрерывность и устойчивость задачи. Специальный случай стохастической двухуровневой задачи, в которой переменные последователя бинарны, рассматривался О. Й. Озалтыном, О. А. Прокопьевым и А. Й. Шефером [177], где был предложен метод ветвей и границ для решения данной задачи. Чэн Лу, Вань Чжунпин, Ван Гуанминь [115] изучали двухуровневую задачу с критерием в форме интегральной квантили. Вероятностный критерий для задачи стохастического двухуровневого программирования использовался М. Сакавой, Х. Катагири, Т. Мацуи [193]. Частный случай двухуровневой задачи с квантильным критерием рассматривался в работе А. Чена, Ч. Кима, Чжун Чжоу, П. Чутинана [113] для моделирования проектирования сетей на заданном уровне надёжности. Для решения задачи был предложен генетический алгоритм. Линейный случай стохастической двухуровневой задачи изучался в диссертации автора [27]. Для двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий, предложенной в работе автора [34], эффективные методы решения были разработаны В. Л. Бересневым и А. А. Мельниковым [99, 170].

В связи с развитием методологии решения задач стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров и в связи с отсутствием универсальных эффективных алгоритмов решения задач с непрерывным распределением, становятся актуальными методы дискретизации вероятностной меры в данных задачах. Можно выделить два основных подхода к дискретизации. Первый подход основан на построении детерминированных аппроксимаций вероятностной меры с помощью приближённого вычисления интегралов. Этот подход развивался в работах Р. Леппа [163, 164] для математического ожидания, в работе [165] — для задач с вероятностными ограничениями, в [166] — для функции квантили. В работе А. И. Кибзуна, Р. Леппа [154] данная методика применялась для решения задачи формирования портфеля ценных бумаг. В работах

Т. Пеннанена [183,184], К. Койрат, К. Хесса, Р. Сери [117] проведён анализ сходимостей различных аппроксимаций функции математического ожидания, в том числе построенных на приближённом вычислении интегралов. В работе Г. Пфлюга [180] описана процедура построения аппроксимации математического ожидания в многоэтапной задаче с критерием в форме математического ожидания.

Другой подход к дискретизации вероятностной меры основан на построении выборочных оценок. Достоинством данного подхода является тот факт, что для построения выборочной аппроксимации не нужно знать истинное распределение случайных параметров. Достаточно иметь статистические данные или возможность наблюдать реализации случайных факторов. Сходимость данного способа построения аппроксимации задачи стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания исследована в работе Ц. Артштайна, Р. Ветса [93], где для анализа данной задачи применён аппарат эписходимостей [191]. Доказана эписходимость выборочных оценок функции математического ожидания при достаточно слабых предположениях о структуре целевой функции потерь. При определённых предположениях эписходимость гарантирует сходимость аппроксимации задачи минимизации как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации. Для двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания метод выборочных аппроксимаций изучался в работе Р. Чена, Й. Людтке [114]. Для задачи с вероятностными ограничениями, которая может быть сведена к задаче стохастического программирования с квантильным критерием, сходимость аналогичных аппроксимаций исследована в работах А. Шапиро [178, 198]. Допустимость в задаче стохастического программирования решений аппроксимирующей задачи изучалась в работе М. К. Кампи, С. Гаратти [109]. В работе Дж. Хигле, С. Сена [139] метод выборочных аппроксимаций применяется совместно с декомпозиционными алгоритмами для двухэтапных линейных задач с критерием в форме математического ожидания. Гладкие выборочные аппроксимации задач с вероятностными ограничениями строились А. Пеня-Ордьерес и соавторами [182]. Модификация метода выборочной аппроксимации, минимизирующая дисперсию выборочной оценки, предложена Х. Баррерой и соавторами [98]. В случае, если в задаче с вероятностными ограничениями уровень надёжности близок к единице, то при выборочной аппроксимации можно считать, что для всех реализаций случайной величины ограничения выполнены. Такой подход обоснован А. Немировским, А. Шапиро [173]. Численная процедура максимизации выборочной функции вероятности предложена О. В. Хамисовым [150].

Для применения метода выборочных аппроксимаций необходимо оценивать точность получаемого решения. Основой для построения таких оценок является равномерный закон больших чисел, полученный В. Н. Вапником, А. Я. Червоненкисом [6, 7]. В работах А. Шапиро и соавторов [156, 197, 198] получены оценки необходимого объёма выборки для аппроксимации задачи оптимизации функции математического ожидания в случае конечного множества допустимых стратегий. Данный результат был распространён на случай липшицевых функций математического ожидания в [197]. Для получения данных результатов используется теория экспоненциальных оценок больших уклонений. Доверительные интервалы оптимального значения критериальной функции строились В. Гигесом, А. Юдицким, А. Немировским [136]. В работае Й. Людтке, С. Ахмеда [167] проведено исследование скорости сходимости для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Установлена скорость сходимости значений критериальных функций и определён объём выборки, при котором оптимальное решение аппроксимирующей задачи является допустимым решением исходной задачи.

Проведённый анализ показывает, что, несмотря на наличие работ, в которых для моделирования конкретных иерархических систем в различных областях используется подход, основанный на двухуровневой и стохастической оптимизации, общие методы моделирования и исследования стохастических иерархических систем принятия решений развиты недостаточно. Практически отсутствуют эффективные универсальные алгоритмы синтеза оптимальных стратегий в стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями и непрерывным распределением случайных параметров. Требует обоснования метод выборочной дискретизации стохастических иерархических моделей принятия решений с вероятностными критериями. Требуется разработка численных методов и алгоритмов синтеза оптимальных стратегий в данных системах. Таким образом, **актуальность работы** связана с необходимостью развития общих методов моделирования принятия решений в стохастических иерархических системах и численных методов их анализа.

Объектом исследования являются математические модели принятия решений в иерархических стохастических системах с вероятностным и квантильным критериями.

Предметом исследования являются выборочные методы дискретизации вероятностной меры в иерархических моделях с вероятностным и квантильным критериями и численные методы синтеза оптимальных стратегий в этих моделях.

Целью работы является разработка методов математического моделирования иерархических стохастических систем с учётом ограничений на вероятностные характеристики, а также разработка численных методов и комплекса программ для синтеза оптимальных стратегий в данных моделях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) предложить подход к моделированию систем, учитывающий сложную структуру принятия решений и высокие требования, предъявляемыми к их надёжности их функционирования;

2) исследовать качественные свойства математических моделей, получаемых с помощью разработанного подхода;

3) разработать математические модели принятия решения для ряда экономических и технических систем;

4) разработать процедуры выборочной дискретизации вероятностной меры в изучаемых моделях;

5) разработать численные методы синтеза оптимальных стратегий в стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями;

6) доказать сходимость предлагаемых численных методов синтеза оптимальных стратегий;

7) разработать алгоритмы решения одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования;

8) реализовать предложенные алгоритмы в рамках программного комплекса, предназначенного для синтеза оптимальных стратегий в задачах стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями;

9) для ряда математических моделей конкретных экономических и технических систем, в том числе в области авиационной и ракетно-космической техники, провести численные вычисления и проанализировать их результаты.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математического моделирования, системного анализа, теории вероятностей, математической статистики, теории оптимизации (в частности, стохастической и двухуровневой оптимизации, линейного и нелинейного программирования), теории нормальных интегрантов, объектно-ориентированного программирования, метаэвристические методы.

Достоверность результатов обеспечивается корректным использованием методов математического моделирования, системного анализа, проведёнными доказательствами утверждений, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна.

1) Разработан общий подход к моделированию стохастических иерархических систем с учётом вероятностных критериев, с помощью разработанного подхода предложен ряд стохастических моделей сложных экономических систем, в том числе модель планирования производства, модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты, модель определения налоговой ставки, модель размещения предприятий.

2) Доказан ряд теорем о свойствах критериальных функций в двухэтапных и двухуровневых задачах стохастического программирования с вероятностными критериями и об эквивалентных задачах оптимизации.

3) Для ряда одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых моделей разработан метод их выборочной дискретизации, доказаны теоремы о достаточных условиях сходимостей построенных аппроксимаций, построены оценки достаточного объёма выборки.

4) Предложены численные методы и алгоритмы решения ряда задач стохастического программирования, в том числе для задачи с функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру, и квантильным критерием, для одноэтапных линейных и двухэтапных билинейных задач стохастического программирования с квантильным критерием.

5) Предложены детерминированный и выборочный методы построения внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения в задачах анализа стохастических систем, эффективность которых продемонстрирована на задаче прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома.

6) Разработан и для решения ряда задач, в том числе для задачи оптимизации площади взлётно-посадочной полосы, применён комплекс программ, реализующих предложенные в диссертации выборочные методы решения задач стохастического программирования с квантильным критерием.

Теоретическая значимость полученных результатов заключается в развитии методологии построения математических моделей иерархических стохастических систем, в разработке и обосновании выборочных методов дискретизации стохастических иерархических моделей с вероятностными критериями качества, в разработке численных методов и алгоритмов решения нескольких классов задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями.

Практическая значимость результатов работы связана с возможностью применения разработанных методов для математического моделирования экономических и технических систем. С помощью предложенных методов решены задача оптимизации площади взлётно-посадочной полосы и задача прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома. Разработан ряд моделей конкретных систем, включая модель планирования производства, модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты, модель определения налоговой ставки и модель размещения предприятий. Разработанный комплекс программ позволяет синтезировать оптимальные стратегии в разработанных математических моделях с учётом характеристик моделируемых систем и на основе статистических данных об их функционировании в прошлом.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации разрабатываются методы построения математических моделей сложных систем, исследуются качественные свойства математических моделей, разрабатываются, обосновываются и реализуются в виде комплексов программ численные методы синтеза оптимальных стратегий, на основе предложенных подходов к моделированию с использованием вычислительных экспериментов проводится комплексное исследование проблемы принятия решения в сложных системах, что соответствует следующим областям исследования специальности 05.13.18:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

5. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Кроме того, в диссертации на основе предложенных математических моделей формулируются и исследуются задачи оптимизации, разрабатываются алгоритмы и методы их решения, что соответствует областям исследования специальности 05.13.01:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в который был определяющим.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, пять глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 255 страниц, включая 16 рисунков, 13 таблиц и список литературы, содержащий 218 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе приводится описание построения математических моделей сложных систем, к функционированию которых предъявляются высокие требования. Приводится пять классов моделей сложных систем. В разделе 1.1 рассмотрена двухэтапная модель принятия решения. Она описывает ситуацию, когда система подразумевает возможность наблюдения реализаций случайных параметров в ходе её функционирования, при этом по факту реализации имеется возможность принять дополнительное решение. В двухэтапной модели потери, связанные с функционированием системы определяются как минимальное значение функции потерь второго этапа при фиксированных реализациях случайных параметров. Приводится два способа описания качества функционирования системы: посредством функции вероятности и посредством функции квантили. При оптимизации системы функция вероятности максимизируется, а функция квантили минимизируется, что приводит к двухэтапным задачам стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Для данной модели приводятся достаточные условия измеримости функции потерь и полунепрерывности функций вероятности и квантили. Доказывается эквивалентность поставленных двухэтапных задач двухэтапным задачам в априорной постановке, в которых стратегия второго этапа определятся как измеримая функция случайных параметров. Для двухэтапных задач с квантильным критерием приводится обоснование доверительного метода, заключающегося в переходе к эквивалентной минимаксной задаче.

В разделе 1.2 рассмотрены линейные двухэтапные модели, которые строятся на основе общей двухэтапной модели, но функции, описывающие потери и ограничения, являются линейными. Первой рассмотрена модель планирования производства. Для этой модели доказана эквивалентность априорной и апостериорной постановок и описан доверительный метод. Второй приводится модель оценивания эффективности энергосберегающих проектов с целью выбора проектов для реализации.

В разделе 1.3 формулируется двухуровневая модель с асиметричной информацией. В этой модели имеется два уровня иерархии, при этом на нижнем уровне принятия решений известны реализации случайных факторов, а на верхнем уровне есть только информация об их распределении. На базе этой модели строятся две модели. Первая модель предназначена для описания взаимодействия производителя продукции, находящегося на верхнем уровне иерархии, и поставщика ресурсов на нижнем уровне. Вторая модель является развитием модели оценивания эффективности энергосберегающих проектов, в которой на верхнем уровне действует инвестор проектов, а на нижнем уровне — их непосредственный исполнитель. Изучается специальный случай двухуровневой модели, в которой случайными являются только коэффициенты линейной функции потерь нижнего уровня. Для данной модели доказаны теоремы о полунепрерывности целевой функции и функции вероятности. Приводится модель определения налоговой ставки, в которой на верхнем уровне иерархии выступает государство, а на нижнем — производитель.

В разделе 1.4 формулируется двухуровневая модель с симметричной информацией. В этом модели информация о реализациях случайных факторов не известна ни на одном из уровней иерархии. Показано, что в скалярном случае задача может быть сведена к детерминированному эквиваленту, а в случае гауссовского распределения вычисление функции потерь нижнего уровня сводится к решению параметрического семейства задач квадратичного программирования. Приводится модель инвестирования производства, построенная на базе двухуровневой модели с симметричной информацией.

В разделе 1.5 формулируется двухуровневая модель конкурентного размещения предприятия. Модель сформулирована на базе двухуровневой задачи стохастического программирования с дискретными переменными оптимизации. В сформулированной модели присутствуют два игрока (лидер и последователь), последовательно размещающие свои предприятия с целью получения дохода от потребителей. Приведены две разновидности модели: с асимметричной информаций и с симметричной информацией о спросе потребителей.

Во второй главе описывается и обосновывается процедура дискретизации вероятностной меры в изучаемых моделях. В разделе 2.1 рассмотрен общий подход к дискретизации вероятностной меры. Случайные величины, участвующие в модели, приближаются последовательностью случайных величин, сходящейся по распределению. Для специальных классов задач стохастического программирования доказывается сходимость получаемой при проведении данной аппроксимации последовательности решений. Рассматриваются модели с симметричным распределением и с монотонными функциями потерь.

В разделе 2.2 строятся выборочные аппроксимации одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Доказывается гипосходимость выборочных функций вероятности, следствием которой является сходимость приближённых решений как по стратегии оптимизации, так и значению критериальной функции. Для задачи квантильной оптимизации доказывается теорема о достаточных условиях сходимости её приближённых решений, получаемых на основе выборочных аппроксимаций. Полученные результаты уточняются для линейной двухэтапной задачи с квантильным критерием и для линейной двухуровневой задачи с квантильным критерием. Показано, что достаточные условия сходимости аппроксимаций двухуровневой задачи выполнены для почти всех уровней надёжности.

В разделе 2.3 оценивается объём выборки, при которой решение аппроксимирующей задачи, полученное на основе выборки, является эпсилон-оптимальным решением исходной задачи с заданной вероятностью. Получены оценки для случая вероятностного критерия и конечного множества допустимых стратегий, для случая вероятностного критерия, липшицевой функции вероятности и ограниченного множества допустимых стратегий, для случая квантильного критерия и конечного множества допустимых стратегий.

В третьей главе разрабатываются численные методы синтеза оптимальных стратегий в стохастических моделях с вероятностными критериями. В разделе 3.1 описывается метод сведения двухэтапной линейной задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями к эквивалентным смешанным целочисленным линейным задачам. Доказываются теоремы об их эквивалентности.

В разделе 3.2 метод, аналогичный методу из раздела 3.1, разрабатывается для двухуровневых задач с квантильным критерием. Доказываются теоремы о свойствах множеств допустимых стратегий и о существовании решения задачи.

В разделе 3.3 стохастическая двухуровневая задача размещения предприятия сводится к эквивалентной двухуровневой дискретной детерминированной задаче. Разрабатываются методы построения верхних и нижних оценок оптимального значения её критериальной функции. Описывается алгоритм поиска локально-оптимального решения. Приводятся результаты численных экспериментов.

В разделе 3.4 разрабатывается приближённый численный метод решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием и функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру. На основе доверительного метода получаются верхние и нижние оценки функции квантили. Затем для оптимизации их значений применяется дискретизация вероятностной меры. Численный метод состоит из двух этапов. На первом этапе строится начальное приближение с помощью оптимизации на доверительном множестве в виде шара. На втором этапе полученное решение улучшается с помощью метода поиска с чередующимися окрестностями.

В разделе 3.5 на основе разработанного численного метода предлагается алгоритм решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Выборочная аппроксимация задачи сводится к эквивалентной задаче комбинаторной оптимизации, решаемой с помощью предложенного численного метода. Алгоритм решения задачи основан на постепенном увеличении объёма выборки, используемой для аппроксимации задачи.

В разделе 3.6 разработанный численный метод применятся для построения алгоритма решения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием и билинейной функцией потерь. Разработанный алгоритм сходен с алгоритмом из раздела 3.5, но использует другую структуру окрестностей решений.

В четвёртой главе разрабатываются методы построения доверительных множеств поглощения в стохастических системах. Задача построения множества поглощения аналогична задаче построения множества уровня функции вероятности. В разделе 4.1 приводятся два метода решения этой задачи. Первый метод основан на построении внутренних аппроксимаций множества поглощения с помощью доверительного метода. Предлагаются способы выбора доверительных множеств, позволяющие получить приемлемую внутреннюю аппроксимацию множества поглощения. Второй метод основан на выборочных оценках функции вероятности. Приводятся оценки объёма выборки, достаточного для построения множества поглощения. Рассматривается пример построения доверительного множества поглощения в двухэтапной модели планирования производства.

В разделе 4.2 на основе предложенных методов строится множество допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома. Уточняются способы выбора доверительных множеств для построения множества поглощения. Приводятся результаты численных экспериментов.

В пятой главе приводится описание разработанного комплекса программ, реализующих выборочные методы решения задач стохастического программирования, и результаты его применения для решения задач, поставленных в работе.

Раздел 5.1 посвящён архитектуре программного комплекса. Комплекс состоит из модулей решения одноэтапной линейной задачи, решения двухэтапной билинейной задачи, решения двухуровневой задачи стохастического программирования и решения задачи распределения инвестиций. В разделе 5.2 приводятся результаты решения одноэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, в том числе задач большой размерности. В разделе 5.3 описаны результаты решения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием. В разделе 5.4 с помощью разработанного комплекса программ решается задача выбора энергосберегающих проектов. В разделе 5.5 решена двухуровневая задача планирования производства. В разделе 5.6 приведены и проанализированы результаты решения задачи определения налоговой ставки.

В разделе 5.7 решается задача оптимизации параметров взлётно-посадочной полосы. Приводится постановка задачи, которая сводится к задаче минимизации функции квантили. Приводится алгоритм её решения, реализованный в программном комплексе, и результаты численных экспериментов.

В заключении подводятся итоги работы, описываются перспективы дальнейших исследований.

На защиту выносятся следующие положения:

1) подход к построению математических моделей стохастических иерархических систем с учётом вероятностных критериев [22, 23, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 72, 73, 127, 142];

2) доказательство сходимости решений выборочных аппроксимаций одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями и оценки достаточного объёма выборки для построения аппроксимаций [18, 23–25, 28, 29, 143, 144];

3) численные методы решения одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями [24, 28, 34, 35, 37, 127, 141, 152];

4) алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием [32, 80, 140];

5) численные методы построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в стохастических системах [39, 48];

6) комплекс программ, реализующий разработанные численные методы и алгоритмы синтеза стратегий в стохастических системах [26, 49, 75].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались следующих научных семинарах и конференциях

1) научные семинары кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (под рук. проф. Кибзуна А.И.);

2) Общемосковский постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации» (под рук. проф. Поляка Б.Т., 3 декабря 2019 г.);

3) Европейская мини-конференция «EURO Mini Conference on Stochastic Programming and Energy Applications» (Франция, Париж, 2014);

4) Первый международный симпозиум «1st International Workshop on Bi-level Programming (IWOBIP'16)» (Мексика, Монтеррей, 2016 г.);

5) Вторая европейская конференция по стохастической оптимизации «2nd European Conference on Stochastic Optimization. Stochastic Optimization in Service Science.» (Италия, Рим, 2017 г.);

6) Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013 г.);

7) Вторая научно-техническая конференция «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (Москва, 2013 г.).

8) XVI и XVII Байкальские международные школы-семинары «Методы оптимизации и их приложения». (Иркутск, 2014, 2017 гг.);

9) XV Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2015 г.);

10) XX Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015 г.);

11) Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций (DOOR-2016)» (Владивосток, 2016 г.);

12) XVI–XVIII Международные конференции «Авиация и космонавтика». (Москва, 2017–2019 гг.);

13) VII Международная конференция «Проблемы оптимизации и их приложения (OPTA-2018)» (Омск, 2018 г.);

14) Международная конференция «Теория математической оптимизации и исследование операций (MOTOR-2019)» (Екатеринбург, 2019 г.).

Работа поддержана грантами РФФИ 13-07-13100-офи_м_РЖД, 14-07-00006-а, 17-07-00203-а, 19-07-00436-а, 20-37-70022-Стабильность, грантом РНФ 15-11-10009.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 научных работах, из которых 6 работ [127, 140–142, 144, 152] в иностранных изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus, 9 работ [22, 23, 28, 29, 31–34, 48] в российских изданиях, индексируемых в системах цитирования Web of Science или Scopus, 2 работы [37, 75] в изданиях, включённых в перечень ВАК, 11 работ [18, 24, 25, 30, 35, 38, 39, 72, 73, 80, 143] в других научных изданиях и материалах конференций. Получено два государственных свидетельства о регистрации программ для ЭВМ [26, 49].

Глава 1. Построение и исследование свойств двухэтапных и двухуровневых моделей принятия решений

Целью данной главы является построение и исследование моделей, описывающих принятие решений в сложных системах, на функционирование которых оказывают влияние случайные факторы. Описываются процедуры построения моделей, основанных на двухэтапных и двухуровневых задачах стохастического программирования с вероятностными и квантильными критериями.

В том случае, когда в системе имеется один субъект, которому информация о реализациях случайных факторах становится известна после момента первоначального решения, корректируемого после возникновения данной информации, для описания системы может быть использован аппарат двухэтапных задач стохастического программирования. Общая постановка двухэтапной модели принятия решений и её свойства описаны в разделе 1.1. В разделе 1.2 на основе этой постановки приводятся модели конкретных экономических систем. Моделирование иерархического взаимодействия двух субъектов (лидера и последователя) осуществляется с помощью двухуровневых моделей. В зависимости от осведомлённости субъектов о реализациях случайных факторов разделяют модели с симметричной и с асиметричной информацией. В разделе 1.3 формулируется общая двухуровневая модель с асимметричной информацией, описывается её применение для моделирования иерархических систем, а также изучается важный частный случай модели, когда случайность влияет только на целевую функцию последователя. В разделе 1.4 исследуется двухуровневая модель с симметричной информацией, на основе которой формулируется модель определения налоговой ставки. В разделе 1.5 строятся дискретные двухуровневые модели размещения предприятий с асимметричной и симметричной информацией.

1.1. Двухэтапная модель принятия решений

В данном разделе описывается двухэтапная модель принятия решения в стохастических системах с вероятностным и квантильным критериями в общей постановке, изучаются свойства непрерывности критериальных функций, показывается эквивалентность априорной и апостериорной постановок двухэтапных задач с вероятностными критериями в общей постановке, приводится обоснование доверительного метода для двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием.

1.1.1. Описание модели

Сформулируем вначале двухэтапную модель принятия решений в апостериорной постановке. В рамках этой модели формулируются задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями.

Опишем модель случайных факторов, влияющих на функционирование изучаемой системы. Пусть задано вероятностное пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Для удобства считается, что пространство элементарных событий является множеством $\mathbb{R}^m$. Это позволяет отождествить элементарные события и реализации некоторого случайного вектора X. Таким образом, будем считать, что X — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^m$, определённый на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, и для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено $X(x) = x$. Через $\mathcal{X}$ обозначен носитель вероятностной меры $\mathbf{P}$. Под носителем вероятностной меры понимается наименьшее замкнутое множество единичной вероятностной меры. Это значит, что $\mathbf{P}\{X \in B\} = \mathbf{P}(B)$ для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^m$.

Будем считать, что вероятностное пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ является полным, т. е. любое подмножество множества вероятностной меры нуль содержится в σ-алгебре $\mathcal{F}$. Данное условие всегда можно обеспечить, построив лебегово пополнение исходной σ-алгебры относительно меры $\mathbf{P}$.

Перейдём к описанию процесса принятия решений. Предполагается, что решения принимаются последовательно на двух этапах. Через $U \subset \mathbb{R}^r$ обозначим множество стратегий первого этапа. Множество стратегий второго этапа обозначим через $Y \subset \mathbb{R}^s$. Стратегия первого этапа $u \in U$ выбирается, когда реализация случайного вектора X неизвестна, а стратегия второго этапа $y \in Y$ выбирается, когда становится известной реализация случайного вектора X. Будем считать, что множества U и Y являются замкнутыми. Пусть потери, связанные с реализацией стратегий u, y, описываются функцией потерь второго этапа $\Phi_2 \colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$, где $\mathbb{R}^* \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — расширенная действительная прямая.

Целевая функция потерь (первого этапа) $\Phi \colon U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ определяется как минимальное значение функции потерь второго этапа при известных стратегии первого этапа $u \in U$ и реализации случайных факторов $x \in \mathcal{X}$:

$$\Phi(u, x) \triangleq \inf_{y \in Y} \{\Phi_2(u, y, x) \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}, \tag{1.1}$$

где $Q\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ — функция, задающая дополнительные ограничения задачи второго этапа. Если при заданных $(u, x) \in U \times \mathcal{X}$ для всех $y \in Y$ выполнено $Q(u, y, x) > 0$, то по определению полагается $\Phi(u, x) = +\infty$.

Приведённое определение функции потерь описывает тот факт, что на втором этапе решение принимается исходя из минимизации потерь при уже известной стратегии первого этапа и при известной реализации случайных параметров.

Замечание 1.1. Введённое определение функции потерь позволяет без ограничения общности считать, что $U = \mathbb{R}^r$, а $Y = \mathbb{R}^s$. В случае, если, например, $U \neq \mathbb{R}^r$, можно положить $\Phi_2(u, y, x) = +\infty$ для всех $u \notin U$, поскольку по определению функция Φ_2 принимает значения из расширенной действительной прямой.

Определим функцию вероятности $P_\varphi\colon U \to [0, 1]$ следующим образом:

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^*$ — фиксированный уровень функции потерь. Таким образом, $P_\varphi(u)$ — вероятность события, когда значение функция потерь $\Phi(u, X)$ не превышает фиксированный порог φ. Считается, что при наступлении данного события моделируемая система успешно функционирует.

Необходимость обеспечить с наибольшей вероятностью успешное функционирование системы приводит к задаче максимизации функции вероятности

$$\alpha_\varphi^* \triangleq \sup_{u \in U} P_\varphi(u), \quad U_\varphi^* \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi(u). \tag{1.3}$$

Другой подход к принятию решений состоит в том, что вероятность успешного функционирования системы фиксируется на некотором заданном уровне надёжности $\alpha \in$ $\in (0, 1]$, а потери при этом минимизируются. Для этого вводится в рассмотрение функция квантили $\varphi_\alpha\colon U \to \mathbb{R}^*$, определённая по правилу

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{1.4}$$

Наряду с обозначением $\varphi_\alpha(u)$ будем использовать обозначение

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq [\Phi(u, X)]_\alpha,$$

которое подчёркивает, что квантиль является функционалом на множестве случайных величин.

Как видно из приведённого определения, функция квантили — это минимальный уровень потерь, который не превышается с заданной вероятностью α.

Замечание 1.2. В определении (1.2) предполагается, что функция $x \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой. Достаточные условия измеримости данной функции будут приведены ниже.

Замечание 1.3. Заметим, что из-за наличия ограничения $Q(u, y, x) \leqslant 0$ при некоторых $u \in U$ может оказаться, что $P_\varphi(u) < \alpha$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$. Поэтому, если для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$ выполнено $P_\varphi(u) < \alpha$ по определению полагаем, что $\varphi_\alpha(u) = +\infty$.

Стремление минимизировать потери на заданном уровне вероятности приводит к задаче минимизации функции квантили

$$\varphi_\alpha^* \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad V_\alpha^* \triangleq \operatorname{Arg} \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{1.5}$$

Если $\varphi_\alpha^* = +\infty$, то, как принято в теории оптимизации, будем считать, что множество V_α^* пусто. Множества U_φ^* и V_α^* будем называть множествами оптимальных стратегий в соответствующих задачах.

Следует обратить внимание на то, что задачи (1.3) и (1.5) сформулированы в апостериорной постановке. Это значит, что сначала выбирается стратегия первого этапа u, а затем по факту реализации случайных параметров x — оптимальная стратегия второго этапа $y \in Y$.

1.1.2. Свойства задач, моделирующих процесс принятия решений

Для того чтобы задачи (1.3) и (1.5) были сформулированы корректно, необходима измеримость целевой функции потерь $x \mapsto \Phi(u, x)$. Для исследования данного вопроса может быть применена теория нормальных интегрантов [40, 191].

В случае полной σ-алгебры $\mathcal{F}$ можно дать следующее определение нормального интегранта.

Определение 1.1. Функция $f\colon \mathbb{R}^r \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ называется *нормальным интегрантом*, если f является $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$-измеримой и для всех $x \in \mathcal{X}$ функция $u \mapsto f(u,x)$ полунепрерывна снизу.

Здесь и далее через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$ обозначено произведение борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ и σ-алгебры $\mathcal{F}$. Определение нормального интегранта для произвольной (вообще говоря, неполной) σ-алгебры $\mathcal{F}$ сложнее и даётся в терминах измеримости многозначных отображений [191].

Приведём достаточное условие, при котором функция является нормальным интегрантом является нормальным интегрантом [191].

Теорема 1.1 ([191]). *Если функция $\Psi\colon U \times \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ является полунепрерывной снизу по совокупности аргументов, то Ψ — нормальный интегрант.*

Напомним определение полунепрерывной функции.

Определение 1.2. Функция $f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^*$ называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*), если все ее нижние (верхние) множества уровня

$$\{u \in \mathbb{R}^r \mid f(u) \leqslant a\} \quad (\{u \in \mathbb{R}^r\colon f(u) \geqslant a\}) \tag{1.6}$$

замкнуты для всех $a \in \mathbb{R}^*$.

Известно следующее утверждение [191, теорема 14.37].

Теорема 1.2 ([191]). *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^r \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ является нормальным интегрантом,*

$$a(x) \triangleq \inf_{u \in \mathbb{R}^r} f(u,x), \quad A(x) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in \mathbb{R}^r} f(u,x).$$

Тогда функция $x \mapsto a(x)$ измерима. При этом множество $B = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) \neq \varnothing\}$ измеримо, а также для каждого $x \in B$ можно выбрать точку минимума $u(x) \in A(x)$ такую, что функция $x \mapsto u(x)$ измерима.

Сформулируем достаточные условия измеримости целевой функции потерь $x \mapsto \Phi(u,x)$.

Теорема 1.3. *Пусть для каждого $u \in U$ функции $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ являются нормальными интегрантами. Тогда для всех $u \in U$ функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ является измеримой.*

Доказательство теоремы 1.3. Для доказательства теоремы проверим условия теоремы 1.2. Заметим, что целевую функцию потерь при дополнительном соглашении $-\infty + \infty = +\infty$ можно представить в виде

$$\Phi(u,x) = \inf_{y\in Y}\{\Phi_2(u,y,x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x))\}, \tag{1.7}$$

где

$$\delta_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ +\infty, & \text{если } q \notin A. \end{cases} \tag{1.8}$$

Заметим, что $\delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x)) \leqslant 0$ тогда и только тогда, когда $Q(u,y,x) \leqslant 0$. Поэтому нижнее множество уровня функции $(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x))$ для всех $a \in [0,+\infty)$ совпадает с множеством

$$\{(y,x) \in Y \times \mathcal{X} \mid Q(u,y,x) \leqslant 0\}, \tag{1.9}$$

которое является измеримым и сечение которого при каждом $x \in \mathcal{X}$ является замкнутым. При $a \in [-\infty,0)$ нижнее множество уровня пусто, а при $a = +\infty$ нижнее множество уровня совпадает с $Y \times \mathcal{X}$. Поэтому по определению функция $(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x))$ является нормальным интеграном. А значит, и функция

$$(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x)) \tag{1.10}$$

— нормальный интегрант. Таким образом, согласно теореме 1.2 функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ является измеримой. □

Замечание 1.4. Отметим, что в случае неполной σ-алгебры $\mathcal{F}$ при полунепрерывности по стратегии и измеримости по совокупности аргументов функций $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ нельзя гарантировать измеримость функции $x \mapsto \Phi(u,x)$ относительно $\mathcal{F}$. Поэтому в случае борелевских функций $(y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ может не быть борелевской, но будет измеримой по Лебегу.

Далее приведём условия того, что минимум в (1.1) является нормальным интегрантом. Для этого понадобится следующее определение [191, определение 1.16].

Определение 1.3 ([191]). Говорят, что функция $f\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^*$ со значениями $f(u,y)$ *обладает ограниченными множествами уровня*, причём *локально-равномерно* по

u, если для любых $\tilde{u} \in \mathbb{R}^r$ и $a \in \mathbb{R}$ существует открытое множество $V \subset \mathbb{R}^r$, содержащее точку $\tilde{u}$, такое, что множество $\{(u, y) \mid u \in V,\ f(u, y) \leqslant a\}$ ограничено в $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$.

Очевидно, что условия определения 1.3 выполнены для ограниченного множества Y допустимых значений y.

Справедливо следующее утверждение [191, утверждение 14.47].

Теорема 1.4 ([191]). *Пусть функция $g\colon (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ является нормальным интегрантом,*

$$f(u, x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^s} g(u, y, x).$$

Если для всех $x \in \mathcal{X}$ функция $u \mapsto f(u, x)$ полунепрерывна снизу, то функция $f(\cdot)$ является нормальным интегрантом.

Замечание 1.5. Как отмечено в [191], условия теоремы 1.4 выполнены, например, когда для всех $x \in \mathcal{X}$ нормальный интегрант $(u, y) \mapsto g(u, y, x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причем локально-равномерно по u.

Из данной теоремы следует утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть функция потерь $(u, y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ является нормальным интегрантом и при каждом $x \in \mathcal{X}$ функция $(u, y) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причём локально-равномерно по u, функция $(u, y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ — нормальный интегрант. Тогда функция потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является нормальным интегрантом.*

Доказательство теоремы 1.5. Как было отмечено при доказательстве теоремы 1.3,

$$\delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x)) \leqslant 0$$

тогда и только тогда, когда $Q(u, y, x) \leqslant 0$. Поэтому нижнее множество уровня $a \in [0, +\infty)$ функции $(u, y, x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))$ совпадает с множеством

$$\{(u, y, x) \in Y \times \mathcal{X} \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}, \tag{1.11}$$

которое является измеримым и сечение которого при каждом $x \in \mathcal{X}$ является замкнутым. Измеримость и замкнутость множеств уровня $a \in [-\infty, 0) \cup \{+\infty\}$ проверяется тривиально. Таким образом, функция $(u, y, x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))$ — нормальный интегрант.

Поэтому и функция

$$(u,y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u,y,x)) \tag{1.12}$$

— также нормальный интегрант. $\square$

Сформулируем утверждения о полунепрерывности функций вероятности и квантили. Известен следующий результат.

Теорема 1.6 ([51]). *Если U — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^r$, функция потерь $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ принимает только конечные значения, полунепрерывна снизу по $u \in U$ для почти всех x по мере $\mathbf{P}$ и измерима по x для всех $u \in U$, то для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ полунепрерывна сверху по $u \in U$, а функция $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ полунепрерывна снизу по $u \in U$ для любого $\alpha \in (0,1)$.*

Аналогичный результат сформулирован в [153, лемма 2.11].

Основываясь на теореме 1.6, докажем следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом. Тогда функция вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ является полунепрерывной сверху для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$, а функция квантили $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ — полунепрерывной снизу для всех $\alpha \in (0,1]$.*

Доказательство теоремы 1.7. Заметим, что

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} = \mathbf{P}\{\tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,X)) \leqslant 0\}, \tag{1.13}$$

где

$$\tilde{\delta}_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ 1, & \text{если } q \notin A. \end{cases} \tag{1.14}$$

Построим нижние множества уровня функции $(u,x) \mapsto \tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,x))$:

$$\{(u,x) \in U \times \mathcal{X} \mid \tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,x)) \leqslant a\} = \\ = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a < 0; \\ \{(u,x) \in U \times \mathcal{X} \mid \Phi(u,x) \leqslant \varphi\}, & \text{если } 0 \leqslant a < 1; \\ U \times \mathcal{X}, & \text{если } a \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Таким образом, нижние множества уровня содержатся в σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r) \times \mathcal{F}$, и их сечения при фиксированных $x \in \mathcal{X}$ являются замкнутыми. Отсюда следует, что функция $(u,x) \mapsto$

$\tilde{\delta}_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,x))$ является нормальным интегрантом, а значит, является полунепрерывной снизу по $u \in U$ для всех $x \in \mathcal{X}$ и измеримой по x для всех u, при этом согласно (1.14) она принимает только конечные значения. Поэтому согласно теореме 1.6 функция вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ является полунепрерывной сверху для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$.

Для доказательства полунепрерывности функции квантили проверим равенство

$$U_P \triangleq \{u \in U \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\} = U_\Phi \triangleq \{u \in U \mid \varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi\} \tag{1.16}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$ и $\alpha \in (0,1]$. Равенство (1.16) известно как лемма Розенблатта, ее доказательство для случая, когда функция потерь принимает лишь конечные значения, можно найти в [51, лемма 2.10]. Пусть $u \in U_P$, т. е. выполнено неравенство $P_\varphi(u) \geqslant \alpha$. По определению квантили $\varphi_\alpha(u) = \min\{\tilde{\varphi} \in \mathbb{R}^* \mid P_{\tilde{\varphi}}(u) \geqslant \alpha\}$, а значит, $\varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi$. Заметим, что данное неравенство выполнено и при бесконечных значениях φ или $\alpha = 1$, так как функция квантили всегда определена (но может принимать бесконечные значения). Таким образом, $u \in U_\Phi$ и $U_P \subset U_\Phi$. Пусть теперь $u \in U_\Phi$. Тогда $\psi \triangleq \varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi$. Заметим, что $\psi \in \mathbb{R}^*$ для любых $\varphi \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in (0,1]$. Из монотонности функции вероятности получаем, что $\alpha \leqslant P_\psi(u) \leqslant P_\varphi(u)$, поэтому $U_\Phi \subset U_P$. Равенство $U_P = U_\Phi$ доказано.

При полунепрерывности функции вероятности множества уровня U_P замкнуты. Из равенства (1.16) следует, что множества уровня функции квантили также замкнуты. А значит, функция квантили полунепрерывна снизу. □

Из теоремы 1.7 получаем утверждение о существовании оптимальных стратегий в задачах (1.3) и (1.5).

Следствие 1.1. *Пусть множество U является компактом, функции $(u,y,x) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ и $(u,y,x) \mapsto Q(u,y,x)$ являются нормальными интегрантами и при каждом $x \in \mathcal{X}$ функция $(u,y) \mapsto \Phi_2(u,y,x)$ обладает ограниченными множествами уровня, причём локально-равномерно по u. Тогда для всех $\varphi \in \mathbb{R}^*$ множество U_φ^* задачи максимизации функции квантили непусто. Если существует точка $u \in U$, в которой $\varphi_\alpha(u) < +\infty$, то и множество V_α^* непусто.*

Доказательство следствия 1.1. Из теоремы 1.5 следует, что функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом. Тогда по теореме 1.7 функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ полунепрерывна сверху, а функция $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ полунепрерывна снизу. Таким образом, утверждение следует из теоремы Вейерштрасса. □

1.1.3. Об эквивалентности априорных и апостериорных постановок задач

Наряду с апостериорными постановками задач стохастического программирования рассматриваются априорные постановки. В априорной постановке предполагается, что стратегии первого и второго этапа выбираются одновременно. При этом стратегия первого этапа является детерминированной, а стратегией второго этапа является функция, зависящая от реализации случайных параметров. Таким образом, уже на первом этапе лицо, принимающее решение, выбирает стратегию второго этапа при всех возможных реализациях случайных параметров, чтобы применить её в тот момент, когда реализация случайных параметров станет известной.

Приведём формулировки двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями в априорной постановке. Через $\mathcal{Y}$ обозначим множество $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(Y))$-измеримых функций. Для фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}^*$ определим функционал вероятности $\overline{P}_\varphi \colon U \times \mathcal{Y} \to [0,1]$ по правилу

$$\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \triangleq \begin{cases} \mathbf{P}\{\Phi_2(u, y(X), X) \leqslant \varphi,\ Q(u, y(X), X)) \leqslant 0\}, & \text{если } \varphi < +\infty, \\ 1, & \text{если } \varphi = +\infty, \end{cases} =$$

$$= \mathbf{P}\{\Phi_2(u, y(X), X) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y(X), X)) \leqslant \varphi\}, \quad (1.17)$$

где

$$\delta_A(q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \in A; \\ +\infty, & \text{если } q \notin A. \end{cases}$$

Поскольку для всех $u \in U$ функции $(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$, $(y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ и $x \mapsto y(x)$ являются измеримыми, то функции $x \mapsto \Phi_2(u, y(x), x))$ и $x \mapsto Q(u, y(x), x))$ являются измеримыми для всех $u \in U$ как композиции измеримых отображений, а значит, и функция

$$x \mapsto \Phi_2(u, y(x), x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y(x), x)) \quad (1.18)$$

измерима. Таким образом, определение (1.17) является корректным при указанных предположениях.

Для фиксированного уровня вероятности $\alpha \in (0, 1]$ определим функционал квантили $\bar{\varphi}_\alpha\colon U \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}^*$ по правилу

$$\bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \geqslant \alpha\}. \tag{1.19}$$

Будем рассматривать задачу максимизации функционала вероятности

$$\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \to \sup_{u \in U,\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \tag{1.20}$$

и задачу минимизации функционала квантили

$$\bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) \to \inf_{u \in U,\, y(\cdot) \in \mathcal{Y}}. \tag{1.21}$$

Сформулируем утверждение об эквивалентности задач (1.3) и (1.20), а также (1.5) и (1.21).

Теорема 1.8. *Пусть для каждого $u \in U$ функция потерь $(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ является нормальным интегрантом и для всех $x \in \mathcal{X}$ обладает ограниченными множествами уровня по y, функция $(y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ — нормальный интегрант. Тогда для любого $u \in U$ выполнено:*

$$P_\varphi(u) = \max_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)), \tag{1.22}$$

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)). \tag{1.23}$$

Доказательство теоремы 1.8. Пусть $(u, y(\cdot)) \in U \times \mathcal{Y}$. Заметим, что

$$\Phi_2(u, y(x), x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y(x), x)) \geqslant \inf_{y \in Y}\{\Phi_2(u, y, x) + \delta_{[-\infty,0]}(Q(u, y, x))\} = \Phi(u, x)$$

для всех $x \in \mathcal{X}$. Поэтому $\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \leqslant P_\varphi(u)$, а $\bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot)) \geqslant \varphi_\alpha(u)$, откуда следует, что

$$\sup_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \leqslant P_\varphi(u), \qquad \inf_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot)) \geqslant \varphi_\alpha(u).$$

Покажем, что полученные неравенства выполнены как равенства. Так как функции $(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ и $(y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ — нормальные интегранты и в силу предположения об ограниченности множеств уровня функции потерь справедливо, что

$$Y^*(u, x) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{y \in Y}\{\Phi_2(u, y, x) \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\} \neq \varnothing, \tag{1.24}$$

если $\Phi(u, x) < +\infty$. По теореме 1.2 существует измеримая функция $x \mapsto y_u(x)$ такая, что $y_u(x) \in Y^*(u, x)$ при $\Phi(u, x) < +\infty$. Доопределим функцию $x \mapsto y_u(x)$ для случая $\Phi(u, x) = +\infty$ так, чтобы $y_u(x) \in Y$. Легко видеть, что $P_\varphi(u) = \overline{P}_\varphi(u, y_u(\cdot))$ и $\varphi_\alpha(u) = \bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot))$. Таким образом, выполнены доказываемые равенства (1.22) и (1.23). $\square$

1.1.4. Применение доверительного метода

Доверительный метод [51, 54] является одним из основных методов решения задач стохастического программирования с квантильным критерием. Он позволяет от стохастической задачи перейти к детерминированной минимаксной задаче, в которой оптимизация осуществляется по всем множествам, имеющим заданную вероятностную меру. Опишем данный метод применительно к двухэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием.

Введём функцию $\Psi\colon U \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^*$ по правилу

$$\Psi(u, S) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(u, x) = \sup_{x \in S} \inf_{y \in Y} \{\Phi_2(u, y, x) \mid Q(u, y, x) \leqslant 0\}. \tag{1.25}$$

Рассмотрим минимаксную задачу

$$\Psi(u, S) \to \inf_{u \in U,\, S \in \mathcal{F}_\alpha}, \tag{1.26}$$

где $\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(S) \geqslant \alpha\}$. Множества из семейства $\mathcal{F}_\alpha$ называются доверительными.

В [51] показано, что для одноэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием минимаксная задача вида (1.26) эквивалентна задаче вида (1.5). Переход от задачи квантильной минимизации к минимаксной задаче назван в [51, 153] доверительным методом. Покажем, что этот метод применим и для двухэтапной задачи квантильной оптимизации. Специфика двухэтапной задачи состоит в возможности бесконечных значений функции потерь, не принимаемых во внимание в [51].

Теорема 1.9. *Пусть для каждого $u \in U$ функции $(y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ и $(y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ являются нормальными интегрантами. Тогда*

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \Psi(u, S). \tag{1.27}$$

Доказательство теоремы 1.9. Согласно теореме 1.3, при выполнении условия теоремы функция $x \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой, поэтому задача (1.5) сформулирована корректно.

Пусть $u \in U$ и $S \in \mathcal{F}_\alpha$. Справедливо, что

$$P_{\Psi(u,S)}(u) = \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \Psi(u, S)\} \geqslant \mathbf{P}(S) \geqslant \alpha.$$

Поэтому

$$\Psi(u,S) \geqslant \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\} = \varphi_\alpha(u). \tag{1.28}$$

Покажем, что равенство в (1.28) достигается. Определим множество

$$S_u \triangleq \{x \in \mathcal{X} \colon \Phi(u,x) \leqslant \varphi_\alpha(u)\}. \tag{1.29}$$

Легко видеть, что

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} = \sup_{x \in S_u} \Phi(u,x) = \Psi(u,S_u).$$

Таким образом, доказываемое равенство (1.27) выполнено. □

Заметим, что решение задачи

$$\Psi(u,S) \to \inf_{u \in U} \tag{1.30}$$

для фиксированного множества S обеспечивает верхнюю оценку оптимального значения функции квантили в задаче (1.5). Этот факт лёг в основу гарантирующего подхода, позволяющего получать верхние оценки функции квантили для некоторых классов задач стохастического программирования с квантильным критерием [57]. Заметим, что для выпуклой при всех $x \in \mathcal{X}$ функции $u \mapsto \Phi(u,x)$ задача (1.30) является задачей выпуклой оптимизации, что позволяет использовать известные методы для её решения.

1.2. Двухэтапные модели экономических систем

В данном разделе описывается построение моделей экономических систем с помощью аппарата двухэтапных задач, описанного в предыдущем разделе. Для описания экономических моделей в наибольшей мере подходят двухэтапные задачи, в которых целевые функции и ограничения описываются линейными функциями. Этот класс двухэтапных задач с квантильным критерием был введён в [57], где для частного случая линейной задачи доказана эквивалентность априорной и апостериорной постановок. В данном разделе теорема об эквивалентности двух постановок задач распространяется на более общий случай.

Поиск оптимальной оптимизационной стратегии в линейной двухэтапной задаче затруднителен, поэтому разработан ряд алгоритмов для поиска гарантирующих стратегий в непрерывном [57] и дискретном случае [19]. В [151] для задачи с квантильным критерием, близкой к рассматриваемой в данном разделе, предложены два алгоритма. Один из них основан на сведе́нии задачи к задаче смешанного целочисленного программирования, а второй — на сведе́нии задачи к последовательности задач выпуклой оптимизации. Данные алгоритмы используют доверительный метод, однако обоснование корректности его применения в случае, когда целевые функции могут принимать бесконечные значения, ранее проведено не было. В данном разделе описан общий подход к использованию доверительного метода для решения задачи.

1.2.1. Моделирование планирования производства

В данном разделе описывается построение математической модели планирования производства с учётом влияния случайных факторов. Будем считать, что лицо, принимающее решение, является производителем продукции, которому необходимо обеспечить случайный спрос потребителей. Предполагается, что реализация случайных факторов становится известной после момента времени, в который необходимо принять первоначальное решение, и есть возможность принять дополнительное решение по факту реализации случайных параметров. Для производства продукции необходимо закупить сырьё, но на этапе первоначального планирования спрос неизвестен. А значит, невозможно определить необходимый для закупки объём сырья. Однако, имеется возможность закупить дополнительное сырьё по более высокой цене после того момента, когда реализация спроса становится известной.

Для моделирования описанного выше поведения производителя продукции можно использовать аппарат двухэтапных задач стохастического программирования. Наиболее известен подход, когда в качестве критериальной функции задачи используется математическое ожидание, что оправдано при большом количестве промежутков планирования. При планировании на малое количество периодов может возникнуть ситуация, когда фактические издержки при реализации проекта будут сильно отличаться от средних. В такой ситуации для обеспечивания требований надёжности можно применять вероятностный и квантильный критерии.

Опишем подход, основанный на использовании вероятностного критерия. Лицо, принимающее решение, задаёт максимально допустимую стоимость закупки сырья $\varphi \in \mathbb{R}$. В качестве критерия задачи рассматривается вероятность того, что стоимость сырья не превысит величину φ. Этот подход рекомендуется применять, когда бюджет проекта известен заранее и его превышение приводит к тяжёлым последствиям.

Другой подход основан на использовании квантильного критерия. При нём на допустимом уровне $\alpha \in (0, 1)$ фиксируется вероятность превышения бюджета. Квантиль уровня затрат, непревышение которых гарантируется с вероятностью α, минимизуется. Значение α следует брать близким к единице, а его точное значение зависит от склонности лица, принимающего решение, к риску. Этот подход рекомендуется применять для определения планируемого бюджета проекта.

Пусть имеется r типов сырья, решение о закупке которых необходимо принять на первом этапе планирования, когда реализации случайных параметров неизвестны. Вектор, составленный из объёмов закупаемого сырья, обозначим через u. Вектор цен на сырьё обозначим через $c(x)$, где x — реализация случайных факторов. На втором этапе планирования необходимо принять решение о закупке дополнительного сырья s различных типов. Вектор объёмов закупаемых ресурсов на втором этапе обозначим через y. Вектор цен на сырьё, закупаемое на втором этапе, обозначим через $q(x)$. Производитель выпускает l типов продукции. Вектор, составленный из объёмов спроса на каждый из видов продукции, обозначим через $b(x)$. Технологию производства описывают матрицы $A(x) = (a_{ij}(x))$ и $B(x) = (b_{ij}(x))$ на первом и втором этапах соответственно. Элементы $a_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ показывают объём i-го типа продукции, получаемого из единицы сырья j-го типа. Заметим, что допускается ситуация, когда из одного типа сырья можно получать несколько видов продукции, но соотношения между ними строго заданы. Случайность элементов матриц связана с неопределённостью качества закупаемого сырья, которое невозможно установить на этапе принятия решения. Будем считать, что случайные факторы описываются моделью

$$\mathrm{col}(c(x), q(x), A(x), B(x), b(x)) \in \mathbb{R}^{r+s+l(r+s+1)} \tag{1.31}$$

— вектор, составленный из векторов и матриц

$$A(x) \triangleq A^0 + \sum_{i=1}^{m} A^i x_i, \quad B(x) \triangleq B^0 + \sum_{i=1}^{m} B^i x_i,$$
$$c(x) \triangleq c^0 + \sum_{i=1}^{m} c^i x_i, \quad q(x) \triangleq q^0 + \sum_{i=1}^{m} q^i x_i, \quad b(x) \triangleq b^0 + \sum_{i=1}^{m} b^i x_i,$$

$A^i \in \mathbb{R}^{l\times r}$, $B^i \in \mathbb{R}^{l\times s}$, $c^i \in \mathbb{R}^r$, $q^i \in \mathbb{R}^s$, $b^i \in \mathbb{R}^l$, $i = \overline{0, m}$.

В теории двухэтапных задач принята терминология, в которой матрица $A(x)$ называется технологической, а матрица $B(x)$ — матрицей рекурсии.

Описанная система принятия решений приводит к целевой функции

$$\Phi(u, x) = c^\top(x)u + \inf_{y \in Y}\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}, \tag{1.32}$$

где $Y = \{y \in \mathbb{R}^s \mid y \geqslant 0\}$.

Множество допустимых стратегий первого этапа обозначим через U. Ограничения на стратегии первого этапа могут быть связаны с финансовыми и физическими ограничениями на объём закупаемых ресурсов.

Подход, основанный на использовании вероятностного критерия, приводит к задаче оптимизации типа (1.3)

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} \to \max_{u \in U}, \tag{1.33}$$

решение которой обеспечивает стратегию, гарантирующую максимальную вероятность выполнения бюджета проекта.

Другой подход, основанный на квантильном критерии приводит к задаче типа (1.5)

$$\varphi_\alpha(u) = [\Phi(u, X)]_\alpha \to \min_{u \in U}, \tag{1.34}$$

решение которое даёт стратегию, минимизирующую квантиль издержек при реализации проекта.

1.2.2. Свойства модели планирования производства

Функция потерь (1.32) может быть представлена в форме (1.1), если

$$\Phi_2(u, y, x) = c^\top(x)u + q^\top(x)y, \tag{1.35}$$

$$Q(u, y, x) = -\min_{i=\overline{1,l}} \left(A(x)u + B(x)y - b(x)\right)_i. \tag{1.36}$$

Функции $(u, y, x) \mapsto \Phi_2(u, y, x)$ и $(u, y, x) \mapsto Q(u, y, x)$ непрерывны, поэтому являются нормальными интегрантами, а значит, по теореме 1.3 задачи (1.33) и (1.34) для указанных функций сформулированы корректно. Более того, в [214] доказано, что функция

$$u \mapsto \inf_{y \in Y}\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\} \tag{1.37}$$

является выпуклой полиэдральной на замкнутом множестве значений u, для которых множество $\{y \in Y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}$ непусто. Таким образом, функция (1.37) является полунепрерывной снизу, а значит, согласно теореме 1.4 функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является нормальным интегрантом.

Нормальность интегранта $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ в силу теоремы 1.7 гарантирует полунепрерывность сверху функции вероятности и полунепрерывность снизу функции квантили, что обеспечивает существование оптимальных стратегий в задачах максимизации функции вероятности и минимизации функции квантили на компактном множестве.

Представляет интерес вероятность события $\{\Phi(u,X) = -\infty\}$. Сформулируем следующее предположение.

Предположение 1.1. Пусть для всех $i = \overline{1,l}$ выполнено

$$\mathbf{P}\{\|B_i(X)\| = 0\} = 0,$$

где $B_i(X)$ — i-я строка матрицы $B(X)$.

Докажем, что вероятность $\mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\}$ при выполнении предположения 1.1 не зависит от выбранной стратегии первого этапа.

Лемма 1.1. *Пусть для некоторого $\bar{u} \in U$ и некоторого $x \in \mathcal{X}$ выполнено $\Phi(\bar{u},x) = -\infty$, $\|B_i(x)\| \neq 0$, $i = \overline{1,l}$. Тогда для всех $u \in U$ выполнено $\Phi(u,x) = -\infty$.*

Доказательство леммы 1.1. Заметим, что $\Phi(u,x) = -\infty$ тогда и только тогда, когда множество

$$Y(u,x) \cap \{y \in \mathbb{R}^s \colon q^\top(x)y \leqslant a\} \tag{1.38}$$

является неограниченным для всех $a \in \mathbb{R}$. Как показано в [17, теорема 1.3], многогранник, задаваемый системой линейных неравенств, является ограниченным тогда и только тогда, когда его конус рецессивных направлений состоит только из нулевого вектора. При этом не допускаются неравенства, задаваемые нулевыми строками. Конус рецессивных направлений множества (1.38) имеет вид

$$\{y \in \mathbb{R}^s \colon B(x)y \geqslant 0,\ q^\top(x)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Вид данного множества не зависит ни от u, ни от a. Отсюда следует, что если при некотором $\bar{u} \in U$ и $a \in \mathbb{R}$ конус рецессивных направлений содержит ненулевой вектор, то он будет содержать ненулевой вектор и при всех $u \in U$ и $a \in \mathbb{R}$. Из данного свойства непосредственно следует доказываемое утверждение. □

Таким образом, при фиксированной реализации случайных параметров $x \in \mathcal{X}$ для всех $u \in U$ либо $\Phi(u,x) > -\infty$, либо $\Phi(u,x) = -\infty$. Поэтому можно ввести следующее обозначение:

$$\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\} = \mathbf{P}\{\{y \in \mathbb{R}^s \colon B(X)y \geqslant 0,\ q^\top(X)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\} \neq \{\bar{0}\}\},$$

где $\bar{0}$ — нулевой вектор. Согласно лемме 1.1, при выполнении предположения 1.1 величина $\underline{\alpha}$ не зависит от u.

Особенно отметим часто рассматриваемый случай двухэтапной задачи, когда матрица рекурсии $B(x)$ и вектор $q(x)$ коэффициентов целевой функции задачи второго этапа являются постоянными. При данных предположениях либо $\Phi \equiv -\infty$, либо при всех $u \in U$, $x \in \mathcal{X}$ выполнено $\Phi(u,x) > -\infty$.

Изучим вопрос эквивалентности априорной и апостериорной постановок задачи стохастического программирования с вероятностными критериями для линейной функции потерь. Заметим, что функция потерь (1.32) в общем случае не обладает ограниченными множествами уровня. По этой причине теорема 1.8 не может быть применена непосредственно. Приведем условия эквивалентности задач (1.33) и (1.20).

Теорема 1.10. *Пусть $\varphi > -\infty$. Тогда для функций Φ_2 и Q вида (1.35) и (1.36) выполнено равенство*

$$P_\varphi(u) = \max_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)).$$

При этом если U — непустое компактное множество, то множества оптимальных стратегий в задачах (1.33) и (1.20) непусты.

Доказательство теоремы 1.10. В случае $\varphi = +\infty$ утверждение тривиально. Будем считать, что $\varphi \in \mathbb{R}$.

Пусть $u \in U$ и $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$. Проверка неравенства $\overline{P}_\varphi(u, y(\cdot)) \leqslant P_\varphi(u)$ производится так же, как и при доказательстве теоремы 1.8. Теперь покажем, что в этом неравенстве может быть достигнуто равенство. Выберем измеримую функцию $x \mapsto y_u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$y_u(x) \in Y^*(u,x), \text{ если } Y^*(u,x) \neq \varnothing;$$

$$y_u(x) \in Y, \text{ если } \Phi(u,x) = +\infty;$$

$$q^\top(x)y_u(x) \leqslant \varphi \text{ и } A(x)u + B(x)y_u(x) \geqslant b(x), \text{ если } \Phi(u,x) = -\infty,$$

для всех $x \in \mathcal{X}$. По теореме 1.2 существует измеримая функция $x \mapsto y_u(x)$ такая, что $y_u(x) \in Y^*(u,x)$. Существование измеримой функции $y_u(x)$, определенной для x, при которых $\Phi(u,x) = -\infty$, и удовлетворяющей сформулированным условиям, следует также из теоремы 1.2, если в качестве функции f рассмотреть нормальный интегрант

$$(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(q^{\top}(x)y - \varphi) + \delta_{[0,+\infty]}\left(\min_{i=\overline{1,l}} (A(x)u + B(x)y - b(x))_i\right). \tag{1.39}$$

Нетрудно видеть, что $P_{\varphi}(u) = \overline{P}_{\varphi}(u, y_u(\cdot))$. Таким образом, доказываемое равенство получено.

Существование оптимальной стратегии в задаче (1.33) в случае непустого компактного множества U следует из полунепрерывности сверху критериальной функции и теоремы Вейерштрасса, а существование оптимальной стратегии в задаче (1.20) — из доказанной эквивалентности задач (1.33) и (1.20). $\square$

Замечание 1.6. В случае $\varphi = -\infty$ можно гарантировать лишь оценку

$$P_{-\infty}(u) \geqslant \sup_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \overline{P}_{-\infty}(u, y(\cdot)) \equiv 0 \tag{1.40}$$

для всех $u \in U$.

Теперь приведем условия эквивалентности задач (1.34) и (1.21).

Теорема 1.11. *Пусть функции Φ_2 и Q определены согласно (1.35) и (1.36). Тогда*

1) *для $u \in U$ равенство*

$$\varphi_\alpha(u) = \min_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot))$$

выполнено, если справедливо $\varphi_\alpha(u) > -\infty$;

2) *если в некоторой точке $u \in U$ выполнено $\varphi_\alpha(u) = -\infty$, то*

$$\inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) = -\infty,$$

причем данный инфимум не достигается;

3) *в случае компактного множества U оптимальная стратегия в задаче (1.21) существует при $\varphi_\alpha^* < +\infty$.*

Доказательство теоремы 1.11. Пусть $u \in U$ и $\varphi_u^* \triangleq \varphi_\alpha(u) \neq -\infty$. Неравенство $\varphi_\alpha(u) \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot))$ для всех $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ проверяется так же, как и при доказательстве теоремы 1.8. Выберем измеримую функцию $x \mapsto y_u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$y_u(x) \in Y^*(u,x), \text{ если } Y^*(u,x) \neq \varnothing;$$

$$y_u(x) \in Y, \text{ если } \Phi(u,x) = +\infty;$$

$$q^\top(x) y_u(x) \leqslant \varphi_u^* \text{ и } A(x)u + B(x)y_u(x) \geqslant b(x), \text{ если } \Phi(u,x) = -\infty,$$

для всех $x \in \mathcal{X}$. Существование указанной функции $x \mapsto y_x(u)$ следует из теоремы 1.2. Для случая $\Phi(u,x) = -\infty$ теорему 1.2 следует применить к нормальному интегранту

$$(y,x) \mapsto \delta_{[-\infty,0]}(q^\top(x)y - \varphi_u^*) + \delta_{[0,+\infty]} \min_{i=\overline{1,l}} \left(A(x)u + B(x)y - b(x)\right)_i. \tag{1.41}$$

Легко видеть, что $\varphi_\alpha(u) = \bar{\varphi}_\alpha(u, y_u(\cdot))$.

Рассмотрим случай, когда $\varphi_\alpha(u) = -\infty$ в некоторой точке $u \in U$. Выбирая φ_u^* сколь угодно малым, можно построить решение задачи (1.21) со сколько угодно малым значением критериальной функции, поэтому

$$\inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) = -\infty.$$

Поскольку в силу определения $\bar{\varphi}_\alpha(u, y(\cdot)) > -\infty$ для всех $u \in U$ и $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, то инфимум в задаче (1.21) не достигается.

Существование оптимальной стратегии в задаче (1.34) в случае компактного множества U следует из полунепрерывности снизу функции квантили и теоремы Вейерштрасса. $\square$

Замечание 1.7. В [57] аналогичная теорема доказана для случая, когда только значение $b(X)$ случайно, а $A(X)$ и $B(X)$ являются детерминированными.

Опишем применение доверительного метода для решения задачи (1.34). Для функций (1.35) и (1.36) выражение (1.25), характеризующее максимальные потери на доверительно множество, примет вид

$$\Psi(u,S) \triangleq \sup_{x\in S} \Phi(u,x) = \sup_{x\in S} \{c^\top(x)u + \inf_{y\in Y} \{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}\}. \tag{1.42}$$

Как следует из теоремы 1.9, значение $\Psi(u,S)$ при всех допустимых значениях u и S является верхней оценкой φ_α^*. Поэтому при удачном выборе S решение задачи минимизации функции $u \mapsto \Psi(u,S)$ обеспечивает близкое к оптимальному значение критериальной функции.

Преобразуем выражение (1.25). Если множество $\{y \in Y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\}$ непусто, то, вводя двойственные переменные $v \in \mathbb{R}^l$, можно получить равенство

$$\inf_{y\in Y}\{q^\top(x)y \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x)\} = \\ = \sup_{v\in\mathbb{R}^l}\{(b(x) - A(x)u)^\top v \mid B^\top(x)v \leqslant b(x),\ v \geqslant 0\}. \quad (1.43)$$

Подставляя (1.43) в (1.42) и переставляя супремумы, получаем

$$\Psi(u, S) = \sup_{v\in\mathbb{R}^l}\sup_{x\in S}\{c^\top(x)u + (b(x) - A(x)u)^\top v \mid B^\top(x)v \leqslant b(x),\ v \geqslant 0\}. \quad (1.44)$$

В зависимости от вида задачи представление $\Psi(u, S)$ в форме (1.44) может оказаться удобней, чем его исходное определение в форме (1.42). Например, в случае многогранного доверительного множества S внутренняя задача максимизации является задачей линейного программирования.

1.2.3. Модель выбора энергосберегающих проектов

Приведём ещё одну модель, построенную с помощью аппарата двухэтапных задач стохастического программирования. Требуется из набора проектов, предназначенных для экономии электроэнергии крупным предприятием, выбрать проекты, целесообразные для реализации. Предполагаются известными оценки эффективности проектов. Спрос на электроэнергию на этапе выбора проектов считается случайным, а его реализация становится известной на несколько плановых периодов после проведения мероприятий, предусмотренных проектами. Такой подход является обоснованным в том случае, если длительность периодов мала по сравнению со сроками реализации проектов. Внедрение новых технологий требует комплекса мероприятий, тогда как план выпуска продукции в течение нескольких ближайших краткосрочных периодов определяется в зависимости от текущего спроса и может корректироваться в процессе реализации проектов. Таким образом, к моменту завершения проектов, спрос на электроэнергию можно считать известным.

Для моделирования описанной ситуации подходит аппарат двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием. Заметим, что этапы не тождественны периодам. В предлагаемой модели первый этап подразумевает выбор проектов до того, как известны реализации случайных параметров. А второй этап состоит в закупке электроэнергии на несколько плановых периодов. Поскольку реализации случайных параметров во все плановые периоды известны после завершения первого этапа, объёмы закупаемой электроэнергии во все плановые периоды могут рассматриваться как совокупная стратегия второго этапа.

Пусть необходимо выбрать несколько проектов из r предлагаемых проектов. Стратегию первого этапа будем описывать вектором $u \in \{0,1\}^r$, в котором $u_i = 1$, если i-й проект реализуется, и $u_i = 0$, если i-й проект не реализуется, $i = \overline{1,r}$. Вектор стратегий второго этапа обозначим через $y \in \mathbb{R}^m$. Компоненты y_k вектора y описывают объём закупаемой электроэнергии в k-й плановый период, $k = \overline{1,m}$.

Стоимости проектов обозначим через величины c_i, образующие вектор $c \in \mathbb{R}$. Максимально доступный для закупки объём электроэнергии в k-й плановый период обозначим через $\bar{y}_k$. Пусть $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ — вектор, составленный из величин $\bar{y}_k$. Через q обозначим вектор цен q_k на электроэнергию в k-й плановый период, $k = \overline{1,m}$.

Через X обозначим случайный вектор, составленный из величин X_k, равных спросу на электроэнергию в k-й плановый период, $k = \overline{1,m}$, в предположении, что ни один из предложенных проектов не выполняется. Реализации вектора X будем обозначать через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^\top$. Считается, что спрос на электроэнергию должен быть удовлетворён в полном объёме.

Эффект от реализации проектов опишем через матрицу $A = (a_{ki})$, $k = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,r}$, в которой a_{ki} — объём экономии электроэнергии в k-й плановый период при реализации i-го проекта.

С помощью введённых обозначений целевую функцию потерь двухэтапной задачи можно записать в виде

$$\Phi(u,x) = c^\top u + \min_y \left\{ q^\top y \mid y \geqslant x - Au,\ 0 \leqslant y \leqslant \bar{y} \right\}.$$

Ограничение $y \geqslant x - Au$ показывает, что реализация проектов по экономии электроэнергии позволяет снизить электропотребление x, соответствующее отстутствию мероприятий по экономии, на величину Au, связанную с реализацией энергосберегающих проектов.

Неотрицательность величины Au приводит к уменьшению издержек на втором этапе. Однако реализация каждого проекта увеличивает издержки на первом этапе. Поскольку издержки на втором этапе случайны, выбор набора проектов для реализации можно осуществить, решив задачу минимизации функции квантили

$$[\Phi(u, X)]_\alpha \to \min_{u \in \{0,1\}^r}. \tag{1.45}$$

Величина α показывает вероятность того, что решение поставленной задачи обеспечивает непревышение прогнозируемых издержек.

1.3. Двухуровневая модель с асимметричной информацией

Для моделирования иерархических систем, в которых участвуют два субъекта, последовательно принимающие решения, может быть использован аппарат двухуровневых задач оптимизации. Постановка двухуровневых задач предполагает, что цели субъектов известны друг другу, а последователю известна стратегия, выбираемая лидером.

В стохастических системах объёмы информации о реализациях случайных факторов, доступные для лидера и последователя, могут быть различными. В связи с этим возможны несколько моделей двухуровневых систем, различающихся по типу симметрии информации. В данном разделе рассматривается случай, когда реализации случайных факторов известны только последователю, но не известны лидеру. Возникающая при этом стохастическая двухуровневая задача может рассматриваться как обобщение двухэтапной задачи на тот случай, когда решение на втором этапе принимает субъект, цели которого отличаются от субъекта, выбирающего стратегию на первом этапе.

1.3.1. Описание модели

В моделируемой системе взаимодействуют два субъекта, принимающих решения и подчинённых иерархическому отношению. На верхнем уровне иерархии действует лидер, а на нижнем уровне — последователь. Стратегию лидера обозначим через $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, а стратегию последователя — через $y \in \mathbb{R}^s$.

Модель случайный факторов такая же, как и предыдущих разделах. Рассматривается случайный вектор X, определённый на полном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Считается, что для всех $x \in \mathbb{R}^m$ выполнено $X(x) = x$. Носитель вероятностной меры $\mathbf{P}$ обозначен через $\mathcal{X}$.

Последователь принимает решение, когда известны и стратегия u, выбранная лидером, и реализация случайных факторов задачи x. Для моделирования экономических систем в первую очередь представляют интерес линейные модели принятия решений. В связи с этим будем считать, что выбираемая стратегия последователя является оптимальной в задаче линейного программирования, в которой и ограничения, и целевая функции зависят от u и x:

$$c(u,x)^\top y \to \min_{y\in Y(u,x)}. \tag{1.46}$$

Множество допустимых стратегий последователя имеет вид

$$Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^s \mid B(u,x)y \geqslant b(u,x),\ y \geqslant 0\},$$

где матрица $B(u,x) \in \mathbb{R}^{l\times s}$ и вектор $b(u,x) \in \mathbb{R}^m$ зависят от u и x. Обозначим через

$$Y^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{y\in Y(u,x)}\{c(u,x)^\top y\}$$

множество оптимальных стратегий в задаче (1.46). Пусть

$$W \triangleq \{(u,x) \in U \times \mathcal{X} \mid Y^*(u,x) \neq \varnothing\}$$

— множество всех пар $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$, для которых минимум в задаче (1.46) достигается. Введём также обозначение

$$\mathcal{X}(u) \triangleq \{x \in \mathcal{X} \mid (u,x) \in W\}$$

для множества реализаций x случайного вектора X, при которых минимум в задаче последователя (1.46) достигается при фиксированной стратегии лидера $u \in U$. Заметим, что решение задачи последователя зависит от выбранной стратегии лидера $u \in U$ и реализации x случайного вектора X. Таким образом, если стратегия лидера $u \in U$ фиксирована, то решение задачи последователя может рассматриваться как функция $y(\cdot)$, отображающая множество $\mathcal{X}(u)$ в $\mathbb{R}^s$. Для множества всех таких измеримых функций введём обозначение

$$\mathcal{Y}(u) \triangleq \{y(\cdot)\colon \mathcal{X}(u) \to \mathbb{R}^s \mid y(\cdot) - (\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}^s))\text{-измерима}, \\ (u,x) \in W \Rightarrow y(x) \in Y^*(u,x)\}. \tag{1.47}$$

Таким образом, стратегию последователя $y(\cdot)$ можно рассматривать как функцию, описывающую его оптимальное поведение при известной реализации случайных параметров. Отметим, что поведение последователя зависит и от стратегии лидера u, но вводить стратегию последователя как функцию от u не следует, поскольку задача последователя решается при фиксированной стратегии последователя. С другой стороны, зависимость стратегии последователя от x позволяет лидеру учитывать неопределённость поведения последователя.

Пусть потери лидера при выборе стратегии своей u, стратегии последователя y и реализации случайных параметров x описываются измеримой функцией $\Phi\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$, где

$$Y \triangleq \bigcup_{u \in U, x \in \mathcal{X}} Y(u, x).$$

Если $(u, x) \notin W$, то $\Phi(u, y, x) + = \infty$.

Введём функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \triangleq \min \left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi, Q(u, y(X), X) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha\right\}, \tag{1.48}$$

где $Q\colon U \times Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция, описывающая дополнительные ограничения задачи лидера, $\alpha \in (0, 1]$ — фиксированный уровень надёжности. Значение функции (1.48) показывает уровень потерь лидера, непревышение которых вместе с выполнение дополнительных ограничений гарантируется с вероятностью α. Уровень α показывает склонность лидера к риску.

Если для заданных $u \in U$ и $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)$ значение функции квантили (1.48) неопределено, т. е. неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi,\ Q(u, y(X), X) \leqslant 0\right\} < \alpha$$

выполнено для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, то считается, что $\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) = +\infty$.

Использование критериальной функции в форме квантили (1.48) позволяет получать в двухуровневой модели результат, гарантированный с заданной вероятностью. Двухуровневая задача определяется следующим образом:

$$\mathcal{U} \triangleq \operatorname{Arg} \min_{u, y(\cdot)} \{\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \mid u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)\}. \tag{1.49}$$

Заметим, что сформулированная постановка двухуровневой задачи является оптимистической в том смысле, что в ней производится одновременная минимизация и по стратегии лидера $u \in U$ и по множеству оптимальных стратегий последователя $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)$. Отсюда следует, что при наличии нескольких оптимальных стратегий последователь выбирает ту, которая наиболее благоприятна для лидера. Пусть

$$U^* \triangleq \{u \in U \mid \exists y(\cdot)\colon (u, y(\cdot)) \in \mathcal{U}\} \tag{1.50}$$

обозначает проекцию множества $\mathcal{U}$ на множество стратегий лидера, φ_α^* — оптимальное значение критериальной функции в задаче (1.49).

Приведённая задача (1.49) сформулирована в априорной постановке. Отличия априорной и апостериорной постановок для двухэтапных задач обсуждаются в разделе 1.1.3. Как и в теории двухэтапных задач, апостериорная постановка предполагает, что стратегия последователя (аналог стратегии второго этапа в двухэтапных задачах) является функцией реализации случайных параметров. Нетрудно заметить, что сформулированная задача (1.49) может рассматриваться как двухэтапная задача стохастического программирования в априорной постановке вида (1.21), к которой добавлено ограничение $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)$.

1.3.2. Моделирование взаимодействия производителя продукции и поставщика ресурсов

Задача (1.49) может быть использована для моделирования иерархических систем. Рассмотрим взаимодействие производителя продукции и поставщика ресурсов. Цель производителя получить максимальную прибыль от производства продукции, для которой необходимо несколько ресурсов. Поставщик ресурсов производит ресурсы из нескольких видов сырья. Цель поставщика состоит в минимизации издержек на производство ресурсов. При этом у него имеется возможность часть ресурсов реализовывать не внешнем рынке. В силу того, что производитель продукции определяет условиях работы поставщика, между ними устанавливается естественная иерархия, в которой производитель является лидером, а поставщик — последователем.

Перейдём к описанию математической модели. Стратегией лидера является вектор $u \in U \subset \mathbb{R}^r$, составленный из объёмов u_i производимой продукции i-го типа. Стратегия последователя имеет вид $y \triangleq (\tilde{y}^\top, \hat{y}^\top)^\top \in \mathbb{R}^s$, в которой $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$, $\tilde{s} \triangleq \frac{s}{2}$, — вектор ресурсов, закупаемых лидером у последователя по заранее подписанному контракту по фиксированным ценам, составляющим вектор $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$ — вектор, составленный из объёмов ресурсов, предназначенных для реализации на внешнем рынке по ценам $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{\tilde{s}}$. Вектор цен на продукцию, производимую лидером, обозначим через $c(x)$, имея в виду, что цены зависят от реализаций x случайных факторов X, описывающих рыночные условия в момент продажи продукции и не известных в момент принятия решения лидером. Случайные факторы могут описываться фондовыми индексами, курсами валют, а также определяться сценариями, прогнозируемыми экспертами. Вектор рыночных цен, по которым последователь может продавать ресурсы, обозначим через $\hat{q}(x)$.

С помощью введённых обозначений издержки лидера (прибыль с противоположным знаком) можно записать так:

$$\Phi(u, y, x) = -c(x)u + \tilde{q}^\top \tilde{y}. \tag{1.51}$$

Потребность лидера в ресурсах описывается через функцию дополнительных ограничений Q, имеющую вид

$$Q(u, x, y) = \max_{i=1,\dots,\tilde{s}} \left\{ T_i u - \tilde{y}_i - b_i \right\}, \tag{1.52}$$

где T_i — i-я строка технологической матрицы T, элементы которой t_{ij} показывают объёмы i-го ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-го типа, b_i — элементы вектора b, описывающего собственные запасы ресурсов у лидера. Выполнение ограничения $Q(u, x, y) \leqslant 0$ гарантирует, что потребности лидера в ресурсах для производства продукции выполнены, т. к. это ограничение можно переписать в виде системы

$$T_i u \leqslant \tilde{y}_i + b_i,\ i = \overline{1, \tilde{s}},$$

в которой правая часть задаёт вектор доступных ресурсов как сумму собственных и закупаемых у последователя ресурсов.

Технологию производства ресурсов из сырья описывает матрица $D = (d_{ij})$, $i = \overline{1, l_1}$, $j = \overline{1, \tilde{s}}$, в которой d_{ij} — объём сырья i-го типа, необходимого для производства единицы ресурсов j-го типа. Через $\bar{b}$ обозначим вектор, элементы которого $\bar{b}_i$ показывают объём i-го типа сырья, доступного последователю. Вектор $\bar{y}$ описывает минимальные допустимые по контракту объёмы поставок ресурсов последователя лидеру. В описанных условиях задачу последователя можно сформулировать в виде

$$\tilde{q}^\top \tilde{y} + \hat{q}(x)^\top \hat{y} \to \max_{y} \tag{1.53}$$

при ограничениях

$$Tu \geqslant \tilde{y}, \tag{1.54}$$

$$D(\tilde{y} + \hat{y}) \leqslant \bar{b}, \tag{1.55}$$

$$\tilde{y} \geqslant \bar{y}, \tag{1.56}$$

$$\tilde{y}, \hat{y} \geqslant 0. \tag{1.57}$$

Ограничение (1.54) значит, что последователь не может продать лидеру больше ресурсов, чем ему необходимо. Ограничение (1.55) описывает невозможность использования сырья в объёме, превышающем максимально доступный объём.

В обозначениях предыдущего раздела задачу лидера по определению оптимального производства продукции можно записать в виде двухуровневой задачи стохастического программирования

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) = \\ = \min \{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi,\ Q(u, y(X), X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\} \to \min_{u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)}, \quad (1.58)$$

где множество $\mathcal{Y}(u)$ задаёт множество оптимальных стратегий последователя как функций x при фиксированном значении u и определено согласно (1.47).

1.3.3. Модель распределения инвестиций в энергосберегающие проекты

В данном разделе приводится ещё один пример математической модели, построенной на основе стохастической двухуровневой системы, описанной в разделе 1.3.1. Приводимая модель является развитием двухэтапной модели из раздела 1.2.3.

Будем считать, что имеется r проектов, направленных на экономию энергоресурсов. Необходимо не только выбрать проекты для реализации, но и определить объёмы их финансирования. Предполагается, что каждый проект реализует субподрядчик, обладающий свободой действия в рамках выделенного финансирования. За экономию энергоресурсов субподрядчики получают премии. При реализации проектов субподрядчики самостоятельно закупают ресурсы, необходимые для выполнения проекта.

Таким образом, описываемая система является иерархической, в которой лидером является инвестор проектов, а последователями — субподрядчики, выполняющие проекты.

Спрос на энергоресурсы разделён по плановым периодам, но считается, что в начале первого планового периода после реализации проектов спрос известен не все последующие плановые периоды. Случайную потребность в j-м энергоресурсе в k-й плановый период обозначим через X_{kj}. Реализации случайных величин X_{kj} будем обозначать через x_{kj}, $k = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, J}$.

В качестве стратегии лидера рассмотрим вектор $u \in \mathbb{R}^r$, в котором u_i — объём инвестирования i-го проекта, $i = \overline{1, r}$. Будем считать, что i-й проект реализуется i-м последователем, т. е. количество последователей совпадает с количеством проектов. Стратегию

i-го последователя обозначим через $y^{(i)} \triangleq (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{S_i}^{(i)})^\top \in \mathbb{R}^{S_i}$, где $y_s^{(i)}$ — объём s-го закупаемого ресурса, необходимого для реализации проекта, $s = \overline{1, S_i}$.

Экономия j-го энергоресурса в k-й плановый период при реализации i-го проекта зависит от стратегии последователя $y^{(i)}$. Обозначим указанную экономию через $z_{kj}^{(i)}(y^{(i)})$. Введём обозначение $z_k^{(i)}(y^{(i)}) \triangleq \left(z_{k1}^{(i)}(y^{(i)}), \ldots, z_{kJ}^{(i)}(y^{(i)})\right)^\top$. Технологическое описание i-го проекта в k-й плановый период задаёт матрица $B_k^{(i)}$, связывающая объём приобретаемых ресурсов с экономией энергоресурсов:

$$z_k^{(i)}(y^{(i)}) = B_k^{(i)} y^{(i)}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Пусть $c_{kj}^{(i)}$ — премия i-го последователя за экономию единицы j-го энергоресурса в k-й плановый период, $g_s^{(i)}$ — стоимость s-го ресурса при реализации i-го проекта, $\bar{y}_s^{(i)}$ — максимально доступный объём s-го ресурса при реализации i-го проекта, $\bar{y}^{(i)} \triangleq \left(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_{S_i}^{(i)}\right)^\top \in \mathbb{R}^{S_i}$.

С помощью введённых обозначений задачу i-го последователя можно сформулировать в виде

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} c_{kj}^{(i)} z_k^{(i)}(y^{(i)}) \to \max_{y^{(i)} \in \mathbb{R}^{S_i}} \tag{1.59}$$

при ограничениях

$$\sum_{s=1}^{S_i} g_s^{(i)} y_s^{(i)} \leqslant u_i,$$
$$0 \leqslant y_s^{(i)} \leqslant \bar{y}_s^{(i)}.$$

Множество оптимальных значений переменных в задаче (1.59) обозначим через $Y^{(i)}(u, x)$. Заметим, что декартово произведение $Y^*(u, x) \triangleq Y^{(1)}(u, x) \times Y^{(2)}(u, x) \times \ldots \times Y^{(r)}(u, x)$ есть множество оптимальных значений переменных задачи

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} c_{kj}^{(i)} z_k^{(i)}(y^{(i)}) \to \max_{\left(y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}\right)^\top \in \mathbb{R}^{S_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{S_r}} \tag{1.60}$$

при ограничениях

$$\sum_{s=1}^{S_i} g_s^{(i)} y_s^{(i)} \leqslant u_i, \quad i = \overline{1, r};$$
$$0 \leqslant y_s^{(i)} \leqslant \bar{y}_s^{(i)}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Таким образом, несмотря на то, что в моделируемой системе имеется несколько последователей, с математической точки зрения можно считать, что действует один совокупный последователь. Это значит, что описываемая система является двухуровневой. Стратегию последователя обозначим через $y = \left(y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}\right)^\top$.

Теперь приведём функцию потерь лидера

$$\Phi(u, y, x) = \sum_{i=1}^{r} u_i + \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} \max\left\{0, (x_{kj} - z_{kj}(y))\, q_{kj}\right\},$$

где q_{kj} — стоимость j-го энергоресурса в k-й плановый период,

$$z_{kj}(y) = \sum_{i=1}^{r} z_{kj}^{(i)}(y^{(i)}).$$

Таким образом, расходы лидера складываются из объёмов финансирования проектов и суммарных расходов на энергоресурсы.

Функция, описывающая дополнительные ограничения имеет вид

$$Q(u, y, x) = \max_{k=\overline{1,K}, j=\overline{1,J}} \left\{z_{kj}(y) - x_{kj}\right\}.$$

Ограничение $Q(u, y, x) \leqslant 0$ значит, что экономия энергоресурса не может превышать спрос на него.

Задача двухуровневой оптимизации, решение которой обеспечивает оптимальное распределение инвестиций по проектам, записывается в той же форме, что и в общей постановке (1.49)

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) = \\ = \min\left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{\Phi(u, y(X), X) \leqslant \varphi,\ Q(u, y(X), X) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha\right\} \to \min_{u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)}, \quad (1.61)$$

где $\mathcal{Y}(u)$ определяется формулой (1.47), а множество U задаётся системой ограничений

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \leqslant \bar{u},$$
$$u_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Величина $\bar{u}$ задаёт максимально допустимый объём инвестирования.

1.3.4. Двухуровневая модель со случайными коэффициентами в целевой функции последователя

В данном разделе описывается специальная постановка стохастической двухуровневой задачи. Предполагается, что целевые функции задач лидера и последователя являются билинейными, т. е, линейными по стратегии лидера u и линейными по стратегии последователя y, а случайные коэффициенты входят только в целевую функцию задачи последователя. Данная постановка обладает рядом интересных свойств, которые обсуждаются в данном разделе. Кроме того, специфика задачи позволяет сформулировать её в апостериорной постановке, что упрощает её исследование. В следующем разделе будет показано применение описанной постановки для моделирования экономических систем.

По-прежнему будем считать, что u — стратегия лидера, выбираемая из множества $U \subset \mathbb{R}^r$, y — стратегия последователя, принадлежащая пространству $\mathbb{R}^m$. В изучаемом случае $m = s$. Как и ранее, X — случайный вектор, определённый на полном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. При этом выполнено равенство $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Задача последователя при фиксированных значениях u и x является задачей линейного программирования и имеет следующий вид:

$$(A_2 u + x)^\top y \to \min_y \tag{1.62}$$

при ограничениях

$$B_2 y \leqslant b_2,$$
$$y \geqslant 0,$$

где $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$ — фиксированные матрицы и вектор. Через $Y^*(u, x)$ обозначим множество оптимальных стратегий задачи последователя (1.62).

Пусть функция потерь лидера $\Phi\colon U \times \mathbb{R}^m \to [-\infty; +\infty]$ имеет вид

$$\Phi(u, x) \triangleq \begin{cases} \min\limits_{y\in Y^*(u,x)} (f + Cu)^\top y, & \text{если } Y^*(u, x) \neq \varnothing; \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u, x) = \varnothing, \end{cases} \tag{1.63}$$

где $f \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{r\times m}$.

Рассмотрим функцию квантили потерь лидера

$$u \mapsto [\Phi(u, X)]_\alpha \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\},\ u \in U, \tag{1.64}$$

где

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\},$$

— функция вероятности, $\alpha \in (0,1)$ — заданный уровень надёжности.

Используемое обозначение $[\cdot]_\alpha$ позволяет трактовать квантиль как функционал, определённый на множестве случайных величин.

Сформулируем задачу лидера в виде

$$\psi^* \triangleq \min_{u \in U} \left\{ c_1^\top u + [\Phi(u, X)]_\alpha \right\}, \tag{1.65}$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^r$ — некоторый вектор. Будем считать, что множество U задаётся в виде $U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^r \mid A_1 u \leqslant b_1\}$. Двухуровневой задачей стохастического программирования с квантильным критерием является задача лидера (1.65).

Замечание 1.8. Заметим, что данная задача сформулирована в оптимистической постановке, т. е. лидер учитывает лучшую для себя оптимальную стратегию последователя. Сформулируем также двухуровневую задачу в пессимистической постановке, когда функция потерь определена по правилу

$$\Phi(u, x) = \begin{cases} \max\limits_{y \in Y^*(u,x)} (f + Cu)^\top y, & \text{если } Y^*(u, x) \neq \varnothing; \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u, x) = \varnothing, \end{cases} \tag{1.66}$$

Перейдём к исследованию свойств поставленной задачи. Рассмотрим задачу последователя (1.62). Сформулируем утверждение об условиях, гарантирующих единственность решения данной задачи.

Теорема 1.12. *Пусть случайный вектор X имеет абсолютно непрерывное распределение относительно меры Лебега и множество допустимых стратегий задачи последователя $\{y \in \mathbb{R}^m \mid B_2 y \leqslant b_2,\ y \geqslant 0\}$ непусто и ограничено. Тогда множество $Y^*(u, X)$ всегда непусто и с вероятностью единица состоит из единственного элемента.*

Доказательство теоремы 1.12. Обозначим множество допустимых стратегий задачи последователя через Y. В силу предположения о непустоте и ограниченности множества Y оптимум в задаче последователя достигается при любом значении стратегии лидера u и реализации случайных параметров задачи x. Рассмотрим случай $m = 1$. Тогда оптимальная стратегия в задаче последователя может быть неединственной, только если

$X = -A_2u$, что происходит с нулевой вероятностью. Пусть теперь $m \geqslant 2$. В этом случае оптимальная стратегия последователя может быть неединственной, только если вектор $A_2u + x$ перпендикулярен одной из граней множества Y. В силу предположения об абсолютной непрерывности распределения случайного вектора X вероятность такого события равна нулю, а значит, с вероятностью единица решение задачи последователя (1.62) будет являться единственным. □

Докажем утверждение о полунепрерывности функции потерь Φ.

Теорема 1.13. *Функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является полунепрерывной снизу по u при каждом фиксированном значении x и измеримой по x для всех u. При этом, при каждом фиксированном $u \in U$ множество значений функции $x \mapsto \Phi(u, x)$ конечно.*

Доказательство теоремы 1.13. Запишем задачу последователя в канонической форме. Для этого введём вектор дополнительных переменных $y^+ \in \mathbb{R}^l$. Будем использовать следующие обозначения:

$$c(u,x) \triangleq \begin{pmatrix} A_2u + x \\ 0_l \end{pmatrix}, \; B \triangleq \begin{pmatrix} B_2 & I \end{pmatrix}, \; y' \triangleq \begin{pmatrix} y \\ y^+ \end{pmatrix},$$

где 0_l — нулевой вектор размера l. Тогда задача последователя запишется в форме

$$c^\top(u,x)y' \to \min_{y'} \tag{1.67}$$

при ограничениях

$$By' = b_2,$$
$$y' \geqslant 0.$$

Из теории линейного программирования известно, что базисное решение $y_{\mathbf{B}}$ задачи (1.67) является оптимальным в том и только том случае, когда соответствующая ему базисная матрица $\mathbf{B}$ такая, что

$$c^\top(u,x) - c^\top_{\mathbf{B}}(u,x)\mathbf{B}^{-1}B \geqslant 0, \tag{1.68}$$

$$\mathbf{B}^{-1}b \geqslant 0, \tag{1.69}$$

где $c_{\mathbf{B}}(u,x)$ — подвектор $c(u,x)$, составленный из его координат, соответствующих базисным переменным. Множество базисных матриц, удовлетворяющих ограничениям (1.68) и (1.69), обозначим через $\mathfrak{B}(u,x)$.

Введём функцию $f_{\mathbf{B}}(\cdot)\colon U\times\mathbb{R}^m\to(-\infty;+\infty]$, совпадающую со значением функции потерь лидера (1.63) для всех пар (u,x), при которых базис $\mathbf{B}$ является оптимальным в задаче последователя:

$$f_{\mathbf{B}}(u,x)=\begin{cases}\left((f+Cu)^\top,0_l^\top\right)^\top y_{\mathbf{B}}, & \text{если } \mathbf{B}\in\mathfrak{B}(u,x);\\ +\infty & \text{иначе.}\end{cases}$$

Поскольку функция $(u,x)\mapsto f_{\mathbf{B}}(u,x)$ принимает конечные значения на замкнутом множестве и непрерывна на нём, она является полунепрерывной снизу.

Используя введённые обозначения, функцию потерь лидера можно представить в виде

$$\Phi(u,x)=\min_{\mathbf{B}\in\mathfrak{B}} f_{\mathbf{B}}(u,x),$$

где $\mathfrak{B}$ — множество всех базисных матриц, составленных из столбцов матрицы B. В силу утверждения 1.12, значение $\Phi(u,x)$ всегда конечно. Согласно [191, Proposition 1.26], поточечный минимум конечного числа полунепрерывных снизу функций является полунепрерывной снизу функцией. Таким образом, функция $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ является полунепрерывной снизу по совокупности аргументов, а значит, и полунепрерывной снизу по u при каждом фиксированном значении x, а также измеримой по x для всех u.

Из того, что при заданном $u\in U$ и $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ функция $x\mapsto f_{\mathbf{B}}(u,x)$ может принимать только два возможных значения и множество $\mathbf{B}\in\mathfrak{B}$ конечно, следует, что множество возможных значений функции $x\mapsto\Phi(u,x)$ при каждом $u\in U$ конечно. $\square$

Из утверждения 1.13 выводится следствие о существовании решения задачи (1.65).

Следствие 1.2. *Если множество U непусто и ограничено, тогда в задаче (1.65) существует оптимальная стратегия.*

Доказательство следствия 1.2. Поскольку множество U задаётся системой линейных неравенств, оно является замкнутым, а значит, множество U является компактом. Как доказано в [51], при полунепрерывности снизу функции $u\mapsto\Phi(u,x)$ при почти всех x и измеримости функции $u\mapsto\Phi(u,x)$ для всех $u\in U$ функция квантили $u\mapsto[\Phi(u,X)]_\alpha$ является полунепрерывной снизу на U. Таким образом, для функции $u\mapsto[\Phi(u,X)]_\alpha$ и множества U выполнены условия теоремы Вейерштрасса, гарантирующей существование точки минимума. $\square$

При доказательстве следствия 1.2 существенно использовалась полунепрерывность снизу функции $u \mapsto \Phi(u, x)$, которая гарантировалась оптимистической постановкой задачи (1.65). В случае пессимистической постановки, когда функция потерь определена по правилу (1.66), полунепрерывность снизу функции $u \mapsto \Phi(u, x)$ не гарантирована, поэтому решение задачи (1.65) в пессимистической постановке в общем случае может не существовать. Решение задачи (1.65) в пессимистической постановке будет существовать и совпадать с решением задачи (1.65) в оптимистической постановке при абсолютно непрерывном случайном векторе X, что следует из утверждения 1.12.

Приведём пример, показывающий, что непрерывность функции квантили в общем случае не гарантируется.

Пример 1.1. Пусть задача последователя имеет вид

$$(x + u)y \to \min_{y \in [0,1]}.$$

Нетрудно видеть, что множество оптимальных стратегий последователя имеет следующий вид:

$$Y^*(u, x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } x + u < 0; \\ \{0\}, & \text{если } x + u > 0; \\ [0, 1], & \text{если } x + u = 0. \end{cases}$$

Пусть $f = 1$, $C = 0$, тогда

$$\Phi(u, x) = \min_{y \in Y^*(u,x)} fy = \begin{cases} 1, & \text{если } x + u < 0; \\ 0, & \text{если } x + u \geqslant 0. \end{cases}$$

Функция квантили записывается в форме

$$\varphi_\alpha(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{P}\{X + u \geqslant 0\} \geqslant \alpha; \\ 1, & \text{если } \mathbf{P}\{X + u \geqslant 0\} < \alpha. \end{cases}$$

Например, для равномерного распределения на отрезке $[0; 1]$ функция квантили имеет вид

$$\varphi_\alpha(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u < \alpha - 1; \\ 0, & \text{если } u \geqslant \alpha - 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ не является непрерывной, но является полунепрерывной снизу.

Представляют интерес свойства функции $(u, \varphi) \mapsto P_\varphi(u)$.

Теорема 1.14. *Пусть случайный вектор X имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда область определения функции $(u, \varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ можно разбить на конечное число полиэдров, на внутренностях которых функция непрерывна, а в граничных точках является полунепрерывной сверху.*

Доказательство теоремы 1.14. Согласно [51, теорема 2.2], полунепрерывность сверху функции вероятности следует из полунепрерывности снизу по $u \in U$ и измеримости по x функции потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$.

Найдём области непрерывности функции вероятности. Введём величины

$$\varphi_{\mathbf{B}}(u) \triangleq \left((f + Cu)^\top, 0_l^\top\right)^\top y_{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{B} \in \mathfrak{B}.$$

При фиксированном $u \in U$ отсортируем величины $\varphi_{\mathbf{B}}(u)$ по возрастанию. В результате получим последовательность величин $\left\{\varphi_{(k)}(u)\right\}_{k=1}^{K}$, где $K = |\mathfrak{B}|$, при этом

$$\varphi_{(1)}(u) \leqslant \varphi_{(2)}(u) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_{(K)}(u).$$

Базисную матрицу $\mathbf{B}$, соответствующую $\varphi_{(k)}(u)$, обозначим через $\mathbf{B}_{(k)}$. С помощью введённых обозначений можно записать

$$P_\varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi < \varphi_{(1)}(u); \\ \mathbf{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \{\mathbf{B}_{(i)} \in \mathfrak{B}(u, X)\}\right\} & \text{если } \varphi_{(k-1)}(u) \leqslant \varphi < \varphi_{(k)}(u); \\ 1, & \text{если } \varphi > \varphi_{(K)}(u). \end{cases}$$

Неравенства $\varphi_{(k-1)}(u) \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{(k)}(u)$ задают полиэдры, на внутренности каждого из которых функция $(u, \varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ является непрерывной в силу абсолютной непрерывности распределения случайного вектора X. $\square$

1.3.5. Модель определения налоговой ставки

Сформулируем модель экономической системы, которая может быть записана в форме (1.65). В качестве лидера будем рассматривать государство, а в качестве последователя — производителя. Задача лидера состоит в определении размера налоговой ставки, обеспечивающей максимальный сбор налогов. Целью последователя является максимизации собственной прибыли после уплаты налогов. Производитель имеет возможность выпускать несколько видов продукции.

Стратегией лидера является размер налоговой ставки $u \in [0;1]$. Стратегией последователя является вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$, где y_j — объём производства j-го вида продукции, $j = \overline{1,m}$.

Задача последователя является стандартной задачей планирования производства в условиях ограниченных ресурсов. Считается, что для производства единицы продукции j-го вида требуется A_{2ij} единиц ресурсов i-го типа, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,l}$. Величины A_{2ij} определяют технологическую матрицу A_2. Заданы цены c_j на каждый из видов продукции, $j = \overline{1,m}$, и доступные объёмы ресурсов каждого типа b_{2i}, $i = \overline{1,l}$. Через c и b_2 обозначим векторы, составленные из величин c_j и b_{2i} соответственно.

Издержки производства единицы продукции j-го типа X_j, $j = \overline{1,m}$, будем считать случайными. Случайный вектор, составленный из данных случайных величин, будем обозначать через X, а его реализации — через x.

Последователь при принятии своего решения знает реализацию случайного вектора X и величину налоговой ставки. Таким образом, задача последователя формулируется как задача минимизации потерь (прибыли с противоположным знаком) при ограничениях на ресурсы:

$$Y^*(u,x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in Y} \left\{ x^\top y - (1-u) c^\top y \right\},$$

где множество Y задаётся системой ограничений

$$A_2 y \leqslant b_2,$$
$$y \geqslant 0.$$

Потери лидера задаются соотношением

$$\Phi(u,x) = \min_{y \in Y^*(u,x)} \left\{ -u c^\top y \right\},$$

то есть они равны величине сбора налогов, взятой с противоположным знаком. Будем считать, что лидер ставит целью максимизировать величину гарантированного с вероятностью α сбора налогов. Тогда для поиска его оптимальной стратегии можно сформулировать двухуровневую задачу стохастического программирования с квантильным критерием

$$[\Phi(u,X)]_\alpha \to \min_{u \in [0,1]}. \tag{1.70}$$

1.4. Двухуровневая модель с симметричной информацией

Как и в предыдущем разделе, рассматриваются двухуровневые стохастические модели, в которых имеются два субъекта, принимающие решения: лидер и последователь. В отличие от модели, рассмотренной в предыдущем разделе, предполагается, что реализации случайных факторов не известны ни лидеру, ни последователю. Это значит, что лидер и последователь владеют симметричной информацией. Если в модели с асимметричной информацией стратегия последователя выбиралась как функций случайных параметров, а стратегия лидера была детерминированной, то при симметричной информации и стратегия лидера, и стратегия последователя являются детерминированными. Это приводит к тому, что модель принятия решений последователем должна описываться с помощью помощью задачи стохастического программирования.

В качестве критериальной функции последователя рассматривается квантиль потерь. Предполагается, что функция потерь последователя является билинейной. Частный случай данной модели рассмотрен в [47], где предложен метод сведения возникающей оптимизационной задачи к задаче оптимизации с одной переменной. Для вычисления значения критериальной функции должна быть решена задача квадратичного программирования. В данном разделе эта идея используется для решения поставленной задачи.

Рассматривается случай линейной целевой функции задачи лидера. Для скалярного случая сформулирован детерминированный эквивалент. Для случая нормального распределения предложен алгоритм решения задачи последователя. Приводится модель инвестирования производства, в которой с помощью предложенного метода выбирается оптимальная стратегия.

1.4.1. Описание модели

Обозначим через $u \in \mathbb{R}^r$ стратегию лидера, а через $y \in \mathbb{R}^s$ — стратегию последователя. Пусть X — случайный вектор с реализациями $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$, определённый на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть целевая функция последователя является билинейной и задаётся формулой

$$\Phi(y, x) \triangleq x^\top y.$$

Определим функцию квантили

$$\Phi_\alpha(y) \triangleq \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\},$$

Значение $\Phi_\alpha(y)$ функции квантили является минимальным уровнем потерь последователя $\Phi(y,x)$, непревышение которого гарантируется с вероятностью $\alpha \in (0,1)$.

Задача последователя имеет вид

$$\Phi_\alpha(y) \to \min_{y \in Y(u)}, \tag{1.71}$$

где $\alpha \in (0,1)$,

$$Y(u) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^s \mid A_2 u + B_2 y \geqslant b_2\} \tag{1.72}$$

— множество допустимых стратегий последователя, $A_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times s}$ — матрицы, $b_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$ — вектор.

Обозначим через

$$Y^*(u) \triangleq \operatorname{Arg}\min_y \{\Phi_\alpha(y) \mid y \in Y(u)\}$$

множество оптимальных стратегий последователя.

Двухуровневая задача стохастического программирования (задача лидера) формулируется так:

$$c_1^\top u + f^\top y \to \min_{u \in U(y), y \in Y^*(u)}, \tag{1.73}$$

где

$$U(y) = \{u \in \mathbb{R}^r \mid A_1 u + B_1 y \geqslant b_1\}, \tag{1.74}$$

$c_1 \in \mathbb{R}^r$, $f \in \mathbb{R}^s$ и $b_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$ — векторы, $A_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times s}$ — матрицы.

1.4.2. Скалярный случай

Покажем, что в скалярном случае задача может быть сведена к детерминированному эквиваленту.

Пусть X — случайная величина, т. е. $x \in \mathbb{R}$. Тогда стратегия последователя y также скалярна. Предположим, что $y \geqslant 0$. В этом случае задача последователя запишется в виде

$$Y^*(u) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{y \in \mathbb{R}} \{\Phi_\alpha(y) \mid A_2 u + B_2 y \geqslant b_2,\ y \geqslant 0\}, \tag{1.75}$$

где $B_2 = (B_{21}, B_{22}, \ldots, B_{2l_2})^\top$.

Обозначим через x_α квантиль уровня α распределения случайной величины X:

$$x_\alpha \triangleq \min\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbf{P}\{X \leqslant x\} \geqslant \alpha\}.$$

Пусть множество допустимых стратегий лидера имеет вид

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid A_1 u \geqslant b_1\},$$

т. е., предполагается, что матрица B_1 нулевая.

Теорема 1.15. *Пусть выполнены условия:*

(i) задача последователя задана формулой (1.75);

(ii) $x_\alpha > 0$;

(iii) $B_{2i} > 0$, $i = \overline{1, l_2}$;

(iv) B_1 — нулевая матрица;

(v) $f > 0$.

Тогда множество оптимальных стратегий в задаче (1.73) совпадает с множеством оптимальных стратегий u в задаче

$$c_1^\top u + f\psi \to \min_{\psi \in \mathbb{R}, u \in U} \tag{1.76}$$

при ограничениях

$$\frac{b_{2i} - A_{2i} u}{B_{2i}} \leqslant \psi, \; i = \overline{1, n}, \tag{1.77}$$

$$\psi \geqslant 0, \tag{1.78}$$

где A_{2i} — i-я строка матрицы A_2, b_{2i} — i-й элемент вектора b_2. Кроме того, оптимальные значения критериальных функций (1.73) и (1.76) равны.

Доказательство теоремы 1.15. Заметим, что $\Phi_\alpha(y) = x_\alpha y$ в силу условия $y \geqslant 0$. Поскольку условие (iii) выполнено, из (1.75) следует, что

$$y \geqslant \frac{b_{2i} - A_{2i} u}{B_{2i}}, \; i = \overline{1, l_2}. \tag{1.79}$$

Таким образом,

$$Y^*(u) = \left\{ \max_{i=\overline{1,l_2}} \left\{ \frac{b_{2i} - A_{2i} u}{B_{2i}}, 0 \right\} \right\}. \tag{1.80}$$

Множество $Y^*(u)$ состоит из одного элемента. Подставляя (1.80) в (1.73), получаем задачу

$$c_1^\top u + f\left\{\max_{i=\overline{1,l_2}}\left\{\frac{b_{2i} - A_{2i}u}{B_{2i}}, 0\right\}\right\} \to \min_{u\in U}. \tag{1.81}$$

Вводя дополнительную переменную ψ, задача (1.81) сводится к задаче линейного программирования (1.76) при ограничениях (1.77) и (1.78). $\square$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче линейного программирования при выполнении условий теоремы 1.15. Как видно из доказательства, условия теоремы 1.15 обеспечивают существование оптимальной стратегии исходной задачи.

1.4.3. Случай гауссовского распределения

Вернёмся к постановке (1.73), предполагая, что случайный вектор X распределён по нормальному закону с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей Σ, т. е. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Также будем считать, что $\alpha \in (0.5, 1)$.

Рассмотрим задачу последователя (1.71). Если $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, то

$$\Phi_\alpha(y) = \mu^\top y + z_\alpha\sqrt{y^\top\Sigma y},$$

где z_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Таким образом, задача последователя может быть записана в виде

$$\mu^\top y + z_\alpha\sqrt{y^\top\Sigma y} \to \min_{y\in Y(u)}. \tag{1.82}$$

Поскольку функция $y \mapsto \sqrt{y^\top\Sigma y}$ является полунормой, задача (1.82) выпукла. Эта задача может быть решена метода выпуклой оптимизации, описанными, например, в [105]. Тем не менее, обратим внимание на то, что задача (1.82) может быть сведена к задаче квадратичного программирования, если зафиксировать значение $\mu^\top y$. Добавим ограничение $\mu^\top y = \theta$ в задачу (1.82). Тогда оптимальная стратегия задачи последователя может быть найдена как решение задачи

$$\theta + z_\alpha\sqrt{y^\top\Sigma y} \to \min_{y\in Y(u)} \tag{1.83}$$

при ограничениях

$$\mu^\top y = \theta.$$

Нетрудно заметить, что задача (1.83) эквивалентна задаче квадратичного программирования

$$y^\top\Sigma y \to \min_{y\in Y(u),\, \mu^\top y=\theta}. \tag{1.84}$$

Обозначим через $y(\theta)$ оптимальное решение задачи (1.84). Поскольку стратегия лидера u фиксирована, зависимость $y(\theta)$ от u не обозначается. Рассмотрим функцию

$$g(\theta) = \theta + z_\alpha \sqrt{y(\theta)^\top \Sigma y(\theta)}.$$

Заметим, что значение $g(\theta)$ равно оптимальному значению критериальной функции задачи (1.82) при дополнительном ограничении $\mu^\top y = \theta$. Поэтому оптимальной значение θ, обозначаемое как θ^*, является решением задачи

$$g(\theta) \to \min_{\theta \in \mathbb{R}}. \tag{1.85}$$

Поскольку задача (1.82) выпукла и ограничение $\mu^\top y = \theta$ линейно, функция $g(\theta)$ унимодальна. Если известно, что $\theta^* \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, где $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ — нижняя и верхняя граница для θ^*, то задача (1.85) может быть решена, например, с помощью метода золотого сечения [8]. Таким образом, для решения задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий.

Алгоритм 1.1. 1) найти оптимальное значение $\theta^* \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$;

2) найти оптимальную стратегию y^*, решая задачу (1.84) для $\theta = \theta^*$.

Используя оптимальную стратегию последователя, можно решить задачу лидера, которая в общем случае не является выпуклой. Её решение может быть найдёно с помощью методов невыпуклой оптимизации.

1.4.4. Модель инвестирования производства

На основе сформулированной двухуровневой задачи (1.73) построим модель инвестирования производства.

Пусть лидер является инвестором, а последователь — производителем. Стратегия лидера $u \in \mathbb{R}$ описывает объём инвестиций в развитие производства. Производить выпускает два вида продукции. Стратегией последователя является вектор $(y_1, y_2)^\top$, в котором y_i, $i = 1, 2,$ — объём выпуска i-го продукта.

Критериальная функция последователя имеет вид

$$\Phi_\alpha(y) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{-(X_1 y_1 + X_2 y_2) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}.$$

где X_i, $i = 1, 2,$ — случайная прибыль, получаемая с единицы продукции i-го типа. Задача последователя формулируется в виде

$$\Phi_\alpha(y) \to \min_y$$

при ограничениях

$$B_2 y \leqslant b_2,$$
$$b_3^\top y \leqslant u,$$

где B_2 — технологическая матрица, b_2 — вектор доступных ресурсов, b_3 — вектор, задающий стоимости производства единиц продукции. Заметим, что значение критериальной функции последователя описывает минимальный уровень потерь последователя ($-X^\top y = -(X_1 y_1 + X_2 y_2)$), которые не могут быть превышены с вероятностью α.

Задача лидера формулируется в виде

$$u - f^\top y \to \min_{u \geqslant 0, y \in Y^*(u)}, \tag{1.86}$$

где f_i — доход, получаемый инвестором с единицы продукции i-го типа. Лидер стремится минимизировать разность между объёмом инвестиций u и доходом $f^\top y$.

Решим задачу для следующих исходных данных:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = (2, 1{,}6)^\top; \quad f = (1{,}8, 2{,}4)^\top; \quad \alpha = 0{,}975.$$

Будем считать, что

$$X \sim \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

С помощью предложенного алгоритма, задача последователя может быть решена для фиксированной стратегии лидера. Устанавливая различные значения стратегии лидера, получаем график зависимости критериальной функции лидера от стратегии. Этот график изображён на рисунке 1.1.

Как видно из полученного графика, малые и большие значения уровня инвестиций обеспечивают большие значения критериальной функции. При малом объёме инвестирования лидер не получаем прибыль. При большом объёме инвестиций прибыль оказывается меньше, чем объём вложенных средств.

При решении задач получены такие результаты: оптимальная стратегия лидера $u^* = 2{,}024$; оптимальное значение целевой функции лидера $-0{,}5872$; оптимальная стратегия последователя $y^* = (0{,}3540, 0{,}8225)^\top$.

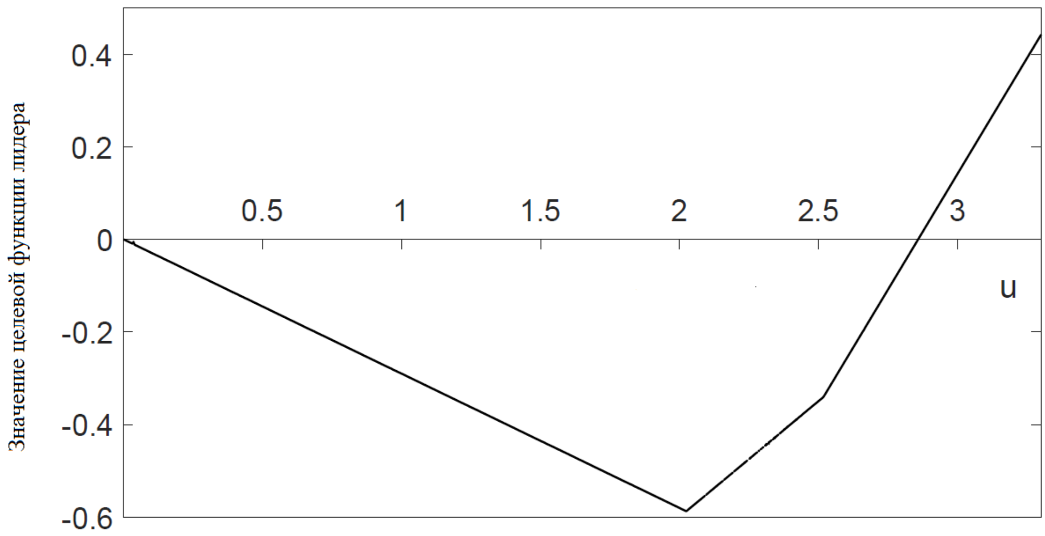

Рисунок 1.1. Зависимость критериальной функции лидера от стратегии

1.5. Стохастические двухуровневые модели конкурентного размещения предприятий

Цель построения математических моделей размещения предприятий заключается в поиске множества открываемых предприятий, позволяющего с минимальными затратами удовлетворить потребности всех потребителей. Классическая задача размещения предприятий сформулирована в [2]. В подобных задачах, как правило, невозможно заранее предсказать величину затрат на открытие предприятий и величину получаемой прибыли от их открытий, поэтому необходимо рассматривать стохастические постановки задач размещения. Одной из первых работ, где была учтена стохастическая природа задачи размещения предприятий, является [199]. В ней был использован сценарный подход для моделирования неопределенности размещения предприятия. Данная модель позволяет найти такой план размещения предприятий, при котором математическое ожидание затрат сводится к минимуму. Также следует отметить [135], где предложена математическая модель с критериальной функцией в форме математического ожидания суммы потерь. Обзор работ, посвященных задачам размещения с учетом неопределенности, можно найти в [176, 201].

Квантильный критерий для моделирования размещения предприятий рассматривался в [121], где показано, что решение оптимизационной задачи в рамках модели является трудным с вычислительной точки зрения, и предложен метод построения вспомогательной задачи, решение которой позволяет найти верхнюю оценку функции квантили со значительно меньшими вычислительными затратами.

Другим направлением развития подобных моделей являются модели конкурентного размещения предприятий [1,3]. Данные модели формулируются с помощью двухуровневой задачи целочисленного программирования. В задаче конкурентного размещения предприятий имеются две соперничающие стороны (лидер и последователь), которые последовательно открывают свои предприятия, стремясь привлечь потребителей, чтобы получить максимальную прибыль. Процесс принятия решений в данной модели имеет трехэтапную структуру. На первом этапе лидер, учитывая оптимальную стратегию последователя как функцию собственной стратегии, размещает свои предприятия. На втором этапе последователь, зная стратегию лидера (открытые предприятия лидера), открывает свои предприятия. А на третьем этапе каждый потребитель исходя из собственных предпочтений выбирает лучшее для себя предприятие. Цель лидера заключается в поиске такого множества предприятий, открывая которые, он получит максимальную прибыль с учетом того факта, что некоторые потребители предпочтут предприятия, открытые последователем.

В данном разделе описывается предложенная в работе автора [34] модель размещения предприятий, сформулированная как стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием. В ней учитываются как наличие случайных параметров, так и присутствие конкурента. Для математической постановки данной задачи используется двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием, в которой переменные как лидера, так и последователя являются бинарными. Данная задача также тесно связана с детерминированной задачей конкурентного размещения предприятий [1, 3], но в предлагаемой постановке предполагается, что величина дохода, получаемого от потребителя, не зависит от открываемого предприятия. Оказывается, что данное предположение позволяет разработать специальные методы решения задачи, которые и описаны в работе. Отметим, что эти методы получили дальнейшее развитие в работах [99, 170].

1.5.1. Модель конкурентного размещения предприятий с асимметричной информацией

Будем считать, что имеется два конкурирующих игрока, последовательно однократно размещающие свои предприятия. В данном разделе предполагается, что игроки владают асимметричной информаций: реализация случайных факторов известна только второго игроку (последователю).

Пусть $I = \{1, \ldots, r\}$ — множество возможных мест размещения предприятий, $J = \{1, \ldots, s\}$ — множество потребителей.

Будем считать, что доход X^j, $j \in J$, получаемый любым предприятием от потребителя, является случайной величиной с реализациями x^j. Совместное распределение случайных величин X^j будем считать известным. При этом лидер размещает свои предприятия, не зная реализацию случайного дохода, а последователь размещает свои предприятия, учитывая реализацию x^j. Введем случайный вектор $X = (X^1, \ldots, X^s)^\top$ с реализациями $x = (x^1, \ldots, x^s)^\top$, определённый на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^s, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Пусть известен линейный порядок $\succ_j$ на множестве I, задающий предпочтения потребителя $j \in J$. При данном линейном порядке $i \succ_j k$ означает, что из двух открытых предприятий $i \in I$ и $k \in I$ потребитель j выберет предприятие i.

Пусть затраты лидера f_i на открытие предприятия $i \in I$ известны и являются фиксированными, как и затраты последователя g_i на открытие предприятия $i \in I$.

В качестве стратегии лидера введем переменные u_i, u_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. Вектор, составленный из данных переменных, обозначим через u. Переменная u_i показывает, открывает ли лидер предприятие $i \in I$: $u_i = 1$, если открывает, и $u_i = 0$, если не открывает. Переменная u_{ij} показывает, выбрано ли лидером предприятие $i \in I$ для обслуживания потребителя $j \in J$: $u_{ij} = 1$, если выбрано, и $u_{ij} = 0$, если не выбрано.

В качестве стратегии последователя введем переменные y_i, y_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. Через y обозначим вектор, составленный из переменных последователя. Переменная y_i показывает, открывает ли последователь предприятие $i \in I$: $y_i = 1$, если открывает, и $y_i = 0$, если не открывает. Переменная y_{ij} показывает, выбрано ли последователем предприятие $i \in I$ для обслуживания потребителя $j \in J$: $y_{ij} = 1$, если выбрано, и $y_{ij} = 0$, если не выбрано.

Рассмотрим задачу последователя, которая решается при известной стратегии лидера u и известной реализации x случайного вектора X:

$$\sum_{i\in I} g_i y_i - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x^j y_{ij} \to \min_y \tag{1.87}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} \leqslant 1,\ j\in J; \tag{1.88}$$

$$y_i \geqslant y_{ij},\ i\in I,\ j\in J; \tag{1.89}$$

$$u_i + y_i + \sum_{l|i\succ_j l} y_{lj} \leqslant 1,\ i\in I,\ j\in J; \tag{1.90}$$

$$y_i, y_{ij} \in \{0,1\},\ i\in I,\ j\in J. \tag{1.91}$$

Целевая функция задачи (1.87) представляет разность двух сумм. Первая сумма выражает затраты на открытие предприятий последователя, а вторая сумма выражает доход, полученный от потребителей. Таким образом, последователем минимизируется прибыль, взятая с обратным знаком. Ограничение (1.88) не позволяет последователю назначить более одного предприятия для обслуживания j-го потребителя. Ограничение (1.89) позволяет последователю назначать для обслуживания потребителей только открытые им предприятия. Ограничение (1.90) запрещает последователю открывать i-е предприятие, если оно уже открыто лидером. Также данное ограничение не позволяет назначить для обслуживания j-го потребителя предприятия, которые менее предпочтительны для него, чем предприятие с номером i, если оно открыто лидером или последователем.

Множество оптимальных значений переменных в задаче (1.87) обозначим через $Y^*(u,x)$.

Введем функцию потерь лидера:

$$\Phi(u,x) = \max_{y\in Y^*(u,x)} \left\{ \sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x^j u_{ij}\right)\left(1-\sum_{i\in I} y_{ij}\right)\right\}. \tag{1.92}$$

Внешний максимум по стратегии последователя, выбираемой из множества оптимальных стратегий последователя, означает, что лидер учитывает наихудшую для себя оптимальную стратегию последователя. Так же как и целевая функция последователя, функция потерь лидера состоит из разности двух сумм. Первая сумма выражает затраты на открытие предприятий. А вторая сумма выражает доход, полученный от потребителей при известной реализации случайных параметров. При этом учитывается, что если $\sum\limits_{i\in I} y_{ij} = 1$, то j-й потребитель обслуживается некоторым предприятием последователя.

Также может быть рассмотрена функция потерь лидера

$$\Phi'(u,x) = \min_{y \in Y^*(u,x)} \left\{ \sum_{i \in I} f_i u_i - \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} x^j u_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} y_{ij} \right) \right\}. \qquad (1.93)$$

В этом случае лидер учитывает лучшую для себя оптимальную стратегию последователя.

Рассмотрим функцию квантили потерь лидера

$$\varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \qquad (1.94)$$

где $\alpha \in (0,1)$ – уровень надежности. Функция квантили (1.94) представляет собой минимальный уровень потерь (прибыли, взятой с обратным знаком), непревышение которого гарантируется с вероятностью α.

Сформулируем задачу лидера:

$$\varphi_\alpha(u) \to \min_u \qquad (1.95)$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} u_{ij} = 1,\ j \in J; \qquad (1.96)$$

$$u_i \geqslant u_{ij},\ i \in I,\ j \in J; \qquad (1.97)$$

$$u_i + \sum_{l \mid i \succ_j l} u_{lj} \leqslant 1,\ i \in I,\ j \in J; \qquad (1.98)$$

$$u_i, u_{ij} \in \{0,1\},\ i \in I,\ j \in J. \qquad (1.99)$$

Ограничения (1.96)–(1.99) задачи лидера имеют аналогичный смысл, что и ограничения (1.88)–(1.91) задачи последователя. Однако в отличие от задачи последователя в силу ограничений (1.96) и (1.97) требуется, чтобы лидером было открыто хотя бы одно предприятие. Таким образом, из рассмотрения исключается решение, при котором лидер не открывает ни одного предприятия. Однако лидеру следует принять такое решение, если решение задачи обеспечивает положительное значение критериальной функции (т.е. отрицательный уровень гарантированной прибыли).

Сформулированная задача (1.95) является двухуровневой задачей стохастического линейного программирования с квантильным критерием в пессимистической постановке. Пессимистическая постановка значит, что лидер учитывает наихудшую для себя оптимальную стратегию последователя.

Также может быть рассмотрена оптимистическая постановка задачи:

$$\varphi'_\alpha(u) \to \min_u \tag{1.100}$$

при ограничениях (1.96)–(1.99), где $\varphi'_\alpha(u) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi'(u, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$.

1.5.2. Модель конкурентного размещения предприятий с симметричной информацией

Предположение о том, что игроки, размещающие предприятия, владеют различной информацией о реализациях случайных факторов, не всегда оправдано. Представляет интерес ситуация, когда реализация случайных факторов не известны ни лидеру, ни последователю. В связи с этим модифицируем предложенную в предыдущем разделе модель конкурентного размещения предприятий на случай, когда игроки владеют симметричной информацией.

Описание переменных, параметров и случайных факторов соответствует предыдущему разделу. Введём обозначение для функции потерь последователя

$$\Psi(u, y, x) = \sum_{i\in I} g_i y_i - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x^j y_{ij}.$$

Функция потерь лидера обозначена через

$$\bar{\Phi}(u, y, x) = \sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x^j u_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i\in I} y_{ij}\right).$$

Введём функцию квантили потерь лидера

$$\bar{\varphi}_\alpha(u, y) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\bar{\Phi}(u, y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{1.101}$$

и функцию квантили потерь последователя

$$\psi_\beta(u, y) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Psi(u, y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \beta\}, \tag{1.102}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$. Отметим, что вероятности α и β показывают склонности к риску лидера и последователя и в общем случае могут отличаться.

В условиях симметричной информации последователь выбирает свою стратегию, когда известна только стратегия лидера. Задача последователя принимает вид

$$\psi_\beta(u, y) \to \min_y \tag{1.103}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leqslant 1,\ j \in J;$$

$$y_i \geqslant y_{ij},\ i \in I,\ j \in J;$$

$$u_i + y_i + \sum_{l | i \succ_j l} y_{lj} \leqslant 1,\ i \in I,\ j \in J;$$

$$y_i, y_{ij} \in \{0, 1\},\ i \in I,\ j \in J.$$

Смысл этих ограничений такой же, как и в задаче (1.87). Множество оптимальных значений переменных в задаче (1.103) обозначим через $Y^*(u)$.

Постановка двухуровневой задачи конкурентного размещения предприятий принимает вид

$$\max_{y \in Y^*(u)} \bar{\varphi}_\alpha(u, y) \to \min_u$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I} u_{ij} = 1,\ j \in J;$$

$$u_i \geqslant u_{ij},\ i \in I,\ j \in J;$$

$$u_i + \sum_{l | i \succ_j l} u_{lj} \leqslant 1,\ i \in I,\ j \in J;$$

$$u_i, u_{ij} \in \{0, 1\},\ i \in I,\ j \in J.$$

Отметим, что для некоторых распределений, например для гауссовского, функции квантили (1.101) и (1.102) могут быть легко найдены, что позволяет свести сформулированную задачу к дискретной детерминированной двухуровневой задаче и применить для её решения специальные методы, разработанные для этого класса задач.

1.6. Выводы по главе 1

1) Описан подход к построению двухэтапных и двухуровневых математических моделей сложных стохастических систем.

2) На основе предложенного подхода сформулированы стохастические модели планирования производства, распределения инвестиций, выбора энергосберегающих проектов, определения налоговой ставки, размещения предприятий.

3) Доказаны теоремы о достаточных условиях измеримости целевой функции потерь в двухэтапных задачах стохастического программирования и в двухуровневой задаче со случайными коэффициентами целевой функции последователя.

4) Доказаны теоремы о достаточных условиях полунепрерывности функций вероятности и квантили в двухэтапных и двухуровневых задачах стохастического программирования.

5) Обоснован доверительный метод для двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием.

6) Доказана эквивалентность априорной и апостериорной постановок задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями.

7) Предложен метод вычисления значения критериальной функции последователя в двухуровневой задаче стохастического программирования с квантильным критерием, с помощью которого решена задача инвестирования производства.

Основные результаты главы опубликованы в [22, 23, 28, 30, 31, 33–35, 37, 38, 72, 73, 80, 127, 142, 143].

Глава 2. Дискретизация вероятностной меры в задачах стохастического программирования с вероятностными критериями

В главе обсуждаются подходы к дискретизации вероятностной меры в задачах стохастического программирования с вероятностными и квантильными критериями. В разделе 2.1 изучается подход, основанный на аппроксимации распределения случайных параметров сходящейся по распределению последовательностью случайных величин. Описаны классы задач, для которых удалость доказать сходимость построенных аппроксимаций. В разделе 2.2 описан подход, основанный на выборочной аппроксимации решаемых задач. Доказаны теоремы о достаточных условиях сходимостей выборочных аппроксимаций. В разделе 2.3 приводятся оценки объёма выборки, обеспечивающего заданную точность и надёжность получаемых решений при выборочной аппроксимации рассматриваемых задач.

2.1. Исследование класса задач, для которых возможно построение детерминированного эквивалента

В данном разделе описывается подход к аппроксимации задач стохастического программирования вида

$$\mathbf{G}[\Phi(u, X)] \to \min_{u \in U}, \tag{2.1}$$

где G — некоторый функционал, определённый на множестве случайных величин, например функционал вероятности или квантили. Исследуется возможность аппроксимации задачи (2.1) последовательностью задач

$$\mathbf{G}[\Phi(u, X_n)] \to \min_{u \in U}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

где $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин, сходящаяся к случайной величине X по распределению. Отметим, что приведённые ниже результаты справедливы как для дискретных аппроксимаций случайной величины X, так и для произвольных распределений случайных величин X_n.

Требуется установить, при каких условиях имеет место сходимость решений задач (2.2) к решению задачи (2.1). Для произвольных функционалов $\mathbf{G}$ и функций потерь Φ данная задача оказывается достаточно сложной. В данном разделе рассматриваются вероятностный и квантильный функционалы. Для исследования свойств сходимости используется метод детерминированного эквивалента [11], позволяющий переходить от стохастической задачи (2.1) к детерминированной задаче. К сожалению, метод накладывает ряд ограничений на функцию потерь Φ. В данном разделе с помощью этого метода выделены классы задачи, для которых удаётся установить желаемую сходимость.

2.1.1. Аппроксимации задач стохастического программирования с вероятностными критериями

Пусть X — случайная величина, определённая на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и обладающая функцией распределения F. По-прежнему предполагается, что $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Носитель вероятностной меры $\mathbf{P}$ обозначается через $\mathcal{X}$.

Стратегию оптимизации обозначим через $u \in \mathbb{R}^r$, а множество допустимых стратегий — через $U \subset \mathbb{R}^r$. Будем предполагать, что множество U компактно. Функцию потерь обозначим через $\Phi\colon U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}, \tag{2.3}$$

где φ — фиксированный параметр, и функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{2.4}$$

где α — фиксированный уровень вероятности.

Изучаются задачи максимизации функции вероятности

$$U_\varphi^* \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi(u)$$

и минимизации функции квантили

$$V_\alpha^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u).$$

Пусть $\{X_n\}$ — некоторая последовательность случайных величин, определённых на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, сходящаяся по распределению к случайной величине X, что обозначается как $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$. Предполагается, что функции распределения случайных величин X_n известны и обозначены через F_n. Для всех $n \in \mathbb{N}$ определим функцию вероятности

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X_n) \leqslant \varphi\}$$

и функцию квантили

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi\colon P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Рассмотрим последовательность задач максимизации функций вероятности

$$u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi^{(n)}(u),\ n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

и последовательность задач минимизации функций квантили

$$u_\alpha^{(n)} \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u),\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Поскольку множество U компактно, последовательность $\{u_\varphi^{(n)}\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{u_\varphi^{(n_k)}\}$, а последовательность $\{u_\alpha^{(n)}\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{u_\alpha^{(n_k)}\}$. Обозначим пределы последовательностей $\{u_\varphi^{(n_k)}\}$ и $\{u_\alpha^{(n_k)}\}$ через $\bar{u}_\varphi$ и $\bar{u}_\alpha$ соответственно. Цель данного раздела состоит в поиске условий, гарантирующих оптимальность $\bar{u}_\varphi$ и $\bar{u}_\alpha$ в исходных задачах (2.3) и (2.4), что можно записать как $\bar{u}_\varphi \in U_\varphi^*$, $\bar{u}_\alpha \in U_\alpha^*$.

2.1.2. Вспомогательные результаты

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}$, сходящуюся к случайной величине X. Напомним, что через F_n и F обозначены функции распределения случайных величин X_n и X соответственно. Нижеприведённая теорема обеспечивает равномерную сходимость функций распределения [86, с. 152].

Теорема 2.1 ([86]). *Пусть $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$ и случайная величина X непрерывна. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$U_F^* \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} F(t(u)), \tag{2.8}$$

где $t\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, F — функция распределения случайной величины X. Предположим, что дана последовательность задач

$$U_F^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F_n(t(u)), \tag{2.9}$$

где F_n — функция распределения случайной величины X_n. Предположим, что существует сходящаяся последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n \in U_F^{(n)}$. Обозначим её предел через $\bar{u}$. Сформулируем теорему о достаточных условиях, гарантирующих оптимальность $\bar{u}$ в задаче (2.8)

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия:*

(i) функция распределения F непрерывна;

(ii) функция $t\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ непрерывна;

(iii) $X_n \xrightarrow{d} X$;

(iv) $u_n \in U_F^{(n)}$;

(v) $u_n \to \bar{u}$ при $n \to \infty$.

Тогда $\bar{u} \in U_F^*$

Доказательство леммы 2.1. Сначала докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t(u_n)) = F(t(\bar{u})). \tag{2.10}$$

Для упрощения записи введём обозначение $g_n(u) \triangleq F_n(t(u))$, $g(u) \triangleq F(t(u))$. Из (i) и (ii) следует, что функция g непрерывна. Тогда

$$|F_n(t(u_n)) - F_n(t(\bar{u}))| = |g_n(u_n) - g(\bar{u})| \leqslant |g_n(u_n) - g(u_n) + g(u_n) - g(\bar{u})| \leqslant$$
$$\leqslant |g_n(u_n) - g(u_n)| + |g(u_n) - g(\bar{u})|.$$

Поскольку g непрерывна, $|g(u_n) - g(\bar{u})| \to 0$ при $n \to \infty$. Заметим, что

$$|g_n(u_n) - g(u_n)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |F_n(x) - F(x)|.$$

По теореме 2.1 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, выполнено равенство (2.10).

Чтобы доказать лемму, предположим противное, т. е. $\bar{u} \notin U_F^*$. Тогда существует стратегия $u^* \in U$ такая, что $g(u^*) = g(\bar{u}) + c$, где $c > 0$. Согласно (i) и (v), $g_n(u^*) \to g(u^*)$ при $n \to \infty$. Это значит, что найдётся номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено

$$|g_n(u^*) - g(u^*)| = |g_n(u^*) - (g(\bar{u}) + c)| \leqslant \frac{c}{3},$$
$$|g_n(u_n) - g(\bar{u})| \leqslant \frac{c}{3}.$$

Тогда

$$g(\bar{u}) + \frac{2}{3}c \leqslant g_n(u^*) \leqslant g(\bar{u}) + \frac{4}{3}c,$$
$$g(\bar{u}) - \frac{1}{3}c \leqslant g_n(u_n) \leqslant g(\bar{u}) + \frac{1}{3}c.$$

Поэтому $g_n(u^*) > g_n(u_n)$, т. е. стратегия u_n не является оптимальной в задаче (2.9), что противоречит условию (iv). $\square$

Обозначим через $[X]_\alpha$ квантиль уровня α распределения случайной величины X. Рассмотрим задачу

$$V_t^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} t(u, [X]_\alpha), \tag{2.11}$$

где $t\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Пусть дана последовательность случайных величин $\{X_n\}$. Рассмотрим последовательность задач

$$V_t^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} t(u, [X_n]_\alpha).$$

Пусть $u_n \in V_t^{(n)}$. Предположим, что последовательность $\{u_n\}$ сходится к $\bar{u}$ при $n \to \infty$. Теперь сформулируем теорему об условиях, гарантирующих, что стратегия $\bar{u}$ оптимальна в задаче 2.11.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия:*

(i) $[X_n]_\alpha \to [X]_\alpha$ *при* $n \to \infty$*;*

(ii) *функция* $t\colon U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна;*

(iii) $u_n \in V_t^{(n)}$*;*

(iv) $u_n \to \bar{u}$ *при* $n \to \infty$*.*

Тогда $\bar{u} \in V_t^*$*.*

Доказательство леммы 2.2. Предположим противное: $\bar{u} \notin V_t^*$. Тогда существуют $c > 0$ и $u^* \in V_t^*$ такие, что $t(u^*, [X]_\alpha) = t(\bar{u}, [X]_\alpha) - c$. Поскольку функция t непрерывна,

$$\lim_{n\to\infty} t(u_n, [X_n]_\alpha) = t(\bar{u}, x_\alpha).$$

Это значит, что существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено

$$|t(u^*, [X_n]_\alpha) - t(u^*, [X]_\alpha)| = |t(u^*, [X_n]_\alpha) - (t(\bar{u}, [X]_\alpha) - c)| \leqslant \frac{c}{3},$$
$$|t(u_n, [X_n]_\alpha) - t(\bar{u}, [X_n]_\alpha)| \leqslant \frac{c}{3}.$$

Таким образом, можно заключить, что

$$t(u^*, [X_n]_\alpha) < t(u_n, [X_n]_\alpha).$$

Это противоречит оптимальности u_n. $\square$

2.1.3. Детерминированные эквиваленты

Приведём детерминированные эквиваленты задач (2.3) и (2.4). На них будет основана последующее доказательство сходимостей построенных аппроксимаций задач стохастического программирования.

2.1.3.1. Случай симметричного распределения

Будем считать, что

$$\Phi(u, x) = t(s(u)(x + c)), \tag{2.12}$$

где $s\colon U \to \mathbb{R}$ — функция, $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастающая непрерывная функция, c — действительное число. Предположим, что $s(u) \neq 0$ для всех $u \in U$. Будем считать, что распределение случайной величины X симметрично, т. е. для всех $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = \mathbf{P}\{-X \leqslant x\}. \tag{2.13}$$

Аналогичный случай был рассмотрен в [11], где X — сферически симметричный случайный вектор, а функция s линейна.

Теорема 2.2. *Пусть функция потерь задана формулой (2.12), $s(u) \neq 0$ для всех $u \in U$, распределение X симметрично. Тогда функция вероятности имеет вид*

$$P_\varphi(u) = F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right), \tag{2.14}$$

где t^{-1} — функция, обратная к t, а функция квантили —

$$\varphi_\alpha(u) = t\left(|s(u)|[X]_\alpha + cu\right). \tag{2.15}$$

Доказательство теоремы 2.14. Сначала докажем (2.14):

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\left\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\right\} = \mathbf{P}\left\{t(s(u)(X+c)) \leqslant \varphi\right\} = \mathbf{P}\left\{s(u)(X+c) \leqslant t^{-1}(\varphi)\right\}.$$

Если $s(u) > 0$, то

$$\mathbf{P}\left\{s(u)(X+c) \leqslant t^{-1}(\varphi)\right\} = \mathbf{P}\left\{X \leqslant \frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{s(u)}\right\} = F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right).$$

Если $s(u) < 0$, то

$$\mathbf{P}\left\{s(u)(X+c) \leqslant t^{-1}(\varphi)\right\} = \mathbf{P}\left\{X \geqslant \frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{s(u)}\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{-X \leqslant \frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right\} = F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right).$$

Теперь докажем (2.15):

$$\varphi_\alpha(u) = \min\left\{\varphi\colon F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right) \geqslant \alpha\right\} = \\ \min\left\{\varphi\colon \frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|} \geqslant [X]_\alpha\right\} = \min\left\{\varphi\colon t\left(|s(u)|[X]_\alpha + cu\right) \leqslant \varphi\right\} = \\ = t\left(|s(u)|[X]_\alpha + cu\right).$$

□

Таким образом, в рассматриваемом случае исходная задача (2.3) эквивалентна задаче

$$U^*_\varphi = \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right),$$

а задача (2.4) эквивалентна

$$V^*_\alpha = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} t\left(|s(u)|[X]_\alpha + cu\right).$$

2.1.3.2. Случай функции потерь, возрастающей по реализации случайной величины

Рассмотрим случай, когда функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ строго возрастает и непрерывна для всех $u \in U$. Введём обозначение $\Phi_x^{-1}(u,\varphi)$ для значения обратной функции к $x \mapsto \Phi(u,x)$, т. е.

$$\Phi(u, \Phi_x^{-1}(u,\varphi)) = \varphi. \tag{2.16}$$

Теорема 2.3 ([11]). *Пусть функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ строго возрастает и непрерывна по x для всех $u \in U$. Тогда функция вероятности имеет вид*

$$P_\varphi(u) = F(\Phi_x^{-1}(u,\varphi)),$$

а функция квантили —

$$\varphi_\alpha(u) = \Phi(u,[X]_\alpha). \tag{2.17}$$

В работе автора [59] доказано, что формула (2.17) справедлива, если функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ является неубывающей. Приведём это доказательство.

Теорема 2.4. *Пусть функцию $x \mapsto \Phi(u,x)$ не возрастает при всех $u \in U$ и непрерывна справа в точке $x = [X]_\alpha$. Тогда*

$$\varphi_\alpha(u) = \Phi(u,[X]_\alpha). \tag{2.18}$$

Доказательство теоремы 2.4. Так как функция $x \mapsto \Phi(u,x)$ не возрастает по x, то

$$\mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \Phi(u,[X]_\alpha)\} \geqslant \mathbf{P}\{-X \leqslant -[X]_\alpha\} \geqslant \alpha, \tag{2.19}$$

а значит, $\varphi_\alpha(u) \leqslant \Phi(u,[X]_\alpha)$.

Теперь докажем, что $\varphi_\alpha(u) \geqslant \Phi(u,[X]_\alpha)$. Предположим противное: $\varphi_\alpha(u) = \Phi(u,[X]_\alpha) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Из определения непрерывности справа по x в точке $[X]_\alpha$ и монотонности $\Phi(u,x)$ по x следует, что найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$\{x \mid 0 \leqslant x - [X]_\alpha < \delta\} \subset \{x \mid -\varepsilon < \Phi(u,x) - \Phi(u,[X]_\alpha) \leqslant 0\}. \tag{2.20}$$

Из монотонности $\Phi(u,x)$ по x следует, что

$$\{x \mid x - [X]_\alpha \leqslant 0\} \subset \{x \mid \Phi(u,x) - \Phi(u,[X]_\alpha) \geqslant 0\}. \tag{2.21}$$

Из вложений (2.20), (2.21) получаем, что

$$\{x \mid x - [X]_\alpha < \delta\} \subset \{x \mid -\varepsilon < \Phi(u,x) - \Phi(u,[X]_\alpha)\}. \tag{2.22}$$

Переходя в равенстве (2.22) к дополнениям множеств, получаем вложение

$$\{x \mid \Phi(u,x) - \Phi(u,[X]_\alpha) \leqslant -\varepsilon\} \subset \{x \mid [X]_\alpha - x \leqslant \delta\},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \Phi(u, [X]_\alpha) - \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{-X \leqslant -[X]_\alpha - \delta\}.$$

По определению $[X]_\alpha$ справедливо неравество $\mathbf{P}\{-X \leqslant -[X]_\alpha - \delta\} < \alpha$, а значит, $\mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi_\alpha(u)\} < \alpha$, что противоречит определению квантили, поэтому $\varphi_\alpha(u) = \Phi(u, [X]_\alpha)$. $\square$

Таким образом, детерминированный эквивалент задачи имеет вид

$$U^*_\varphi = \operatorname{Arg}\max_{u \in U} F(\Phi_x^{-1}(u, \varphi)),$$
$$V^*_\alpha = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \Phi(u, [X]_\alpha).$$

2.1.3.3. Случай функции потерь, возрастающей по стратегии оптимизации

Пусть

$$\Phi(u, x) = t(s(u), x), \tag{2.23}$$

где $s\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, а функция $t\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастающая и непрерывная по первому аргументу.

Теорема 2.5 ([11]). *Пусть функция потерь $\Phi(u, x)$ определена согласно (2.23). Тогда*

$$P_\varphi(u) = F_\xi(-s(u)), \tag{2.24}$$

где

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi \leqslant x\}, \tag{2.25}$$

$\xi \triangleq -t_s^{-1}(\varphi, X)$, $t_s^{-1}(\varphi, x)$ *— значение обратной функции к* $s_0 \mapsto t(s_0, x)$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2.5 исходная задача (2.4) эквивалента

$$U^*_\varphi = \operatorname{Arg}\max_{u \in U} F_\xi(-s(u)), \tag{2.26}$$

2.1.4. Теоремы о сходимости

Рассмотрим последовательности $\{u^{(n)}_\varphi\}$ и $\{u^{(n)}_\alpha\}$, определённые согласно (2.5) и (2.6) Как было замечено выше, эти последовательности имеют сходящиеся подпоследовательности $\{u_\varphi^{(n_k)}\}$ и $\{u_\alpha^{(n_k)}\}$. В данном разделе будут описаны условия, при которых каждый частичный предел последовательности $\{u_\varphi^{(n)}\}$ оптимален в задаче (2.3), а также условия, при которых каждый частичный предел последовательности $\{u_\alpha^{(n)}\}$ оптимален в задаче (2.4).

2.1.4.1. Случай симметричного распределения

Сначала рассмотрим случай из раздела 2.1.3.1, когда

$$\Phi(u,x) = t(s(u)(x+c)) \tag{2.27}$$

где функция $s\colon U \to \mathbb{R}$ такая, что $s(u) \neq 0$ для всех $u \in U$, $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая и непрерывная функция, а распределение случайной величины X симметрично.

Сформулируем теорему о сходимости задач максимизации функций вероятности.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия:*

(i) *функция потерь $\Phi(u,x)$ определена формулой (2.27);*

(ii) *функция $s\colon U \to \mathbb{R}$ непрерывна и обладает таким свойством, что $s(u) \neq 0$ для всех $u \in U$;*

(iii) *распределения случайных величин X и X_n симметричны;*

(iv) *$X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$;*

(v) *случайная величина X непрерывна;*

(vi) *$u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u)$.*

Тогда каждый частичный предел $\bar u_\varphi$ последовательности $\{u_\varphi^{(n)}\}$ принадлежит множеству U_φ^*.

Доказательство теоремы 2.6. Пусть $\{u_\varphi^{(n_k)}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_\varphi^{(n)}\}$. Из теоремы 2.2 следует, что

$$U_\varphi^* = \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right),$$
$$u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F_n\left(\frac{t^{-1}(\varphi) - cs(u)}{|s(u)|}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку функция s непрерывна и $s(u) \neq 0$, функция $u \mapsto \frac{t^{-1}(\varphi)-cs(u)}{|s(u)|}$ также непрерывна. Таким образом, из леммы 2.1 следует, что $\bar{u}_\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} u_\varphi^{(n_k)} \in U_\varphi^*$. $\square$

Теперь сформулируем теорему о сходимости задач минимизации функций квантили.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия:*

(i) $\Phi(u, x)$ *определена согласно (2.27);*

(ii) функция $s\colon U \to \mathbb{R}$ *непрерывна и такая, что* $s(u) \neq 0$ *для всех* $u \in U$*;*

(iii) распределения случайных величин X *и* X_n *симметричны;*

(iv) $[X_n]_\alpha \to [X]_\alpha$ *при* $n \to \infty$*;*

(v) $u_\alpha^{(n)} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u)$*.*

Тогда каждый частичный предел $\bar{u}_\alpha$ *последовательности* $\{u_\alpha^{(n)}\}$ *принадлежит множеству* V_α^**.*

Доказательство теоремы 2.7. Пусть $\{u_\alpha^{(n_k)}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_\alpha^{(n)}\}$. Из теоремы 2.2 следует, что

$$V_\alpha^* = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} r\left(|s(u)|[X]_\alpha + cu\right),$$

$$u_\alpha^{(n)} \in \operatorname{Arg}\min_{u\in U} r\left(|s(u)|[X_n]_\alpha + cu\right).$$

Поскольку функция t непрерывная и строго возрастающая, из леммы 2.2 следует, что $\bar{u}_\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} u_\alpha^{(n_k)} \in V_\alpha^*$. $\square$

2.1.4.2. Случай функции потерь, возрастающей по реализации случайной величины

Рассмотрим случай из раздела 2.1.3.2.

Сформулируем теорему об условиях, гарантирующих сходимость задач максимизации функций вероятности.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия:*

(i) для всех $u \in U$ *функция* $x \mapsto \Phi(u, x)$ *строго возрастает и непрерывна по* x*;*

(ii) *функция* $u \mapsto \Phi_x^{-1}(u,\varphi)$ *непрерывна* $u \in U$;

(iii) $X_n \xrightarrow{d} X$ *при* $n \to \infty$;

(iv) *случайная величина* X *непрерывна;*

(v) $u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u)$.

Тогда каждый частичный предел $\bar u_\varphi$ *последовательности* $\{u_\varphi^{(n)}\}$ *принадлежит множеству* U_φ^*.

Доказательство теоремы 2.8. Из теоремы 2.3 следует, что

$$U_\varphi^* = \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F(\Phi_x^{-1}(u,\varphi)), \tag{2.28}$$

$$u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F_n(\Phi_x^{-1}(u,\varphi)),\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

Поскольку функция $u \mapsto \Phi_x^{-1}(u,\varphi)$ непрерывна, из леммы 2.1 следует, что $\bar u_\varphi \in U_\varphi^*$. $\square$

Теперь опишем условия сходимости задач минимизации функции квантили.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия:*

(i) *функция* $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ *не убывает по* x *и непрерывна по совокупности переменных* (u,x);

(ii) $[X_n]_\alpha \to [X]_\alpha$ *при* $n \to \infty$;

(iii) $u_\alpha^{(n)} \in \operatorname{Arg}\min\limits_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u)$.

Тогда каждый частичный предел $\bar u_\alpha$ *последовательности* $\{u_\alpha^{(n)}\}$ *принадлежит множеству* U_α^*.

Доказательство теоремы 2.9. Из теоремы 2.3 и теоремы 2.4 следует, что

$$V_\alpha^* = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \Phi(u,[X]_\alpha),$$

$$u_\alpha^{(n)} \in \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \Phi(u,[X_n]_\alpha),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ непрерывна, из леммы 2.2 получаем, что $\bar u_\alpha \in V_\alpha^*$ $\square$

2.1.4.3. Случай функции потерь, возрастающей по стратегии оптимизации

Рассмотрим случай из раздела 2.1.3.3. Обозначим через F_{ξ_n} функцию распределения случайной величины $\xi_n \triangleq -t_s^{-1}(\varphi, X_n)$. Напомним, что $\xi \triangleq -t_s^{-1}(\varphi, X)$, F_ξ — функция распределения случайной величины ξ.

Сформулируем теорему о сходимости задач максимизации функций вероятности.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия:*

(i) $\Phi(u,x) = t(s(u),x)$, *где функция* $s\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *непрерывна, функция* $t\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *строго возрастает и непрерывна по первому аргументу;*

(ii) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *при* $n \to \infty$*;*

(iii) случайная величина ξ *непрерывна;*

(iv) $u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u)$.

Тогда каждый частичный предел $\bar{u}_\varphi$ *последовательности* $\{u_\varphi^{(n)}\}$ *принадлежит множеству* U_φ^*.

Доказательство теоремы 2.10. Из теоремы 2.5 следует, что

$$U_\varphi^* = \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F_\xi(-s(u)),$$

$$u_\varphi^{(n)} \in \operatorname{Arg}\max_{u\in U} F_{\xi_n}(-s(u)),\ n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку функции Φ и s непрерывны, по лемме 2.1, заключаем, что $\bar{u}_\varphi \in U_\varphi^*$. $\square$

2.2. Выборочные аппроксимации задач стохастического программирования с вероятностными критериями

2.2.1. Выборочная аппроксимация одноэтапной задачи

Опишем процедуру выборочной аппроксимации для одноэтапной задачи стохастического программирования. Сначала приведём постановку задачи. Пусть задано полное вероятностное пространство $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Как и ранее, X — случайный вектор, определённый на этом вероятностном пространстве, для которого $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$. Носитель вероятностной меры $\mathbf{P}$ обозначен через $\mathcal{X}$. Пусть $\Phi\colon U \times \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ — функция потерь, $Q\colon U \times \mathcal{X} \to (-\infty, +\infty]$ — функция, задающая дополнительные вероятностные ограничения, где $U \subset \mathbb{R}^r$ — непустое компактное множество допустимых стратегий оптимизации u. Возможность равенства $\Phi(u,x) = +\infty$ позволяет проводить анализ двухэтапных задач стохастического программирования, когда функция потерь определяется через решение оптимизационной задачи второго этапа.

Будем считать, что функции Φ, Q являются нормальными интегрантами (см. определение 1.1).

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \tilde{P}(u,\varphi) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\}.$$

Здесь вводятся два обозначения для функции вероятности, потому что в дальнейшем будет необходимо рассматривать как функцию $u \mapsto P_\varphi(u)$ при фиксированном $\varphi \in \mathbb{R}$, так и функцию двух аргументов $(u,\varphi) \mapsto \tilde{P}(u,\varphi)$.

Функция квантили определяется следующим образом:

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\},$$

где $\alpha \in (0,1)$ — заданный уровень надёжности. Целесообразно рассматривать уровни $\alpha \in (0, P^*)$,

$$P^* = \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{\Phi(u,X) < +\infty,\ Q(u,X) \leqslant 0\},$$

но величину P^* не всегда легко найти. Поэтому описываемый ниже метод выборочных аппроксимаций может применяться и при $\alpha \geqslant P^*$.

Если при заданном $u \in U$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\} < \alpha,$$

считается, что $\varphi_\alpha(u) = +\infty$.

Рассмотрим задачу максимизации функции вероятности

$$\alpha^* \triangleq \max_{u \in U} P_\varphi(u), \tag{2.30}$$

$$U^*_\varphi \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u \in U} P_\varphi(u)$$

и задачу минимизации функции квантили

$$\varphi^* \triangleq \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{2.31}$$

$$V^*_\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u).$$

В [51] доказана теорема о существовании решений задач (2.30) и (2.31).

Теорема 2.11 ([51]). *Пусть функции* $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ *и* $(u,x) \mapsto Q(u,x)$ *являются нормальными интегрантами, тогда*

1) *функция вероятности* P_φ *является полунепрерывной сверху, а функция квантили* φ_α — *полунепрерывной снизу;*

2) *если множество* U *является непустым и компактным, то* $U^*_\varphi \neq \varnothing$ *и* $V^*_\alpha \neq \varnothing$.

Опишем процедуру построения выборочных аппроксимаций задач (2.30) и (2.31). Рассмотрим последовательность $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ независимых случайных векторов, распределения которых совпадают с распределением случайного вектора X. Согласно теореме Колмогорова [87, гл. 2, § 3, теорема 3] такая последовательность всегда существует и может быть определена на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. Процедура построения данного вероятностного пространства описана в доказательстве теоремы Колмогорова [87]. В качестве пространства элементарных событий рассматривается пространство $\mathcal{X}^\infty$ реализаций последовательности $\{X_k\}_{k=1}^\infty$. σ-алгебра $\mathcal{F}'$ строится как бесконечное произведение σ-алгебр $\mathcal{F}$, а вероятностная мера $\mathbf{P}'$ согласована с вероятностной мерой $\mathbf{P}$, т. е. для всех последовательностей борелевских множеств $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}'\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{X \in B_k\}. \tag{2.32}$$

Конечно, последовательность $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ можно определять и на другом вероятностном пространстве, если это возможно.

Рассмотрим частоту появления события $\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\}$, которую можно записать в виде

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \tilde{P}^{(n)}(u,\varphi) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,0]}(\max\{\Phi(u,X_k)-\varphi, Q(u,X_k)\}),$$

где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Как известно из математической статистики, частота является несмещённой сильно состоятельной оценкой вероятности по выборке $\{X_k\}_{k=1}^n$. Поэтому в качестве выборочной оценки функции вероятности $P_\varphi(u)$ примем величину $P_\varphi^{(n)}(u)$. Тогда дискретная аппроксимация задачи максимизации функции вероятности примет вид

$$P_\varphi^{(n)}(u) \to \max_{u\in U}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Введём обозначения:

$$U_\varphi^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u), \quad n\in\mathbb{N},$$
$$\alpha_n = \max_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Используя оценку функции вероятности, построим оценку функции квантили

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}. \tag{2.34}$$

Таким образом, аппроксимация задачи (2.31) может быть записана в виде

$$\varphi_n \triangleq \min_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.35}$$
$$V_\alpha^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что данные аппроксимации можно построить даже в том случае, когда закон распределения случайного вектора X неизвестен, а доступна только выборка его значений $\{X_k\}_{k=1}^n$.

Покажем, что введённая оценка функции квантили при $Q(u,x)\equiv 0$ совпадает с порядковой статистикой выборки значений $\{\Phi_k\}_{k=1}^n$ случайной величины $\Phi_0 \triangleq \Phi(u,X)$, имеющей номер $\lceil \alpha n\rceil$ и называемой выборочной квантилью, где $\lceil x\rceil \triangleq \min\{k\in\mathbb{N} \mid x\leqslant k\}$. Рассмотрим соответствующий вариационный ряд

$$\Phi_{(1)} \leqslant \Phi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \Phi_{(n)}.$$

Лемма 2.3. *Если $Q(u,x)\equiv 0$, то $\varphi_\alpha^{(n)}(u) = \Phi_{(\lceil \alpha n\rceil)}$.*

Доказательство леммы 2.3. Заметим, что $P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha$ тогда и только тогда, когда k-й элемент вариационного ряда удовлетворяет неравенству $\Phi_{(k)} \leqslant \varphi$, где номер k такой, что $\frac{k}{n} \geqslant \alpha$. Таким образом,

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) = \min\left\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\right\} = \min\left\{\Phi_{(k)} \mid \frac{k}{n} \geqslant \alpha\right\} = \min\left\{\Phi_{(k)} \mid k \geqslant n\alpha\right\} = \Phi_{(\lceil \alpha n\rceil)}.$$

□

Из леммы 2.3 следует, что при $Q(u,x)\equiv 0$ значение оценки функции квантили $\varphi_\alpha^{(n)}(u)$, определённой согласно (2.34), может быть вычислено без явного вычисления оценки функции вероятности $P_\varphi^{(n)}(u)$.

2.2.2. Используемый математический аппарат и известные результаты

2.2.2.1. Гипосходимость и эписходимость

Для исследования сходимости аппроксимаций задач максимизации часто используется понятие гипосходимости последовательности функций [191].

Определение 2.1 ([191]). Последовательность функций $f_n\colon \mathbb{R}^m \to [-\infty,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, называется гипосходящейся к функции $f\colon \mathbb{R}^m \to [-\infty,+\infty]$, что обозначается как $f_n \xrightarrow{h} f$ при $n \to \infty$, если в любой точке $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ выполнены следующие два условия:

1) для любой последовательности u_n, сходящейся к $\bar{u}$,

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(u_n) \leqslant f(\bar{u});$$

2) существует последовательность u_n, сходящаяся к $\bar{u}$,

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(u_n) \geqslant f(\bar{u}).$$

Для анализа сходимости аппроксимаций задач минимизации вводится аналогичное понятию гипосходимости понятие эписходимости.

Определение 2.2 ([191]). Последовательность функций $f_n\colon \mathbb{R}^m \to [-\infty,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, называется эписходящейся к функции $f\colon \mathbb{R}^m \to [-\infty,+\infty]$, что обозначается как $f_n \xrightarrow{e} f$ при $n \to \infty$, если последовательность функций $\{-f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является гипосходящейся к функции $-f$.

Справедлива следующая теорема [191], которую переформулируем в терминах задач максимизации для случая компактного множества U.

Теорема 2.12 ([191]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) функции f_n, f полунепрерывны сверху, $f_n \not\equiv -\infty$, $f \not\equiv -\infty$ на U, а также для всех $u \in U$ $f_n(u) < +\infty$, $f(u) < +\infty$;

(iii) $f_n \xrightarrow{h} f$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \max_{u\in U} f_n(u) = \max_{u\in U} f(u)$$

и для любого частичного предела $\bar{u}$ *последовательности* $u_n \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f_n(u)$, $n \in \mathbb{N}$, *выполнено* $\bar{u} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f(u)$.

Приведённая теорема гарантирует сходимость аппроксимаций исходной задачи как по значению критериальной функции, так и по стратегии. Заметим, что если решение аппроксимируемой задачи единственно, т.е. множество $\operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f(u)$ состоит из одной точки $\bar{u}$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u} = \arg\max_{u\in U} f(u).$$

Сформулируем лемму о сходимости к нулю уклонений множеств оптимальных решений. Через

$$D(A,B) \triangleq \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a-b\|$$

будем обозначать уклонение множества A от множества B.

Лемма 2.4. *Пусть для любого частичного предела* $\bar{u}$ *последовательности* $u_n \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f_n(u)$, $n \in \mathbb{N}$, *выполнено* $\bar{u} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f(u)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} D(\operatorname{Arg}\max_{u\in U} f_n(u), \operatorname{Arg}\max_{u\in U} f(u)) = 0.$$

Доказательство леммы 2.4. Предположим противное, что существуют подпоследовательность $\{u_{n_j}\}$, где $u_n \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f_n(u)$, такая, что $u_{n_j} \to \bar{u}$ при $j \to \infty$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для всех $u^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f(u)$ выполнено

$$\|u_{n_j} - u^*\| > \varepsilon$$

В силу непрерывности нормы получаем, что

$$\|\bar{u} - u^*\| \geqslant \varepsilon \tag{2.36}$$

По условию леммы $\bar{u} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} f(u)$, а значит, неравенство (2.36) должно быть выполнено и при $u^* = \bar{u}$. Поскольку $\varepsilon > 0$, получаем противоречие. □

2.2.2.2. Гипосходимость функций математического ожидания

Рассмотрим функцию, являющуюся математическим ожиданием некоторой функции потерь,

$$g(u) \triangleq \mathbf{M}[\Psi(u, X)], \tag{2.37}$$

где $\Psi(u,x)\colon U \times \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty)$. Выборочная оценка функции $g(\cdot)$ имеет вид

$$g^{(n)}(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Psi(u, X_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Описание выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$ приведено выше. В [93] доказана следующая теорема, которую приведём в терминах гипосходимости.

Теорема 2.13 ([93]). *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) сигма-алгебра $\mathcal{F}$ является полной относительно вероятностной меры $\mathbf{P}$;

(ii) функция $(u,x) \mapsto -\Psi(u,x)$ является нормальным интегрантом;

(iii) для каждой точки $u \in U$ существует открытая окрестность $O(u)$ и $\mathbf{P}$-*интегрируемая функция $h\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $\tilde{u} \in O(u)$ и почти всех $x \in \mathcal{X}$ выполено неравенство $\Psi(\tilde{u}, x) \leqslant h(x)$.*

Тогда $g^{(n)} \xrightarrow{h} g$ при $n \to \infty$ п.н.

Заметим, что при выполнении условия (ii) данной теоремы функция $(u,x) \mapsto \Psi(u,x)$ является полунепрерывной сверху.

Приведённая теорема задаёт условия, при которых гарантируется гипосходимость функций математического ожидания п.н. Здесь сходимость почти наверное понимается в том смысле, что для почти всех реализаций последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность соответствующих реализаций функций $g^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, является гипосходящейся к функции g при $n \to \infty$.

2.2.2.3. Сходимость аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями

В [178] исследуется аппроксимация задачи стохастического программирования с вероятностным ограничением

$$f^* \triangleq \min_{u \in U} \{f(u) \mid \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\}, \tag{2.38}$$
$$U^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \{f(u) \mid \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\}$$

последовательностью следующих задач:

$$f_n^* \triangleq \min_{u \in U} \left\{ f(u) \mid \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(Q(u,X_k)) \geqslant \alpha \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$U_n^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \left\{ f(u) \mid \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(Q(u,X_k)) \geqslant \alpha \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\{X_k\}_{k=1}^n$ — выборка, описанная выше.

Заметим, что задача (2.38) может быть записана в форме

$$U^* = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \min \{\varphi \mid \mathbf{P}\{f(u) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\},$$

т.е. является частным случаем задачи (2.31) при $\Phi(u,x) = f(u)$.

С другой стороны, задача (2.31) может быть записана в форме задачи (2.38):

$$(V_\alpha^*, \varphi^*) = \operatorname{Arg}\min_{(u,\varphi) \in U \times \mathbb{R}^1} \{\varphi \mid \mathbf{P}\{\tilde{Q}(u,\varphi,X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\}, \tag{2.39}$$

где $\tilde{Q}(u,\varphi,x) \triangleq \max\{\Phi(u,x) - \varphi, Q(u,x)\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.14 ([178]). *Пусть выполнены следующие предположения:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) функция $Q\colon U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ измерима по $x \in \mathcal{X}$ для всех $u \in U$ и непрерывна по $u \in U$ для почти всех $x \in \mathcal{X}$;

(iii) функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ непрерывна;

(iv) существует оптимальная стратегия $u^* \in U^*$ такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{u} \in U$, для которого выполнено $\|\tilde{u} - u^*\| \leqslant \varepsilon$ и $\mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\} > \alpha$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f^*$ *(п.н.) и* $\lim\limits_{n\to\infty} D(U_n^*, U^*) = 0$ *(п.н.).*

Сформулируем следствие теоремы 2.14 в терминах задачи минимизации функции квантили (2.39).

Следствие 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U *компактно и непусто*;

(ii) функции $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ *и* $(u, x) \mapsto Q(u, x)$ *непрерывны по* $u \in U$ *для почти всех* $x \in \mathcal{X}$ *и измеримы по* x *для всех* $u \in U$;

(iii) существует оптимальная стратегия $u^* \in V_\alpha^*$*, при которой для всех* $\varepsilon > 0$ *существует пара* $(\tilde{u}, \tilde{\varphi})$ *такая, что* $\|\tilde{u} - u^*\| + |\tilde{\varphi} - \varphi^*| \leqslant \varepsilon$ *и* $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ *(п.н.) и* $\lim\limits_{n\to\infty} D(V_\alpha^{(n)}, V_\alpha^*) = 0$ *(п.н.).*

Доказательство следствия 2.1. Для применения теоремы 2.14 запишем задачу (2.39) в форме

$$(V_\alpha^*, \varphi^*) = \operatorname{Arg} \min_{(u,\varphi)\in U\times[\varphi^*, \varphi^*+\delta]} \{\varphi \mid \mathbf{P}\{\tilde{Q}(u, \varphi, X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\}, \tag{2.40}$$

где δ — положительная константа. Множество $U \times [\varphi^*, \varphi^* + \delta]$ допустимых стратегий оптимизации (u, φ) в задаче (2.40) является компактным, поэтому условие (i) теоремы 2.14 выполнено. Непрерывность функций $u \mapsto \Phi(u, x)$ и $u \mapsto Q(u, x)$ гарантирует непрерывность функции $(u, \varphi) \mapsto \tilde{Q}(u, \varphi, x)$ при почти всех $x \in \mathcal{X}$, что обеспечивает выполнение условия (ii) теоремы 2.14. Условие (iii) сформулированного следствия является эквивалентной записью условия (iii) для стратегии оптимизации (u, φ). Таким образом, утверждение следствия выполнено. □

2.2.3. Гипосходимость выборочных функций вероятности

Функция вероятности может быть записана в виде математического ожидания, задача минимизации которого описана в разделе 2.2.2.2. Справедливо следующее соотношение:

$$P_\varphi(u) = \tilde{P}(u, \varphi) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi,\ Q(u, X) \leqslant 0\} = \mathbf{M}\left[\tilde{\Psi}(u, \varphi, X)\right],$$

где $\tilde{\Psi}(u, \varphi, X) \triangleq \chi_{(-\infty,0]}(\max\{\Phi(u, X) - \varphi, Q(u, X)\})$.

В следующей лемме сформулированы условия, гарантирующие полунепрерывность сверху функции $(u, \varphi, x) \mapsto \tilde{\Psi}(u, \varphi, x)$ по $u \in U$.

Лемма 2.5. *Пусть функции Φ и Q являются нормальными интегрантами. Тогда функция $((u, \varphi), x) \mapsto -\tilde{\Psi}(u, \varphi, x)$ является нормальным интегрантом.*

Доказательство леммы 2.5. Утверждение леммы значит, что функция $\tilde{\Psi}(\cdot)\colon U \times \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ является измеримой по совокупности аргументов и полунепрерывной сверху по $(u, \varphi) \in U \times \mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathcal{X}$. Измеримость функции следует из измеримости множества

$$\{(u, \varphi, x) \in U \times \mathbb{R} \times \mathcal{X}\colon \max\{\Phi(u, x) - \varphi, Q(u, x)\} \leqslant 0\}.$$

Известно [191], что функция $f\colon \mathbb{R}^m \to [-\infty, +\infty]$ является полунепрерывной снизу (сверху) тогда и только тогда, когда её надграфик (подграфик) замкнут. Ещё одним критерием полунепрерывности снизу (сверху) является замкнутость множеств вида $\{u \in U \mid f(u) \leqslant t\}$ ($\{u \in U \mid f(u) \geqslant t\}$) для всех $t \in [-\infty, +\infty]$. Надграфик функции $(u, \varphi) \mapsto \max\{\Phi(u, x) - \varphi, Q(u, x)\}$ является пересечением надграфиков функций $(u, \varphi) \to \Phi(u, x) - \varphi$ и $(u, \varphi) \mapsto Q(u, x)$, а значит, в силу полунепрерывности снизу $\Phi(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ функция максимума является полунепрерывной снизу при всех $x \in \mathcal{X}$. Для доказательства полунепрерывности сверху функции $(u, \varphi) \mapsto \Psi(u, \varphi, x)$ достаточно показать, что множество $\{(u, \varphi) \in U \times \mathbb{R} \mid \tilde{\Psi}(u, \varphi, x) \geqslant 1\}$ является замнутым для всех $x \in \mathcal{X}$. Действительно

$$\{(u, \varphi) \in U \times \mathbb{R} \mid \tilde{\Psi}(u, \varphi, x) \geqslant 1\} = \{(u, \varphi) \in U \times \mathbb{R} \mid \max\{\Phi(u, x) - \varphi, Q(u, x)\} \leqslant 0\}.$$

Последнее множество является замкнутым в силу полунепрерывности снизу функции максимума. $\square$

Из полунепрерывности сверху функции $(u, \varphi, x) \mapsto \tilde{\Psi}(u, \varphi, x)$ по $u \in U$ следует утверждение о гипосходимости выборочной аппроксимации функции вероятности.

Теорема 2.15. *Если функции Φ, Q являются нормальными интегрантами, то $\tilde{P}^{(n)} \xrightarrow{h} \tilde{P}$ п.н. и $P_\varphi^{(n)} \xrightarrow{h} P_\varphi$ п.н. при $n \to \infty$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$.*

Доказательство теоремы 2.15. Как было отмечено выше, функция вероятности может быть представлена в форме (2.37): $P_\varphi(u) = \mathbf{M}\left[\tilde{\Psi}(u, \varphi, X)\right]$. По лемме 2.5 функция

$((u,\varphi),x) \mapsto -\tilde{\Psi}(u,\varphi,x)$ является нормальным интегрантом. Из определения индикаторной функции $\chi_{(-\infty,0]}$ следует ограниченность функции $\tilde{\Psi}$. Таким образом, из теоремы 2.13 следует доказываемое утверждение. □

Ранее результат, аналогичный теореме 2.15, был сформулирован в [178] для случая, когда функция $(u,x) \mapsto Q(u,x)$ является непрерывной по u и измеримой по x, а $\Phi(u,x) \equiv 0$.

Из теорем 2.12 и 2.15 следует

Теорема 2.16. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) функции Φ и Q являются нормальными интегрантами.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \max_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u) = \alpha^* \quad \textit{(п.н.)} \tag{2.41}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} D(U_\varphi^{(n)}, U_\varphi^*) = 0 \quad \textit{(п.н.)}$$

Доказательство теоремы 2.16. По теореме 2.15 $P_\varphi^{(n)} \xrightarrow{h} P_\varphi$ п.н. при $n\to\infty$. Зафиксируем реализацию последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, при которой имеет место указанная гипосходимость, и рассмотрим соответствующую последовательность реализаций функций $\{P_\varphi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда по теореме 2.12 реализация последовательности $\{u_n^\varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой $u_n^\varphi \in \operatorname{Arg}\max\limits_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u)$, обладает свойством (2.41) и любой частичный $\bar{u}^\varphi$ предел последовательности $\{u_n^\varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежит множеству U_φ^*. По лемме 2.4 имеет место сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} D(U_\varphi^{(n)}, U_\varphi^*) = 0$. В силу произвольного выбора реализации последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ утверждение теоремы выполнено п.н. □

Таким образом, теорема 2.16 гарантирует сходимость п.н. выборочных аппроксимаций задачи максимизации функции вероятности (2.33) к решению задачи (2.30) как по значению критериальной функции, так и по стратегии. Заметим, что в случае, когда решение задачи (2.30) является единственным, случайная последовательность $\{u_n^\varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к детерминированному вектору $\bar{u}^\varphi$, который и является решением задачи (2.30). В том случае, когда множество U_φ^* состоит более чем из одной точки, значение $\bar{u}^\varphi$ может зависеть от реализации случайной последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2.4. Сходимость выборочных аппроксимаций задачи стохастического программирования с квантильным критерием

Рассмотрим задачу минимизации функции квантили (2.31), а также последовательность её выборочных аппроксимаций (2.35) и сформулируем теорему об их сходимости к исходной задаче, обобщающую следствие 2.1 теоремы 2.14.

Теорема 2.17. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) функции Φ и Q являются нормальными интегрантами, и $\Phi(u,x) > -\infty$ для всех $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$;

(iii) если $\varphi^* \neq +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u},\tilde{\varphi})$ такая, что $|\tilde{\varphi} - \varphi^*| \leqslant \varepsilon$ и $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ (п.н.) и $\lim\limits_{n\to\infty} D\left(V_\alpha^{(n)}, V_\alpha^*\right) = 0$ (п.н.) при $V_\alpha^* \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы 2.17. Пусть $u_n \in V_\alpha^{(n)}$ ($u_n \in U$ при $V_\alpha^{(n)} = \varnothing$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Условие $\Phi(u,x) > -\infty$ исключает возможность $\varphi^* = -\infty$. Согласно условию (iii) при $\varphi^* \neq +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся пара $(\tilde{u},\tilde{\varphi})$ такая, что $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$ и $\tilde{\varphi} \leqslant \varphi^* + \varepsilon$. Из усиленного закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\tilde{u}) = P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha \quad \text{(п.н.)}.$$

Это значит, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N$ выполнено

$$P_{\tilde{\varphi}}^{(n)}(\tilde{u}) > \alpha.$$

Отсюда следует, что при всех $n > N$ выполнено

$$\varphi_n \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(\tilde{u}) \leqslant \tilde{\varphi} \leqslant \varphi^* + \varepsilon.$$

В силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$ получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \varphi_n \leqslant \varphi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{2.42}$$

Очевидно, что неравенство (2.42) выполнено и при $\varphi^* = +\infty$.

Рассмотрим последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим нижний предел данной последовательности через $\bar{\varphi} \triangleq \varliminf\limits_{n\to\infty} \varphi_n$.

Покажем, что $\bar{\varphi} \neq -\infty$. Рассмотрим случайную величину $\xi \triangleq \min\limits_{u \in U} \Phi(u, X)$. Поскольку Φ является нормальным интегрантом, согласно [191] ξ действительно является случайной величиной, т. е. измеримой функцией элементарного исхода. В силу полунепрерывности $\Phi(u, x)$ по u имеем $\xi > -\infty$ (п.н.), а значит, и квантиль уровня α распределения данной случайной величины удовлетворяет условию $[\xi]_\alpha > -\infty$. Так как для любого u почти наверное $\xi \leqslant \Phi(u, X)$, для любого $u \in U$ справедливо соотношение

$$[\xi]_\alpha \leqslant \min\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} \leqslant \\ \leqslant \min\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi,\ Q(u, X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\} = \varphi_\alpha(u).$$

Докажем, что выборочные оценки квантили $[\xi]_\alpha$, обозначенные через $\xi_\alpha^{(n)}$, ограничены снизу п.н. Выберем уровень вероятности $\alpha' < \alpha$ так, чтобы $[\xi]_{\alpha'} < [\xi]_\alpha$ и $\mathbf{P}\{\xi \leqslant [\xi]_{\alpha'}\} = \alpha'$. Если такого α' не существует, то ξ почти наверное ограничена снизу, а значит, ограничены снизу и выборочные оценки квантили. Согласно теореме Гливенко-Кантелли $F^{(n)}([\xi]_{\alpha'}) \to \mathbf{P}\{\xi \leqslant [\xi]_{\alpha'}\} = \alpha'$ при $n \to \infty$, где через $F^{(n)}$ обозначена выборочная функция распределения случайной величины ξ. Поэтому начиная с некоторого номера N' для всех $n > N'$ будет выполнено

$$F^{(n)}([\xi]_{\alpha'}) < \alpha.$$

Отсюда следует, что начиная с номера N' выполнено $\xi_\alpha^{(n)} \geqslant [\xi]_{\alpha'}$. Поскольку $\xi_\alpha^{(n)}$ является нижней оценкой $\varphi^{(n)}(u_n)$, справедливо $\bar{\varphi} \neq -\infty$.

Пусть $\{u_n\}_{n \in K}$ — некоторая сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\bar{\varphi} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in K}} \varphi_n, \tag{2.43}$$

где K — множество номеров элементов сходящейся подпоследовательности. В силу компактности множества U подпоследовательность $\{u_n\}_{n \in K}$, обладающая свойством (2.43), существует. Согласно следствию 2.15 $\tilde{P}^{(n)} \xrightarrow{h} \tilde{P}$ (п.н.). Из определения гипосходимости 2.1 следует, что при конечном значении $\bar{\varphi}$

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ n \in K}} P_{\varphi_n}^{(n)}(u_n) \leqslant P_{\bar{\varphi}}(\bar{u}) \quad \text{(п.н.)}. \tag{2.44}$$

Полученное неравенство (2.44) верно и при $\bar{\varphi} = +\infty$, т. к. $P_{+\infty}(\bar{u}) = 1$. Соотношение (2.44) выполнено для почти всех реализаций последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Каждой фиксированной реализации данной последовательности соответствует детерминированная последовательность $\{(u_n, \varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, подпоследовательность которой сходится к $(\bar{u}, \bar{\varphi})$, что и обеспечивает корректность применения понятия гипосходимости к последовательности случайных функций.

Так как $P^{(n)}_{\varphi_n}(u_n) \geqslant \alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$, для предельной точки выполнено соотношение $P_{\bar{\varphi}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, откуда следует, что

$$\bar{\varphi} = \varliminf_{n\to\infty} \varphi_n \geqslant \varphi^* \quad (\text{п.н.}). \tag{2.45}$$

Из (2.42) следует, что $\bar{\varphi} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \varphi_n \leqslant \varphi^*$, а значит, $\bar{\varphi} = \varphi^*$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^* \quad (\text{п.н.}). \tag{2.46}$$

Теперь докажем, что для любой предельной точки $\bar{u}$ последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнено $\bar{u} \in V^*_\alpha$ (п.н.). В силу доказанного равенства (2.46) соотношение (2.44) выполнено для любой сходящеся к $\bar{u}$ подпоследовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. А значит, справедливо неравенство $P_{\bar{\varphi}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, которое обеспечивает $\varphi_\alpha(\bar{u}) \leqslant \bar{\varphi}$. С другой стороны, $\varphi_\alpha(\bar{u}) \geqslant \varphi^* = \bar{\varphi}$. Отсюда следует оптимальность стратегии $\bar{u}$ в исходной задаче. Таким образом, из леммы 2.4 следует утверждение теоремы. $\square$

Как и теорема 2.16 для функции вероятности, теорема 2.17 гарантирует сходимость выборочных аппроксимаций функции квантили как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации.

Схема доказательства теоремы 2.17 схожа с доказательством теоремы 2.14 в [178], однако условия теоремы 2.17 слабее по сравнению со следствием 2.1 теоремы 2.14. Во-первых, требуется не непрерывность, а только полунепрерывность функций Φ и Q. Во-вторых, не требуется близость стратегии $\tilde{u}$ к стратегии u^*.

Условие (iii) теоремы 2.17 выполнено, когда функция $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ является строго монотонной при некотором $u \in U^*_\alpha$.

В [51] приведено условие строгой монотонности $P_\varphi(u)$ по φ. Определим множество $N(u) \triangleq (\varphi_*(u), \varphi^*(u))$, где

$$\varphi_*(u) \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathcal{X}}\{\Phi(u,x)\colon Q(u,x) \leqslant 0\},$$
$$\varphi^*(u) \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}}\{\Phi(u,x)\colon Q(u,x) \leqslant 0\}.$$

Лемма 2.6 ([51]). *Пусть $|\Phi(u,x)| < +\infty$ для всех $x \in \mathcal{X}$, для всех $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in N(u)$ выполнено*

$$\mathbf{P}\{|\Phi(u,X) - \varphi| \leqslant \varepsilon,\ Q(u,X) \leqslant 0\} > 0.$$

Тогда функция $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ является строго возрастающей по $\varphi \in N(u)$, а функция $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(u)$ непрерывной по $\alpha \in (0, \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\})$.

Приведём пример, демонстрирующий, что нарушение условия (iii) теоремы 2.17 может приводить к тому, что не все предельные точки последовательности решений задач минимизации выборочных оценок квантили будут оптимальными в исходной задаче (2.31). В данном примере рассматривается дискретное распределение случайных параметров. Несмотря на то, что задача с дискретным распределением случайных параметров может быть решена специальными методами стохастического программирования, предложенную методику выгодно применять, например, в том случае, когда истинные вероятности реализаций не известны, а доступна только выборка значений дискретной случайной величины.

Пример 2.1. Пусть функция потерь имеет вид $\Phi(u,x) = ux$, $Q(u,x) \equiv 0$, где $u \in \in [0;1]$, случайный вектор X является скалярным, имеющим дискретное распределение с двумя равновероятными реализациями $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $\mathbf{P}\{X = x_1\} = \mathbf{P}\{X = x_2\} = \frac{1}{2}$. Тогда функция вероятности будет иметь вид

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{uX \leqslant \varphi\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi/u < -1 \text{ или } (u = 0 \text{ и } \varphi < 0); \\ 1/2, & \text{если } -1 \leqslant \varphi/u < 1; \\ 1, & \text{если } \varphi/u \geqslant 1 \text{ или } (u = 0 \text{ и } \varphi \geqslant 0). \end{cases}$$

График функции вероятности $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ приведён на рис. 2.1. На рис 2.1, а изображён график выборочной функции вероятности, когда в выборке $\{X_k\}_{k=1}^n$ больше положительных реализаций, чем отрицательных, а на рис. 2.1, б — аналогичный график для случая, когда в выборке больше отрицательных реализаций, чем положительных. В первом случае $X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} = 1$, где через $X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}$ обозначена порядковая статистика выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$, имеющая номер $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Во втором случае $X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} = -1$, сюда также включён случай равного количества положительных и отрицательных реализаций.

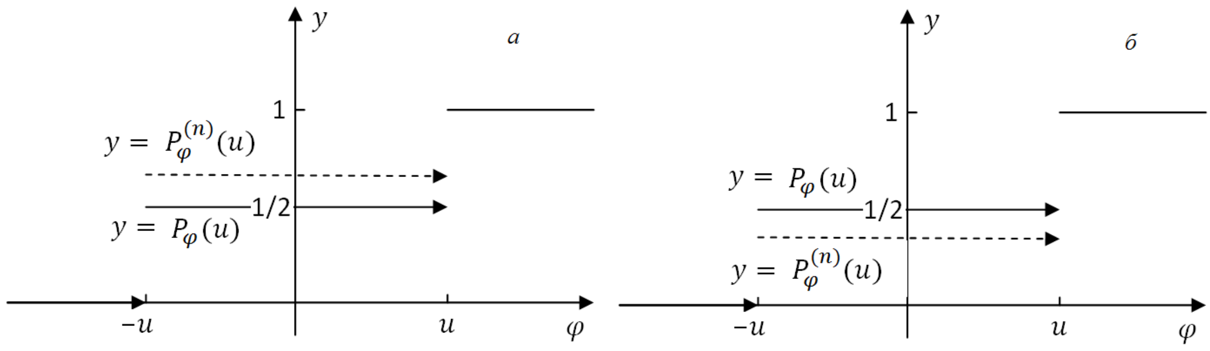

Рисунок 2.1. Графики функции вероятности (сплошные линии) и её оценки (пунктирные линии).

Выберем $\alpha = 1/2$. Из построенного графика видно, что функция квантили имеет вид $\varphi_{\frac{1}{2}}(u) = -u$, а выборочная функция квантили имеет вид

$$\varphi_{\frac{1}{2}}^{(n)}(u) = \begin{cases} u, & \text{если } X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} = 1; \\ -u, & \text{если } X_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)} = -1. \end{cases}$$

Решением задачи минимизации функции квантили

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(u) = -u \to \min_{u \in [0;1]}$$

является точка $u = u^* = 1$, при этом $\varphi^* = -1$. В окрестности $\{\varphi \colon |\varphi - \varphi^*| \leqslant 1/2\}$ при любых $u \in [0;1]$ выполнено $P_\varphi(u) \leqslant 1/2$, а значит, условие (iii) теоремы 2.17 нарушается.

Рассмотрим теперь последовательность задач минимизации выборочной функции квантили

$$\varphi_{\frac{1}{2}}^{(n)}(u) \to \min_{u \in [0;1]}.$$

В силу симметричности рассматриваемого распределения последовательность решений данных задач будет иметь п.н. два частичных предела $\bar{u}_1 = 0$ и $\bar{u}_2 = 1$. При этом точка $\bar{u}_1 = 0$ не является оптимальной в исходной задаче, так как $\varphi_{\frac{1}{2}}(\bar{u}_1) = 0 > \varphi^* = -1$.

Таким образом, невыполнение условия (iii) теоремы 2.17 может приводить к тому, что некоторые частичные пределы последовательности решений дискретизированных задач не являются оптимальными в исходной задаче. □

Теперь продемонстрируем, что при выполнении условий теоремы 2.17 существуют решения исходной задачи (2.31), не являющиеся частичными пределами последовательности дискретизированных задач п.н.

Пример 2.2. Пусть, как и в примере 2.1, $\Phi(u,x) = ux$, $Q(u,x) \equiv 0$, но $u \in [-1;1]$. Будем считать, что скалярный случайный вектор X распределён равномерно на отрезке $\mathcal{X} = [-1;1]$. Очевидно, что условия (i) и (ii) теоремы 2.17 выполнены. Покажем, что выполнено условие (iii) теоремы 2.17. При $u = 0$ выполнено $P_\varphi(0) = \chi_{[0,+\infty)}(\varphi)$. При $u \neq 0$ случайная величина $\Phi(u,X)$ распределена равномерно на отрезке $[-|u|,|u|]$, поэтому

$$P_\varphi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi < -|u|; \\ \frac{1}{2}\left(\varphi/|u| + 1\right), & \text{если } -|u| \leqslant \varphi \leqslant |u|; \\ 1, & \text{если } \varphi > |u|. \end{cases}$$

График функции $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ изображён на рис. 2.2. Пусть по-прежнему $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $\varphi_{\frac{1}{2}}(u) \equiv 0$, откуда следует $V_\alpha^* = [-1;1]$, $\varphi^* = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует пара $\tilde{\varphi} = \min\{1,\varepsilon\}$, $\tilde{u} = \min\{1,\varepsilon\}$, для которой $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) = 1 > \alpha = 1/2$.

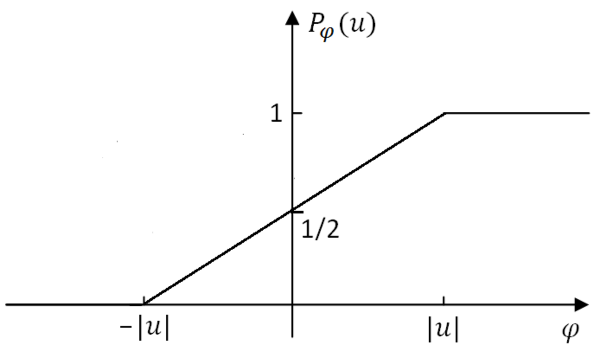

Рисунок 2.2. График функции вероятности.

Задачи минимизации функции квантили имеют вид

$$\varphi^{(n)}_{\frac{1}{2}}(u) \to \min_{u \in [-1;1]},$$

где согласно лемме 2.3

$$\varphi_{\frac{1}{2}}^{(n)}(u) = \begin{cases} uX_{(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}, & \text{если } u \in [0;1]; \\ uX_{(n+1-\lceil \frac{n}{2} \rceil)}, & \text{если } u \in [-1;0]. \end{cases}$$

Заметим, что при нечётных n выполнено $\lceil \frac{n}{2} \rceil = n + 1 - \lceil \frac{n}{2} \rceil$. В силу абсолютной непрерывности и симметричности распределения случайной величины X последовательность решений $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дискретизированных задач п.н. будет иметь ровно два частичных предела $\bar{u}_1 = -1$ и $\bar{u}_2 = 1$, а оптимальное значение критериальной функции п.н. будет отрицательным. Таким образом, решения исходной задачи из интервала $(-1;1)$ не являются частичными пределами рассматриваемой последовательности. $\square$

2.2.5. Сходимость выборочных аппроксимаций двухэтапной линейной задачи с квантильным критерием

Рассмотрим двухэтапную задачу стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Пусть функция потерь определяется как оптимальное решение задачи второго этапа

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{y\in Y(u,x)} q^\top(x)y, & \text{если } Y(u,x) \neq \varnothing; \\ +\infty, & \text{если } Y(u,x) = \varnothing, \end{cases} \tag{2.47}$$

где

$$Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^s \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x),\ y \geqslant 0\},$$

$$A(x) \triangleq A^0 + \sum_{i=1}^m A^i x_i, \quad B(x) \triangleq B^0 + \sum_{i=1}^m B^i x_i, \tag{2.48}$$

$$q(x) \triangleq q^0 + \sum_{i=1}^m q^i x_i, \quad b(x) \triangleq b^0 + \sum_{i=1}^m b^i x_i, \tag{2.49}$$

$A^i \in \mathbb{R}^{l\times r}$, $B^i \in \mathbb{R}^{l\times s}$, $q^i \in \mathbb{R}^s$, $b^i \in \mathbb{R}^l$ — детерминированные матрицы и векторы, $i = \overline{0,m}$.

Определим функцию вероятности $P_\varphi \colon U \to [0,1]$ по правилу

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\}, \tag{2.50}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — некоторый фиксированный уровень минимального значения функции потерь второго этапа.

Функция квантили $\varphi_\alpha(\cdot)\colon U \to [-\infty, +\infty]$ определяется как минимальный уровень функции потерь второго этапа, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью $\alpha \in (0,1)$:

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^*\colon P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}.$$

В отличие от постановки, рассмотренной в предыдущем разделе, возможно равенство $\varphi_\alpha(u) = -\infty$, если для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ выполнено $P_\varphi(u) \geqslant \alpha$.

Двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием формулируется в виде

$$\begin{aligned} \psi^* &\triangleq \inf_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha(u)\}, \\ U^* &\triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha(u)\}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

где $c \in \mathbb{R}^r$ — вектор коэффициентов целевой функции первого этапа, а величина $c^\top u$ характеризует потери на первом этапе.

Для построения выборочной аппроксимации задачи минимизации функции квантили (2.51) по выборке $(X_1, X_2, \dots X_n)$, заменим функцию вероятности её выборочной оценкой, которой является частота события $\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,X_k) - \varphi), \tag{2.52}$$

где

$$\chi_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

С помощью данной оценки построим выборочную оценку функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ в виде

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \inf\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Теперь запишем аппроксимацию исходной задачи минимизации функции квантили (2.51) в форме

$$\begin{aligned} \psi_n &\triangleq \inf_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ U_n &\triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Основной трудностью доказательства сходимости дискретных аппроксимаций двухэтапной задачи является установление сходимости по стратегии второго этапа. Данная сходимость исследовалась в работе [163] для двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания. Однако стратегия второго этапа в двухэтапной задаче является вспомогательной, а для формулировки задачи достаточно рассмотреть минимальное значение функции потерь второго этапа, при этом саму двухэтапную задачу формулировать в том виде, в каком она представлена в данной работе. Поэтому теорему о сходимости решений задачи (2.53) к решению исходной задачи (2.51) можно сформулировать только относительно стратегии первого этапа.

Наличие возможности $\Phi(u, x) = -\infty$ приводит к тому, что применить теорему 2.17 непосредственно для доказательства теоремы об условиях сходимости выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи невозможно, поэтому ниже приведено независимое доказательство теоремы о сходимости решений аппроксимирующих задач (2.53). Будем предполагать, что выполнено предположение 1.1, сформулированное в разделе 1.2.1.

Теорема 2.18. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) выполнено предположение 1.1 и $\underline{\alpha} < \alpha < 1$;

(iii) если $\psi^* < +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что

$$|\psi^* - \tilde{\psi}| \leqslant \varepsilon, \quad P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha. \tag{2.54}$$

Тогда $\psi_n \to \psi^*$ (п.н.) при $n \to \infty$. Если $U^* \neq \varnothing$, то $D(U_n, U^*) \to 0$ (п.н.) при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 2.18. Пусть $u_n \in U_n$ ($u_n \in U$, если $U = \varnothing$) для всех $n \in N$.

Условие (ii) доказываемой теоремы гарантирует в силу утверждения 1.1 выполнение неравенства $\psi^* > -\infty$.

Покажем, что

$$\varlimsup_{n \to \infty} \psi_n \leqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{2.55}$$

Согласно условию (iii), при $\psi^* < +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что выполнено (2.54). Из закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) = P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha \quad \text{(п.н.)}.$$

Таким образом, при достаточно больших n выполнено

$$\psi_n \leqslant c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(\tilde{u}) \leqslant c^\top u + \tilde{\psi} - c^\top \tilde{u} = \tilde{\psi} \leqslant \psi^* + \varepsilon \quad \text{(п.н.)}.$$

Поскольку величина $\varepsilon > 0$ произвольна,неравенство (2.55) выполнено при $|\psi^*| < +\infty$. В случае $\psi^* = +\infty$ неравенство (2.55) выполнено, т. к. его правая часть бесконечна. Таким образом, неравенство (2.55) доказано.

Теперь докажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \psi_n \geqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{2.56}$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим нижний предел данной последовательности через

$$\bar{\psi} \triangleq \varliminf_{n\to\infty} \psi_n.$$

Покажем, что $\bar{\psi} > -\infty$. Рассмотрим случайную величину $\eta \triangleq \min\limits_{u\in U} \Phi(u, X)$. В силу леммы 1.1, полунепрерывности функции $u \mapsto \Phi(u, x)$, компактности множества U выполнено

$$\mathbf{P}\{\eta = -\infty\} = \underline{\alpha}.$$

Поэтому при $\alpha > \underline{\alpha}$ выборочные оценки $\eta_\alpha^{(n)}$ квантили уровня α распределения случайной величины η при достаточно большом n ограничены снизу некоторой константой C. Таким образом,

$$C \leqslant \eta_\alpha^{(n)} \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u).$$

В силу компактности множества U также выполнено

$$C' \triangleq \min_{u\in U} c^\top u + C \leqslant \psi_n,$$

откуда следует, что $\bar{\psi} > -\infty$.

Пусть $\{u_n\}_{n\in K}$ — некоторая сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\bar{\psi} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in K}} \psi_n,$$

где K — множество номеров элементов сходящейся подпоследовательности. В силу компактности множества U данная подпоследовательность существует.

Заметим, что функцию вероятности (2.50) можно представить в виде

$$P_\varphi(u) = -\mathbf{M}[f(u, \varphi, X)],$$

где $f(u, \varphi, x) \triangleq -\chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,x) - \varphi)$. Так как функция $\Phi(\cdot)$ является нормальным интегрантом, функция $((u,\varphi),x) \mapsto f(u,\varphi,x)$ также является нормальным интегрантом. Согласно [191, Theorem 2.3], при конечном значении $\bar{\psi}$

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) = -\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_n, \psi_n - c^\top u_n, X_k) \leqslant$$

$$\leqslant -\mathbf{M}[f(\bar{u}, \bar{\psi} - c^\top \bar{u}, X)] = P_{\bar{\psi}-c^\top\bar{u}}(\bar{u}). \quad (2.57)$$

При $\bar{\psi} = +\infty$ данное неравенство также выполнено, потому что правая часть неравенства равна 1.

Поскольку $P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) \geqslant \alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$, из (2.57) следует выполнение соотношения $P_{\bar{\psi}-c^\top\bar{u}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, откуда следует, что

$$\bar{\psi} = \varliminf_{n\to\infty} \psi_n = \varliminf_{n\to\infty} \big(c^\top u_n + (\psi_n - c^\top u_n)\big) = \big(c^\top \bar{u} + (\bar{\psi} - c^\top \bar{u})\big) \geqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)},$$

что и доказывает неравенство (2.56).

Из неравенств (2.55) и (2.56) следует выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \quad (2.58)$$

Теперь докажем, что для любой предельной точки последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнено $\bar{u} \in U^*$ (п.н.). В силу (2.58) соотношение (2.57) выполнено для любой сходящееся к $\bar{u}$ подпоследовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. А значит, выполнено неравенство $P_{\bar{\psi}-c^\top\bar{u}}(\bar{u}) \geqslant \alpha$, которое обеспечивает $c^\top\bar{u}+\varphi_\alpha(\bar{u}) \leqslant \bar{\psi}$. С другой стороны, $c^\top\bar{u}+\varphi_\alpha(\bar{u}) \geqslant \psi^* = \bar{\psi}$. Таким образом, стратегия $\bar{u}$ оптимальна в исходной задаче. Заключение теоремы следует из леммы 2.4. $\square$

Заметим, что теорема 2.18 гарантирует сходимость выборочных аппроксимаций как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации.

Условие 3 теоремы 2.18 будет выполнено, например, в том случае, когда для всех $u \in U$ функция вероятности $\varphi \mapsto P_\varphi(u)$ является строго монотонной по $\varphi \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случай $\psi^* = -\infty$, не учитываемый в данной теореме. Заметим, что данное равенство выполнено в том и только том случае, когда

$$\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\} \geqslant \alpha.$$

Согласно лемме 1.1, величина $\underline{\alpha}$ не зависит от u, поэтому при $\alpha < \underline{\alpha}$ решение аппроксимирующей задачи (2.53) будет п.н. давать решение $\psi_n = -\infty$ при всех n, начиная с некоторого достаточно большого номера.

2.2.6. Сходимость выборочных аппроксимаций двухуровневой задачи со случайными коэффициентами в целевой функции последователя

В данном разделе рассматривается аппроксимация задачи (1.65) по выборке $(X_1, X_2, \dots X_n)$. Все обозначения соответствуют разделу 1.3.4. Если в выражении (1.64) вероятность события $\{\varphi \mid \Phi(u,X) \leqslant \varphi\}$ заменить его частотой

$$P_{\varphi}^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,X_k)-\varphi), \quad n \in \mathbb{N},$$

то получится следующая оценка функции квантили:

$$\varphi_{\alpha}^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_{\varphi}^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, вместо исходной задачи (1.65) будем рассматривать её выборочную аппроксимацию

$$\psi_n \triangleq \min_{u \in U}\left\{c_1^{\top}u + \varphi_{\alpha}^{(n)}(u)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.59}$$

$$U_n \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U}\left\{c_1^{\top}u + \varphi_{\alpha}^{(n)}(u)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.60}$$

Полученная задача при фиксированных реализациях случайных векторов является детерминированной двухуровневой задачей и для её решения могут быть применены соответствующие методы [94, 125, 128].

Для исследования сходимости построенной аппроксимации будем использовать теорему 2.17. Задачу (1.65) нетрудно записать в виде задачи минимизации функции квантили

$$\psi^* \triangleq \min_{u \in U}[\Psi(u,X)]_{\alpha}, \tag{2.61}$$

в которой $\Psi(u,x) = c_1^{\top}u + \Phi(u,x)$. Через u_n и ψ_n обозначим соответственно оптимальную стратегию и оптимальное значение целевой функции в задаче минимизации выборочной оценки квантили $[\Psi(u,X)]_{\alpha}$, соответствующей выборке объёма n. Также используется обозначение

$$\tilde{P}_{\psi}(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Psi(u,X) \leqslant \psi\}.$$

В данных обозначениях теорему 2.17 можно переписать в следующем виде.

Теорема 2.19. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) Множество U компактно и непусто.

(ii) Для всех $(u, x) \in U \times \mathcal{X}$ выполнено $\Psi(u, x) > -\infty$, и функция Ψ является нормальным интегрантом

(iii) Если $\psi^* \neq +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi}) \in U \times \mathbb{R}$ такая, что

$$|\psi^* - \tilde{\psi}| \leqslant \varepsilon,$$

$$\tilde{P}_{\tilde{\psi}}(\tilde{u}) > \alpha.$$

Тогда $\psi_n \to \psi^*$ (п.н.) при $n \to \infty$ и

$$D\left(U_n, \operatorname{Arg}\min_{u \in U} [\Psi(u, X)]_\alpha\right) \to 0 \quad \textit{(п.н.)}$$

при $n \to \infty$.

Из теоремы 1.13 следует выполнение условия (ii) теоремы 2.19.

Докажем утверждение о том, что условие (iii) теоремы 2.19 выполнено для почти всех значений $\alpha \in (0, 1)$.

Теорема 2.20. *Условие 3 теоремы 2.19 выполнено всех α, принадлежащих интервалу $(0, 1)$, за исключением не более чем счётного множества точек.*

Доказательство теоремы 2.20. Предположим, что условие (iii) теоремы 2.19 не выполнено. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\psi \in [\psi^* - \varepsilon, \psi^* + \varepsilon]$ выполнено

$$\sup_{u \in U} \tilde{P}_\psi(u) \leqslant \alpha.$$

Согласно следствию 1.2, решение задачи (2.61) существует, поэтому

$$\sup_{\psi \in [\psi^* - \varepsilon, \psi^* + \varepsilon]} \sup_{u \in U} \tilde{P}_\psi(u) = \max_{\substack{\psi \in [\psi^* - \varepsilon, \psi^* + \varepsilon], \\ u \in U}} \tilde{P}_\psi(u) = \alpha.$$

В силу монотонности вероятности, функция

$$\psi \mapsto \sup_{u \in U} \tilde{P}_\psi(u) \tag{2.62}$$

является монотонно неубывающей. Поэтому

$$\sup_{u \in U} \tilde{P}_\psi(u) = \alpha.$$

для всех $\psi \in [\psi^*, \psi^* + \varepsilon]$, а значит, область определения монотонной функции (2.62) содержит участок, на котором она постоянна. Каждому такому участку можно сопоставить принадлежащее ему рациональное число, поэтому множество участков постоянства функции (2.62) не более чем счётно. Таким образом, множество значений α, при которых условие 3 теоремы 2.19 не выполнено, не более чем счётно. $\square$

Если множество U конечно, то сформулированное утверждение 2.20 можно усилить.

Теорема 2.21. *Пусть множество U конечно. Тогда условие (iii) теоремы 2.19 выполнено для всех $\alpha \in (0, 1)$ за исключением некоторого конечного множества.*

Доказательство теоремы 2.21. Как следует из доказательства теоремы 2.20, условие (iii) теоремы 2.19 может быть не выполнено, только если

$$\tilde{P}_\psi(u) = \mathbf{P}\{\Psi(u, X) \leqslant \psi\} = \alpha \tag{2.63}$$

для некоторой пары $\psi \in \mathbb{R}$, $u \in U$. Из теоремы 1.13 следует, что при каждом $u \in U$ случайная величина $\Psi(u, X)$ имеет дискретное распределение с конечным множеством реализаций. Таким образом, множество

$$A \triangleq \bigcup_{u \in U} \bigcup_{\psi \in \mathbb{R}} \left\{ \tilde{P}_\psi(u) \right\}$$

конечно, а значит, равенство (2.63) может нарушаться только при $\alpha \in A$. $\square$

Для определения, в каких именно точках может быть не выполнено условие 3 теоремы 2.19, может быть использована теорема 1.14 о свойствах функции $(u, \varphi) \mapsto P_\varphi(u)$ и равенство $\tilde{P}_\psi(u) = P_{\psi - c^\top u}(u)$.

2.3. Оценивание необходимого объёма выборки

В данном разделе получены объёмы выборки, необходимые для аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными и квантильными критериями. Для задачи максимизации вероятности исследован случай конечного и случай ограниченного множества допустимых стратегий оптимизации, а для задачи минимизации функции квантили получены оценки для случая конечного множества допустимых стратегий.

2.3.1. Максимизация вероятности при конечном множестве стратегий

Рассмотрим задачу максимизации функции вероятности

$$\alpha^* \triangleq \sup_{u\in U} P_\varphi(u), \tag{2.64}$$

где

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\},$$

на конечном множестве допустимых стратегий $U \subset \mathbb{R}^r$. Мощность множества U, т. е. количество его элементов, обозначим через $|U|$. Все остальные обозначения соответствуют обозначениям, введённым в главе 1. Предполагается, что функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом.

Множество ε-оптимальных решений задачи (2.64) обозначим через

$$U_\varphi^\varepsilon \triangleq \{u \in U \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha^* - \varepsilon\}.$$

Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — выборка, порождённая распределением случайного вектора X, т. е. случайные векторы X_k, $k = \overline{1,n}$ являются независимыми и обладают функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$. Предполагается, что выборка определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, которое может отличаться от вероятностного пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определяется функция вероятности. Однако в дальнейшем для вероятностной меры $\mathbf{P}'$ будет использоваться обозначение $\mathbf{P}$, поскольку из контекста всегда ясно, о каком вероятностном пространстве идёт речь.

Выборочная аппроксимация задачи максимизации функции вероятности имеет вид

$$U_\varphi^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U} P_\varphi^{(n)}(u),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.65}$$

где

$$P_\varphi^{(n)} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u,X_k)). \tag{2.66}$$

Здесь используется обозначение

$$\chi_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Рассмотрим событие

$$\left\{U_\varphi^{(n)} \not\subset U_\varphi^\varepsilon\right\} = \bigcup_{u\in U\setminus U_\varphi^\varepsilon} \bigcap_{y\in U} \left\{P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant P_\varphi^{(n)}(y)\right\}.$$

Смысл события $\left\{U_\varphi^{(n)} \not\subset U_\varphi^\varepsilon\right\}$ состоит в том, что существует оптимальная стратегия $u_\varphi^{(n)}$ в аппроксимирующей задаче (2.65) такая, что $u_\varphi^{(n)}$ не является ε-оптимальные решением исходной задачи (2.64).

Тогда, учитывая, что множество U конечно, можно найти верхнюю границу вероятности

$$\mathbf{P}\left\{U_\varphi^{(n)} \not\subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \leqslant \sum_{u\in U\setminus U_\varphi^\varepsilon} \mathbf{P}\left(\bigcap_{y\in U}\left\{P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant P_\varphi^{(n)}(y)\right\}\right). \tag{2.67}$$

Пусть u^* — оптимальное решение исходной задачи (2.64). Если задача (2.64) имеет несколько оптимальных решений, то u^* можно взять произвольно. Из (2.67) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{U_\varphi^{(n)} \not\subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \leqslant \sum_{u\in U\setminus U_\varphi^\varepsilon} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant P_\varphi^{(n)}(u^*)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant |U| \max_{u\in U\setminus U_\varphi^\varepsilon} \mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant P_\varphi^{(n)}(u^*)\right\}. \tag{2.68}$$

Введём случайные величины

$$\xi_k = \chi_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u, X_k)) - \chi_{[-\infty,\varphi]}(\Phi(u^*, X_k)).$$

Заметим, что случайные величины ξ_k независимы. Тогда можно записать

$$\mathbf{P}\left\{P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant P_\varphi^{(n)}(u^*)\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k \geqslant 0\right\} = \mathbf{P}\left\{\exp\left(t\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \geqslant 1\right\},$$

где $t > 0$. По неравенству Чебышёва

$$\mathbf{P}\left\{\exp\left(t\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \geqslant 1\right\} \leqslant \mathbf{M}\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^n \xi_k\right)\right] = (M(t))^n, \tag{2.69}$$

где

$$M(t) \triangleq \mathbf{M}\left[\exp\left(t\xi_1\right)\right] \tag{2.70}$$

производящая функция моментов случайной величины ξ_1.

Лемма 2.7. *Пусть $M(t)$ определена согласно (2.70). Пусть $0 < \varepsilon < \alpha^*$. Тогда*

$$\inf_{t>0} M(t) \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Если $\alpha^* \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, то

$$\inf_{t>0} M(t) \leqslant 2\sqrt{(\alpha^*-\varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^* \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Доказательство леммы 2.7. Введём события

$$A \triangleq \{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\},$$
$$B \triangleq \{\Phi(u^*, X) \leqslant \varphi\}.$$

Тогда

$$M(t) = p_+ e^t + p_- e^{-t} + 1 - p_+ - p_-,$$

где

$$p_+ = \mathbf{P}(A \cap \overline{B}), \quad p_- = \mathbf{P}(\overline{A} \cap B). \tag{2.71}$$

Поскольку u^* — оптимальное решение задачи (2.64), а $u \in U \setminus U_\varphi^\varepsilon$, выполнено равенство

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \alpha^* - \varepsilon, \quad \mathbf{P}(B) = \alpha^*. \tag{2.72}$$

Из (2.71) и (2.72) следует, что

$$p_+ \in [0, \alpha^* - \varepsilon], \quad p_- \in [\varepsilon, \alpha^*]. \tag{2.73}$$

Таким образом,

$$\varepsilon \leqslant \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B) - (\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(A \cap B)) = p_- - p_+. \tag{2.74}$$

Функция $t \mapsto M(t)$ выпукла. Приравнивая к нулю её производную, получаем, что

$$\operatorname{Arg}\min_{t>0} M(t) = \left\{\frac{1}{2} \ln \frac{p_-}{p_+}\right\}$$

если $p_+ > 0$. Из (2.74) следует, что

$$\frac{1}{2} \ln \frac{p_-}{p_+} > 0.$$

Поэтому

$$Q(p_+, p_-) = \inf_{t>0} M(t) = 2\sqrt{p_- p_+} + 1 - p_+ - p_-. \tag{2.75}$$

Если $p_+ = 0$, то равенство (2.75) также выполнено.

Функция $(p_+, p_-) \mapsto Q(p_+, p_-)$ вогнута (см, например, [105, P. 74]). Найдём решение задачи

$$\max_{p_+, p_-} Q(p_+, p_-)$$

при ограничениях (2.73), (2.74) и (2.75).

Поскольку безусловный максимум функции $Q(p_+, p_-)$ достигается, когда $p_+ = p_-$, условный максимум достигается, когда ограничение (2.74) активно. Учитывая неравенство $p_+ + p_- \leqslant 1$, нетрудно заметить, что

$$\inf_{t>0} M(t) \leqslant \max_{p_+,p_-} \{Q(p_+,p_-) \mid p_- - p_+ = \varepsilon,\ p_+ + p_- \leqslant 1,\ p_+ \in [0, \alpha^* - \varepsilon],\ p_- \in [\varepsilon, \alpha^*]\} =$$

$$= \max_{p_+} \left\{ 2\sqrt{p_+(p_+ + \varepsilon)} + 1 - 2p_+ - \varepsilon \mid p_+ + p_+ + \varepsilon \leqslant 1,\ p_+ \in [0, \alpha^* - \varepsilon] \right\} =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2} \cdot \frac{1+\varepsilon}{2}} + 1 - (1-\varepsilon) - \varepsilon = \sqrt{1-\varepsilon^2} & \text{if } \alpha^* - \varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{2}, \\ 2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^* \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2} & \text{if } \alpha^* - \varepsilon \leqslant \frac{1-\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, лемма доказана $\square$

Докажем теорему о необходимом объёме выборки для аппроксимации задачи (2.64).

Теорема 2.22. *Пусть $\beta \in (0,1)$. Если множество U конечно*

$$n \geqslant 2\frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|}, \tag{2.76}$$

то

$$\mathbf{P}\left\{U_\varphi^{(n)} \subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \geqslant \beta. \tag{2.77}$$

Более того, если известно, что $\alpha^* \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, то неравенство (2.77) выполнено, когда

$$n \geqslant \frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\left(2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^*\right)\right|}. \tag{2.78}$$

Доказательство теоремы 2.22. Сначала рассмотрим случай $\alpha^* \leqslant \varepsilon$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{U_\varphi^{(n)} \subset U_\varphi^\varepsilon\right\} = 1,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Если $\alpha^* > \varepsilon$ и $\alpha^* \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, то из (2.68), (2.69) и леммы 2.7 следует, что

$$\mathbf{P}\left\{U_\varphi^{(n)} \not\subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \leqslant \inf_{t>0} |U|(M(t))^n \leqslant \left(2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^*\right)^n.$$

Таким образом, неравенство (2.77) выполнено, если

$$|U|\left(2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^*\right)^n \leqslant 1 - \beta \Leftrightarrow$$

$$n \geqslant \frac{\ln(1-\beta) - \ln|U|}{\ln\left(2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^*\right)} = \frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\left(2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^*\right)\right|}.$$

Поскольку

$$2\sqrt{(\alpha^* - \varepsilon)\alpha^*} + 1 + \varepsilon - 2\alpha^* \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

можно заключить, что неравенство (2.77) выполнено для

$$n \geqslant \frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\sqrt{1-\varepsilon^2}\right|} = 2\frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\left(1-\varepsilon^2\right)\right|}.$$

В случае, когда $\alpha^* > \varepsilon$ и $\alpha^* > \frac{1+\varepsilon}{2}$, теорема доказывается аналогично. $\square$

В [198, Theorem 5.17] результат, аналогичный теореме 2.22, доказан для задачи максимизации функции математического ожидания. Применяя этот результат к задаче (2.64) непосредственно, можно получить, что неравенство (2.77) выполнено

$$n \geqslant 2\frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\varepsilon^2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\varepsilon^2 < \left|\ln\left(1-\varepsilon^2\right)\right|$$

для $\varepsilon \in (0,1)$. Таким образом, оценка объёма выборки (2.76) улучшает результат, который может быть получен с помощью непосредственно применения теорем из [197, 198].

Замечание 2.1. Чтобы применить оценку объёма выборки (2.78), необходимо знать точное решение задачи (2.64). Для некоторых классов задач возможно указать верхнюю границу $\bar{\alpha} \geqslant \alpha^*$. Если $\bar{\alpha} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, то оценку (2.76) можно улучшить. Тогда можно гарантировать, что неравенство (2.77) выполнено для

$$n \geqslant \frac{\ln|U| - \ln(1-\beta)}{\left|\ln\left(2\sqrt{(\bar{\alpha}-\varepsilon)\bar{\alpha}} + 1 + \varepsilon - 2\bar{\alpha}\right)\right|}.$$

2.3.2. Максимизация вероятности при ограниченном множестве стратегий

Теперь будет считать, что в задаче (2.64) множество U — компактное подмножество $\mathbb{R}^r$. Диаметр множества U обозначим через

$$D \triangleq \sup_{u,v\in U} \|u - v\|,$$

где используется норма $\|u\| = \max\{|u_1|, \ldots, |u_r|\}$.

Предположим, что функция вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ является липшицевой на U с константой Липшица L, т. е.

$$|P_\varphi(u) - P_\varphi(v)| \leqslant L\|u - v\| \tag{2.79}$$

для всех $u, v \in U$.

Выберем конечное подмножество U и обозначим его через $\tilde{U}$. Пусть

$$\nu \triangleq \sup_{u\in U} \inf_{v\in\tilde{U}} \|u - v\|.$$

Значение ν показывает максимальное расстояние между произвольной точкой U и ближайшей к ней точкой множества $\tilde{U}$. Множество $\tilde{U}$ может быть выбрано таким образом, что

$$|\tilde{U}| \leqslant \left\lceil \frac{D}{\nu} \right\rceil^r. \tag{2.80}$$

Далее будет предполагаться, что условие (2.80) выполнено.

Рассмотрим задачу максимизации выборочной функции вероятности на множестве $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}_\varphi^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in\tilde{U}} P_\varphi^{(n)}(u),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.81}$$

Выясним, при каком объёме выборки выполнено

$$\tilde{U}_\varphi^{(n)} \subset U_\varphi^\varepsilon,$$

т. е. все оптимальные решения аппроксимирующей задачи на конечном множестве являются ε-оптимальными решениями исходной задачи.

Теорема 2.23. *Пусть $\beta \in (0, 1)$. Если выполнены предположения (2.79) и (2.80), $L\nu < \varepsilon$ и*

$$n \geqslant 2 \inf_{\gamma\in\left(0,1-\frac{L\nu}{\varepsilon}\right)} \frac{r \ln\left\lceil \frac{DL}{(1-\gamma)\varepsilon} \right\rceil - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\gamma^2\varepsilon^2)|}, \tag{2.82}$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\tilde{U}_\varphi^{(n)} \subset U_\varphi^\varepsilon\right\} \geqslant \beta. \tag{2.83}$$

Доказательство теоремы 2.23.

Пусть

$$\tilde{U}_\varphi^\varepsilon \triangleq \{u \in \tilde{U} \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha_{\tilde{U}}^* - \varepsilon\},$$

где

$$\alpha^*_{\tilde U} \triangleq \sup_{u\in\tilde U} P_\varphi(u).$$

Поскольку функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ липшицева, условие $u \in \tilde U^\varepsilon_\varphi$ влечёт, что $u \in U^{\varepsilon+L\nu}_\varphi$. Если $\gamma \in \left(0, 1-\frac{L\nu}{\varepsilon}\right)$ — фиксированное число и $L\nu \leqslant (1-\gamma)\varepsilon$, то

$$\left\{\tilde U^{(n)}_\varphi \subset \tilde U^{\gamma\varepsilon}_\varphi\right\} \subset \left\{\tilde U^{(n)}_\varphi \subset U^{\varepsilon}_\varphi\right\}. \tag{2.84}$$

Из (2.84) и теоремы 2.22 следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\tilde U^{(n)}_\varphi \subset U^{\varepsilon}_\varphi\right\} \geqslant \mathbf{P}\left\{\tilde U^{(n)}_\varphi \subset \tilde U^{\gamma\varepsilon}_\varphi\right\} \geqslant \beta$$

если

$$n \geqslant 2\frac{\ln|\tilde U| - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\gamma^2\varepsilon^2)|} \leqslant 2\frac{\ln\left\lceil\frac{D}{\nu}\right\rceil^r - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\gamma^2\varepsilon^2)|} = 2\frac{r\ln\left\lceil\frac{DL}{(1-\gamma)\varepsilon}\right\rceil - \ln(1-\beta)}{|\ln(1-\gamma^2\varepsilon^2)|}.$$

В силу того, что γ выбрана произвольно, утверждение теоремы доказано. $\square$

Аналогичный результат для минимизации функции математического ожидания доказан в [197]. Этот результат может быть получен из теоремы 2.23 при $t = 1/2$. Дополнительная оптимизация по $t \in \left(0, 1-\frac{L\nu}{\varepsilon}\right)$ может улучшить результат из [197] для многих задач максимизации функции вероятности. Если точное значение инфимума найти трудно, то значение объёма выборки n можно найти, подставляя несколько значений $t \in \left(0, 1-\frac{L\nu}{\varepsilon}\right)$ в (2.82). Получаемое при этом минимальное значение может быть использовано в качестве оценки объёма выборки n.

Замечание 2.2. Для вычислений по формуле (2.82) необходимо знать константу Липшица. Если функция $u \mapsto P_\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема на множестве U, то по теореме о среднем значении справедливо, что

$$|P_\varphi(u) - P_\varphi(v)| \leqslant \sup_{w\in U} \|\nabla P_\varphi(w)\|_1 \|u-v\|,$$

где норма градиента является сопряжённой, т. е.

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^r |w_i|.$$

Таким образом, можно взять

$$L = \sup_{w\in U} \|\nabla P_\varphi(w)\|_1.$$

Для этого требуется оценить градиент функции вероятности, методы нахождения которого описаны в [155, 209].

2.3.3. Минимизация квантили

Найдём выборки, необходимый для аппроксимации задачи минизизации функции квантили

$$\varphi^* \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \tag{2.85}$$

где

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}.$$

Множество ε-оптимальных решений поставленной задачи обозначим через

$$V_\alpha^\varepsilon \triangleq \{u \in U \mid \varphi_\alpha(u) \leqslant \varphi^* + \varepsilon\}.$$

Задача максимизации выборочной функции квантили имеет вид

$$V_\alpha^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.86}$$

где

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}. \tag{2.87}$$

Будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 2.1. Случайная величина $\Phi(u, X)$ абсолютно непрерывна для всех $u \in U$, обладает плотностью вероятности p_u, непрерывной в точке $\varphi_\alpha(u)$ и некоторой её окрестности. Кроме того, существует число $C > 0$ такое, что

$$\min_{u \in U} p_u(\varphi_\alpha(u)) > C,$$

и число C_2 такое, что

$$\mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant C_2\} = 1.$$

Аналогично тому, как это было сделано для функции вероятности, рассмотрим событие

$$\left\{V_\alpha^{(n)} \not\subset V_\alpha^\varepsilon\right\} = \bigcup_{u \in U \setminus V_\alpha^\varepsilon} \bigcap_{y \in U} \left\{\varphi_\alpha^{(n)}(u) \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(y)\right\}.$$

Тогда можно найти верхнюю границу вероятности

$$\mathbf{P}\left\{V_\alpha^{(n)} \not\subset V_\alpha^\varepsilon\right\} \leqslant \sum_{u \in U \setminus V_\alpha^\varepsilon} \mathbf{P}\left(\bigcap_{y \in U} \left\{\varphi_\alpha^{(n)}(u) \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(y)\right\}\right). \tag{2.88}$$

Зафиксирует оптимально решение u^* задачи (2.85) . Из (2.88) получаем, что

$$\mathbf{P}\left\{V_\alpha^{(n)} \not\subset V_\alpha^\varepsilon\right\} \leqslant \sum_{u\in U\setminus V_\alpha^\varepsilon} \mathbf{P}\left\{\varphi_\alpha^{(n)}(u) \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u^*)\right\} \leqslant |U| \max_{u\in U\setminus V_\alpha^\varepsilon} \mathbf{P}\left\{\varphi_\alpha^{(n)}(u) \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u^*)\right\}. \quad (2.89)$$

Определим случайные величины

$$\eta_n = \varphi_\alpha^{(n)}(u^*) - \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что случайные величины $\varphi_\alpha^{(n)}(u^*)$ и $\varphi_\alpha^{(n)}(u)$ могут быть зависимыми. Необходимо оценить сверху вероятность

$$\mathbf{P}\{\eta_n \geqslant 0\}.$$

По теореме Мостеллера [172], распределения порядковых статистик $\varphi_\alpha^{(n)}(u^*)$ и $\varphi_\alpha^{(n)}(u)$ сходятся к нормальному закому

$$\sqrt{n}\left(\varphi_\alpha^{(n)}(u^*) - \varphi^*\right) \xrightarrow{d} Z_{u^*} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{p_{u^*}^2(\varphi^*)}\right),$$
$$\sqrt{n}\left(\varphi_\alpha^{(n)}(u) - \varphi_\alpha(u)\right) \xrightarrow{d} Z_u \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{p_u^2(\varphi_\alpha(u))}\right).$$

Таким образом, в силу предположения (2.1) справедливо, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\eta_n \leqslant -\varepsilon,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{D}\left[\eta_n\sqrt{n}\right] < \frac{4\alpha(1-\alpha)}{C}.$$

А значит, для всех $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ найдётся число $\tilde{n}(\varepsilon') \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathbf{M}\eta_n \leqslant -\varepsilon + \varepsilon', \quad (2.90)$$
$$\mathbf{D}\eta_n < \frac{4\alpha(1-\alpha)}{Cn} \quad (2.91)$$

для всех $n > \tilde{n}(\varepsilon')$. Заметим, что число $\tilde{n}(\varepsilon')$ может зависеть от u. В это случае нужно взять максимальное значение $\tilde{n}(\varepsilon')$.

Из неравенства Кантелли следует, что при$n > \tilde{n}(\varepsilon')$ выполнено

$$\mathbf{P}\{\eta_n \geqslant 0\} \leqslant \mathbf{P}\{\eta_n - \mathbf{M}\eta_n \geqslant \varepsilon - \varepsilon'\} \leqslant \frac{\mathbf{D}\eta_n}{\mathbf{D}\eta_n + (\varepsilon-\varepsilon')^2} < \frac{4\alpha(1-\alpha)}{4\alpha(1-\alpha) + (\varepsilon-\varepsilon')^2 Cn}.$$

Таким образом, из (2.89) следует теорема.

Теорема 2.24. *Пусть U — конечное множество, $\beta \in (0,1)$, выполнено предположение 2.1. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{V_\alpha^{(n)} \not\subset V_\alpha^\varepsilon\right\} \leqslant |U| \frac{4\alpha(1-\alpha)}{4\alpha(1-\alpha)+(\varepsilon-\varepsilon')^2 Cn}. \tag{2.92}$$

для достаточно большого n.

Получим следствие из теоремы 2.24.

Следствие 2.2. *Пусть условия теоремы 2.24 выполнены. Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{V_\alpha^{(n)} \subset V_\alpha^\varepsilon\right\} \geqslant \beta$$

если

$$n \geqslant \frac{4\alpha(1-\alpha)(|U|+\beta-1)}{(1-\beta)(\varepsilon-\varepsilon')^2 C} \tag{2.93}$$

и $n > \tilde{n}(\varepsilon')$.

Доказательство следствия 2.2. Из (2.92) следует, что утверждение теоремы выполнено, если

$$|U| \frac{4\alpha(1-\alpha)}{4\alpha(1-\alpha)+(\varepsilon-\varepsilon')^2 Cn} \leqslant 1-\beta.$$

Решая это неравенство, получаем (2.93). □

К сожалению, трудно найти значение $\tilde{n}(\varepsilon')$. Чтобы использовать оценки (2.93), необходимо проверить неравенства (2.90) и (2.91). Это можно сделать статистическими методами.

2.4. Выводы по главе 2

1) Доказаны теоремы о сходимости детерминированных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями в случае симметричного распределения случайного параметра и в случае функции потерь, монотонной по реализации случайной величин, а для задачи с вероятностным критерием — в случае функции потерь, монотонной по стратегии оптимизации.

2) Доказаны теоремы о достаточных условиях сходимости выборочных аппроксимаций одноэтапных, двухэтапных и двухуровневых задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями

3) Для двухуровневой линейной задачи показано, что условия сходимости выборочных аппроксимаций выполнены для почти всех уровней надёжности.

4) Получена оценка объёма выборки, обеспечивающая заданную точность и надёжность выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями при конечном множестве допустимых стратегий.

5) Получена оценка объёма выборки, обеспечивающая заданную точность и надёжность выборочной аппроксимаций задачи стохастического программирования с вероятностным критериям при компактном множестве допустимых стратегий.

Основные результаты главы опубликованы в [18, 23, 28, 29, 31, 144, 152].

Глава 3. Численные методы решения задач стохастического программирования, основанные на дискретизации вероятностной меры

Целью главы является разработка численных методов и алгоритмов решения задач стохастического программирования с вероятностными критериями. Предлагаемые численные методы и алгоритмы основаны на описанной в главе 2 процедуре дискретизации вероятностной меры. После проведения дискретизации получаемая аппроксимирующая задача может рассматриваться как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. В разделе 3.1 приводится метод сведения двухэтапных задач стохастического линейного программирования с вероятностным и квантильным критериями к эквивалентным смешанным целочисленным линейным задачам. В разделе 3.2 аналогичный метод описан для двухуровневых задач стохастического программирования. В разделе 3.3 для дискретной стохастической задачи размещения предприятий строится эквивалентная детерминированная двухуровневая задача и приводятся методы оценки оптимального значения её критериальной функции. В разделе 3.4 описан численный метод решения задачи стохастического программирования с целевой функцией потерь специального вида. Метод основан на дискретизации вероятностной меры и последующим применением поиска с чередующимися окрестностями. В разделе 3.5 описанный метод адаптируется для задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием, а в разделе 3.6 — для двухэтапной задачи.

3.1. Метод сведения двухэтапных линейных задач к детерминированным задачам при дискретном распределении случайных параметров

В данном разделе описан метод решения задач стохастического программирования, основанный на переходе к детерминированной задаче смешанной целочисленной задаче. В линейном случае, рассматриваемом в данном разделе, получаемая эквивалентная задача является задачей смешанного целочисленного программирования.

Рассмотрим двухэтапную задачу стохастического линейного программирования с квантильным критерием, в которой функция потерь определена соотношением

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{y\in Y(u,x)} q^\top(x)y, & \text{если } Y(u,x) \neq \varnothing; \\ +\infty, & \text{если } Y(u,x) = \varnothing, \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$Y(u,x) \triangleq \{y \in Y \subset \mathbb{R}^s \mid A(x)u + B(x)y \geqslant b(x),\ y \geqslant 0\},$$

$A(x)$, $B(x)$, $q(x)$, $b(x)$ определены соотношениями (2.48) и (2.49).

Функции вероятности и квантили определяются по правилам

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\}, \tag{3.2}$$

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R}^* \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{3.3}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$.

Двухэтапная задача стохастического программирования с вероятностным критерием формулируется в виде

$$\alpha^* \triangleq \sup_{u\in U}\{P_{\varphi - c^\top u}(u)\}, \tag{3.4}$$

$$U^*_\varphi \triangleq \operatorname{Arg}\max_{u\in U}\{P_{\varphi - c^\top u}(u)\},$$

где $c \in \mathbb{R}^r$ — вектор коэффициентов целевой функции первого этапа, $U \subset \mathbb{R}^r$.

Двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием имеет вид

$$\psi^* \triangleq \inf_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha(u)\}, \tag{3.5}$$

$$V^*_\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha(u)\},$$

где $c \in \mathbb{R}^r$ — вектор коэффициентов целевой функции первого этапа.

3.1.1. Задача с вероятностным критерием

Выборочная аппроксимация задачи (3.4) при фиксированной реализации $\{x_k\}_{k=1}^n$ выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$ имеет вид

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{[-\infty,\varphi]}\left(c^\top u + \inf_{y\in Y}\{q^\top(x_k)y \mid A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k)\}\right) \to \sup_{u\in U} \tag{3.6}$$

Полученная задача является детерминированной задачей математического программирования. Как следует из приведённой ниже теоремы, задачу (3.6) можно свести к смешанной целочисленной задаче. Смешанными целочисленными задачами здесь и далее называются задачи, в которых присутствуют переменные двух видов: дискретные и непрерывные.

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$ и множество U непусто и ограничено. Тогда любая оптимальная стратегия u_n^φ в задаче (3.6) является оптимальным значением переменной u в задаче*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k \to \sup_{u\in U,\, y_1,\ldots,y_n\in Y,\, \delta\in\{0,1\}^n} \tag{3.7}$$

при ограничениях

$$c^\top u + q^\top(x_k)y_k \leqslant \varphi + L_1(1-\delta_k), \tag{3.8}$$

и

$$A(x_k)u + B(x_k)y_k \geqslant b(x_k) - L_2(1-\delta_k)e_l, \tag{3.9}$$

где e_l — вектор, составленный из l единиц,

$$L_1 \geqslant \sup_{u\in U}|c^\top u - \varphi|,$$

$$L_2 \geqslant \max_{k=\overline{1,n}}\sup_{u\in U}\|b(x_k) - A(x_k)u\|_\infty,$$

и любое оптимальное значение u в задаче (3.7) является оптимальной стратегией в задаче (3.6).

Доказательство теоремы 3.1. Пусть u_n^φ — оптимальная стратегия в задаче (3.6). Обозначим оптимальное значение целевой функции задачи (3.7) через P^* и покажем, что $P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Для этого построим вектор допустимых стратегий в задаче (3.7). Пусть $\bar{y}_k$ — некоторый элемент множества

$$\left\{y \in Y \mid c^\top u + q^\top(x_k)y \leqslant \varphi,\ A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k)\right\}, \tag{3.10}$$

если оно непусто, и $\bar{y}_k = 0$, если данное множество пусто. Если множество (3.10) при заданном k непусто, то определим $\bar{\delta}_k = 1$ и $\bar{\delta}_k = 0$, если при заданном k множество (3.10) пусто. В силу определения констант L_1 и L_2 вектор стратегий $(u_n^\varphi, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{\delta})$ является допустимым в задаче (3.7) и обеспечивает значение $P_\varphi(u_n^\varphi)$ критериальной функции. Таким образом, $P^* \geqslant P_\varphi(u_n^\varphi)$.

Пусть теперь $(u, y_1, \ldots, y_n, \delta)$ — оптимальная стратегия в задаче (3.7). Если $\delta_k = 1$, то

$$c^\top u + q^\top(x_k)y_k \leqslant \varphi \tag{3.11}$$

и

$$A(x_k)u + B(x_k)y_k \geqslant b(x_k), \tag{3.12}$$

поэтому

$$c^\top u + \inf_{y \in Y}\{q^\top(x_k)y \mid A(x_k)u + B(x_k)y \geqslant b(x_k)\} \leqslant \varphi.$$

Таким образом, $P^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k \leqslant P_\varphi(u_n^\varphi)$, а значит, $P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Из полученного равенства и первой части доказательства видно, что значение u_n^φ является оптимальным значением u в задаче (3.7). Для доказательства того, что оптимальное значение u в задаче (3.7) оптимально в (3.6), предположим противное, а именно: $P_\varphi(u) < P_\varphi(u_n^\varphi)$. Но из неравенств (3.11) и (3.12) следует, что $P_\varphi(u) \geqslant P^* = P_\varphi(u_n^\varphi)$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Отметим, что в случае когда множество U является выпуклым многогранником, задача (3.7) является смешанной целочисленной задачей линейного программирования.

3.1.2. Задача с квантильным критерием

Выборочная оценка функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ имеет вид

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \inf\left\{\varphi \mid \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,x) - \varphi) \geqslant \alpha\right\}.$$

Запишем аппроксимацию исходной задачи минимизации функции квантили (3.5) в форме

$$\begin{aligned} \psi_n &\triangleq \inf_{u \in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ U_n &\triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

При фиксированной реализации последовательности $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и заданном $n \in \mathbb{N}$ задача (3.13) может быть рассмотрена как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. Для построения данной задачи рассмотрим некоторую реализацию выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$ объёма n в виде x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Без ограничения общности предположим, что уникальные значения данных реализаций x_1, x_2, $\ldots$,

x_n приходятся на первые $\tilde{n}$ элементов. Введём случайную величину $\xi^{(n)}$. Будем считать, что $\xi^{(n)}$ имеет $\tilde{n} \leqslant n$ реализаций x_1, x_2, $\ldots$, $x_{\tilde{n}}$. Вероятности данных реализаций будем считать равными

$$\mathbf{P}\{\xi = x_k\} \triangleq p_k \triangleq m_k/n, \quad k = \overline{1, \tilde{n}}, \tag{3.14}$$

где m_k — количество элементов реализации выборки $\{x_k\}_{k=1}^n$, совпадающих с x_k. Тогда задачу (3.13) можно записать в форме двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием

$$U_n = \operatorname{Arg}\min_{u \in U}\{c^\top u + \inf\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Метод сведения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием в общем случае описан в [78], однако для его применения необходимо выполнение ряда предположений, которые в линейном случае могут не выполняться. В частности, требуется достижимость оптимального решения задачи второго этапа, что в случае $\Phi(u, x) = -\infty$ не выполнено. Предложим способ сведения задачи (3.13) к смешанной целочисленной задаче, который может быть реализован в предположении, что $\psi_n > -\infty$.

Пусть известна константа γ_1, такая что

$$\gamma_1 \geqslant \max_{u \in U} \max\{0, c^\top u - \psi_n\}.$$

Пусть также для каждого $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{\tilde{n}}\}$ известна константа $\gamma_2(x)$ такая, что

$$\gamma_2(x) \geqslant \max_{u \in U} \|b(x) - A(x)u\|_\infty,$$

где через $\|\cdot\|_\infty$ обозначена ∞-норма вектора, т. е. максимальное абсолютное значение его координат. В силу компактности и непустоты множества U значения γ_1 и $\gamma_2(x)$ всегда конечны.

Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного линейного программирования:

$$c^\top u + \varphi \to \inf_{u \in U,\, \varphi \in (-\infty, +\infty],\, y^{(1)}, \ldots, y^{(\tilde{n})} \in \mathbb{R}^l,\, \delta \in \{0,1\}^{\tilde{n}}} \tag{3.15}$$

при ограничениях

$$
\begin{gathered}
q^\top\big(x_k\big)y^{(k)} - \gamma_1(1-\delta_k) \leqslant \varphi, \quad k=\overline{1,\tilde n},\\
A\big(x_k\big)u + B\big(x_k\big)y^{(k)} \geqslant b\big(x_k\big) - \gamma_2\big(x_k\big)(1-\delta_k)e_l, \quad k=\overline{1,\tilde n},\\
y^{(k)} \geqslant 0, \quad k=\overline{1,\tilde n},\\
\sum_{k=1}^{\tilde n} p_k\delta_k \geqslant \alpha,
\end{gathered}
$$

где e_l — вектор из l единиц. В задаче (3.15) для каждой реализации случайных параметров x_k вводится переменная $y^{(k)}$, соответствующая стратегии второго этапа, и бинарная переменная δ_k, которая равна единице, если оптимальное значение стратегии второго этапа не больше оптимального значения функции квантили, и равна нулю в противном случае.

Сформулируем теорему об эквивалентности задач (3.13) и (3.15).

Теорема 3.2. *Пусть $\psi_n > -\infty$ и выполнено предположение 1.1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Если $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde n)}, \delta^*)$ — оптимальные значения переменных в задаче (3.15), *то $u^* \in U_n$.*

2. Если $\bar u \in U_n$, то существует набор $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde n)}, \delta^*)$ оптимальных значений переменных в задаче (3.15) *такой, что $\bar u = u^*$.*

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde n)}, \delta^*)$ — оптимальные значения переменных в задаче (3.15). Тогда для всех x_k таких, что $\delta_k = 1$, выполнено

$$
\begin{gathered}
q^\top\big(x_k\big)y_*^{(k)} \leqslant \varphi^*, \quad k=\overline{1,\tilde n},\\
A\big(x_k\big)u^* + B\big(x_k\big)y_*^{(k)} \geqslant b\big(x_k\big), \quad k=\overline{1,\tilde n},\\
y_*^{(k)} \geqslant 0, \quad k=\overline{1,\tilde n},
\end{gathered}
$$

а значит, $\Phi(u^*, x_k) \leqslant \varphi^*$ для набора реализаций случайных параметров x_k с суммарной вероятностью больше α. Поэтому

$$
\psi_n = \min_{u\in U}\{c^\top u + \inf\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u,\xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} \leqslant c^\top u^* + \varphi^*. \tag{3.16}
$$

Пусть теперь $\bar u \in U_n$. Построим решение $(\bar u, \bar\varphi, \bar y^{(1)}, \ldots, \bar y^{(\tilde n)}, \bar\delta)$, являющееся допустимым в задаче (3.15). Пусть $\bar\varphi = \inf\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(\bar u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$. В силу предположения

$\psi_n > -\infty$ выполнено $\bar{\varphi} > -\infty$. Определим значения $\bar{\delta}_k$ по правилу

$$\bar{\delta}_k \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(\bar{u}, x_k) \leqslant \bar{\varphi}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значение вектора $\delta = \bar{\delta}$ является допустимым в задаче (3.15). Если $\bar{\delta}_k = 1$ и $|\Phi(\bar{u}, x_k)| <$ $< +\infty$, то выберем

$$\bar{y}^{(k)} \in \operatorname{Arg} \min_{y \in Y(\bar{u}, x_k)} \{q^\top(x_k) y\}.$$

Если $\Phi(\bar{u}, x_k) = -\infty$, то выберем $\bar{y}^{(k)}$ так, чтобы

$$q^\top\big(x_k\big)\bar{y}^{(k)} \leqslant \bar{\varphi}, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$
$$A\big(x_k\big)\bar{u} + B\big(x_k\big)\bar{y}^{(k)} \geqslant b\big(x_k\big), \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$
$$\bar{y}^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

что будет гарантировать допустимость $y^{(k)} = \bar{y}^{(k)}$ в задаче (3.15) Если $\bar{\delta}_k = 0$ или $\Phi(\bar{u}, x_k) = +\infty$, то установим $\bar{y}^{(k)} = 0$. По определению констант γ_1 и $\gamma_2(x_k)$, значение переменной $\bar{y}^{(k)} = 0$ будет являться допустимым в рассматриваемом случае. Таким образом, по оптимальному значению переменных в задаче (3.13) построен набор допустимых значений переменных в задаче (3.15) такой, что

$$\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi}. \tag{3.17}$$

Из соотношения (3.16) следует, что для решения задачи (3.15) выполнено $\psi_n \leqslant$ $\leqslant c^\top u^* + \varphi^*$. Согласно (3.17) для построенного решения задачи (3.15) вместо неравенства выполнено равенство, поэтому значения переменных $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{y}^{(1)}, \ldots, \bar{y}^{(\tilde{n})}, \bar{\delta})$ оптимальны в задаче (3.15), что доказывает второе утверждение теоремы. Из оптимальности $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \ldots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ и достижимости равенства в (3.16) следует, что $\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi} =$ $= c^\top u^* + \varphi^*$, что и гарантирует $u^* \in U_n$. Таким образом, оба утверждения теоремы доказаны. $\square$

Для применения теоремы 3.2 необходимо проверить, что $\psi_n \neq -\infty$. Согласно лемме 1.1, $\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\}$ не зависит от u. Таким образом, $\psi_n = -\infty$ тогда и только тогда, когда при некотором $u \in U$ выполнено

$$\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\} \geqslant \alpha.$$

Отсюда следует, что для проверки равенства $\psi_n = -\infty$ достаточно вычислить значение функции квантили только для одного значения u.

При $\psi_n > -\infty$ справедливо

$$\max_{u\in U}\max\{0, c^\top u - \psi_n\} \leqslant \left|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U}\min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x_k)\}\right|,$$

где Δ — набор индексов k таких, что $\Phi(u, x_k) > -\infty$. Поэтому константа γ_1 может быть выбрана равной

$$\gamma_1 = \left|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U}\min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x_k)\}\right|. \tag{3.18}$$

Заметим, что вычисление данной константы в случае полиэдрального множества U сводится к решению конечного числа задач линейного программирования.

Таким образом, задача (3.13) может быть решена следующим образом. Сначала необходимо проверить выполнение равенства $\psi_n = -\infty$. Если оно выполнено, то $U_n = U$. Если данное равенство не выполнено, то необходимо найти константу γ_1 согласно (3.18) и константы $\gamma_2(x_k)$, а затем найти решение задачи (3.15), которое даст решение задачи (3.13).

3.2. Метод сведения двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием к смешанной целочисленной задаче

В данном разделе описывается численный метод решения двухуровневой задачи с асимметричной информаций (1.49), сформулированной в разделе 1.3.1. Предлагаемый метод основан на переходе к эквивалентной детерминированной задаче математического программирования при дискретном распределении случайных параметров.

Будем считать, что распределение случайных параметров в задаче (1.49) является дискретным с конечным числом реализаций. Это может быть обусловлено спецификой моделируемой системы, а может быть связано с тем, что исходное непрерывное распределение заменено его дискретной аппроксимацией с помощью методов, изложенных в главе 2.

Реализации случайного вектора X обозначим через x_k, а их вероятности — через

$$p_k = \mathbf{P}\{X = x_k\} > 0,\ k = \overline{1, n},\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{3.19}$$

Лемма 3.1. *Пусть множество U непусто и компактно, функции $u \mapsto B(u,x)$, $u \mapsto b(u,x)$ непрерывны на U при любом фиксированном $x \in \mathcal{X}$. Тогда множество Y замкнуто.*

Доказательство леммы 3.1. Поскольку множество реализаций случайного вектора X конечно, выполнено равенство

$$Y = \bigcup_{u \in U, x \in \mathcal{X}} Y(u,x) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{u \in U} Y(u, x_k).$$

Если $\overline{y} \notin Y$, то $\overline{y} \notin Y(u,x_k)$ для всех $u \in U$, $k = \overline{1,n}$. Это значит, что либо существует $i \in \{1,\dots,k\}$ такое, что $\overline{y}_i < 0$, либо

$$\min_{i=1,\dots,l} \left(B(u,x_k)\overline{y} - b(u,x_k)\right)_i < 0$$

для всех $u \in U$, $k = \overline{1,n}$. Из конечности множества реализаций X, компактности множество U и непрерывности функций $u \mapsto B(u,x)$, $u \mapsto b(u,x)$ следует, что

$$\max\left\{\min_{i=1,\dots,l} \left(B(u,x_k)\overline{y} - b(u,x_k)\right)_i \mid u \in U, k = \overline{1,n}\right\} < 0.$$

Таким образом, существует $\delta > 0$ такое, что $y \notin Y$ для всех y при $\|y - \overline{y}\| \leqslant \delta$. А значит, множество Y замкнуто. $\square$

Применяя доказанную лемму 3.1 и считая, что множество реализаций случайного вектора состоит из единственного элемента x_k, заключаем, что множества

$$\widehat{Y}(x_k) = \bigcup_{u \in U} Y(u, x_k)$$

также являются замкнутыми.

При фиксированной паре $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$ стратегия последователя является оптимальной ($y \in Y^*(u,x)$) в том и только том случае, когда существует значение $\lambda \in \mathbb{R}^l_+ \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^l \mid \lambda \geqslant 0\}$ такое, что выполнена система ограничений

$$B(u,x)^\top \lambda \leqslant c(u,x), \tag{3.20}$$

$$(B(u,x)y - b(u,x))^\top \lambda = 0, \tag{3.21}$$

$$(B(u,x)^\top \lambda - c(u,x))^\top y = 0. \tag{3.22}$$

При заданном значении пары $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$ введём обозначение

$$\Lambda(u,x) \triangleq \{\lambda \geqslant 0 \mid B(u,x)^\top \lambda \leqslant c(u,x)\},$$

для множества допустимых стратегий двойственной задачи линейного программирования к задаче (1.46). Пусть

$$\Lambda \triangleq \bigcup_{(u,x)\in W} \Lambda(u,x).$$

Множество отпимальных решений двойственной задачи линейного программирования обозначим через

$$\Lambda^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg}\max_{\lambda}\{b(u,x)^\top\lambda \mid \lambda \in \Lambda(u,x)\},$$

$$\Lambda^* \triangleq \bigcup_{(u,x)\in W} \Lambda^*(u,x).$$

Для $(u,x) \in U\times\mathcal{X}$ обозначим через $V(u,x)$ множество пар решений прямой и двойственной задач линейного программирования:

$$V(u,x) \triangleq \{(y,\lambda) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^l \mid y \in Y^*(u,x),\ \lambda \in \Lambda^*(u,x)\},$$

$$V \triangleq \bigcup_{(u,x)\in W} V(u,x).$$

Используя технику, предложенную в [175] для одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования, сведём рассматриваемую задачу к смешанной целочисленной задаче математического программирования, которая эквивалентна исходной двухуровневой задаче (1.49). Пусть

$$\overline{\psi}_\alpha(u) \triangleq \inf_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}(u)} \varphi_\alpha(u,y(\cdot))$$

— значение критериальной функции задачи (1.49) при фиксированной стратегии $u \in U$. Предположим существование функций $\gamma_i\colon U \times Y \to [0,+\infty)$, $i = 1,2$, таких, что

$$\gamma_1(u,y) \geqslant \Phi(u,x,y) - \overline{\psi}_\alpha(u) \text{ для всех } (u,x,y) \in U \times \mathcal{X} \times Y. \tag{3.23}$$

и

$$\gamma_2(u,y) \geqslant Q(u,x,y) \text{ для всех } (u,x,y) \in U \times \mathcal{X} \times Y. \tag{3.24}$$

Если значения $\Phi(u,x,y)$ имеют нижнюю границу $\bar{\gamma}_1$ на $U \times \mathcal{X} \times Y$, то можно установить

$$\gamma_1(u,y) = \max_{k=\overline{1,n}}\{\Phi(u,x_k,y) - \bar{\gamma}_1\}$$

для всех $u \in U$, $y \in Y$.

Введём штрафную функцию $\chi\colon U \times \mathcal{X} \times Y \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ множества $V(u,x)$, т. е. обладающую свойствами

$$\chi(u,x,y,\lambda) \leqslant 0 \text{ для всех } (y,\lambda) \in V(u,x), \tag{3.25}$$

$$\chi(u,x,y,\lambda) > 0 \text{ для всех } (y,\lambda) \notin V(u,x). \tag{3.26}$$

Например, эту функцию можно определить следующим образом:

$$\chi(u,x,y,\lambda) = \max\{\max_{i=1,\ldots,m}\{b_i(u,x) - A_i(u,x)y\},\ \max_{j=1,\ldots,k}\{(A^\top)_j(u,x)\lambda - c_j(u,x)\},$$
$$\|(B(u,x)y - b(u,x))^\top\lambda\|,\ \|(A^\top(u,x)\lambda - c(u,x))^\top y\|\}. \tag{3.27}$$

В качестве нормы $\|\cdot\|$ будем рассматривать максимальный модуль координат вектора.

Рассмотрим смешанную целочисленную задачу

$$\varphi \to \inf_{\varphi\in\mathbb{R}, u\in U, y^1,\ldots,y^n, \lambda^1,\ldots,\lambda^n, \delta\in\{0,1\}^n} \tag{3.28}$$

при ограничениях

$$\Phi(u,x_k,y^k) - \gamma_1(u,y^k)(1-\delta_k) \leqslant \varphi, \quad k=\overline{1,n}, \tag{3.29}$$

$$Q(u,x_k,y^k) - \gamma_2(u,y^k)(1-\delta_k) \leqslant 0, \quad k=\overline{1,n}, \tag{3.30}$$

$$\delta_k\chi(u,x_k,y^k,\lambda^k) \leqslant 0, \quad k=\overline{1,n}, \tag{3.31}$$

$$\sum_{k=1}^n p_k\delta_k \geqslant \alpha, \tag{3.32}$$

$$y^k \geqslant 0,\ \lambda^k \geqslant 0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{3.33}$$

Сформулируем теорему об эквивалентности задач (1.49) и (3.28)–(3.33).

Теорема 3.3. *Пусть случайный вектор X имеет конечное число реализаций, удовлетворяющих* (3.19), *и известны функции γ_1, γ_2, χ, обладающие свойствами* (3.23)–(3.26). *Тогда*

1) *для каждой оптимальной пары стратегий $(u,y(\cdot))$ задачи* (1.49) *существуют значения переменных φ, y^1, …, y^n, λ^1,…, λ^n, δ_1,…, δ_n такие, что набор переменных*

$$(\varphi, u, y^1, \ldots, y^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n, \delta_1, \ldots, \delta_n)$$

оптимален в задаче (3.28)–(3.33);

2) для каждого оптимального набора переменных $(\varphi, u, y^1, \ldots, y^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *задачи* (3.28)–(3.33) *существует функция* $y(\cdot)$ *такая, что пара* $(u, y(\cdot))$ *оптимальна в задаче* (1.49)*;*

3) оптимальные значения целевых функций (1.49) *и* (3.28)–(3.33) *равны, и они достигаются (либо не достигаются) в обеих задачах одновременно;*

4) если оптимальные значения целевых функций (1.49) *и* (3.28)–(3.33) *не достигаются, то минимизирующие последовательности переменных и в обеих задачах совпадают.*

Доказательство теоремы 3.3.

Для доказательства теоремы будем использовать лемму 1 в [60], согласно которой две оптимизационные задачи эквиваленты, если по любому заданному допустимому решению первой задачи можно построить допустимое решение второй задачи такое, что значение критериальной функции во второй задаче на построенном решении меньше либо равно значению критериальной функции в первой задаче для заданного решения, и наоборот.

Пусть $(u, y(\cdot))$ — допустимое решение задачи (1.49). Поскольку $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(u)$, существует функция $\lambda(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^l$, соответствующая двойственным переменным такая, что

$$(u, x) \in W \Rightarrow (y(x), \lambda(x)) \in V(u, x).$$

Обозначим через ψ соответствующее значение целевой функции задачи (1.49). По тройке $(u,\ y(\cdot),\ \lambda(\cdot))$ построим допустимое решение задачи (3.28)–(3.33) со значением целевой функции не большем, чем ψ. Пусть $k \in \{1, \cdots, n\}$ и

$$\hat{\varphi} = \psi, \quad \hat{u} = u, \tag{3.34}$$

$$\hat{\delta}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(u, x_k, y(x_k)) \leqslant \psi \text{ и } Q(u, x_k, y(x_k)) \leqslant 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.35}$$

$$\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_n)^\top, \tag{3.36}$$

$$\hat{y}^k = y(x_k), \hat{\lambda}^k = \lambda(x_k) \text{ для } x_k \in \mathcal{X}(u). \tag{3.37}$$

Для каждого $x_k \notin \mathcal{X}(u)$ выберем $\hat{y}^k$ такое, что $\hat{y}^k \in Y$ и неравенства (3.23), (3.24) выполнены для $u = \hat{u}$, $x = x_k$, $y = \hat{y}^k$. Нетрудно проверить, что для вектора $(\hat{\varphi}, \hat{u}, \hat{y}^1, \ldots, \hat{y}^n,$

$\hat{\lambda}^1, \ldots, \hat{\lambda}^n, \hat{\delta}\Big)$ выполнены все ограничения задачи (3.28). Кроме того, $\hat{\varphi}$ — верхняя граница соответствующего значения критериальной функции задачи (3.28). Таким образом, решение задачи (3.28) с требуемыми свойствами построено.

Теперь возьмём допустимое решение $(\varphi, u, y^1, \ldots, y^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n, \delta)$ задачи (3.28). Определим функции $y(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ по правилу: $y(x_k) = y^k$, $\lambda(x_k) = \lambda^k$ для $x_k \in \mathcal{X}(u)$, для других $x_k \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}(u)$ значение $y(x_k)$ можно взять произвольно. Поскольку выполнено ограничение (3.32), справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\Phi(u, X, y(X)) \leqslant \varphi, \quad Q(u, X, y(X)) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha. \tag{3.38}$$

Поэтому $\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \leqslant \varphi$, т. е. φ является верхней оценкой критериальной функции задачи (1.49).

Таким образом, задачи (1.49) и (3.28)–(3.33) эквивалентны. $\square$

Замечание 3.1. Если $Y^*(u,x) \neq \varnothing$ для всех $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$ (а также в том случае, когда множество $Y^*(u,x)$ не зависит от x), ограничение (3.31) можно заменить на более простое

$$(y^k, \lambda^k) \in V(u, x_k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.39}$$

Замечание 3.2. Теорема 3.3 описывает способ, позволяющий найти решение исходной стохастической двухуровневой задачи (1.49). Пусть найдено решение $(\varphi^*, u^*, y^{1*}, \ldots, y^{n*}, \lambda^{1*}, \ldots, \lambda^{n*}, \delta^*)$ задачи (3.28)–(3.33). Введём функции $y^*(\cdot)$ по правилам: $y^*(x_k) = y^{k*}$ для всех $x_k \in \mathcal{X}$. Согласно приведённому доказательству, пара $(u^*, y^*(\cdot))$ обеспечивает верхнюю границу φ^* критериальной функции задачи (1.49). Но φ^* является оптимальным значением критериальных функций задачи (1.49) и (3.28)–(3.33) в силу доказанной эквивалентности этих задачи. А значит, пара $(u^*, y^*(\cdot))$ значений переменных оптимальна в задаче (1.49).

Полученная задача (3.28)–(3.33) является нелинейной смешанной целочисленной задачей, для решения которой в зависимости от её специфики могут быть применены методы глобальной оптимизации, методы ветвей и границ, построение сечений, декомпозиционные алгоритмы. В главе 5 будут продемонстрированы способы упрощения задач (3.28)–(3.33), позволяющие её решить с помощью разработанного программного обеспечения.

Поскольку задачи (1.49) и (3.28)–(3.33) эквивалентны, существование решения задачи (1.49) может быть проверено через решение задачи (3.28)–(3.33). Если решение задачи (3.28)–(3.33) существует, то существует и решение задачи (1.49).

Условия, гарантирующие существование решения задачи (1.49) даны в следующей теореме.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия:*

(i) множество U компактно и непусто;

(ii) случайный вектор X имеет конечно число реализаций, определённых соотношениями (3.19)*;*

(iii) задача (1.49) *имеет допустимое решение $(u, y(\cdot))$ с конечным значением критериальной функции $\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) < +\infty$;*

(iv) функции $u \mapsto B(u, x)$, $u \mapsto b(u, x)$, $u \mapsto c(u, x)$ непрерывны на U;

(v) множества Y и Λ^* ограничены;

(vi) функции $(u, y) \mapsto \Phi(u, x, y)$ и $(u, y) \mapsto Q(u, x, y)$ полунепрерывны снизу по $(u, y) \in U \times Y$ для каждого фиксированного $x \in \mathcal{X}$ и ограничены сверху на $U \times Y$.

Тогда существует решение задачи (1.49).

Доказательство теоремы 3.4. Сначала заметим, что множество допустимых решений задачи (1.49) непусто в силу условия (iii). Поэтому множество Y и Λ^* непусты. По лемме 3.1 множество Y замкнуто, если выполнены условия (ii), (iv). А значит, множество Y компактно в силу условия (v). По условию (vi), функции $(u, y) \mapsto \Phi(u, x, y)$ и $(u, y) \mapsto Q(u, x, y)$ ограничены сверху. Более того, можно выбриать константы $\gamma_1(u, y) \equiv \bar{\gamma}_1$ и $\gamma_2(u, y) \equiv \bar{\gamma}_2$, для которых неравенства (3.23) и (3.24) выполнены, потому что полунепрерывные снизу функции достигают свою нижнюю грань на компактном множестве. Зададим функцию χ по правилу (3.27). Тогда по теореме 3.3 задачи (1.49) и (3.28)–(3.33) эквиваленты. А значит, можно доказать теорему 3.4 с помощью решения эквивалентной задачи (3.28)–(3.33). Заметим, что добавление ограничений

$$\min_{u\in U, x\in\mathcal{X}, y\in Y} \Phi(u,x,y) \leqslant \varphi \leqslant \bar{\gamma}_1,$$

$$\|y^k\|_\infty \leqslant \max_{y\in Y} \|y\|_\infty,\ k=1,\ldots,n,$$

$$\|\lambda^k\|_\infty \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda^*} \|\lambda\|_\infty,\ k=1,\ldots,n.$$

к ограничениям задачи (3.28)–(3.33) не изменяет её оптимальное решение. Но множество её допустимых решений становится компактным. Неравенство

$$\min_{u\in U, x\in\mathcal{X}, y\in Y} \Phi(u,x,y) > -\infty$$

выполнено, потому что множество U непустое и компактное, а функция $(u,y)\mapsto \Phi(u,x,y)$ полунепрерывна снизу. Следовательно, существует оптимальное решение задачи (3.28)–(3.33), что гарантирует существование оптимального решения задачи (1.49). $\square$

Обратим внимание на то, что множество Λ^*, упоминаемое в теореме 3.4, является ограниченным, например, при выполнении условий Слейтера [134].

Пример 3.1. Продемонстрируем предложенный численный метод на простой задаче

$$\min\left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{u^2 + Xy(X) + 1 \leqslant \varphi, -y(X) \leqslant \frac{1}{4}\right\} \geqslant \frac{2}{3}\right\} \to \min_{u\in[-1,1], y(\cdot)\in\mathcal{Y}(u)}, \tag{3.40}$$

где

$$\mathcal{Y}(u) = \left\{y(\cdot) \mid y(x) \in \operatorname{Arg}\min_{y\in[-u,u]} uxy\right\},$$

случайная величина X принимает три значения -1, 0, 1 с равными вероятностями $\frac{1}{3}$. Решая задачу последователя, получаем, что $y(-1) = y^1 = |u|$, $y(0) = y^2 \in [-u,u]$, $y(1) = y^3 = -|u|$. В качестве констант можно установить $\gamma_1(u,y) = \gamma_2(u,y) \equiv 3$. Эквивалентная задача смешанного математического программирования принимает вид

$$\varphi \to \min_{\varphi\in\mathbb{R}, u\in[-1,1], \delta_1,\delta_2,\delta_3\in\{0,1\}}$$

при ограничениях

$$u^2 - |u| + 1 - 3(1-\delta_1) \leqslant \varphi,$$
$$u^2 + 1 - 3(1-\delta_2) \leqslant \varphi,$$
$$u^2 - |u| + 1 - 3(1-\delta_3) \leqslant \varphi,$$
$$-|u| - \frac{1}{4} - 3(1-\delta_1) \leqslant 0,$$
$$-3 - \frac{1}{4} - 3(1-\delta_2) \leqslant 0,$$
$$|u| - \frac{1}{4} - 3(1-\delta_3) \leqslant 0,$$
$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geqslant 2.$$

Решая полученную эквивалентную задачу, находим решение задачи (3.40):

$$u^* = \pm\frac{1}{4},\ \varphi^*_{\frac{2}{3}} = \frac{13}{16}.$$

Значения дополнительных переменных в эквивалентной задаче:

$$\delta_1^* = \delta_3^* = 1,\ \delta_2^* = 0.$$

3.3. Метод решения двухуровневой задачи размещения предприятий

В данном разделе предлагается метод решения стохастической двухуровневой задачи размещения предприятий (1.95), сформулированной в разделе 1.5 для дискретного распределения случайных параметров. Метод основан на переходе к эквивалентной детерминированной дискретной двухуровневой задаче. Будем считать, что случайный вектор X имеет дискретное распределение с конечным числом реализаций $x_1, \ldots, x_n$, где n — число реализаций случайного вектора X. Пусть заданы вероятности реализаций $p_k = \mathbf{P}\{X = x_k\}$, $k = \overline{1,n}$.

3.3.1. Эквивалентная детерминированная двухуровневая задача

В первую очередь, заметим, что в силу ограничения (1.96) целевая функция потерь может быть переписана в виде

$$\Phi(u,x) = \max_{y \in Y^*(u,x)} \left\{ \sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J} x^j \left(1 - \sum_{i\in I} y_{ij}\right)\right\}. \tag{3.41}$$

Поскольку функция потерь лидера Φ не зависит от переменных u_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, и обязательно должно быть открыто хотя бы одно предприятие, ограничения (1.96)–(1.99) можно заменить на ограничения

$$\sum_{i \in I} u_i \geqslant 1, \tag{3.42}$$

$$u_i \in \{0, 1\},\ i \in I. \tag{3.43}$$

Получим эквивалентную рассматриваемой задаче (1.95) детерминированную задачу с помощью доверительного метода. Согласно данному методу задача (1.95) эквивалентна минимаксной задаче

$$\min_{\tilde{u} \in \{0,1\}^r,\, S \in \mathcal{F}_\alpha} \max_{x \in S} \Phi(u, x) \tag{3.44}$$

при ограничениях (3.42), (3.43), где $\tilde{u} = (u_1, \ldots, u_r)^\top$, $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство всех доверительных множеств, т. е. имеющих вероятностную меру не менее α:

$$\mathbf{P}(S) \geqslant \alpha. \tag{3.45}$$

Как отмечалось в [36], при дискретном распределении случайного вектора X минимизацию по всем доверительным множествам можно заменить минимизацией по подмножествам множества $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ всех реализаций случайного вектора.

Пусть S — некоторое подмножество множества $\mathcal{X}$. Свяжем с этим подмножеством вектор $\delta \in \{0, 1\}^n$, координаты которого δ_k, $k = \overline{1, n}$, определяются по правилу:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x_k \in S, \\ 0, & \text{если } x_k \notin S. \end{cases} \tag{3.46}$$

Таким образом, каждому бинарному вектору δ соответствует некоторое подмножество множества $\mathcal{X}$ и наоборот.

В этом случае вероятностное ограничение (3.45) примет вид

$$\mathbf{P}\{S\} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k p_k \geqslant \alpha. \tag{3.47}$$

Справедлива следующая теорема о сведении рассматриваемой задачи к целочисленной двухуровневой задаче.

Теорема 3.5. *Пусть X имеет дискретное распределение с конечным числом реализаций. Тогда все оптимальные значения переменных u_1, u_2, $\ldots$, u_r в стохастической* *двухуровневой задаче (1.95) при ограничениях (1.96)–(1.99) являются оптимальными решениями детерминированной двухуровневой задачи*

$$\max_{y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \varphi \to \min_{\tilde{u},\delta,\varphi} \tag{3.48}$$

при ограничениях (3.42)–(3.43) и ограничениях

$$\sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J} x_k^j \left(1 - \sum_{i\in I} y_{ij}\left(x_k\right)\right) - (1-\delta_k)\gamma \leqslant \varphi, \quad k = \overline{1,n}; \tag{3.49}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_k p_k \geqslant \alpha; \tag{3.50}$$

$$y_{ij}\left(x_k\right) \in Y^*\left(u, x_k\right), \tag{3.51}$$

где $\gamma \geqslant 2(\|f\|_1 + r \cdot \max_{k=\overline{1,n}} \|x_k\|_1)$, $\mathcal{Y} \triangleq \{y(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \{0,1\}^{r+sr}\}$. *И все оптимальные значения переменных* u_1, u_2, $\ldots$, u_r *в задаче (3.48) оптимальны в задаче (1.95) при ограничениях (1.96)–(1.99).*

Здесь $\|\cdot\|_1$ — сумма модулей координат вектора. В теореме 3.5 стратегия последователя рассматривается как функция, определенная на множестве реализаций случайного вектора.

Доказательство теоремы 3.5. Заметим, что эквивалентная исходной задаче (1.95) задача (3.44) может быть записана в виде

$$\varphi \to \min_{\tilde{u},S,\varphi} \tag{3.52}$$

при ограничениях (3.42), (3.43), (3.45) и

$$\max_{x\in S} \Phi\left(u, x\right) \leqslant \varphi. \tag{3.53}$$

Как было отмечено выше, при поиске оптимального решения достаточно ограничиться рассмотрением множеств S, состоящих из реализаций случайного вектора X.

Пусть (u^1, S^1, φ^1) — допустимое решение задачи (3.52), при этом $S^1 = \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_K}\}$. Построим вектор δ^1, соответствующий множеству S^1, по правилу

$$\delta_k^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } x_k \in S^1, \\ 0, & \text{если } x_k \notin S^1. \end{cases}$$

Покажем, что решение $(u^1, \delta^1, \varphi^1)$ – допустимое решение задачи (3.48). Ограничение (3.50) выполнено в силу сохранения вероятностной меры (3.45). Из (3.53) следует, что ограничение (3.49), соответствующее единичным координатам вектора δ^1, выполнено. Получим оценку функции, записанной в левой части неравенства (3.49):

$$\left|\sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J} x_k^j \left(1 - \sum_{i\in I} y_{ij}\left(x_k\right)\right)\right| \leqslant \sum_{i\in I} |f_i| + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} |x_k^j| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_1 + r\cdot \max_{k=\overline{1,n}} \|x_k\|_1 \leqslant \frac{\gamma}{2}. \quad (3.54)$$

Поскольку хотя бы одна координата вектора δ^1 ненулевая, из ограничения (3.49) следует, что

$$\varphi^1 \geqslant -\frac{\gamma}{2}. \quad (3.55)$$

Ограничения (3.49), соответствующие нулевым координатам вектора δ^1, выполнены в силу неравенств (3.54), (3.55). Остальные ограничения задач совпадают. Таким образом, по допустимому решению задачи (3.52) можно построить допустимое решение задачи (3.48) с таким же значением критериальной функции.

Пусть теперь $(u^2, \delta^2, \varphi^2)$ — допустимое решение задачи (3.48). Сопоставим вектору δ^2 множество S^2 по правилу (3.46). Покажем, что $(u^2, \delta^2, \varphi^2)$ — допустимое решение задачи (3.52). Ограничение (3.45) на значение вероятностной меры выполнено в силу условий (3.49). Выполнение ограничения (3.53) следует из выполнения ограничения (3.49). Таким образом, по допустимому решению задачи (3.48) можно построить допустимое решение задачи (3.52) с таким же значением критериальной функции.

Итак, по допустимому решению задачи (3.52) можно построить допустимое решение задачи (3.48) и наоборот. Данные условия согласно лемме, доказанной в [60], гарантируют эквивалентность задач (3.52) и (3.48).

Замечание 3.3. Результат, аналогичный теореме 3.5, можно сформулировать и для оптимистической постановки задачи (1.100). В этом случае задача (1.100) при ограничениях (1.96)–(1.99) эквивалентна детерминированной двухуровневой задаче

$$\varphi \to \min_{\tilde{u},\delta,\varphi,y(\cdot)\in\mathcal{Y}} \quad (3.56)$$

при ограничениях (3.42)–(3.43), (3.49)–(3.51).

3.3.2. Верхние и нижние оценки критериальной функции задачи

Предложим метод поиска нижней оценки критериальной функции задачи.

Исключим из рассмотрения последователя. Тогда ограничения (3.49) будут заменены на ограничения

$$\sum_{i\in I} f_i u_i - \sum_{j\in J} x_k^j - (1-\delta_k)\gamma \leqslant \varphi, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.57}$$

Таким образом, оптимальное значение критериальной функции задачи (3.48), в которой ограничения (3.49) заменены ограничениями (3.57), является оценкой снизу оптимального значения критериальной функции исходной задачи (1.95).

Заметим, что ограничение (3.57) не содержит переменной последователя, поэтому для поиска оценки снизу оптимального значения критериальной функции исходной задачи (1.95) необходимо решить задачу смешанного целочисленного линейного программирования

$$\varphi \to \min_{\tilde{u},\delta,\varphi} \tag{3.58}$$

при ограничениях на значение вероятностной меры (3.50) и ограничениях задачи лидера (3.42), (3.43).

Задача (3.58) может быть решена точно. Открывается предприятие с наименьшей стоимостью открытия, т.е. оптимальные значения переменных u_i имеют вид: $u_{i^*} = 1$ для некоторого $i^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{i\in I} f_i$, остальные $u_i = 0$. Потери лидера при реализации x_k случайного спроса имеют вид

$$\varphi_k = \min_{i\in I} f_i - \sum_{j\in J} x_k^j.$$

Упорядочив величины φ_k по возрастанию, найдём минимальный номер k^* при котором

$$\sum_{k=1}^{k^*} p_k \geqslant \alpha.$$

Оптимальное значение переменной φ составляет φ_{k^*}, оптимальные значения переменных δ_k определяются следующим образом:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leqslant k^*, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для поиска оценки критериальной функции сверху предложим метод вычисления значения критериальной функции при фиксированной стратегии лидера u.

Пусть $\psi^*(u,x)$ — оптимальное значение целевой функции задачи последователя при фиксированной стратегии лидера u.

Чтобы учесть пессимистическую постановку задачи, нужно из всех оптимальных стратегий последователя выбрать наиболее неблагоприятную для лидера. Для этого решим для всех $x \in \mathcal{X}$ следующую вспомогательную задачу:

$$\sum_{j\in J} x^j \sum_{i\in I} y_{ij} \to \max_y \tag{3.59}$$

при ограничениях (1.88)–(1.91) задачи последователя, а также

$$\sum_{i\in I} g_i y_i - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x^j y_{ij} \leqslant \psi^*(u,x). \tag{3.60}$$

Решение задачи обозначим через $y^*(u,x)$. Заметим, что для вычисления $y^*(u,x)$ необходимо знать лишь значения переменных u_1, …, u_m стратегии лидера. Целевая функция задачи (3.59) является той частью целевой функции задачи лидера, которая связана со стратегией последователя. Ограничение (3.60) позволяет выбирать только оптимальные стратегии последователя. Таким образом, данная задача позволяет находить оптимальную стратегию последователя, наименее благоприятную для лидера.

Для получения верхней оценки исходной задачи (1.95) найдём значение целевой функции при фиксированных стратегии лидера u и стратегии последователя $y^*(u,\cdot)$ как функции реализации x случайного вектора X.

Замечание 3.4. При оптимистической постановке задачи (1.100) вспомогательную задачу (3.59) следует заменить на задачу

$$\sum_{j\in J} x^j \sum_{i\in I} y_{ij} \to \min_y . \tag{3.61}$$

В остальном метод получения верхней оценки остается аналогичным.

3.3.3. Алгоритм локального поиска

Поскольку решение задачи последователя (1.87) зависит только от вектора переменных $\tilde{u} = (u_1,\dots,u_m)^\top$ стратегии лидера, а переменные u_{ij} могут быть найдены при решении задачи лидера (1.95) при фиксированных значениях переменных $\tilde{u}$, рассмотрим функцию

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}) = \min_{u_{11},\dots,u_{rs}} \varphi_\alpha\left((\tilde{u}^\top, u_{11},\dots,u_{rs})^\top\right), \tag{3.62}$$

где минимум в правой части равенства вычисляется при ограничениях задачи лидера (1.96)–(1.99). Таким образом, исходная задача (1.95) может быть переписана в следующей форме:

$$\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{u}) \to \min_{u \in \{0,1\}^r}. \tag{3.63}$$

Локально-оптимальным решением [1] задачи (3.63) называется решение $\tilde{u}$, удовлетворяющее соотношению

$$\varphi_\alpha(\tilde{u}) \leqslant \varphi_\alpha(\tilde{u}') \tag{3.64}$$

для всех $\tilde{u}'$ из некоторой окрестности $W(\tilde{u})$.

В качестве окрестности решения $\tilde{u}$ будем рассматривать множество $W(\tilde{u}) = \{\tilde{u}' \in \in \{0,1\}^r \mid d(\tilde{u}, \tilde{u}') \leqslant 1\}$, где через

$$d(\tilde{u}, \tilde{u}') = \|\tilde{u} - \tilde{u}'\|_1 = \sum_{i=1}^{r} |\tilde{u}_i - \tilde{u}'_i|$$

обозначено расстояние Хэмминга, равное числу несовпадающих компонент векторов $\tilde{u}$ и $\tilde{u}'$.

Пусть известно некоторое начальное решение задачи лидера $\tilde{u}^{(0)}$, например найденное при решении задачи (3.57) для построения нижней оценки критериальной функции задачи (1.95). Алгоритм поиска локально-оптимального решения записывается следующим образом.

Алгоритм 3.1.

1) Пусть $\tilde{u} := \tilde{u}^{(0)}$.

2) С помощью перебора найдём $\tilde{u}' \in W(\tilde{u})$ такое, что $\varphi_\alpha(\tilde{u}') < \varphi_\alpha(\tilde{u})$. Если такое решение $\tilde{u}'$ найти не удается, то $\tilde{u}$ является локально оптимальным решением. В противном случае $\tilde{u} := \tilde{u}'$, и повторяем шаг 2.

3.3.4. Результаты численных экспериментов

Пример 3.2. Рассмотрим исходную двухуровневую задачу (1.95) для случая трех предприятий и двенадцати потребителей, т. е. $r = 3$, $s = 12$.

Пусть случайный вектор X имеет 100 случайным образом полученных реализаций; при этом значение каждой координаты реализации случайного вектора принадлежит отрезку от 1 до 99. Предпочтения потребителей также формируются случайным образом.

Таблица 3.1. Решение задачи из примера 3.2.

α	0,9	0,8	0,6
Нижняя оценка	−408	−437	−485
Верхняя оценка	−137	−153	−200
Значение целевой функции (локальный поиск)	−137	−153	−200
Номера открываемых лидером предприятий(локальный поиск)	3	3	3
Время локального поиска (с)	87	89	81
Точное значение целевой функции	−137	−153	−200
Номера открываемых лидером предприятий (точное решение)	3	3	3
Время поиска точного решения (с)	244	250	224

Затраты на открытие предприятий лидера и последователя:

$$f = (200; 160; 100)^{\top}, \quad g = (120; 120; 120)^{\top}.$$

Результаты решения задачи отображены в табл. 3.1.

Таким образом, рассматриваемая задача при 100 реализациях случайного вектора может быть решена за приемлемое время (1,5 мин). Первоначально найденное решение при процедуре поиска верхней оценки оказывается оптимальным. Видно, что при изменении α структура решения не изменяется, а гарантированный доход при уменьшении α увеличивается.

Пример 3.3. Пусть теперь $r = 10$, $s = 15$. Пусть случайный вектор X имеет 10 случайным образом полученных реализаций; при этом так же, как и в предыдущем примере, значение каждой координаты реализации случайного вектора принадлежит отрезку от 1 до 99, а предпочтения потребителей формируются случайным образом.

Затраты на открытие предприятий лидера и последователя:

$$f = (200; 200; 180; 160; 160; 140; 120; 100; 60; 40)^{\top},$$
$$g = (140; 140; 140; 140; 140; 140; 140; 140; 140; 140)^{\top}.$$

Результаты решения задачи отображены в табл. 3.2.

В данном примере для поиска точного решения использование полного перебора требует очень много времени, поэтому был осуществлен только локальный поиск. В двух

Таблица 3.2. Решение задачи из примера 3.3.

α	0,9	0,8	0,6
Нижняя оценка	-591	-678	-713
Верхняя оценка	-146	-143	-205
Номера открываемых лидером предприятий (верхняя оценка)	10	10	10
Значение целевой функции (локальный поиск)	-146	-181	-220
Номера открываемых лидером предприятий (локальный поиск)	10	8, 10	8, 10
Время локального поиска (с)	210	397	398

случаях (при $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}6$) удалось улучшить начальное решение с помощью процедуры локального поиска. При этом требуется открытие двух предприятий, а не одного, как в случае $\alpha = 0{,}9$.

3.4. Численный метод решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием и функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру

В данной разделе рассматривается задача стохастического программирования с квантильным критерием и функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру. Изучаемая задача не является выпуклой. Для её решения используется метод выборочных аппроксимаций, описанный в главе 2. В дальнейшем с помощью доверительного метода выборочная аппроксимация задачи сводится к комбинаторной задаче, в которой значение целевой функции определяется через решение задачи выпуклого программирования. В полученной комбинаторной задаче выбирается набор реализаций случайных факторов, задающий доверительное множество. Для решения полученной задачи сначала строится начальное решение для доверительного множества, состоящего из точек, находящихся внутри некоторого шара. Затем осуществляется процедура улучшения доверительного множества. На первом этапе этой процедуры строится многогранник с заданной мерой, а затем этот многогранник трансформируется с помощью поиска с чередующимися окрестностями [171].

3.4.1. Постановка задачи

Пусть случайный вектор X размерности m распределён по стандартному нормальному закону, $X \sim \mathcal{N}(0, I_m)$, где I_m — единичная ковариационная матрица размера $m \times m$. Реализации случайного вектора X будем обозначать через x. Вектор стратегий u принадлежит выпуклому множеству $U \subset \mathbb{R}^r$. Пусть функция потерь имеет структуру

$$\Phi(u, x) \triangleq \max_{i=\overline{1,I}} \left\{ \varphi_i^\top(x) g_i(u) \right\},$$

где

$$\varphi_i(x) \triangleq (\varphi_{i1}(x), \ldots, \varphi_{iL}(x))^\top, \quad i = \overline{1, I},$$
$$g_i(u) \triangleq (g_{i1}(u), \ldots, g_{iJ}(u))^\top, \quad i = \overline{1, I}.$$

Предположим, что φ_{il}, $i = \overline{1, I}$, $l = \overline{1, L}$, — выпуклые на $\mathbb{R}^r$ функции, g_{ij}, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$ — выпуклые на U функции. Будем считать, что $\varphi_{il}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^r$, $g_{ij}(u) \geqslant 0$ для всех $u \in U$.

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — фиксированный параметр, и функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\},$$

$\alpha \in (0, 1)$ — заданный уровень надёжности.

Сформулируем задачу квантильной оптимизации

$$u_\alpha \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{3.65}$$

Замечание. В [153, 188] даются достаточные условия выпуклости функции квантили, заключающиеся в квазивогнутости меры $\mathbf{P}$ и выпуклости функции потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ по обоим аргументам. В приведённой постановке функция потерь является выпуклой отдельно по $x \in \mathbb{R}^m$ и $u \in U$, а вероятностная мера $\mathbf{P}$ квазивогнута. Поэтому нельзя гарантировать выпуклость функции квантили по $u \in U$.

3.4.2. Применение доверительного метода

Применим доверительный метод [54] к сформулированной задаче, чтобы получить эквивалентную минимаксную задачу. Пусть

$$\Psi(u, S) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(u, x),$$

где $S \subset \mathbb{R}^m$. Рассмотрим задачу

$$(S_\alpha, \tilde{u}_\alpha) \in \operatorname{Arg} \min_{\substack{S \in \mathcal{F}_\alpha, \\ u \in U}} \sup_{x \in S} \Phi(u, x) = \operatorname{Arg} \min_{\substack{S \in \mathcal{F}_\alpha, \\ u \in U}} \Psi(u, S), \tag{3.66}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств

$$\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S \mid \mathbf{P}(S) \geqslant \alpha\}.$$

Суть доверительного метода для одноэтапных задач стохастического программирования, отражает следующая теорема.

Теорема 3.6 ([54, 153]). *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$. *Тогда*

1) $\Psi(\tilde{u}_\alpha, S_\alpha) = \varphi_\alpha(u_\alpha)$*;*

2) $\Psi(\tilde{u}_\alpha, S_\alpha) = \varphi_\alpha(\tilde{u}_\alpha)$*;*

3) если u_α *— решение задачи (3.65), то существует множество* $\tilde{S}_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ *такое, что* $\Psi(u_\alpha, \tilde{S}_\alpha) = \varphi_\alpha(u_\alpha)$.

Замечание 3.5. Из теоремы 3.6 следует, что $\varphi_\alpha(u_\alpha) \leqslant \inf\limits_{u \in U} \Psi(u, S)$ для всех $S \in \mathcal{F}_\alpha$. Это значит, что можно найти верхнюю границу оптимального значения критериальной функции (3.65), зафиксировав доверительное множество в задаче (3.66). Такая техника будет использована при поиске начального приближения для применения алгоритма, предложенного ниже.

В соответствии с доверительным методом задача (3.65) эквивалентна задаче (3.66) в смысле теоремы 3.6. Из теоремы 3.6 следует, что оптимальное доверительное множество S_α имеет вид

$$S_\alpha = \{x \mid \Phi(u_\alpha, x) \leqslant \varphi_\alpha(u_\alpha)\}.$$

Поскольку функция потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ выпукла по $x \in \mathbb{R}^m$ для каждого фиксированного $u \in U$, множество S_α выпукло и замкнуто. Поэтому семейство $\mathcal{F}_\alpha$ доверительных множеств в задаче (3.66) можно заменить на семейство $\overline{\mathcal{F}}_\alpha$ выпуклых замкнутых доверительных множеств. Рассмотрим доверительное множество B_α в форме шара

$$B_\alpha \triangleq \{x \colon \|x\| \leqslant r_\alpha\}, \quad \mathbf{P}(B_\alpha) = \alpha.$$

Радиус r_α доверительного множества B_α определяется однозначно из уравнения $\mathbf{P}(B_\alpha) = \alpha$, которое может быть преобразовано согласно [153] в

$$1 - e^{-\frac{r_\alpha^2}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(r_\alpha^2/2)^i}{i!} = \alpha, \quad n \text{ — чётное},$$

$$2F_0(r) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_\alpha^2}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{r^{2i-1}}{(2i-1)!!} = \alpha, \quad n \text{ — нечётное},$$

где F_0 — функция Лапласа,

$$F_0(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\tilde{r}} e^{-\frac{\bar{r}^2}{2}} d\bar{r}.$$

Для доверительного шара B_α, согласно (3.66), имеем следующую оценку сверху функции квантили:

$$\varphi_\alpha(u) \leqslant \Psi(B_\alpha, u) \triangleq \sup_{x \in B_\alpha} \Phi(u, x)$$

для всех $u \in U$.

Рассмотрим теперь ядро K_α вероятностной меры $\mathbf{P}$, т. е. наибольшее множество, содержащееся в любом выпуклом замкнутом доверительном множестве $S \in \overline{\mathcal{F}}_\alpha$. Согласно [153], ядро в данном случае имеет вид

$$K_\alpha = \{x \colon \|x\| \leqslant \rho_\alpha\},$$

где ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения $\mathcal{N}(0, 1)$. Поскольку ядро K_α является подмножеством оптимального доверительного множества S_α, получаем следующую оценку снизу для функции квантили:

$$\Psi(K_\alpha, u) = \sup_{x \in K_\alpha} \Phi(u, x) \leqslant \varphi_\alpha(u)$$

для всех $u \in U$.

Поскольку функция потерь $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ выпукла по $u \in U$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$, то функции максимума $u \mapsto \Psi(B_\alpha, u)$ и $u \mapsto \Psi(K_\alpha, u)$ являются выпуклыми по $u \in U$. Сформулируем минимаксные задачи

$$u^{r_\alpha} \triangleq \arg\min_{u \in U} \Psi(B_\alpha, u),$$
$$u^{\rho} \triangleq \arg\min_{u \in U} \Psi(K_\alpha, u).$$

Известно [153], что

$$r_\alpha - \rho_\alpha \to 0 \text{ при } \alpha \to 1.$$

Поэтому, если α близко к 1, то можно получить близкие верхнюю и нижнюю оценки оптимального решения

$$\Psi(K_\alpha, u^\rho) \leqslant \varphi_\alpha(u_\alpha) \leqslant \Psi(B_\alpha, u^{r_\alpha}).$$

Замечание 3.6. Отметим, что нахождение значений $\Psi(B_\alpha, u)$, $\Psi(K_\alpha, u)$ представляется довольно сложной задачей. Для её решения используем схему дискретизации вероятностной меры $\mathbf{P}$.

3.4.3. Дискретизация вероятностной меры

Для решения поставленной задачи дискретизируем вероятностную меру $\mathbf{P}$ следующим образом. Сгенерируем n точек x_k, $k = \overline{1,n}$, в соответствии с плотностью нормального распределения $\mathcal{N}(0, I_m)$. Положим, что дискретный случайный вектор $\bar{X}$ имеет распределение

$$\overline{\mathbf{P}}\{\bar{X} = x_k\} = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1,n},$$

где через $\overline{\mathbf{P}}$ обозначена соответствующая вероятностная мера.

Применим доверительный метод для решения задачи (3.65) с дискретным распределением, т. е. будем решать задачу (3.66) для дискретного распределения

$$(\bar{S}_\alpha, \bar{u}_\alpha) \triangleq \arg\min_{\substack{S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha, \\ u \in U}} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \right\}, \tag{3.67}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha = \left\{ S \subset \{x_1, \ldots, x_n\} \mid \overline{\mathbf{P}}(S) \geqslant \alpha \right\}.$$

Для каждого фиксированного множества $S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ будет получаться задача выпуклого программирования

$$\bar{u}_S \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \right\}. \tag{3.68}$$

Значение функции максимума

$$\Psi(S,u)=\sup_{x\in S}\Phi(u,x) \tag{3.69}$$

можно легко найти перебором всех точек $x_k \in S$. В дальнейшем необходимо организовать перебор множеств $S\in\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$, чтобы решить задачу (3.67).

Отметим связь задач (3.67) и (3.66).

Теорема 3.7. *Если множество U непусто и компактно, $\varphi_\alpha(u_\alpha)>0$ и все функции φ_{il}, $i=\overline{1,I}$, $l=\overline{1,L}$, не являются постоянными, то*

$$\min_{S\in\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha}\Psi(S,\bar{u}_S)\to\varphi_\alpha(u_\alpha)\ \text{при}\ n\to\infty$$

при почти всех реализациях последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство теоремы 3.7. Как следует из теоремы 2.17, для обеспечения указанной сходимости достаточно выполнения трёх условий: непустота и компактность множества U, полунепрерывность по u и измеримость по x функции $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ и чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала пара $(\tilde{u},\tilde{\varphi})$ такая, что $|\varphi_\alpha(u_\alpha)-\tilde{\varphi}|\leqslant\varepsilon$ и $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u})>\alpha$. Первое условие явно содержится в формулировке доказываемой теоремы, второе условие следует из определения функции $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$. Из предположения $\varphi_\alpha(u_\alpha)>0$ следует, что хотя бы для одной пары индексов (i,j) выполнено $g_{ij}(u_\alpha)>0$. Так как функции $\varphi_{il}(\cdot)$ не являются постоянными, в силу выпуклости, они непрерывны и неограничены сверху. Поэтому функция $\varphi\mapsto P_\varphi(u_\alpha)$ является строго монотонно возрастающей при $\varphi\geqslant\varphi_\alpha(u_\alpha)$, что гарантирует выполнение третьего условия. $\square$

3.4.4. Процедура решения задачи

Поиск множества $\bar{S}_\alpha$ будем осуществлять в два этапа. На первом этапа будем использовать доверительное множество, состоящее из точек, расположенных внутри доверительного шара. На втором этапе будем использовать метод поиска с чередующимися окрестностями [171], с помощью которого будем включить и исключать точки доверительного множества, сохраняя его вероятностную меру.

I этап. Вначале построим два множества $\bar{B}_{r_\alpha}$ и $\bar{B}_\rho$. Множество $\bar{B}_{r_\alpha}$ пусть состоит из точек x_k, попавших в шар B_α, таких, что $\overline{\mathbf{P}}(\bar{B}_{r_\alpha})\geqslant\alpha$. При необходимости множество $\bar{B}_{r_\alpha}$ следует расширить, чтобы было выполнено указанное неравенство. Множество $\bar{B}_\rho$ пусть состоит из точек x_k, попавших в ядро K_α. Решим задачу (3.68) для этих двух множеств. В результате решения этих задач найдём $\bar{u}^{r_\alpha} \triangleq \bar{u}_{\bar{B}_{r_\alpha}}$ и $\bar{u}^{\rho} \triangleq \bar{u}_{\bar{B}_{\rho}}$. Вычислим вероятностные меры

$$\bar{P}_{r_\alpha} \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{r_\alpha}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha})\right\},$$
$$\bar{P}_{\rho} \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{\rho}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{\rho}, \bar{u}^{\rho})\right\}.$$

Поскольку для точек x_k из множеств $\bar{B}_{r_\alpha}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\bar{u}^{r_\alpha}, x_k) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha}) \text{ для всех } x_k \in \bar{B}_{r_\alpha},$$

получаем оценку

$$\bar{P}_{r_\alpha} \geqslant \alpha.$$

Поскольку вероятностная мера ядра не превосходит α, то при достаточно большом количестве точек

$$\bar{P}_{\rho} \leqslant \alpha.$$

Рассмотрим шар радиуса $R \in (\rho_\alpha, r_\alpha)$. Для него найдём по вышеописанной схеме значение функции $\Psi(\bar{B}_R, u^R)$. Если при этом

$$\bar{P}_{R} \triangleq \overline{\mathbf{P}}\left\{\Phi(\bar{u}^{r_\alpha}, \bar{X}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha})\right\} \geqslant \alpha,$$

то будут выполняться неравенства

$$\Psi(\bar{B}_{\rho}, \bar{u}^{\rho}) \leqslant \bar{\varphi}_\alpha(\bar{u}_\alpha) \leqslant \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R) \leqslant \Psi(\bar{B}_{r_\alpha}, \bar{u}^{r_\alpha}),$$

где через $\bar{\varphi}_\alpha$ обозначена функция квантили для дискретизированной меры.

Выберем минимальный радиус R шара $\bar{B}_R$ из отрезка $[\rho_\alpha, r_\alpha]$ такой, что $\bar{P}_R \geqslant \alpha$, например, методом дихотомии. Подчеркнём, что если $R_1 < R_2$, то

$$\Psi(\bar{B}_{R_1}, \bar{u}^{R_1}) \leqslant \Psi(\bar{B}_{R_2}, \bar{u}^{R_2}),$$

так как $B_{R_1} \subset B_{R_2}$. При вычислении вероятностной меры $\overline{P}_{R_2}$ для каждого нового радиуса R_2 следует рассматривать только те точки, которые не попали в B_{R_1}, если $R_1 < R_2$, считая, что мера $\overline{\mathbf{P}}(B_{R_1})$ известна, так как она найдена ранее.

II этап. Продолжим варьирование доверительного множества $S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$, используя поиск с чередующимися окрестностями. С этой целью рассмотрим множество

$$S_R \triangleq \left\{x_k \mid \Phi(\bar{u}^R, x_k) \leqslant \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R),\ k = \overline{1, n}\right\}. \tag{3.70}$$

Исключим из него s случайных точек x_k, в которых $\Phi(\bar{u}^R, x_k) - \Psi(\bar{B}_R, \bar{u}^R) > -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Добавим ко множеству S_R s ближайших точек, лежащих вне S_R. В результате получим новое доверительное множество $S^{(1)}$. Решим для него минимаксную задачу (3.68). Получим новую стратегию $\bar{u}^{(1)}$. Если для неё значение целевой функции меньше, чем для первоначальной стратегии u^R, то построим новое доверительное множество

$$S^{(2)} = \left\{ x_k \mid \Phi(\bar{u}^{(1)}, x_k) \leqslant \Psi(S^{(1)}, \bar{u}^{(1)}),\ k = \overline{1, n} \right\}. \tag{3.71}$$

В противном случае увеличим значение ε и попробуем снова построить множество $S^{(1)}$. Применяя ко множеству $S^{(2)}$ ту же процедуру, что и к множеству S_R, найдём множество $S^{(3)}$ и снова решим минимаксную задачу (3.68) и т. д. Перед каждой итерацией первоначальное значение ε восстанавливается. Процедура останавливается, когда увеличение значения ε перестаёт приносить результаты.

Замечание 3.7. Если функции φ_i, g_i, $i = \overline{1, I}$ являются скалярными, то легко получить явное выражение для значения функции максимума (3.69):

$$\Psi(S, u) = \max_{i=\overline{1,I}} \varphi_i^S g_i(u), \tag{3.72}$$

где

$$\varphi_i^S \triangleq \sup_{x \in S} \varphi_i(x).$$

Таким образом, значения φ_i^S можно найти для каждого $S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ независимо от значения стратегии $u \in U$. Поэтому процедура вариации доверительного множества, описанная выше, значительно упрощается, так как образ множества S при преобразовании $x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_I(x))^\top$ будет ограничен гиперплоскостями, параллельно сдвигающимися при изменении множества S.

3.5. Алгоритм решения одноэтапной задачи, основанный на поиске с чередующимися окрестностями

В данном разделе метод, предложенный в предыдущем разделе, адаптируется для одноэтапной задачи стохастического программирования с полиэдральной функцией потерь. Данная задача изучалась в работах автора [36, 74], где были предложены методы поиска верхних оценок оптимального решения для непрерывных и дискретных распределений случайных факторов. В данном разделе для решения задачи применяется метод выборочных аппроксимаций. Специфика рассматриваемой задачи позволяет получаемую выборочную аппроксимацию свести к задаче комбинаторной оптимизации, для которой разрабатывается алгоритм решения, основанный на поиске с чередующимися окрестностями.

3.5.1. Постановка задачи

Пусть функция потерь имеет полиэдральную структуру:

$$\Phi(u,x) \triangleq \max_{i=\overline{1,l_1}} \{A_{1i}^\top u + B_{1i}^\top x + b_{1i}\}. \tag{3.73}$$

Вероятностные ограничения описываются функцией

$$Q(u,x) \triangleq \max_{j=\overline{1,l_2}} \{A_{2j}^\top u + B_{2j}^\top x + b_{2j}\},$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ — стратегия оптимизации, x — реализация случайного вектора X. $A_{1i}^\top$, $B_{1i}^\top$, $A_{2j}^\top$, $B_{2j}^\top$ — строки матриц $A_1 \in \mathbb{R}^{l_1\times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{l_1\times m}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l_2\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l_2\times m}$ соответственно; b_{1i}, $i=\overline{1,l_1}$, b_{2j}, $j=\overline{1,l_2}$ — координаты векторов $b_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$ соответственно. Как и ранее, предполагается, что случайный вектор X определён на полном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем считать, что случайный вектор X имеет строго положительную плотность распределения вероятностей $f(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$. Кроме того, предполагается, что матрицы B_1 и B_2 не содержат нулевых строк.

Функция вероятности определена соотношением

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi, \quad Q(u,X) \leqslant 0\},$$

а функции квантили —

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{3.74}$$

где $\alpha \in (0, P^*)$,

$$P^* \triangleq \sup_{u\in U} \mathbf{P}\{Q(u,X) \leqslant 0\}.$$

Будем считать, что множество допустимых стратегий

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^r \mid A_3 u \leqslant b_3\} \tag{3.75}$$

компактно и непусто, где $b_3 \in \mathbb{R}^{l_3}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{l_3\times r}$.

Задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием формулируется следующим образом:

$$\varphi_\alpha^* \triangleq \min_{u\in U} \varphi_\alpha(u), \tag{3.76}$$

$$V_\alpha^* \triangleq \mathrm{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha(u).$$

3.5.2. Выборочная аппроксимация задачи

Пусть дана выборка $\{X_k\}_{k=1}^n$. Распределения случайных векторов X_k совпадают с распределением случайного вектора X. Будем считать, что выборка определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$.

Оценим функцию вероятности через частоту события $\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi,\ Q(u,X) \leqslant 0\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{(-\infty,0]}(\max\{\Phi(u,X_k)-\varphi, Q(u,X_k)\}),$$

где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Функцию квантили можно оценить с помощью оценки функции вероятности:

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Таким образом, выборочная аппроксимация задачи (3.76) имеет вид

$$\varphi_n \triangleq \min_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.77}$$

$$V_\alpha^{(n)} \triangleq \mathrm{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сходимость построенных выборочных аппроксимаций следует из теоремы 2.17. Проверим её условия. Условие (i) выполнено в силу постановки задачи. Условие (ii) выполнено, потому что функции Φ и Q непрерывны. Условие (iii) выполнено, так как случайный вектор X имеет строго положительную плотность распределения вероятностей, а матрицы B_1 и B_2 не имеют нулевых строк. Отметим, что класс распределений, удовлетворяющих условию (iii) значительно шире рассматриваемого, но описать его достаточно сложно.

Зафиксируем реализацию $\{x_k\}_{k=1}^n$ выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$. Тогда задача (3.77) может рассматриваться как задача стохастического программирования с квантильным критерием при дискретном распределении случайных параметров:

$$\varphi_n = \min_{u\in U}\min_{\varphi\in\mathbb{R}}\{\varphi \mid \overline{\mathbf{P}}\{\Phi(u,\xi^n) \leqslant \varphi, Q(u,\xi^n) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\}, \tag{3.78}$$

$$V_\alpha^{(n)} = \mathrm{Arg}\min_{u\in U}\min_{\varphi\in\mathbb{R}}\{\varphi \mid \overline{\mathbf{P}}\{\Phi(u,\xi^n) \leqslant \varphi, Q(u,\xi^n) \leqslant 0\} \geqslant \alpha\},$$

где дискретный случайный вектор обозначен через ξ^n, а вероятностная мера, порождённая его распределением, обозначена через $\overline{\mathbf{P}}$ Распределение случайного вектора ξ^n сосредоточено на множестве $\mathcal{X}_0 \triangleq \{x_k \mid k = \overline{1,n}\}$. Для простоты предположим, что $x^{k_1} \neq x^{k_2}$ при $k_1 \neq k_2$. Тогда $\overline{\mathbf{P}}\{\xi^n = x_k\} = 1/n$, $k = \overline{1,n}$. Заметим, что $X_{k_1} \neq X_{k_2}$ ($\mathbf{P}'$-п.н.) при $k_1 \neq k_2$, потому что случайный вектор X является непрерывным. В общем случае $\mathcal{X}_0$ можно считать мультимножеством, т. е. множеством, некоторые элементы которого представлены несколькими экземплярами.

3.5.3. Построение эквивалентной задачи комбинаторной оптимизации

Согласно доверительному методу, задача стохастического программирования (3.78) эквивалентна задаче

$$\begin{gathered}
\varphi_n = \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \mid \sup_{x \in S} Q(u,x) \leqslant 0 \right\}, \\
(u_n, S_n) \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \mid \sup_{x \in S} Q(u,x) \leqslant 0 \right\},
\end{gathered} \tag{3.79}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ таких, что $\overline{\mathbf{P}}(S) \geqslant \alpha$.

Задача (3.79) может быть переписана в форме

$$\varphi_n = \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R}, S \in \mathcal{F}_\alpha} \varphi \tag{3.80}$$

при ограничениях

$$\begin{cases}
A_{1i}^\top u + \sup\limits_{x \in S} B_{1i}^\top x + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1, l_1}, \\
A_{2j}^\top u + \sup\limits_{x \in S} B_{2j}^\top x + b_{2j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, l_2}.
\end{cases}$$

Докажем лемму о структуре оптимального доверительного множества S_n.

Лемма 3.2. *Пусть $P^* > 0$, множество U компактно и непусто. Тогда существует оптимальное доверительное множество вида*

$$S_n = \{x \in \mathcal{X}_0 \mid B_{1i}^\top x \leqslant h_i,\ i = \overline{1, l_1};\ B_{2j}^\top x \leqslant h_{l_1+j},\ j = \overline{1, l_2}\}, \tag{3.81}$$

где

$$h_i \in H_i \triangleq \{B_{1i}^\top x_k \mid k = \overline{1,n}\},\ i = \overline{1, l_1}, \tag{3.82}$$

$$h_{l_1+j} \in H_{l_1+j} \triangleq \{B_{2j}^\top x_k \mid k = \overline{1,n}\},\ j = \overline{1, l_2}. \tag{3.83}$$

Более того, все подмножества S_n мощности не менее $\lceil \alpha n \rceil$ являются оптимальными доверительными множествами.

Доказательство леммы 3.2. Условия леммы обеспечивают существование оптимального решения задачи (3.77), что доказано в работе [74]. Оптимальное доверительное множество S_n можно записать в виде

$$S_n = \{x \in \mathcal{X}_0 \mid B_{1i}^\top x \leq \varphi_n - A_{1i}^\top u_n - b_{1i},\ i = \overline{1, l_1};\ B_{2j}^\top x \leqslant -A_{2j}^\top u_n - b_{2j},\ j = \overline{1, l_2}\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{X}_0 \mid B_{1i}^\top x \leqslant \bar{h}_i,\ i = \overline{1, l_1},\ B_{2j}^\top x \leqslant \bar{h}_{l_1+j},\ j = \overline{1, l_2}\},$$

где u_n — некоторая оптимальная стратегия в аппроксимирующей задаче, φ_n — соответствующее значение критериальной функции,

$$\bar{h}_i = \max_{x \in S_n} \left\{B_{1i}^\top x\right\} \in H_i, \quad i = \overline{1, l_1}$$
$$\bar{h}_{l_1+j} = \max_{x \in S_n} \left\{B_{2j}^\top x\right\} \in H_{l_1+j}, \quad j = \overline{1, l_2}.$$

Докажем второе утверждение леммы. Рассмотрим подмножество $\tilde{S}_n$ оптимального доверительного множества S_n такое, что мощность $\tilde{S}_n$ не меньше чем $\lceil \alpha n \rceil$ и значение критериальной функции равно $\tilde{\varphi}_n$. Поскольку вероятности реализаций x_k, $k = \overline{1, n}$, равны $1/n$, неравенство $\overline{\mathbf{P}}\{\tilde{S}_n\} \geqslant \alpha$ выполнено, т. е. множество S_n является доверительным. Из постановки задачи (3.80) следует, что $\tilde{\varphi}_n \leqslant \varphi_n$. Однако, $\tilde{\varphi}_n$ не может быть меньше φ_n, потому что S_n — оптимальное доверительное множество. Таким образом, $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n$, и $\tilde{S}_n$ — оптимальное доверительное множество. □

Из леммы 3.2 следует, что оптимальное доверительное множество S_n не является единственным, если оно содержит более чем $\lceil \alpha n \rceil$ элементов.

Заметим, что вектор

$$h \triangleq (h_1, \ldots, h_l)^\top \in H \triangleq H_1 \times \ldots \times H_l,$$

в котором $l \triangleq l_1 + l_2$, определяет доверительное множество

$$S(h) \triangleq \{x \in \mathcal{X}_0 \mid Bx \leqslant h\}, \tag{3.84}$$

где $B \triangleq \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$.

По лемме 3.2 задача (3.80) эквивалентна задаче оптимизации

$$\varphi_n = \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R},\, h \in H} \varphi \tag{3.85}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A_{1i}^\top u + h_i + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1, l_1}, \\ A_{2j}^\top u + h_{l_1+j} + b_{2j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, l_2}, \\ |S(h)| \geqslant \lceil \alpha n \rceil. \end{cases}$$

Чтобы описать доверительное множество вида (3.81), введём целочисленный вектор $z = (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{Z}_+^l$, где $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, такой, что

$$\|z\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{l} z_i = \lfloor (1-\alpha) n \rfloor.$$

Значение z_1 показывается число исключённых точек из множества $\mathcal{X}_0$, соответствующих первому ограничению (задаваемому строкой $B_1^\top$). Множество, получаемое из $\mathcal{X}_0$ исключением данных точек, обозначим через $\mathcal{X}^1$. Значение z_2 показывает количество исключаемых точек из множества $\mathcal{X}^1$, соответствующих второму ограничению (задаваемому строкой $B_2^\top$). Ранее исключенные точки повторно не учитываются. Остальные значения z_i определяются аналогично.

Дадим формальное определение вектора z. Каждому ограничению в (3.84) сопоставим линейный порядок $\leq_i$ на множестве $\mathcal{X}_0$ по правилу

$$x_{k_1} \leq_i x_{k_2}, \text{ если } B_i^\top x_{k_1} < B_i^\top x_{k_2} \text{ или } (B_i^\top x_{k_1} = B_i^\top x_{k_2} \text{ и } k_1 \leqslant k_2),$$

где $B_i^\top$ — i-я строка матрицы B.

Отсортируем элементы множество $\mathcal{X}_0$ согласно линейному порядку $\leq_1$:

$$x_{(1)}^1 \leq_1 x_{(2)}^1 \leq_1 \cdots \leq_1 x_{(n)}^1.$$

Через $x_{(k)}^i$ обозначен k-й элемент множества $\mathcal{X}_0$ согласно линейному порядку $\leq_i$. Определим множество $\mathcal{X}^1$: $\mathcal{X}^1 \triangleq \mathcal{X}_0 \setminus \{x_{(n-z_1+1)}^1, \ldots, x_{(n)}^1\}$, если $z_1 \geqslant 1$, и $\mathcal{X}^1 \triangleq \mathcal{X}_0$, если $z_1 = 0$. Затем отсортируем элементы множества $\mathcal{X}^1$ согласно линейному порядку $\leq_2$:

$$x_{(1)}^2 \leq_2 x_{(2)}^2 \leq_2 \cdots \leq_2 x_{(n-z_1)}^2.$$

Продолжая эту процедуру, получаем множества

$$\mathcal{X}^{i+1} \triangleq \begin{cases} \mathcal{X}^i \setminus \left\{ x^i_{\left(n - \sum\limits_{j=1}^{i+1} z_j + 1\right)}, \ldots, x^i_{\left(n - \sum\limits_{j=1}^{i} z_j\right)} \right\}, & \text{если } z_i \geqslant 1, \\ \mathcal{X}^i, & \text{если } z_i = 0, \end{cases}$$

$i = \overline{1, l-1}$. Обозначим множество $\mathcal{X}^l$ через $\mathcal{X}(z)$. Пусть

$$h_i(z) \triangleq \max_{x \in \mathcal{X}(z)} B_i^\top x, \quad i = \overline{1, l}.$$

Теперь задача (3.85) может быть записана в виде

$$\varphi_n = \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R},\, z \in \mathbb{Z}_+^l} \varphi \tag{3.86}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A_{1i}^\top u + h_i(z) + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1, l_1}, \\ A_{2j}^\top u + h_{l_1+j}(z) + b_{2j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, l_2}, \\ \|z\|_1 \leqslant \lfloor (1-\alpha)n \rfloor. \end{cases}$$

Докажем, что задача (3.85) эквивалентна задаче (3.86),

Лемма 3.3. *Существует вектор $z \in \mathbb{Z}_+^l$ такой, что $\mathcal{X}(z)$ является оптимальным доверительным множеством и $\|z\|_1 = \lfloor (1-\alpha)n \rfloor$.*

Доказательство леммы 3.3. Для доказательства построим вектор z такой, что утверждение леммы выполнено. Рассмотрим оптимальное доверительное множество S_n вида (3.81). Пусть

$$\mathcal{X}_1 \triangleq \left\{ x \in \mathcal{X}_0 \mid B_1^\top x > \max_{x \in S_n} B_1^\top x \right\},$$

$$z_1 \triangleq |\mathcal{X}_1|,$$

$$\mathcal{X}_i \triangleq \left\{ x \in \mathcal{X}_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{X}_j \mid B_i^\top x > \max_{x \in S_n} B_i^\top x \right\}, \quad i = \overline{2, l},$$

$$z_i \triangleq |\mathcal{X}_i|, \quad i = \overline{2, l-1},$$

$$z_l \triangleq \lfloor (1-\alpha)n \rfloor - \sum_{i=1}^{l-1} z_i.$$

По построению и в силу неравенства $|S_n| \geqslant \alpha n$, заключаем, что $z_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, l}$, и $\|z\|_1 = \lfloor (1-\alpha)n \rfloor$. Поскольку

$$h_i(z) \leqslant \max_{x \in S_n} B_i^\top (x),$$

множество $\mathcal{X}(z)$ является подмножеством S_n, и его мощность равна $\lceil \alpha n \rceil$. Поэтому из леммы 3.2 следует, что множество $\mathcal{X}(z)$ является оптимальным доверительным множеством. $\square$

Из леммы 3.3 следует, что задача (3.86) может быть заменена эквивалентной задачей

$$\varphi_n = \min_{u\in U,\, \varphi\in\mathbb{R},\, z\in\mathbb{Z}_+^l} \varphi \tag{3.87}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A_{1i}^\top u + h_i(z) + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1, l_1}, \\ A_{2j}^\top u + h_{l_1+j}(z) + b_{2j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, l_2}, \\ \|z\|_1 = \lfloor (1-\alpha)n \rfloor. \end{cases}$$

Если зафиксировать переменные z, то задача (3.87) становится задачей линейного программирования и может быть решена соответствующими методами. Обозначим значение критериальной функции (3.87) при фиксированном значении z через

$$\varphi(z) \triangleq \min_{u\in U,\, \varphi\in\mathbb{R}} \left\{ \varphi \mid A_{1i}^\top u + h_i(z) + b_{1i} \leqslant \varphi,\ i = \overline{1, l_1},\ A_{2j}^\top u + h_{l_1+j}(z) + b_{2j} \leqslant 0,\ j = \overline{1, l_2} \right\}.$$

3.5.4. Алгоритм

Для поиска доверительного множества, обеспечивающее значение критериальной функции, близкое к оптимальному, построим алгоритм решения задачи (3.86), основанный на поиске с чередующимися окрестностями [171].

3.5.4.1. Поиск начального решения

Для применения метода поиска с чередующимися окрестностями, полезно получить хорошее начальное приближение оптимального решения. Известно [153, теорема 3.13], что верхняя граница, соответствующая доверительному шару $S_{\tilde r} \triangleq \{x \mid \|x\|_2 \leqslant \tilde r\}$, имеющему вероятностную меру α, стремится к оптимальному значению критериальной функции исходной задачи при $\alpha \to 1$ для стандартного нормального распределения вектора случайных параметров и квазивыпуклой функции потерь. Кроме того, нижняя граница значения критериальной функции в этом случае может быть получена с помощью α-ядра вероятностной меры [153]. Доказано, что α-ядро стандартного нормального распределения имеет вид

$$K_\alpha = \{x \mid \|x\|_2 \leqslant \rho_\alpha\}, \tag{3.88}$$

где ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения, $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма. Решение задачи (3.80) при $S = K_\alpha$ обеспечивает нижнюю границу оптимального значения критериальной функции исходной задачи (3.76).

Решение, соответствующее доверительному шару, может быть улучшено с помощью алгоритма, предложенного в [74]. Поскольку решается аппроксимирующая задачи, представим данный алгоритм для дискретного распределения случайного вектора.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(\tilde{r}) = \min_{u \in U,\, \varphi \in \mathbb{R}} \varphi \tag{3.89}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} A_{1i}^\top u + \|B_{1i}\|_2 \tilde{r} + b_{1i} \leqslant \varphi, \quad i = \overline{1, l_1}, \\ A_{2j}^\top u + \|B_{2i}\|_2 \tilde{r} + b_{2j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, l_2}. \end{cases}$$

Обозначим оптимальное значение переменной u в задаче (3.89) через $u(\tilde{r})$. Задача (3.89) получается из задачи (3.80), когда множество S является шаром радиуса $\tilde{r}$.

Определим доверительное множество

$$C(\tilde{r}) \triangleq \left\{x \in \mathcal{X}_0 \mid B_{1i}^\top x \leqslant \varphi(\tilde{r}) - A_{1i} u(\tilde{r}),\ i = \overline{1, l_1}, \quad B_{2i}^\top x \leqslant \varphi - A_{2j} u(\tilde{r}),\ j = \overline{1, l_2}\right\}$$

Приведём алгоритм [74] для поиска доверительного множества вида $C(\tilde{r})$.

Алгоритм 3.2.

0. Присвоить $\tilde{r} := 0$. Выбрать значение параметра $\Delta\tilde{r} \in (0, +\infty)$.

1. Найти $\varphi(\tilde{r})$ и $u(\tilde{r})$ как решение задачи (3.89). Если $\mathbf{P}(C(\tilde{r})) \geqslant \alpha$, то доверительное множество $C(\tilde{r})$ найдено.

2. Установить $\tilde{r} := \tilde{r} + \Delta\tilde{r}$. Перейти к шагу 1.

Зная доверительное множество $C(\tilde{r})$, можно определить соответствующие значения переменных z. Можно использовать полученные значения z в качестве начального приближения для алгоритма, представленного ниже.

Как было отмечено выше, приведённый алгоритм даёт хорошее начальное приближение для стандартного нормального распределения и значений α, близких к 1. В случае произвольного нормального распределения, можно изменить векторы и матрицы B_1, B_2, b_1, b_2, чтобы центрировать и нормировать случайный вектор. Также можно рассчитывать на то, что алгоритм 3.2 даёт хорошие начальные решения для других симметричных распределений. Однако, оценить качество этих решений проблематично. В общем случае для применения этого алгоритма рекомендуется центрировать и нормировать вектор случайных параметров.

3.5.4.2. Поиск с чередующимися окрестностями

Изложим суть поиска с чередующимися окрестностями на примере рассматриваемой задачи. Для данного начального решения z^0 выбирается решение z' из его окрестности. Затем предпринимается попытка улучшить решение z' с помощью локального поиска. Если локальный поиск позволяет найти более хорошее решение z'', то процедура, описанная выше, повторяется для z'' как для начального решения. В противном случае выбирается другое решение z' из более широкой окрестности z^0. Окрестность расширяется, пока не будет найдено более хорошее решение z'' или не будет выполнен критерий остановки. Затем описанная процедура повторяется для $z^0 = z''$. Численные эксперименты показали, что для изучаемой задачи целесообразно использовать различные структуры окрестностей для локального поиска и для поиска нового решения.

Сначала определим структуру окрестностей z^0 для поиска новых решений:

$$O_\nu(z^0) \triangleq \{z \in \mathbb{Z}_+^l \mid \|z\|_1 = \lfloor (1-\alpha)n \rfloor,\ \|z - z^0\|_1 \leqslant 2 + (\nu - 1)\Delta\},$$

где Δ — положительный параметр, $\nu \in \{1, 2, \ldots, \nu_{\max}\}$.

Определим окрестность, используемую для локального поиска. Использование окрестностей вида $O_1(\cdot)$ нецелесообразно, потому что возможна ситуация, когда $z \in O_1(z^0)$ и $\mathcal{X}(z) = \mathcal{X}(z^0)$. Поэтому построим более широкую окрестность $\tilde{O}_1(\cdot)$. Все точки, принадлежащие окрестности $O_1(z^0)$, включаются в окрестность $\tilde{O}_1(z^0)$. Если $\mathcal{X}(z) = \mathcal{X}(z^0)$ при $z = z^0 + \delta$, где $\delta_{i_1} = 1$, $\delta_{i_2} = -1$, и $\delta_i = 0$ при $i \neq i_1$ и $i \neq i_2$, то находим $z^1 = z^0 + j\delta$, $j \in \mathbb{N}$ с минимальным значением j таким, что $z^1 \in \mathbb{Z}_+^l$ и $\mathcal{X}(z^1) \neq \mathcal{X}(z^0)$. Если такое значение z^1 существует, то решение z^1 включается в окрестность $\tilde{O}_1(\cdot)$.

Перейдём к описанию алгоритма решения (3.87), основанному на поиске с чередующимися окрестностями.

Алгоритм 3.3.

1. Выбрать начальное решение z, например, с помощью процедуры, описанной выше, установить $\nu := 1$.

2. Пока не выполнено условие $\nu = \nu_{\max}$, повторить шаги:

а) выбрать случайное решение $z' \in O_\nu(z)$;

б) найти точку локального минимума z'' (по отношению к окрестностям $\tilde{O}_1(\cdot)$), применяя процедуру локального поиска с начальным решением z';

в) если $\varphi(z'') < \varphi(z)$, то установить $z := z''$ и $\nu := 1$, иначе $\nu := \nu + 1$.

Значение z, получаемое с помощью приведённого алгоритма задаёт доверительное множество $\mathcal{X}(z)$. Кроме того, оптимальное значение u в задаче (3.87) является допустимым решением задачи (3.77), и φ — хорошее (но не обязательно оптимальное) значение критериальной функции. Из теоремы 2.17 следует, что решение u обеспечивает близкое к оптимальному значение критериальной функции в исходной задаче (3.76) при достаточно больших значениях n.

Для поиска решения задачи (3.76) предложим нижеприведённый алгоритм. Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в увеличении объёма выборки до тех пор, пока не стабилизируется значение критериальной функции.

Алгоритм 3.4.

0. Выбрать начальное значение $n \in \mathbb{N}$ и шаг $\Delta_n \in \mathbb{N}$. Сгенерировать реализации $x_1, \ldots, x_n$ случайного вектора X.

1. Найти начальное решение z^n с помощью алгоритма 3.2.

2. Решить задачу (3.87), используя алгоритм 3.3 с начальным решением z^n. Пусть u^n — лучшее найденное значение переменной u в этой задаче.

3. Оценить значение $\varphi_\alpha(u^n)$ функции квантили (3.74) по выборке объёма $N \gg n$.

4. Если выполнено критерий окончания, то взять u^n в качестве приближённого решения задачи (3.76).

5. Сгенерировать реализации $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\Delta_n}$ случайного вектора X. Присвоить $n := n + \Delta_n$.

6. Найти значение переменной z, соответствующее решению $u^{n-\Delta_n}$. Установить $z^n := z$. Перейти к шагу 2.

В приведённом алгоритме могут быть использованы различные критерии окончания, например

$$|\varphi_\alpha(u^n) - \varphi_\alpha(u^{n-\Delta_n})| \leqslant \varepsilon,$$

или $n \geqslant n_{\max}$, где ε, $n_{\max}$ — заданные параметры.

Если выполнены условия теоремы 3.7 и при этом на шаге 2 алгоритма 3.4 задача решается точно, то можно гарантировать сходимость получаемых решений к точному решению исходной задачи. В общем случае, с помощью алгоритма, как ниже будет продемонстрировано на примерах, можно найти приближённое решение задачи (3.76), близкое к точному решению.

3.6. Алгоритм решения двухэтапной задачи, основанный на поиске с чередующимися окрестностями

В данном разделе разрабатывается алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования с билинейной целевой функцией и квантильным критерием. Ранее для решения данной задачи были предложены и исследованы два алгоритма в [151]. Первый алгоритм основан на сведении задачи к задаче смешанного целочисленного программирования. Второй алгоритм использует сведение задачи к последовательности задач выпуклой оптимизации, однако с его помощью может быть найдена только верхняя оценка оптимального решения задачи. К сожалению, предложенные ранее алгоритмы испытывают трудности при решении задач большой размерности, в связи с чем возникает необходимость разработки эффективных процедур решения данной задачи. В данном разделе предлагается алгоритм, основанный на выборочной аппроксимации задачи и применении поиска с чередующимися окрестностями.

3.6.1. Постановка задачи

Рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием, изучаемая в [151].

Пусть случайный вектор X определен на полном вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, Предполагается, что случайный вектор X распределен по стандартному нормальному закону, т. е. $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, где I — единичная ковариационная матрица. Как и ранее, считаем, что $X(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Пусть множество U допустимых стратегий u первого этапа является выпуклым полиэдром, т. е.

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^r \mid A_0 u \leqslant b_0\},$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{l_0 \times r}$ — матрица и $b_0 \in \mathbb{R}^{l_0}$ — вектор. Будем предполагать, что множество U ограничено.

Определим функцию потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$, зависящую от стратегии первого этапа

$u \in U \subset \mathbb{R}^r$ и от реализации x случайного вектора X, так:

$$\Phi(u,x) \triangleq c_0^\top u + x^\top A_1 u + \inf_{y \in Y(u,x)} c_1^\top y, \tag{3.90}$$

где y — стратегия второго этапа, принадлежащая множеству

$$Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^s \mid x^\top A_{2i} u + c_{2i}^\top u + b_i^\top y \geqslant a_{3i}^\top x + d_i,\ i = \overline{1,l},\ y \geqslant 0\}, \tag{3.91}$$

$c_0 \in \mathbb{R}^r$, $c_1 \in \mathbb{R}^s$, $c_{2i} \in \mathbb{R}^r$, $b_i \in \mathbb{R}^s$, $a_{3i} \in \mathbb{R}^m$ — детерминированные векторы, $A_1, A_{2i} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ — матрицы, $d_i \in \mathbb{R}$. Если $Y(u,x) = \varnothing$ для пары $(u,x) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$, то по определению полагаем, что $\Phi(u,x) = +\infty$.

Для фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}$ определим функцию вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ по правилу

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{c_0^\top u + X^\top A_1 u + \overline{\Phi}(u,X) \leqslant \varphi\}, \tag{3.92}$$

где

$$\overline{\Phi}(u,x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y(u,x)} c_1^\top y, & \text{если } Y(u,x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } Y(u,x) = \varnothing. \end{cases} \tag{3.93}$$

Значения функции квантили $\varphi_\alpha \colon U \to (-\infty, +\infty]$ определяются по правилу

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \tag{3.94}$$

где $\alpha \in (0, P^*)$ — фиксированная вероятность,

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{Y(u,X) \neq \varnothing\}.$$

Сформулируем задачу первого этапа в виде

$$\varphi_\alpha \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u),\ V_\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \tag{3.95}$$

Задача (3.95) является двухэтапной задачей стохастического программирования с квантильным критерием.

Будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 3.1. Векторы c_1 и b_i, $i = \overline{1,l}$, являются такими, что множество

$$\Lambda \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^l \mid B^\top \lambda \leqslant c_1,\ v_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l}\} \tag{3.96}$$

компактно, где

$$B \triangleq \begin{pmatrix} b_1^\top \\ \dots \\ b_l^\top \end{pmatrix}.$$

3.6.2. Сведение к одноэтапной задаче

Рассмотрим задачу второго этапа (3.90). Используя обозначение

$$\bar{a}(u,x) \triangleq \begin{pmatrix} a_{31}^\top x - u^\top A_{21}^\top x + d_1 - c_{21}^\top u \\ \dots \\ a_{3l}^\top x - u^\top A_{2l}^\top x + d_l - c_{2l}^\top u \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

множество (3.91) может быть представлено как

$$Y(u,x) \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^l \mid By \geqslant \bar{a}(u,x),\ y \geqslant 0 \right\}.$$

Согласно теории двойственности задач линейного программирования справедливо, что

$$\overline{\Phi}(u,x) = \max \left\{ \bar{a}^\top(u,x)\lambda \mid B^\top \lambda \leqslant c_1,\ \lambda \geqslant 0 \right\}, \tag{3.98}$$

если максимум в (3.98) конечен, где через $\lambda \in \mathbb{R}^l$ обозначена двойственная переменная. Для каждой фиксированной пары $(u,x) \in U \times \mathbb{R}^m$ задача (3.98) является задачей линейного программирования. Заметим, что предположение 3.1 гарантирует конечное значение $\Phi(u,x)$. Кроме того, максимум в (3.98) достигается в некоторой вершине Λ. Таким образом, при выполнении предположения 3.1 значение $\overline{\Phi}(u,x)$ может быть записано в форме

$$\overline{\Phi}(u,x) = \max_{j=\overline{1,J}} \bar{a}^\top(u,x)\lambda^j, \tag{3.99}$$

где λ^j, $j = \overline{1,J}$, — вершины выпуклого ограниченного полиэдра Λ.

Подставляя (3.99) в (3.90), получаем

$$\Phi(u,x) = \max_{j=\overline{1,J}} \Phi_j(u,x),$$

где

$$\Phi_j(u,x) \triangleq c_0^\top u + x^\top A_1 u + \bar{a}^\top(u,x)\lambda^j.$$

Данное представление $\Phi(u,x)$ не содержит в явном виде стратегии второго этапа. Это значит, что задача (3.95) сведена к одноэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием

$$\varphi_\alpha^* = \inf_{u \in U} \min \left\{ \varphi \in \mathbb{R} \mid \mathbf{P}\left\{ \max_{j=\overline{1,J}} \Phi_j(u,x) \leqslant \varphi \right\} \geqslant \alpha \right\}. \tag{3.100}$$

Поскольку функция $(u,x) \mapsto \Phi(u,x)$ измерима по x для всех u и непрерывна по u для всех x, то минимумы в (3.100) и в (3.95) достигаются, если множество U компактно [51]. Отсюда следует, что $V_\alpha \neq \varnothing$.

3.6.3. Выборочная аппроксимация

Пусть дана последовательность $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ независимых стандартных нормальных случайных векторов. Будем считать, что случайная последовательность определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$.

Функция вероятности может быть оценена как частота события $\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u, X_k) - \varphi),$$

где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Используя оценку функции вероятности, так же можно оценить функцию квантили

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Таким образом, выборочная аппроксимация задачи (3.95) записывается в виде

$$\varphi_n \triangleq \inf_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.101}$$

$$V_\alpha^{(n)} \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \varphi_\alpha^{(n)}(u), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сходимость построенных выборочных аппроксимаций следует из теоремы 2.17. Проверим её условия. Условие (i) выполнено в силу постановки задачи. Условие (ii) теоремы 2.17 следует из предположения 3.1. Условие (iii) теоремы 2.17 выполнено, потому что плотность стандартного нормального распределения строго положительна.

Рассмотрим задачу (3.101) для фиксированной реализации $\{x_k\}_{k=1}^n$ выборки $\{X_k\}_{k=1}^n$. В этом случае задача (3.101) может быть рассмотрена как одноэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием и дискретным распределением случайных параметров:

$$\varphi_n = \min_{u\in U} \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \overline{\mathbf{P}}\{\Phi(u, \xi^n) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{3.102}$$

$$U_n = \operatorname{Arg}\min_{u\in U} \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \overline{\mathbf{P}}\{\Phi(u, \xi^n) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\},$$

где дискретный случайный вектор обозначен через ξ^n, а порождённая им дискретная вероятностная мера — через $\overline{\mathbf{P}}$. Распределение случайного вектора ξ^n сосредоточено на множестве $\mathcal{X}_0 \triangleq \{x_k \mid k = \overline{1, n}\}$. Поскольку случайный вектор X распределен непрерывно, то $X_{k_1} \neq X_{k_2}$ ($\mathbf{P}'$-п.н.) для $k_1 \neq k_2$. Поэтому будем считать, что $x_{k_1} \neq x_{k_2}$ для $k_1 \neq k_2$. Тогда $\overline{\mathbf{P}}\{\xi^n = x_k\} = 1/n$, $k = \overline{1, n}$. В (3.102) можно написать min вместо inf, потому что минимум достигается в случае компактного множества U [51].

3.6.4. Применение доверительного метода

Рассмотрим семейство доверительных множеств

$$\mathcal{F}_\alpha \triangleq \left\{S \in 2^{\mathbb{R}^m} \mid \overline{\mathbf{P}}\{\xi^n \in S\} \geqslant \alpha\right\}$$

и функцию максимума $\psi(\cdot)\colon 2^{\mathbb{R}^m} \times U \to (-\infty, +\infty]$, определенную условием

$$\psi(S, u) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(u, x). \tag{3.103}$$

Согласно доверительному методу, задача минимизации функции квантили (3.102) эквивалентна минимаксной задаче

$$\varphi_n = \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u), \tag{3.104}$$

$$(u_n, S_n) \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U,\, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u). \tag{3.105}$$

Введем обозначения

$$\bar{\psi}(S) \triangleq \inf_{u \in U} \psi(S, u),$$

$$u^S \in \operatorname{Arg} \min_{u \in U} \psi(S, u).$$

Поскольку распределение ξ^n дискретно, хотя бы одно оптимальное доверительное множество содержится в семействе всех подмножеств $\mathcal{X}_0$ с мерой меньшей или равной α. Обозначим данное семейство множеств через $\mathcal{X}_\alpha \triangleq \{S \in \mathcal{F}_\alpha \mid S \subset \mathcal{X}_0\}$.

Таким образом, можно сформулировать задачи (3.104), (3.105) в виде

$$\varphi_n = \min_{S \in \mathcal{X}_\alpha} \bar{\psi}(S), \tag{3.106}$$

$$S_n \in \operatorname{Arg} \min_{S \in \mathcal{X}_\alpha} \bar{\psi}(S). \tag{3.107}$$

Легко видеть, что $\bar{\psi}(S)$ и u^S для $S \in \mathcal{X}_\alpha$ могут быть найдены как решение (φ, u) задачи линейного программирования

$$\bar{\psi}(S) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}, u \in U} \{\varphi \mid \Phi_j(u, x) \leqslant \varphi,\ x \in S,\ j = \overline{1, J}\}. \tag{3.108}$$

Поиск точного решения задачи (3.106), (3.107) требует вычисления $\bar{\psi}(S)$ для всех $S \in \mathcal{X}_\alpha$. Однако, учитывая структуру оптимального доверительного множества, количество перебираемых множеств может быть сокращено. Структура оптимального доверительного множества может быть определена с помощью подстановки неизвестного оптимального решения (φ_n, u_n) в ограничения задачи (3.108). Совершив указанную подстановку, можно заключить, что оптимальное доверительное множество имеет форму

$$S_n = \{x \in \mathcal{X}_0 \mid \Phi_j(u_n, x) \leqslant \varphi,\ j = \overline{1, J}\}.$$

Таким образом, оптимальное доверительное множество удовлетворяет условию $\mathrm{Conv}(S_n) \cap \cap \mathcal{X}_0 = S_n$. Это значит, что никакие точки из $\mathcal{X}_0 \setminus S_n$ не принадлежат выпуклой оболочке (Conv) множества S_n. Поэтому можно перебирать только множества, обладающие данном свойством.

Известно, что α-ядро вероятностной меры является подмножеством оптимального доверительного множества для исходной задачи (3.95) [51]. Для стандартного нормального распределения α-ядро может быть определено как

$$K_\alpha \triangleq \{x : \|x\| \leqslant \rho_\alpha\},$$

где ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения и $\|\cdot\|$ — евклидова норма. По этой причине будем рассматривать только доверительные множества, удовлетворяющие условию $K_\alpha \subset S$.

α-ядро также позволяет найти нижнюю оценку оптимального значения критериальной функции исходной задачи (3.95). Доказано в [51], что

$$\bar{\psi}(K_\alpha) \leqslant \varphi^*_\alpha.$$

3.6.5. Алгоритм

Даже принимая во внимание структуру оптимального доверительного множества, поиск точного решения задачи (3.106) требует значительных вычислений. Поэтому для решения задачи могут быть использованы различные метаэвристики. Предлагается использовать модификацию поиска с чередующимися окрестностями [137, 171].

3.6.5.1. Поиск начального решения

Для успешного применения поиска с чередующимися окрестностями полезно иметь хорошее начальное решение. Опишем процедуру, предлагаемую для поиска начального решения.

Известно [51, теорема 3.13], что верхняя оценка $\bar{\psi}(S_R)$, соответствующая доверительному шару $S_R \triangleq \{x \mid \|x\| \leqslant R\}$ с мерой α, стремится к оптимальному значению критериальной функции исходной задачи при $\alpha \to 1$, если функция потерь квазивыпукла по x и распределение случайного вектора является стандартным нормальным.

Предлагается следующий алгоритм поиска начального решения задачи.

Алгоритм 3.5.

1. Найти $\varphi^R \triangleq \bar{\psi}(\bar{S}_R)$ и $u^{\bar{S}_R}$ как решение задачи линейного программирования (3.108), где $\bar{S}_R \triangleq S_R \cap \mathcal{X}_0$.

2.Вычислить $\bar{\varphi} \triangleq \varphi_\alpha^{(n)}(u^{\bar{S}_R})$.

3. Найти начальное доверительное множество S^0 и начальную стратегию u^0, обеспечивающие значение критериальной функции φ^0, как

$$S^0 \triangleq \{x \in \mathcal{X}_0 \mid \Phi(u^{\bar{S}_R}, x) \leqslant \bar{\varphi}\},$$

$$u^0 \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \psi(S^0, u),$$

$$\varphi^0 \triangleq \bar{\psi}(S^0).$$

Несмотря на то что множество S_R обычно обеспечивает хорошую верхнюю оценку φ_n, алгоритм 3.5 позволяет улучшить эту границу, поскольку множество S^0 лучше, чем S_R, и поэтому $\varphi^0 \leqslant \psi(\bar{S}_R)$.

3.6.5.2. Алгоритм

Для применения поиска с чередующимися окрестностями необходимо определить структуру окрестностей. Рассмотрим некоторое доверительное множество $S \subset \mathcal{X}_0$. Определим следующие множества:

$$S^- \triangleq \{x \in S \mid \Phi(u^S, x) = \bar{\psi}(S)\},$$

$$S^+ \triangleq \bigcup_{j \in J} \operatorname{Arg}\min_{x \in \mathcal{X}_0 \setminus S} \left\{ \Phi_j(u^S, x) \mid \max_{j' = \overline{1,n},\, j' \neq j} \Phi_{j'}(u^S, x) \leqslant \bar{\psi}(S) \right\}.$$

Множество S^- состоит из реализаций $x \in S$, максимизирующих $\Phi(u^S, x)$. Чтобы получить новое доверительное множество, исключим из доверительного множества точку, принадлежащую S^-, и включим точку, принадлежащую S^+. Чтобы минимизировать следующее значение $\psi(S)$, в доверительное множество включаются точки, минимизирующие $\Phi_j(u^S, x)$.

Таким образом, будут использоваться следующие окрестности доверительного множества S:

$$O_1(S) \triangleq \{S' \mid S' = (S \setminus \{\bar{x}\}) \cup \{\tilde{x}\},\ \bar{x} \in S^-,\ \tilde{x} \in S^+\},$$
$$O_{\nu+1}(S) \triangleq \bigcup_{S' \in O_\nu(S)} O_1(S'),\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Доверительное множество S называется локально-оптимальным, если $\bar{\psi}(S) \leqslant \bar{\psi}(S')$ для всех $S' \in O_1(S)$.

Опишем поиск с чередующимися окрестностями для задачи (3.106).

Алгоритм 3.6.

1. Выбрать начальное доверительное множество S, например $S := S^0$. Установить $\nu := 1$.

2. Пока $\nu < \nu_{\max}$ повторять следующие шаги:

а) случайным образом получить множество $S' \in O_\nu(S)$;

б) установить $S'' \triangleq \{x \in \mathcal{X}_0 \mid \Phi(u^{S'}, x) \leqslant \bar{\psi}(S')\}$;

в) найти локальный оптимум S''', применяя локальный поиск с S'' в качестве начального решения;

г) если $\bar{\psi}(S'') < \bar{\psi}(S)$, то установить $S := S''$ и $\nu := 1$, иначе $\nu := \nu + 1$.

Применяя алгоритм 3.6, получаем доверительное множество S. Стратегию u^S можно взять в качестве приближенного решения задачи (3.101).

Для поиска решения, близкого к оптимальному решению исходной задачи (3.95), предлагается следующий алгоритм, основная идея которого состоит в увеличении объема выборки.

Алгоритм 3.7.

1. Выбрать начальное значение $n \in \mathbb{N}$ и шаг $\Delta_n \in \mathbb{N}$. Получить реализации $x_1, \ldots, x_n$.

2. Найти стратегию u_n, φ_n, применяя алгоритмы 3.5 и 3.6.

3. Получить реализации $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\Delta_n}$. Установить $n := n + \Delta_n$.

4. Найти решение u_n, φ_n задачи (3.101), применяя алгоритм 3.6 с начальным доверительным множеством

$$\{x \in \mathcal{X}_0 \mid \Phi(u_{n-\Delta_n}, x) \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u_{n-\Delta_n})\}.$$

5. Найти оценку значения $\varphi_\alpha(u_n)$ функции квантили (3.94) в виде

$$\hat{\varphi}_\alpha(u_n) \triangleq \varphi_\alpha^{(N)}(u_n),$$

где $N \gg n$.

6. Если выполнен критерий остановки, считать u_n приближённым решением (3.95). В противном случае перейти к шагу 3.

В приведённом алгоритме могут быть использованы различные критерии остановки, например

$$|\hat{\varphi}_\alpha(u_n) - \hat{\varphi}_\alpha(u_{n-\Delta_n})| \leqslant \varepsilon$$

или $n \geqslant n_{\max}$, где ε и $n_{\max}$ — заданные параметры точности.

3.7. Выводы по главе 3

1) Предложен метод сведения двухэтапных линейных задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями к эквивалентным задачам смешанного целочисленного линейного программирования.

2) Предложен метод сведения двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием к эквивалентной смешанной целочисленной задаче оптимизации.

3) Предложены методы построения верхних и нижних оценок оптимального значения критериальной функции в стохастической двухуровневой задаче размещения предприятий.

4) Предложен численный метод решения задачи стохастического программирования с функцией потерь, имеющей сепарабельную структуру, и квантильным критерием, основанный на дискретизации вероятностной меры и поиске с чередующимися окрестностями.

5) Разработаны алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, основанные на предложенном численном методе.

Основные результаты главы опубликованы в [24, 25, 28, 32, 34, 35, 127, 140, 141].

Глава 4. Построение доверительных множеств поглощения в стохастических системах

В данной главе рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения начальных позиций системы. Под доверительным множеством поглощения [51] понимается множество начальных позиций системы, при которых в терминальный момент времени состояние системы не выйдет за пределы допустимых значений с заранее определённой вероятностью. Доверительное множество поглощения в статических стохастических системах можно рассматривать как множество уровня функции вероятности, в связи с чем для его построения можно использовать свойства функций вероятности и квантили. В разделе 4.1 исследуются свойства доверительного множества поглощения, предлагается два метод его построения. Первый метод основан на детерминированной внутренней аппроксимации на основе доверительного метода. Второй метод основан на выборочной оценки функции вероятности. Приводится пример построения доверительного множества поглощения в двухэтапной модели планирования производства. В разделе 4.2 разработанные методы применяются для построения доверительного множества поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома.

4.1. Методы построения доверительных множеств поглощения

4.1.1. Свойства множеств поглощения

В данном разделе приводится сформулированное в [51] определение доверительного множества множества поглощения и формулируется утверждение о его выпуклости.

Предположим, что известна зависимость $z(y, x)$ вектора $z \in \mathbb{R}^l$ терминального состояния системы от вектора начальных позиций $y \in \mathbb{R}^s$ системы и от реализации $x \in \mathbb{R}^m$ случайного вектора X, влияющего на положение системы. Предполагается, что случайный вектор X имеет известную функцию распределения $F_X(x)$. Пусть вектор терминального состояния z должен удовлетворять заданным ограничениям

$$\Phi(y, x) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, x)) \leqslant \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

где функция $\tilde{\Phi}(z)$ описывает эти ограничения. Установим вероятность выполнения терминальных ограничений

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{4.2}$$

Множество значений y, для которых выполнено неравенство

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}. \tag{4.3}$$

называется доверительным множеством поглощения.

Задача построения доверительного множества поглощения аналогична задачам стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, в которых роль функции $\Phi(u, X)$ играет функция потерь, а вместо начальных позиций y рассматриваются стратегии управления $u \in U$. Для этой функции потерь вводятся функция вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} \tag{4.4}$$

и функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{4.5}$$

Согласно лемме Розенблатта [51, 153]

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\} = \{y \mid \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}. \tag{4.6}$$

Таким образом, для построения доверительного множества поглощения можно использовать не только свойства функции вероятности, но и свойства функции квантили.

В [51] приводятся условия, когда функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла, а функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута. Для формулировки этого результата приведём необходимые определения и утверждения.

Определение 4.1 ([189]). Вероятностная мера $\mathbf{P}$ на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^m$ называется *квазивогнутой*, если для любой пары непустых выпуклых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^m$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \min\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\}.$$

Здесь сумма множеств и умножение множества на число понимаются в смысле Минковского:

$$(A+B)=\{z \mid z=x+y,\ x\in A,\ y\in B\},$$
$$\lambda A=\{z \mid z=\lambda x,\ x\in A\}.$$

Приведём достаточное условие, обеспечивающее квазивогнутость вероятностной меры.

Лемма 4.1 ([189]). *Если случайный вектор имеет плотность вероятности $p(x)$ такую, что функция $x\mapsto p^{-\frac{1}{m}}(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^m$, то соответствующая ей вероятностная мера $\mathbf{P}$ квазивогнута.*

На основании этой леммы легко установить, что многие известные распределения имеют квазивогнутую вероятностную меру: нормальное распределение, экспоненциальное распределение, распределение Коши и т. д.

Определение 4.2 ([189]). Функция f, определенная на выпуклом множестве $U\subset\mathbb{R}^r$, называется квазивыпуклой на U, если для любых $u_1,u_2\in U$ и любого $\lambda\in(0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\leqslant\max\{f(u_1),f(u_2)\}.$$

Определение 4.3 ([189]). Функция f, определенная на выпуклом множестве $U\subset\mathbb{R}^r$, называется квазивогнутой на U, если для любых $u_1,u_2\in U$ и любого $\lambda\in(0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\min\{f(u_1),f(u_2)\}.$$

Приведём основной результат из [51], касающийся свойств выпуклости функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ и функции вероятности $P_\varphi(u)$.

Теорема 4.1 ([51]). *Пусть функция потерь $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ квазивыпукла по совокупности аргументов на $U\times\mathcal{X}$, где $U\subset\mathbb{R}^r$ — выпуклое подмножество, а $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры $\mathbf{P}$. Тогда функция вероятности $u\mapsto P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi\in\mathbb{R}$, а функция квантили $u\mapsto\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U для любого $\alpha\in(0,1)$.*

Из этой теоремы получаем следствие для исследования доверительного множества поглощения.

Следствие 4.1. *Пусть функция $(y,x) \mapsto \Phi(y,x)$, определяющая множество поглощения, квазивыпукла по совокупности аргументов на $\mathbb{R}^s \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры* $\mathbf{P}$. *Тогда доверительное множество поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ выпукло для любых $\varphi \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1)$.*

Доказательство этого следствия основано на факте, что множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ играет роль множества уровня для квазивогнутой функции вероятности $P_\varphi(y)$, а множество уровня квазивогнутой функции выпукло.

4.1.2. Построение внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения

Для построения внутренней аппроксимации доверительного множество поглощения будем использовать доверительный метод.

Пусть S — доверительное множество, т. е. множество в пространстве $\mathbb{R}^m$ реализаций случайного вектора X с вероятностной мерой не менее α. Рассмотрим функцию максимума

$$\psi(y,S) \triangleq \sup_{x\in S} \Phi(y,x).$$

Из [51] вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для любого доверительного множества S с вероятностной мерой не менее α выполняется неравенство*

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \psi(y,S)$$

при всех $y \in \mathbb{R}^s$.

Данное утверждение вытекает из леммы 3.4 из [51]. Аналогично, переформулируя теорему 3.9 из [51], получаем следующий результат.

Теорема 4.2. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ справедливы соотношения*

$$\varphi_\alpha(y) = \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(y,S),$$

$$S_\alpha(y) = \arg\min_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(y,S),$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств с вероятностной мерой не менее α.

Приме́ним доверительный метод для построения доверительного множества поглощения. Зафиксируем множество $S \in \mathcal{F}_\alpha$ и рассмотрим множества

$$\mathcal{Y}_\varphi(x) \triangleq \{y \mid \Phi(y,x) \leqslant \varphi\},$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \bigcap_{x \in S} \mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \mid \psi(y,S) \leqslant \varphi\}.$$

В соответствии с доверительным методом получается внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \mathcal{Y}_\varphi(S).$$

Если при этом перебрать все доверительные множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$, то получится точное множество поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \bigcup_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \mathcal{Y}_\varphi(S).$$

Исследуем свойства множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$.

Пусть $\tilde{x} \in S$ — некоторая точка из S, а $N_i(\tilde{x})$ — прямая, содержащая точку $\tilde{x}$ и являющаяся параллельной i-й координатной оси. Введём обозначения:

$$a_i(\tilde{x}) \triangleq \min_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i,$$

$$b_i(\tilde{x}) \triangleq \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i.$$

Определим часть $\partial_i S$ границы множества S следующим образом:

$$\partial_i S \triangleq \bigcup_{\tilde{x} \in S} [\{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \mid x_i = a_i(\tilde{x})\} \cup \{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \mid x_i = b_i(\tilde{x})\}]. \tag{4.7}$$

Теорема 4.3. *Пусть множество S компактно. Пусть функция $(y,x) \mapsto \Phi(y,x)$ непрерывна и квазивыпукла по координате x_i вектора $x \in S \subset \mathbb{R}^m$ для каждого $y \in \mathbb{R}^s$. Тогда*

$$\psi(y,S) = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y,x), \tag{4.8}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) = \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S), \tag{4.9}$$

где $\partial_i S$ — часть границы множества S, определяемая выражением (4.7).

Доказательство теоремы 4.3. Равенство (4.8) следует из определения части границы $\partial_i S$ и квазивыпуклости функции потерь по x_i:

$$\psi(y,S) = \max_{x\in S}\Phi(y,x) = \max_{\tilde{x}\in S}\max_{x\in N_i(\tilde{x})}\Phi(y,x) =$$
$$= \max_{\tilde{x}\in S}\max_{x\in N_i(\tilde{x})\cap\partial S}\{\Phi(y,x) \mid x_i = a_i(\tilde{x}) \text{ или } x_i = b_i(\tilde{x})\} = \max_{x\in\partial_i S}\Phi(y,x).$$

По построению $\mathcal{Y}_\varphi(S) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Таким образом, для доказательства (4.9) нужно показать, что $\mathcal{Y}_\varphi(S) \supset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Пусть $y \in \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Это означает, что $\Phi(y,x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in \partial_i S$, или, что то же самое,

$$\max_{x\in\partial_i S}\Phi(y,x) \leqslant \varphi.$$

Но по доказанному выше

$$\max_{x\in\partial_i S}\Phi(y,x) = \psi(y,S),$$

что эквивалентно выполнению неравенства $\Phi(y,x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in S$. Таким образом, $y \in \mathcal{Y}_\varphi(S)$, т. е. равенство (4.9) выполнено. $\square$

Таким образом, для вычисления функции $\psi(y,S)$ и построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ достаточно перебрать только точки, лежащие на части $\partial_i S$ границы ∂S доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{Z}_\varphi \triangleq \{z \in \mathbb{R}^l \mid \tilde{\Phi}(z) \leqslant \varphi\}$$

и часть $\partial_j\mathcal{Z}_\varphi$ границы $\partial\mathcal{Z}_\varphi$ множества $\mathcal{Z}_\varphi$, которое соответствует координате z_j вектора $z \in \mathbb{R}^l$ и построено аналогично множеству $\partial_i S$ (4.7).

Теперь рассмотрим вопрос построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$.

Теорема 4.4. *Пусть отображение $y \mapsto z(x,y)$ при заданном $x \in \mathcal{X}$ является гомеоморфизмом, а множество $\mathcal{Z}_\varphi$ компактно. Тогда прообразом множества $\mathcal{Z}_\varphi$ при данном отображении является множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. При этом*

$$\partial\mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \mid z(x,y) \in \partial\mathcal{Z}_\varphi\}. \tag{4.10}$$

Доказательство теоремы 4.4. Согласно свойствам гомеоморфных отображений прообразом компакта является компакт, при этом граничные точки множества $\mathcal{Z}_\varphi$ переходят под действием отображения $y \mapsto z(x,y)$ в граничные точки множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$, и наоборот. $\square$

Таким образом получаем следующий алгоритм построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ при выполнении условий теорем 4.3 и 4.4.

Алгоритм 4.1.

1. Для различных $x \in \partial_i S$ построить множества $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по формуле (4.10).
2. По границе $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ восстановить множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ для всех $x \in \partial_i S$.
3. Найти пересечение множеств $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по всем $x \in \partial_i S$.

Замечание 4.1. Если семейство доверительных множеств $S(a)$ зависит от некоторого вектора параметров $a \in A$, то описанный алгоритм 4.1 можно дополнить еще одним шагом, чтобы получить лучшую интерпретацию доверительного множества поглощения:

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \bigcup_{a\in A} \mathcal{Y}_\varphi(S(a)). \tag{4.11}$$

Рассмотрим вектор y в многомерной сферической системе координат $(\overline{y}, \beta)$, где $\overline{y} \triangleq \|y\|$, а β — вектор углов.

Введём определение звёздчатого множества.

Определение 4.4. Множество $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$ является *звёздчатым относительно нуля*, если отрезок, соединяющий начало координат с произвольной точкой $y \in \mathcal{Y}$, полностью принадлежит множеству $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$.

Теорема 4.5. *Пусть функция $(\overline{y}, \beta, x) \mapsto \widehat{\Phi}(\overline{y}, \beta, x) \triangleq \Phi(y,x)$ квазивыпукла по $\overline{y}$ для каждого β. Если $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$, то множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ является односвязным и звёздчатым относительно нуля.*

Доказательство теоремы 4.5. Из квазивыпуклости функции $\hat{\Phi}$ следует, что при выполнении условий $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ и $y \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ справедливо, что

$$\Phi(\tilde{y}, x) \leqslant \max\{\Phi(0,x),\ \Phi(y,x)\} \leqslant \varphi,$$

для всех $\tilde{y}$, принадлежащих отрезку, соединяющему точки 0 и y. Таким образом, доказана звёздчатость множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. А звёздчатое множество является односвязным. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Тогда множество* $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ *является звёздчатым относительно нуля и односвязным.*

Доказательство следствия 4.2. Доказательство следует из факта, что пересечение звёздчатых множеств оказывается также звёздчатым, а следовательно и односвязным. □

4.1.3. Выборочный метод построения доверительного множества поглощения

Опишем метод построения доверительного множества поглощения на основе выборки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, порождённой случайным вектором X. Пусть зафиксировано некоторое конечное множество $\tilde{Y} \subset \mathbb{R}^s$.

Алгоритм 4.2.

1. Фиксируется точка $y \in \tilde{Y}$.

2. С помощью метода статистических испытаний оценивается вероятность $P_\varphi(y)$:

$$\widehat{P}_\varphi^{(n)}(y) = \frac{M(S_\varphi(y))}{n},$$

где $M(S_\varphi(y))$ — число успешных испытаний в серии из n испытаний, когда элементы выборки X_k принадлежат множеству

$$S_\varphi(y) \triangleq \{x \mid \Phi(y,x) \leqslant \varphi\}.$$

3. Проверяется условие $\widehat{P}_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha$. Если оно выполнено, то точка y включается в множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)}$, являющееся статистической аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

4. Процедура повторяется с шага 2 для новой точки $y \in \tilde{Y}$.

Отметим, что после проведения описанной процедуры нет гарантии, что выполнено включение $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ или $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)}$. Поэтому будем для построения выборочной аппроксимации доверительного множества поглощения увеличим уровень надёжности α. Вместо множества $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)}$ построим множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)}$, где ε — заданная малая положительная константа. Тогда можно рассчитывать, что при достаточно большом объёме выборки n с высокой вероятностью выполнено включение $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, что обеспечивает построение внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения.

Известно [87], что

$$\mathbf{P}\left\{\widehat{P}_{\varphi}^{(n)}(y) - P_{\varphi}(y) \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Поэтому справедлива цепочка неравенств:

$$\mathbf{P}\left\{\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{\widehat{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \alpha+\varepsilon\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |\tilde{Y}| \max_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{\widehat{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \alpha+\varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y}| \max_{y\in\tilde{Y}\setminus\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{\widehat{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant P_{\varphi}(y)+\varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y}|e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Чтобы обеспечить выполнение неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \geqslant \beta, \tag{4.12}$$

где $\beta \in (0,1)$ — вероятность, близкая к единице, достаточно выполнения условия

$$1 - \beta \geqslant |\tilde{Y}|e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Решая полученное неравенство, заключаем, что при

$$n \geqslant \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2} \tag{4.13}$$

справедливо неравенство (4.12).

Таким образом, для применения алгоритма 4.2 необходимо взять достаточно много точек y из $\mathbb{R}^s$ и по выборке объёма (4.13) построить множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)}$. При этом можно гарантировать, что с вероятностью не меньшей β все полученные в результате применения алгоритма точки принадлежат доверительному множеству поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

4.1.4. Построение доверительных множеств поглощения в модели планирования производства

Рассмотрим простейшую модель планирования производства. Предположим, что для производства продукции двух видов может быть закуплено сырьё трёх типов. Через $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)^\top$ обозначим вектор, в котором v_i — объём закупаемого сырья i-го типа, $i \in \{1,2,3\}$. Цены на каждый из видов сырья образуют вектор $c \triangleq (c_1, c_2, c_3)^\top$. Технологию производства описывает матрица $B \triangleq (b_{ij})$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3\}$, в которой величина b_{ij} показывает количество i-го вида продукции, получаемого из единицы сырья j-го типа.

Спрос на продукцию складывается из двух компонент. Первая компонента соответствует спросу, возникающему в следствие заранее подписанных договоров на поставку продукции, и поэтому является детерминированной. Для этого этой компоненты спроса введём обозначение

$$y = (y_1, y_2)^\top \in Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant \bar{y}_1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant \bar{y}_2\}.$$

Вторая компонента $X = (X_1, X_2)^\top$ случайна, реализации которой обозначены через $x = (x_1, x_2)^\top$. Случайность спроса связана с непредсказуемостью поведения потребителей продукции. Необходимо удовлетворить весь возникающий спрос. Тогда потери, связанные с функционированием системы описываются функцией

$$\Phi(y, x) = \max_{v \in \mathbb{R}^3} \{c^\top v \mid Bv \geqslant x + y,\ v \geqslant 0\}.$$

Требуется выяснить, при каких значениях $y \in Y$ вероятность того, что потери при функционировании системы не превысят величину φ с вероятностью α, т. е. построить доверительное множество поглощения.

Переходя к двойственной задаче, получаем, что

$$\Phi(y, x) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^2} \{(x + y)^\top \lambda \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0\}.$$

Через λ^j, $j = \overline{1, J}$, обозначим вершины множества

$$\Lambda \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^2 \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0\}.$$

Тогда функцию потерь можно записать в виде

$$\Phi(y, x) = \max_{j = \overline{1, J}} \{(x + y)^\top \lambda^j\}.$$

Вычисления были проведены для следующих модельных данных:

$$c = (8; 17; 11)^\top, \varphi = 100,\ \bar{y}_1 = 20,\ \bar{y}_2 = 20,$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

для уровней $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}9$. Компоненты случайного вектора X независимы и распределены по нормальному закону $X_1 \sim \mathcal{N}(5, 1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(6, 4)$.

Результаты построения доверительных множеств поглощения представлены на рис. 4.1 и 4.2.

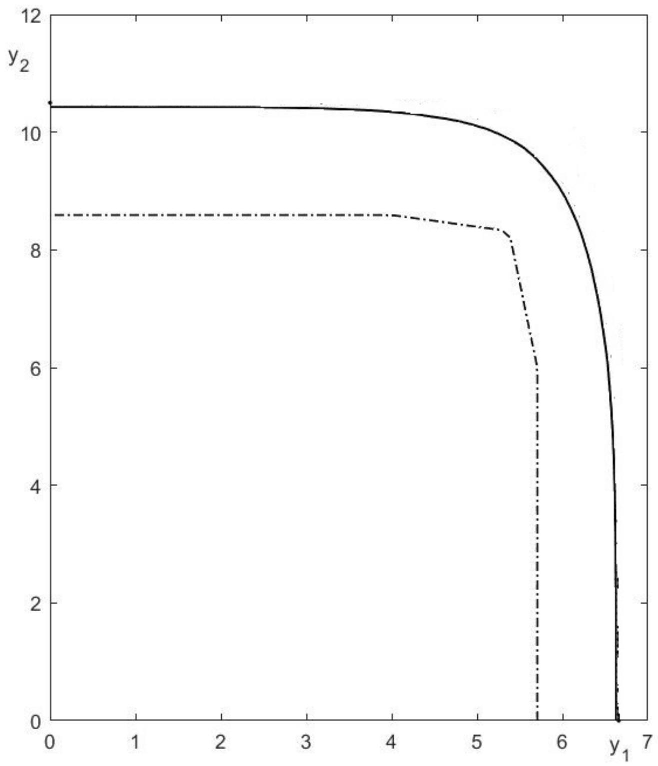

Рисунок 4.1. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}8$.

Штрихпунктирной линией обозначена граница внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения, полученной с помощью доверительного шара с центром в точке математического ожидания.

Выборочная аппроксимация строилась для уровня доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$ при $\varepsilon = 0{,}01$. Для построения выборочной аппроксимации доверительного множества поглощения использовался алгоритм 4.2. Конечное множество $\tilde{Y}$ строилось на сетке в полярных координатах с числом равным 100^2. Сетка строилась за пределами области полученной внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения, что помогло повысить точность решения за счёт более мелкого разбиения. Согласно оценке (4.13) для построения статистической аппроксимации достаточен объём выборки 69079, определяемый по формуле (4.13). Полученная внутренняя выборочная аппроксимация доверительного множества поглощения изображена на рис. 2.1 и 2.2 сплошной линией.

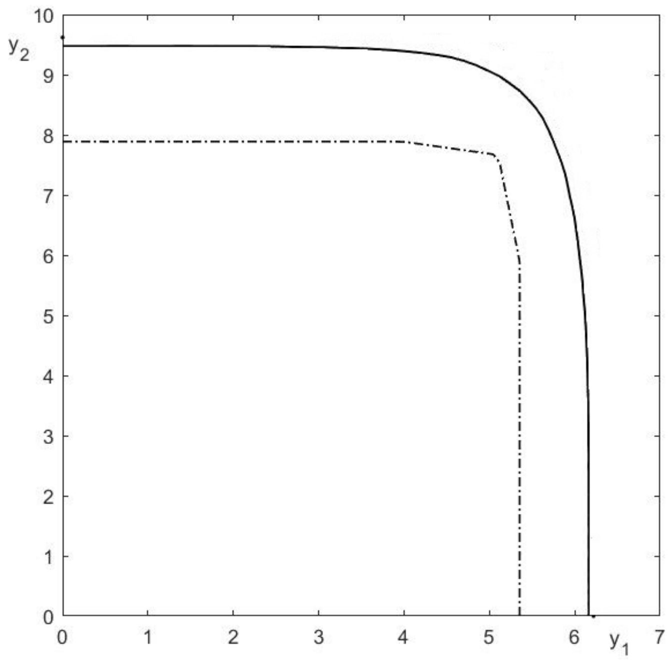

Рисунок 4.2. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}9$.

4.2. Построение множества допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома

В данном разделе с помощью предложенных выше методов решается задача построения доверительного множества поглощения допустимых скоростей значений скорости ветра в районе аэродрома.

4.2.1. Постановка задачи

Сформулируем задачу. Пусть некоторый самолёт вылетает из города N в город M, до которого время полёта равно t. Посадка самолёта в аэропорту города M возможна, если скорость ветра в продольном и боковом направлениях не выходит за допустимые пределы

$$\mathcal{W}_t = \{(w_x^t, w_z^t) \mid |w_z^t| \leqslant w_z^{\max}, w_x^{\min} \leqslant w_x^t \leqslant w_x^{\max}\}, \tag{4.14}$$

где w_x^t, w_z^t — скорости ветра в точке посадки в момент посадки самолета в продольном и боковом направлениях.

В нулевой момент, т. е. в момент вылета самолета из города N, в аэропорту города M скорость ветра была (w_x^0, w_z^0). Но по истечении времени t ветер может значительно измениться и его скорости не будут удовлетворять допустимым значениям, т. е. посадка самолёта станет невозможной. Пусть значение скорости ветра w^t в момент t связано со скоростью ветра w^0 в нулевой момент соотношениями:

$$w_x^t = (v^0 + \xi)\cos(\beta^0 + \eta), \tag{4.15}$$

$$w_z^t = (v^0 + \xi)\sin(\beta^0 + \eta), \tag{4.16}$$

где v^0, β^0 — полярные координаты вектора w^0, а ξ и η — независимые случайные величины, имеющие усечённое нормальное распределение

$$\xi \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\xi^2), \quad \eta \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\eta^2),$$

причём $\xi \in [v_*, v^*]$, $\eta \in [\beta_*, \beta^*]$.

Найдём вероятность такого события, что самолету разрешат посадку в городе M, когда в момент его вылета из города N вектор скорости ветра был равен w^0:

$$P(w^0) = \mathbf{P}\{w^t(w^0, \xi, \eta) \in \mathcal{W}_t\}. \tag{4.17}$$

Необходимо построить множество $\mathcal{W}_0$ допустимых скоростей ветра w^0 в начальным момент, при которых по происшествии времени t скорость ветра w^t не выйдет за допустимые пределы с вероятностью α:

$$\mathcal{W}_0 = \{w^0 \mid P(w^0) \geqslant \alpha\}. \tag{4.18}$$

Другими словами, нужно построить доверительное множество поглощения.

4.2.2. Алгоритм построения доверительного множества поглощения

Для построения множества $\mathcal{W}_0$ воспользуемся результатами из предыдущего раздела. Заметим, что множество $\mathcal{W}_t$ можно записать через функцию потерь:

$$\mathcal{W}_t = \{w_x^t, w_z^t \mid \widetilde{\Phi}(w^t) \leqslant 1\}, \tag{4.19}$$

где

$$\widetilde{\Phi}(w^t) = \max\left\{\widetilde{\Phi}_1(w_x^t), \widetilde{\Phi}_2(w_z^t)\right\},$$
$$\widetilde{\Phi}_1(w_x^t) = \frac{|2w_x^t - w_x^{\min} - w_z^{\max}|}{w_x^{\max} - w_x^{\min}},$$
$$\widetilde{\Phi}_2(w_z^t) = \frac{|w_z^t|}{w_z^{\max}}.$$

Далее заметим, что скорости ветра в начальный и конечный моменты связаны между собой соотношениями в полярной системе координат:

$$\beta^0 = \beta^t - \eta,$$
$$v^0 = v^t - \xi.$$

Приведём связь между декартовой и полярной системами координат:

$$w_x^t = v^t \cos(\beta^t),$$
$$w_z^t = v^t \sin(\beta^t),$$
$$v^t = \sqrt{(w_x^t)^2 + (w_z^t)^2},$$
$$\beta^t = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & w_x^t = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим в нормированной системе координат случайные векторы

$$\overline{\xi} = \frac{\xi}{\sigma_\xi}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\eta}$$

и доверительное множество в форме квадрата

$$S_\Delta = \{|\overline{\xi}| \leqslant \Delta, |\overline{\eta}| \leqslant \Delta\},$$

где параметр Δ выбирается из условия $\mathcal{P}(S_\Delta) = \alpha$. Предположим, что для случайной величины U со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$ соответствующие вероятности удовлетворяют неравенствам:

$$\mathbf{P}\{U < v_*/\sigma_\xi, U > v^*/\sigma_\xi\} \ll 1 - \alpha,$$

$$\mathbf{P}\{U < \beta_*/\sigma_\eta, U > \beta^*/\sigma_\eta\} \ll 1 - \alpha.$$

Тогда поскольку случайные величины $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ независимы, то параметр Δ может быть найден из условий

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha},$$

где

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\Delta e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим также семейство квадратов $S_\Delta(\gamma)$, подобных S_Δ, но повёрнутых относительно S_Δ на угол $\gamma \in [-\pi/2, 0]$.

В данном случае w_x^t и w_z^t линейно зависят от $\overline{\xi}$ и v^0, поэтому согласно теореме 4.5 множество

$$\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \{(w_x^0, w_z^0) \mid \widetilde{\Phi}(w^t(w_x^0, w_z^0, \overline{\xi}, \overline{\eta})) \leqslant 1\}$$

является звёздчатым и односвязным. Поэтому для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно рассмотреть границу доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$.

Отображение $(w_x^0, w_z^0) \mapsto (w_x^t, w_z^t)$ области

$$\big\{(w_x^0, w_z^0) \colon v^0 > \max\{0, -\overline{\xi}\}\big\}$$

в область

$$\big\{(w_x^t, w_z^t) \colon v^t > \max\{0, \overline{\xi}\}\big\}$$

является гомеоморфизмом. Поэтому в силу теоремы 4.4 при выполнении условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial \mathcal{W}_t$ для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно найти для всех точек $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ прообраз в пространстве (w_x^0, w_z^0) границы $\partial \mathcal{W}_t$ множества $\mathcal{W}_t$.

Построим аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 4.3.

1. Перебираются $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ на границе $\partial S_\Delta(\gamma)$ множества $S_\Delta(\gamma)$.

2. Для каждой точки $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ находится прообраз $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ в пространстве переменных (w_x^0, w_z^0) границы множества $\mathcal{W}_t$.

3. Находится пересечение множеств

$$\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)) = \bigcap_{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in S_\Delta(\gamma)} \mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}).$$

4. Пп. 1–3 алгоритма 4.3 повторяются для разных значений $\gamma \in [-\pi/2, 0]$ и строится множество

$$\overline{\mathcal{W}}_0 = \bigcup_{\gamma \in [-\pi, 0]} \mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)).$$

5. Множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ принимается за аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Заметим, что для корректной работы алгоритма 4.3 необходимо выполнение условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial \mathcal{W}_t$.

Уточним полученную оценку.

Рассмотрим теперь доверительные множества $S_{\bar{r}}$ в форме круга

$$S_{\bar{r}} \triangleq \{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \mid \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2 \leqslant \bar{r}^2\},$$

где радиус круга $\bar{r}$ определяется из условия, что $\mathcal{P}(S_{\bar{r}}) = \alpha$. В данном случае в связи с независимостью $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ радиус круга находится аналитически

$$\bar{r} = \sqrt{-2\ln(1-\alpha)}.$$

Для доверительного круга $S_{\bar{r}}$ шаги 1–3 алгоритма 4.3 повторяются и строится множество $\mathcal{W}_0(B_{\bar{r}})$, которое является внутренней аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Полученную аппроксимацию можно еще уточнить, если рассмотреть семейство доверительных множеств $S_\Delta(\gamma)$, где параметр γ выбирается из интервала $[-\pi, 0]$, и построить множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ так, как это описано в алгоритме 4.3.

Поскольку

$$\mathcal{W}_0 = \bigcup_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \mathcal{W}_0(S),$$

то, взяв объединение множеств $\mathcal{W}_0(B_r)$ и $\overline{\mathcal{W}}_0$, получаем более точную аппроксимацию доверительного множества поглощения

$$\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_0(S_r) \cup \overline{\mathcal{W}}_0.$$

Можно также сдвинуть одну из границ множества $S_\Delta(\gamma)$ ближе к началу координат, сохраняя при этом вероятностную меру множества. Объединение всех таких множеств $\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma))$ будет образовывать внутреннюю аппроксимацию множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

4.2.3. Вычислительный эксперимент

Пусть для примера

$\alpha = 0{,}99$; $\sigma_\xi = 1{,}9$ [м/с]; $\sigma_\eta = 27^0$; $w_z^{\max} = 15$ [м/с]; $w_x^{\min} = -25$ [м/с]; $w_x^{\max} = 10$ [м/с].

На рис. 4.3 сплошной линией изображена граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, а штрихпунктирной линией — $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

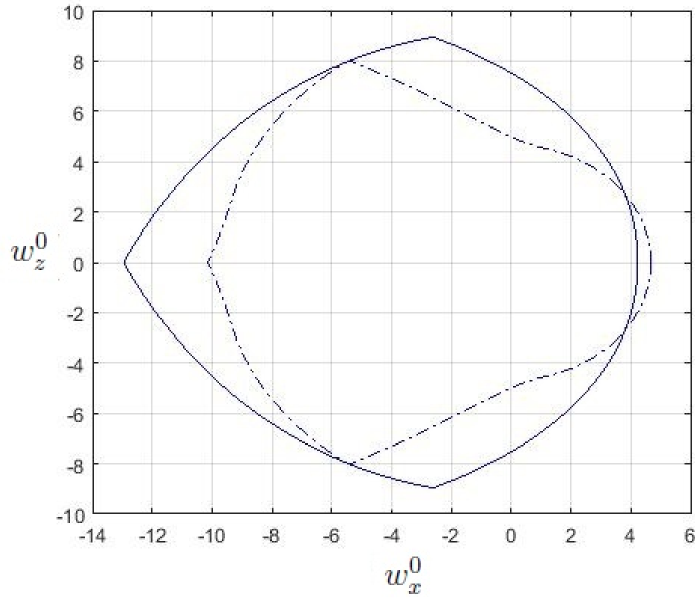

Рисунок 4.3. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ и $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

Сдвигом границ доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$ влево и последующим вращением внутреннюю аппроксимацию множества $\mathcal{W}_0$ можно существенно улучшить. Граница полученного множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ изображена на рис. 4.4 штрихпунктирной линией. Множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается выпуклым, хотя, как известно, объединение выпуклых множеств оказывается, как правило, невыпуклым. Для сравнения граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ изображена сплошной линией.

Заметим, что множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ содержит в себе множество $\mathcal{W}_0(S_r)$. Это связано с тем, что доверительное множество S_r — одно и то же для всех начальных позиций системы w_0, а для каждой начальной точки имеется свое оптимальное доверительное множество, которое неизвестно. Варьируя множество $S_\Delta(\gamma)$, подбираем для каждой точки w_0 доверительное множество лучше, чем S_r, поэтому множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается шире множества $\mathcal{W}_0(S_r)$.

При построении данных множеств существенно использовалась их звездчатая структура. Граница звездчатого множества в полярных координатах описывается функцией полярного угла. Поэтому пересечению множеств соответствует минимум функций, описывающих границы, а объединению — максимум.

Границу множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ можно уточнить с помощью метода статистических испыта-

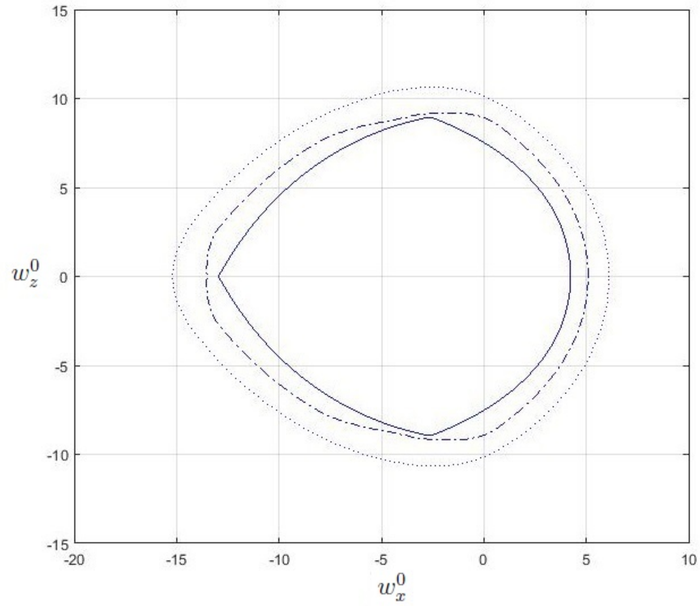

Рисунок 4.4. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, $\overline{\mathcal{W}}_0$ и статистическая аппроксимация

ний, используя алгоритм 4.2. Статистическая аппроксимация множества $\mathcal{W}_0$ изображена на рис. 4.4 точечной линией. Из рис. 4.4 видно, что получаемая статистическая аппроксимация доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ незначительно отличается от аппроксимирующего множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$, но для её построения пришлось провести большой объём вычислений.

Представляет интерес множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$. Как видно из рис. 4.5, это множество оказывается невыпуклым. При $\sigma_\eta \to \infty$ прогнозируемое значение скорости ветра оказывается распределенным в некотором кольце. Поэтому при возрастании v^0 радиус кольца увеличивается, а вероятность попадания прогнозируемой скорости ветра в множество $\mathcal{W}_t$ монотонно убывает. Это значит, что предельная функция вероятности является квазивогнутой, что гарантирует выпуклость ее множеств уровня. Таким образом, множество $\mathcal{W}_0$ становится выпуклым при достаточно большом значении σ_η.

4.3. Выводы по главе 4

1) Предложены достаточные условия выпуклости доверительного множества поглощения.

2) Предложен детерминированный метод построения внутренней аппроксимации дове-

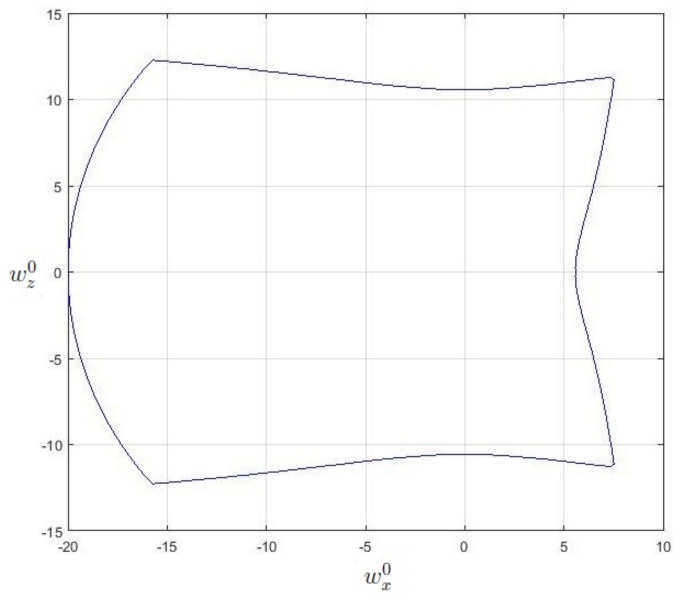

Рисунок 4.5. Множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$.

рительного множества поглощения.

3) Предложен метод построения выборочной аппроксимации доверительного множества поглощения, и определён достаточный объём выборки для его построения.

4) Построены внутренние аппроксимации доверительного множества поглощения в двухэтапной модели планирования производства.

5) Построено доверительное множество поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра в районе аэродрома.

Основные результаты главы опубликованы в [39, 48].

Глава 5. Комплекс программ, реализующих выборочные методы решения задач стохастического программирования

В данной главе описывается разработанный программный комплекс, предназначенный для решения задач стохастического программирования с помощью выборочных методов и приводятся результаты численных экспериментов, полученные с помощью данного программного комплекса. В разделе 5.1 приводится описание модульной архитектуры комплекса программ. В разделе 5.2 приведены результаты применения алгоритма, основанного на поиске с чередующимися окрестностями, к решению одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. В разделе 5.3 аналогичные результаты приведены для двухэтапной задачи с квантильным критерием и билинейной функцией потерь. В разделе 5.4 находится численное решение задачи выбора энергосберегающих проектов, сформулированной в разделе 1.2.3. В разделе 5.5 решается задача планирования производства с учётом действий производителя и поставщика ресурсов, описанная в разделе 1.3.2. В разделе 5.6 приводятся результаты решения задачи определения налоговой ставки из раздела 1.3.5. В разделе 5.7 приводится описание алгоритма, реализованного в одном из модулей программного комплекса и предназначенного для решения задачи оптимизации площади взлётно-посадочной полосы.

5.1. Описание архитектуры комплекса программ

Алгоритмы, предложенные в работе для решения задач стохастического программирования с квантильным критерием, реализованы в программном комплексе на языке Matlab.

Разработанный комплекс имеет модульную архитектуру. Каждый модуль предназначен для решения одной из следующих задач:

1) SSLPQ — одноэтапная задача стохастического линейного программирования (3.76);

2) TSBLPQ — двухэтапная задача стохастического программирования с билинейной функцией потерь (3.95);

3) BLSPQ — двухуровневая задача стохастического программирования (1.49);

4) ID — двухэтапная задача распределения инвестиций в энергосберегающие проекты (1.45).

Для взаимодействия различных модулей, ввода и вывода данных предназначен основной модуль программы (Main). На вход модулю Main пользователь вводит векторы и матрицы, определяющие функции из описания задач стохастического программирования, и задаёт распределение случайных параметров. Распределение может задаваться с помощью библиотеки стандартных распределений Matlab. Предусмотрен режим считывания выборки реализаций случайных параметров из файла для работы программы, когда истинное распределение случайных параметров не известно, но доступен набор реализаций случайных параметров. За работы со случайными параметрами отвечает модель статистики (Statistics). Модель Main в зависимости от введённой задачи запускают подпрограммы предназначенные для её решения.

Для решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования из модуля Main на вход модулю SSLPQ передаётся описание задачи в виде задающих её матриц и векторов, выборка, генерируемая или загружаемая из модуля Statistics, указывается алгоритм решения задачи 3.3 или 3.4 и их параметры. При использовании алгоритма 3.4 статистические данные подаются на вход модулю несколько раз до выполнения критерия окончания алгоритма. В результате решения задачи из модуля SSLPQ в модуль Main передаются найденные стратегии и значение критериальной функции.

Для решения двухэтапной задачи стохастического программирования с билинейной функцией потерь из модуля Main на вход модулю TSBLPQ передаются параметры задачи, алгоритм её решения (3.6 или 3.7) и его параметры. В результате решения задачи из модуля TSBLPQ в модуль Main передаются найденные стратегии и значение критериальной функции.

При решении двухуровневой задачи стохастического программирования описание задачи и статистика передаются на вход модулю BLSPQ. Выходными данными модуля BLSPQ является найденное решение задачи и значение критериальной функции.

Двухэтапная задача распределения инвестиций в энергосберегающие проекты решается с помощью модуля ID, на вход которому поступают параметры задачи и статистика, выбираются используемые критериальные функции. Выходными данными являются найденные стратегии и значения критериальных функций.

Структура комплекса программ изображена на рис. 5.1.

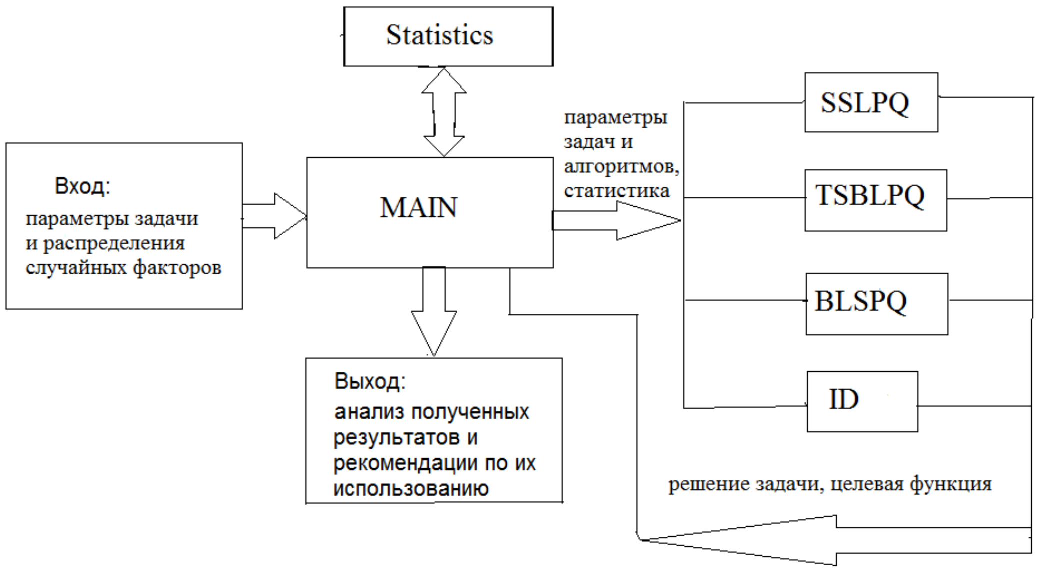

Рисунок 5.1. Структура комплекса программ.

5.1.1. Модуль решения одноэтапной линейной задачи

Программа SSLPQ, разработанная на языке Matlab и предназначенная для решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования (3.76), принимает на вход матрицы $A_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times r}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times m}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l_2 \times m}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{l_3 \times r}$, векторы $b_1 \in \mathbb{R}^{l_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{l_2}$, $b_3 \in \mathbb{R}^{l_3}$, уровень надёжности $\alpha \in (0, 1)$. Распределение случайных параметров либо задаётся из стандартной библиотеки, либо задаётся выборка реализаций. Возможны два режима работы с рассматриваемым модулем:

1) решение задачи для фиксированного объёма выборки с помощью алгоритма 3.3;

2) постепенное увеличение объёма выборки с помощью алгоритма 3.4 с вызовом на каждом шаге подпрограммы, реализующей алгоритм 3.3.

Начальное решение может задаваться несколькими способами:

1) явное задание вручную;

2) случайный выбор;

3) запуск подпрограммы, реализующей алгоритм 3.2 поиска начального приближённого решения.

Предусмотрена настройка параметров алгоритмов:

1) шаг $\Delta\tilde{r} \in (0, +\infty)$ в алгоритме 3.2 поиска начального приближения;

2) шаг увеличения окрестностей Δ в алгоритме 3.3;

3) максимальная ширина окрестностей $\nu_{\max}$ в алгоритме 3.3;

4) шаг $\Delta_n \in \mathbb{N}$, на размер которого увеличивается выборка в алгоритме 3.4;

5) критерий остановки алгоритма 3.4:

$$|\varphi_\alpha(u^n) - \varphi_\alpha(u^{n-\Delta_n})| \leqslant \varepsilon$$

или

$$n \geqslant n_{\max},$$

где параметры ε, $n_{\max}$ задаются пользователем.

Выходными данными являются полученное решение и значение критериальной функции задачи (3.76).

Блок-схема алгоритма 3.4, реализованного в модуле SSLPQ, представлена на рис. 5.2.

Примеры применения разработанного модуля приведены в разделах 5.2 и 5.7.

5.1.2. Модуль решения двухэтапной билинейной задачи

На вход программы TSBLPQ решения двухэтапной задачи стохастического программирования с билинейной функцией потерь (3.95) подаются матрицы $A_0 \in \mathbb{R}^{l_0 \times r}$, $A_1, A_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, векторы $b_0 \in \mathbb{R}^{l_0}$ $c_0 \in \mathbb{R}^r$, $c_1 \in \mathbb{R}^s$, $c_{2i} \in \mathbb{R}^r$, $b_i \in \mathbb{R}^s$ $a_{3i} \in \mathbb{R}^m$, числа $d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, l}$, и уровень надёжности $\alpha \in (0, 1)$. Данные параметры определяют задачу (3.95). Распределение случайных параметров в силу постановки задачи считается гауссовским. Предусмотрена опция, когда вместо распределения на вход подаётся выборка реализаций случайных параметров.

Так же, как и для одноэтапной задачи, предусмотрено три варианта задания начального решения:

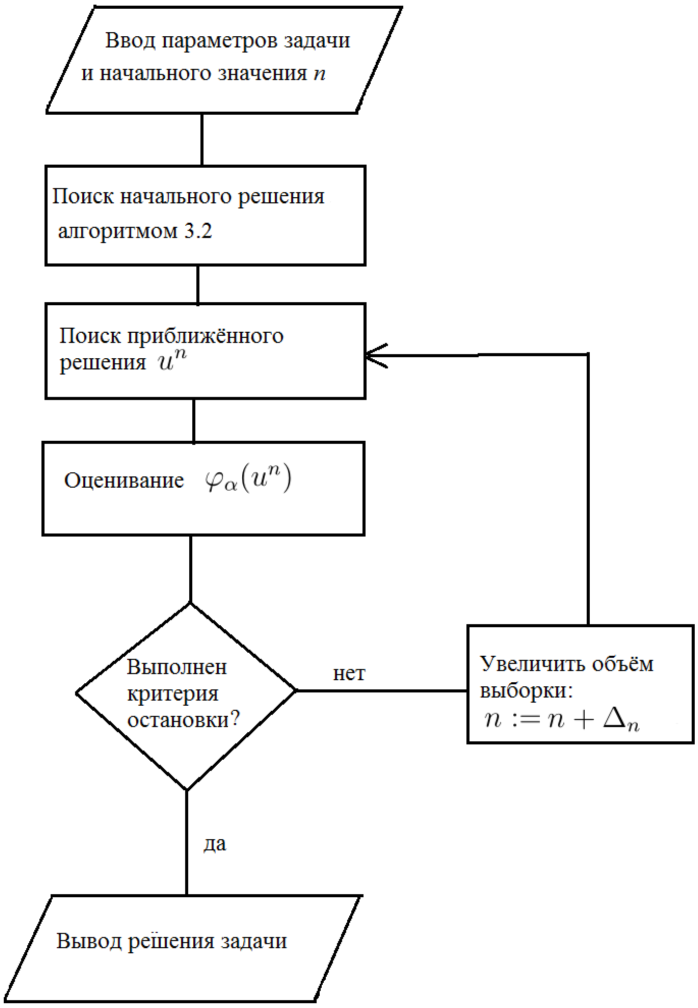

Рисунок 5.2. Блок-схема алгоритма 3.4.

1) явное задание вручную;

2) случайный выбор;

3) запуск подпрограммы, реализующей алгоритм 3.5 поиска начального приближённого решения.

Предусмотрены два режима работы с разработанным модулем:

1) решение задачи для фиксированного объёма выборки с помощью алгоритма 3.6;

2) постепенное увеличение объёма выборки с помощью алгоритма 3.7 с вызовом на каждом шаге подпрограммы, реализующей алгоритм 3.6.

Возможна настройка параметров алгоритмов:

1) максимальная ширина окрестностей $\nu_{\max}$ в алгоритме 3.6;

2) шаг $\Delta_n \in \mathbb{N}$, на размер которого увеличивается выборка в алгоритме 3.7;

3) критерий остановки алгоритма 3.7:

$$|\hat{\varphi}_\alpha(u_n) - \hat{\varphi}_\alpha(u_{n-\Delta_n})| \leqslant \varepsilon$$

   или

$$n \geqslant n_{\max},$$

   где ε и $n_{\max}$ — задаваемые пользователем параметры точности.

Выходными данными являются полученное решение и значение критериальной функции задачи (3.95).

Блок-схема алгоритма 3.7 аналогична блок-схеме алгоритма, представленного на рис. 5.2, только вместо алгоритма 3.2 реализуется алгоритм 3.5.

Примеры применения разработанного модуля приведены в разделе 5.3.

5.1.3. Модуль решения двухуровневой задачи стохастического программирования

На вход программы BLSPQ, предназначенной для решения двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием (1.49), подаётся описание функций Φ, Q, $c(\cdot)$, $B(\cdot)$, $b(\cdot)$. Предполагается, что все указанные функцию имеют квадратичную структуру, поэтому указываются только матрицы и векторы, задающие эти функции. Случайные параметры могут задаваться несколькими способами:

1) задание дискретного распределения с помощью ряда распределения;

2) задание распределения из библиотеки Matlab;

3) задание реализации выборки неизвестного распределения случайных параметров.

Специальный модуль преобразует введённую задачу в задачу смешанного целочисленного программирования. После чего полученная эквивалентная задача передаётся на вход программе CPLEX, предназначенной для решения задач смешанного целочисленного программирования.

Для решения частного случая двухуровневой задачи (1.65) со случайными коэффициентами в целевой функции последователя используется следующий алгоритм, заключающийся в увеличении объёма выборки до тех пор, пока не будет найдено приближённое решение задачи.

Алгоритм 5.1.

1) Установить $n := 0$. Выбрать $\Delta_n \in \mathbb{N}$.

2) Получить реализации случайного вектора X:

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+\Delta_n}.$$

3) Увеличить объём выборки: $n := n + \Delta_n$.

4) Найти ψ_n и u_n, решив задачу (2.59), (2.60).

5) Если $|\psi_n - \psi_{n-\Delta_n}| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — параметр алгоритма, задающий точность, то перейти к шагу 2.

На шаге 3 алгоритма 5.1 запускается модуль преобразования задачи в смешанную целочисленную задачу математического программирования. Параметры Δ и ε задаются пользователем.

Выходными данными являются полученное решение и значение критериальной функции решаемой задачи.

Блок-схема алгоритма 5.1, реализованного в модуле BLSPQ, представлена на рис. 5.3.

Примеры применения разработанного модуля приведены в разделах 5.5 и 5.6.

5.1.4. Модуль решения задачи распределения инвестиций

Модуль ID предназначен для решения двухэтапной задачи специального вида (1.45), формулируемой в рамках модели выбора инвестиционных проектов по экономии

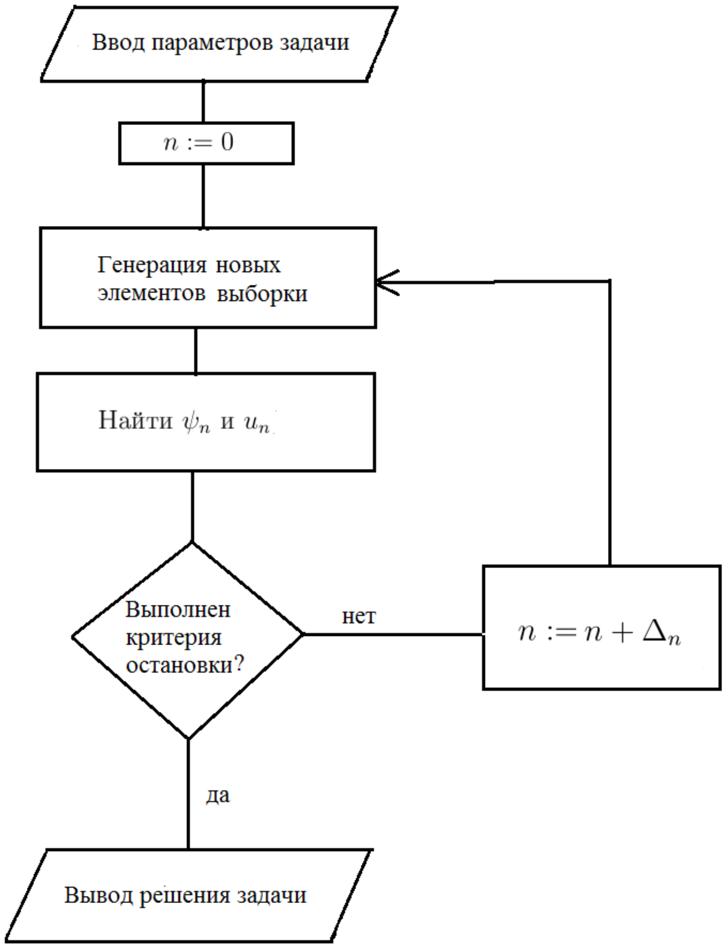

Рисунок 5.3. Блок-схема алгоритма 5.1.

электроэнергиии. Взаимодействие пользователя с модулем ID осуществляется через модуль Main. Помимо задачи с квантильным критерием, возможно решение и задачи с критерием в форме математического ожидания:

$$\mathbf{M}\Phi(u, X) \to \min_{u \in \{0,1\}^r} . \tag{5.1}$$

В зависимости от вида распределения случайного вектора спроса на электроэнергию используются различные алгоритмы решения задачи. В случае дискретного распределения случайного вектора используются методы сведéния задач стохастического программирования к целочисленным задачам линейного программирования вида (3.15) (для квантили) и аналогичного вида для математического ожидания:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \Phi(u, x_k) \to \min_{u \in \{0,1\}^r} . \tag{5.2}$$

Этот алгоритмы реализованы в подпрограммах SLPMD (для решения задачи с критерием в форме математического ожидания) и SLPQD (с квантильным критерием). Для решения задачи с критерием в форме математического ожидания используется эквивалентная задача (5.2). Для её решения предназначена подпрограмма ILP. Для решения задачи квантильной оптимизации в случае гауссовского распределения случайного вектора используется детерминированный эквивалент. Метод детерминированного эквивалента реализован в подпрограмме SLPDE. Для решения задачи квантильной оптимизации в общем случае применяется алгоритм, основанный на построении выборочных оценок функции квантили и их последующей оптимизации с помощью сведения к эквивалентным смешанным целочисленным задачам (модуль SPEQ).

Входными данными подпрограмм SLPMD, SLPQD, ILP, SLPDE, SPEQ являются матрицы и векторы, входящие в математические описания решаемых задач оптимизации, а также параметры используемых алгоритмов. Выходными данными указанных программ являются оптимальные стратегии и значения критерительных функций. Все указанные подпрограммы взаимодействуют через основную программу модуля ID. Основная программа, в зависимости от входных параметров модели и распределения случайного вектора, выбирает используемый алгоритм (т. е. одну из подпрограмм, описанных выше). После чего осуществляется запуск соответствующей подпрограммы с предварительно преобразованными входными данными. Выбор специальной опции позволяет также строить графическую иллюстрацию полученного решения.

Структура модуля ID изображена на рис. 5.4.

Примеры применения разработанного модуля приведены в разделе 5.4.

5.2. Решение одноэтапной задачи

В данном разделе описываются результаты применения модуля SSLPQ разработанного программного комплекса, предназначенного для решения одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием.

5.2.1. Пример 1

Рассматривается одноэтапная задача стохастического линейного программирования (3.76) для следующих размерностей: $l_1 = 12$, $l_2 = 8$, $l_3 = 20$, $r = 20$, $m = 15$. Исходные

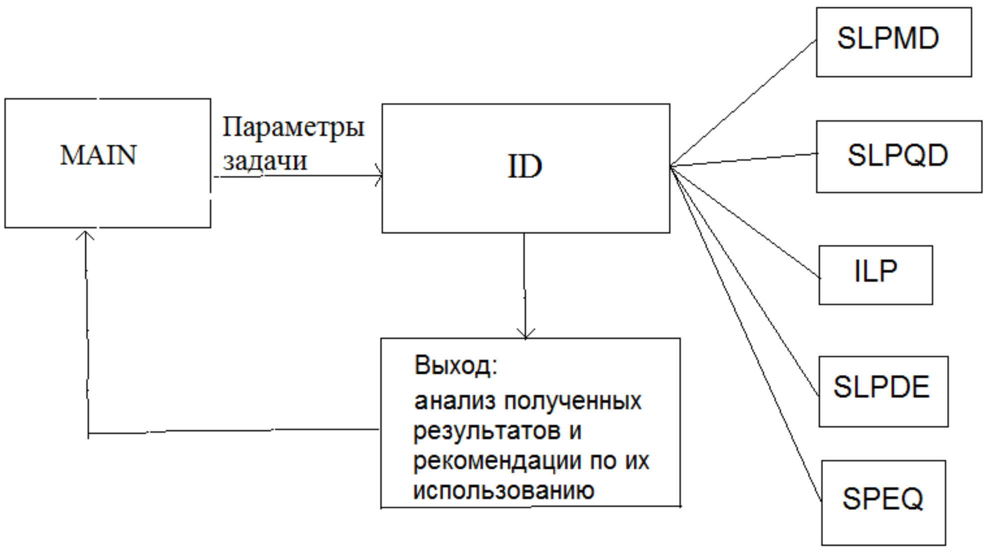

Рисунок 5.4. Структура модуля ID.

данные имеют вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix}
6 & -9 & -1 & 3 & -6 & 10 & -9 & 4 & 3 & -6 & 7 & 2 & 1 & -2 & -8 & 1 & -4 & -9 & -3 & 5 \\
3 & -9 & -1 & -7 & 3 & 6 & 9 & 10 & -3 & -2 & -7 & 9 & 5 & 6 & -10 & -9 & 9 & 5 & -3 & 2 \\
7 & 7 & 8 & -7 & 10 & 6 & 5 & -9 & 2 & -10 & 7 & 5 & -9 & -6 & 3 & 9 & 8 & 9 & 3 & -10 \\
6 & -1 & 10 & -3 & -5 & -8 & -2 & -1 & 4 & 4 & -3 & -10 & 9 & -8 & 4 & 5 & 4 & 10 & 6 & -10 \\
7 & 6 & 3 & 2 & 3 & 5 & -9 & 8 & 1 & -1 & 6 & -4 & 4 & 7 & 9 & 3 & 8 & 7 & 5 & 6 \\
-6 & 4 & -7 & 4 & 10 & 4 & 1 & -7 & -4 & -5 & 2 & 1 & 9 & -10 & 10 & 2 & 9 & 1 & 3 & -8 \\
-2 & -1 & 10 & 8 & -2 & 9 & -1 & -5 & 1 & -5 & 2 & -6 & 6 & 1 & 4 & 1 & -10 & -9 & 10 & -8 \\
10 & -10 & -8 & 2 & 10 & -1 & 5 & -5 & 8 & -1 & -3 & -7 & 6 & 7 & -6 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\
-2 & 6 & -10 & 9 & -6 & -9 & 6 & -6 & -5 & 1 & -7 & 6 & 3 & 8 & 2 & -2 & 8 & 1 & -10 & 6 \\
4 & 10 & 2 & 1 & -9 & 7 & -3 & 4 & -2 & -2 & 9 & 7 & 4 & 7 & -10 & -5 & -7 & 3 & 10 & 5 \\
-5 & 3 & 4 & 4 & 8 & 9 & 2 & 6 & -4 & 3 & 6 & -9 & -10 & 3 & 5 & -9 & -9 & -10 & 10 & 9 \\
1 & -7 & -3 & 10 & -5 & -3 & -8 & 6 & -2 & 9 & 9 & 1 & 1 & 2 & 6 & 9 & 7 & -8 & 6 & -9
\end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}
8 & 8 & 10 & 8 & 9 & 1 & 5 & 3 & 8 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 9 & 7 & 7 & 9 & 6 \\
1 & 5 & 3 & 3 & 8 & 10 & 5 & 2 & 5 & 8 & 7 & 5 & 7 & 7 & 2 & 5 & 7 & 9 & 7 & 7 \\
7 & 10 & 1 & 8 & 5 & 6 & 6 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 & 9 & 10 & 1 & 5 & 1 & 6 \\
5 & 10 & 10 & 1 & 8 & 3 & 8 & 6 & 1 & 6 & 2 & 9 & 5 & 4 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 6 \\
9 & 8 & 2 & 1 & 10 & 2 & 2 & 2 & 7 & 3 & 9 & 3 & 4 & 10 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \\
8 & 10 & 4 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 6 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 6 & 4 & 6 & 7 & 5 & 4 \\
1 & 6 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 & 9 & 6 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 3 & 8 \\
5 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 & 2 & 6 & 7 & 8 & 1 & 7 & 3 & 8 & 3 & 10 & 1 & 8 & 10 & 6
\end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix}
5 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 4 \\
2 & 2 & 5 & 3 & 2 & 5 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 \\
3 & 2 & 3 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 3 & 1 \\
2 & 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 5 \\
2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 4 \\
3 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 3 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 & 1 & 5 & 5 \\
5 & 3 & 3 & 5 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 5 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 5 & 1 & 3 & 1 & 3 & 5 \\
4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 & 3 & 5 & 1 \\
2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 5 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1
\end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix}
1 & 2 & 5 & 3 & 2 & 5 & 5 & 5 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\
5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\
4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 \\
3 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 5 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 1 & 5 & 3 & 2 & 5 & 1 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\
2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\
3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 5 & 3 & 1 & 4 & 3 & 3 \\
2 & 5 & 4 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3
\end{pmatrix};$$

$$b_1 = (9,\ 8,\ 6,\ 9,\ 7,\ 8,\ 5,\ 7,\ 5,\ 9,\ 7,\ 8)^\top;$$

$$b_2 = (-202,\ -154,\ -149,\ -194,\ -177,\ -147,\ -187,\ -194)^\top;$$

$$A_3 = -I_{20},\ b_3 = 0_{20},$$

где I_m — единичная матрица размера $m \times m$, 0_m — нулевой вектор размера m. Устанавливается $\alpha = 0{,}65$, потому что наиболее трудными для решения задачи являются уровни α близки к 0,5.

Предполагается, что компоненты вектора X — независимые стандартные нормальные случайные величины.

Все вычисления в этом и последующих примерах проводились на компьютере AMD Athlon (tm) 64 Processor 3500+, 2,21 ГГц, 512 МБ ОЗУ.

С помощью ядра вероятностной меры была найдена нижняя оценка оптимального значения критериальной функции: 12,7570.

Решение задачи начиналось при $n = 400$. Для поиска точного решения задача (3.78) сводилась к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Было получено решение со значением критериальной функции 19,8219. Вычисления продолжались 45 913 секунд.

Для поиска начального решения при $n = 400$ использовался алгоритм 3.2. После чего начальное решение улучшалось с помощью алгоритма 3.3 с параметрами $\Delta = 0{,}125$ и $\nu_{\max} = 150$. Заметим, что это решения оказалось точным, что можно проверить с помощью программы CPLEX. Значение n увеличивалось согласно 3.4. На каждом шаге оценивалось точное значение критериальной функции $\varphi_\alpha(u^n)$ с помощью выборки $\{X^k\}_{k=1}^M$ объёма $M = 10^6$:

$$\hat{\varphi}_\alpha(u^n) = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi^{(M)}(u^n) \geqslant \alpha\}.$$

Текущее решение использовалось в качестве начального при увеличении объёма выборки до n. Результаты вычислений представлены в таблице 5.1.

Таким образом, улучшено начальное решение u^{400}, являющееся оптимальным для аппроксимирующей задачи при $n = 400$. Найдено решение u^{1200}, обеспечивающее значение критериальной функции $\varphi_\alpha(u^{1200}) = 20{,}5665$. Вычислительное время представлено в таблице 5.1. Заметим, что минимальное время потребовалось на поиск точного решения аппроксимирующей задачи при $n = 400$. Решения для больших значений n дают большее значение $\varphi_\alpha(u^N)$, что связано с трудность поиска точного решения аппроксимирующей задачи при больших значениях n. Кроме того, известно, что оценка φ_n является смещённой [198], но её точность увеличивается при увеличении объёма выборки. Можно заметить, что значение φ^n увеличивается в ростом n

Таблица 5.1. Результаты для нормального распределения.

n	Начальное ($n = 400$)	400	800	1200	1600	2000	2400
φ^n	21,2993	19,8220	19,7042	19,8525	20,2105	20,1861	20,2932
$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	20,7361	20,8272	20,6262	20,5665	20,6002	20,5989	20,6066
u^n	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,0162	0,0166	0,0231	0,0106	0,0172	0,0159
	0	0,1151	0,0601	0,0799	0,1440	0,1184	0,1057
	0	0	0	0	0	0	0
	0,0765	0,2327	0,0575	0,0838	0,0481	0,0454	0,0331
	0	0	0	0	0	0	0
	0,2807	0,0227	0,0980	0,0721	0,1402	0,1077	0,1035
	0	0	0	0	0	0	0
	0,2969	0,7215	0,4837	0,4890	0,7931	0,7234	0,6820
	0,3906	0,6317	0,4162	0,4278	0,5472	0,4826	0,4590
	0	0	0	0	0	0	0
	0,2685	0,5323	0,3879	0,3825	0,5615	0,5184	0,4832
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0,0586	0,1609	0,2064	0,1775	0,2587	0,2198	0,2184
	0,3033	0,0306	0	0	0	0	0,0147
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0,3106	0,3495	0,2618	0,2588	0,2938	0,2790	0,2787
Время (с)	0,39	156,11	260,68	272,04	355,68	273,66	287,05

5.2.2. Пример 2

Аналогичные вычисления были проведены для равномерного распределения на интервале $(-3; 3)$. Все исходные данные такие же, как и в примере 1. Значение α установлено на уровне 0,65. Точное решение при $n = 400$ обеспечивает приближённое значение критериальной функции 29,8424. Вычисления с помощью CPLEX продолжались 44001 секунд. Как и в предыдущем примере, с помощью алгоритма 3.3 удалось найти оптимальное решение при $n = 400$. Вычисления продолжались 281 секунду. Полученные результаты представлены в таблице 5.2.

Чтобы оценить точное значение функции квантили, использовалось выборка объёма 10^6. Лучшее решение было найдено при $n = 1200$. Это можно объяснить так же, как и в предыдущем примере. Когда число реализаций увеличивается, поиск точного решения аппроксимирующей задачи становится трудным. Затем, что несмотря на то, что распределение отлично от нормального, вычислительное время отличается незначительно. Это связано с симметрией распределения случайных факторов. Алгоритм 3.2 позволяет найти хорошее начальное приближение не только для нормального, но и для равномерного распределения.

5.2.3. Примеры большой размерности

Было сгенерировано десять примеров большой размерности. Случайные параметры распределены по стандартному нормальному закону. Для каждого примера задача решалась сведением к смешанной целочисленной линейной задаче, которая решалась и программой CPLEX, и алгоритмами, предложенными в работе. Каждый пример был решён для пяти значений α. Таким образом, были решены 50 задач. Размерности решаемых задач и результаты вычислений приведены в таблицах 5.3 и 5.4. Размерности задач определяются параметрами r, m, l_1, l_2. В таблице не приведены значения l_3, потому что в решённых примерах $A_3 = -I_r$, $b_3 = 0_r$. В таблице представлены значения критериальной функции задачи (3.78), обозначенные через через φ^n, и оценки точного значения критериальной функции. Оценки $\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$ получены по выборки объёма 10^6. Заметим, что неравенство $\varphi^n < \hat{\varphi}_\alpha(u^n)$, как правило, выполнено. Это связано со смещённостью оценки φ_n. Также значения n и длительности вычислений (в секундах) представлены в таблице. Для рассматриваемых алгоритмов приведено значение n, для которого найдено лучшее

Таблица 5.2. Результаты для равномерного распределения.

n	Начальное ($n = 400$)	400	800	1200	1600	2000	2400
φ^n	31,6816	29,8424	29,5564	29,7533	29,9616	29,9516	30,1634
$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	30,8493	30,7446	30,6263	30,5437	30,6471	30,6310	30,5789
u^n	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,0005	0,0756	0,1158	0,1491	0,1481	0,1603
	0	0,2677	0,2284	0,2268	0,1932	0,2029	0,1901
	0	0	0	0	0	0	0
	0,1203	0	0	0,0247	0,0183	0,0495	0,1211
	0	0	0	0	0	0	0
	0,3298	0,4333	0,3373	0,3795	0,4314	0,3968	0,3078
	0	0	0	0	0	0	0
	0,6268	1,5345	1,4599	1,5342	1,5181	1,4930	1,3949
	0,6795	0,8927	0,8557	0,9279	0,9794	1,0164	1,0167
	0	0	0	0	0	0	0
	0,4807	1,0043	0,9496	1,0036	0,9881	0,9906	0,9985
	0	0,0160	0,0010	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0,0791	0,6104	0,4551	0,4611	0,4287	0,3979	0,3467
	0,2937	0	0	0,0001	0,0010	0,0105	0,0002
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
	0,3786	0,4401	0,4057	0,4310	0,3832	0,3637	0,3274
Время (с)	0,80	281,12	193,19	207,57	294,75	242,45	284,63

решение, и представлен момент времени, в которых это решение было найдено.

При использовании CPLEX был установлен временнóй лимит равный 3600 секундам. Из таблиц 5.3 и 5.4 видно, что удалось улучшить решение для 40 задач из 50. Для пяти задач было найдёно то же самое решение. И только для 5 задач решение, полученное с помощью CPLEX, оказалось лучше найденного с помощью разработанного алгоритма. Результаты сравнивались по значению оценок функции квантили $\hat{\varphi}_\alpha(u^N)$. Кроме того, для 39 примеров из 50, вычислительное время разработанных алгоритмов меньше времени работы программы. CPLEX. Таким образом, можно заключить, что применение алгоритмов 3.3 и 3.4 позволяет найти лучшее решение за меньшее время.

5.3. Решение двухэтапной задачи

Приведём результаты применения модуля TSBLPQ для решения двухэтапной задачи стохастического программирования с билинейной функцией потерь и квантильным критерием. Рассмотрим задачу (3.95) для следующих данных:

$$c_0 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ C_{2i} = 0,\ i = \overline{1, s},\ s = 2,\ A_1 = 0.1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ a_{31} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ \alpha = 0{,}8.$$

Вычисления проводились на ЭВМ AMD Athlon (tm) 64 Processor 3500+, 2,21 ГГц, 512 МБ ОЗУ. Результат применения алгоритма 3.7 представлен в табл. 5.5.

На каждом шаге оценивалось значение исходной функции квантили $\varphi_\alpha(u^n)$ по выборке $\{X_k\}_{k=1}^M$ объёма $M = 10^6$. Можно заметить по табл. 5.5, что лучшее решение было получено для выборки объёма 500. Появлению данного результата способствовали две причины. Во-первых, решалась не исходная задача, а ее аппроксимация. Во-вторых, в случае большого объема выборки точное решение задачи становится затруднительным.

Сформулированная задача также была решена с помощью процедуры, аналогичной алгоритму 3.7, но в которой аппроксимирующая задача (3.78) решалась с помощью метода имитации отжига. Полученные результаты приведены в табл. 5.6, из которых видно, что

Таблица 5.3. Решение примеров большой размерности.

Пример,	α	CPLEX				Алгоритмы 3.3 и 3.4			
Размерность		n	φ^n	$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	Время	n	φ^n	$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	Время
Inst. 1,	0,6	200	17,219	18,050	270	300	17,023	18,220	94
$r = 30$,	0,8	300	25,008	26,836	1524	400	25,101	26,538	312
$m = 20$,	0,9	400	30,168	32,772	370	400	30,168	32,772	87
$l_1 = 20$,	0,95	500	34,698	37,901	349	500	34,698	37,901	2
$l_2 = 10$.	0,99	600	40,670	47,933	73	600	40,670	47,933	16
Inst. 2,	0,6	200	17,355	18,945	2037	200	18,181	18,902	37
$r = 50$,	0,8	250	25,609	27,767	664	350	25,093	27,647	413
$m = 20$,	0,9	300	30,326	34,101	658	400	30,242	33,900	314
$l_1 = 25$,	0,95	400	34,943	39,440	158	500	35,253	39,375	73
$l_2 = 12$.	0,99	600	42,628	50,064	291	800	43,226	49,453	45
Inst. 3,	0,6	150	13,307	16,979	1815	250	14,317	16,460	489
$r = 70$,	0,8	250	22,082	26,488	3452	350	21,722	26,190	637
$m = 25$,	0,9	300	28,588	33,551	737	400	29,988	32,957	793
$l_1 = 25$,	0,95	400	34,678	38,551	639	500	34,773	38,381	355
$l_2 = 14$.	0,99	600	45,588	50,134	108	700	45,419	49,621	121
Inst. 4,	0,6	150	9,431	12,709	1599	250	9,825	12,147	426
$r = 90$,	0,8	250	17,641	21,080	3600	350	17,122	21,022	631
$m = 25$,	0,9	300	23,785	28,409	1735	300	24,237	28,487	38
$l_1 = 25$,	0,95	400	28,772	34,034	406	500	28,750	33,962	466
$l_2 = 14$.	0,99	600	41,518	46,003	77	700	42,327	45,695	104
Inst. 5,	0,6	150	-10,631	-6,827	3600	250	-10,419	-7,503	1173
$r = 120$,	0,8	250	-0,614	3,833	3600	350	-0,093	3,628	1040
$m = 30$,	0,9	300	5,793	11,977	947	400	7,274	11,755	1051
$l_1 = 30$,	0,95	400	14,428	20,581	1175	400	14,773	20,358	3
$l_2 = 16$.	0,99	600	24,666	32,803	123	700	23,809	32,077	186

Таблица 5.4. Решение примеров большой размерности

Пример, Размерность	α	CPLEX				Алгоритмы 3.3 и 3.4			
		n	φ^n	$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	Время	n	φ^n	$\hat{\varphi}_\alpha(u^n)$	Время
Inst. 6,	0,6	150	16,331	20,382	3600	250	16,343	20,368	1332
$r = 160$,	0,8	200	24,762	31,696	3600	300	25,090	30,500	1298
$m = 30$,	0,9	250	31,983	39,077	1567	250	32,859	38,665	165
$l_1 = 35$,	0,95	350	39,437	45,454	1612	450	38,613	44,377	1220
$l_2 = 16$.	0,99	500	47,257	56,653	82	600	46,921	56,294	182
Inst. 7,	0,6	150	0,520	8,077	3600	250	2,431	8,107	2185
$r = 200$,	0,8	200	11,605	20,510	3600	300	12,294	19,754	4863
$m = 40$,	0,9	250	20,417	29,298	1915	350	20,262	29,050	2830
$l_1 = 40$,	0,95	350	27,287	36,977	2443	450	28,463	36,873	1838
$l_2 = 18$.	0,99	450	38,809	51,154	116	550	37,689	50,857	317
Inst. 8,	0,6	150	7,708	15,709	3600	250	9,339	14,870	2067
$r = 240$,	0,8	200	19,745	27,746	3600	300	19,995	26,915	1904
$m = 40$,	0,9	250	28,383	37,452	3600	350	27,854	36,746	1862
$l_1 = 40$,	0,95	350	33,981	43,995	3089	450	35,639	43,231	1930
$l_2 = 18$,	0,99	450	45,456	57,903	130	550	44,594	57,420	128
Inst. 9,	0,6	150	2,652	9,606	3600	250	3,396	9,923	3206
$r = 280$,	0,8	200	12,388	22,356	3600	300	13,558	22,294	1873
$m = 50$,	0,9	250	21,162	33,361	3600	350	23,625	32,967	2347
$l_1 = 45$,	0,95	350	30,561	41,813	3600	450	31,632	41,913	1932
$l_2 = 20$.	0,99	400	42,054	57,733	131	400	42,054	57,733	2
Inst. 10,	0,6	150	14,119	23,047	3600	250	14,866	22,262	3215
$r = 350$,	0,8	200	25,082	35,009	3600	300	26,136	34,759	2805
$m = 50$,	0,9	250	32,519	45,235	3600	350	34,261	44,978	2406
$l_1 = 50$,	0,95	350	41,244	54,394	1325	450	41,218	53,163	1919
$l_2 = 20$.	0,99	350	56,952	70,701	195	350	56,952	70,701	2

Таблица 5.5. Результаты применения поиска с чередующимися окрестностями

	Начальное решение ($n = 500$)	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$
φ_n	10,0545	6,5185	7,5775	8,1310
$\hat{\varphi}_\alpha(u_n)$	10,5598	8,1974	8,5239	8,2136
u_{n1}	0	0	0,1699	0,0121
u_{n2}	1,1438	1,2813	1,3774	1,2618
u_{n3}	1,0492	0,2912	0,1041	0,2741
Время, с	0,16	70,71	220,53	2072,95

Таблица 5.6. Результаты применения метода имитации отжига

	Начальное решение ($n = 500$)	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$
φ_n	10,0545	6,5185	7,5775	8,1178
$\hat{\varphi}_\alpha(u_n)$	10,5598	8,1974	8,5239	8,4959
u_{n1}	0	0	0,1699	0,0483
u_{n2}	1,1438	1,2813	1,3774	1,1891
u_{n3}	1,0492	0,2912	0,1041	0,5515
Время, с	0,16	447,93	1537,63	2739,04

описанный в статье поиск с чередующимися окрестностями позволяет найти решение за меньшее время. При этом для $n = 500$ и $n = 1000$ найдено то же решение, а при $n = 1500$ — близкое решение, что косвенно свидетельствует о возможности поиска близкого к оптимальному решения с помощью разработанного алгоритма.

Чтобы найти точное решение аппроксимирующей задачи, задача (3.78) была сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Для увеличения скорости поиска, использовалось описанное выше свойство α-ядра. Эквивалентная задача решалась с помощью CPLEX. Было получено решение с значением критериальной функции $\varphi_n = 8{,}1138$ при $n = 1500$. Вычисления длились 7502 секунд.

Таким образом, видно, что с помощью предложенного алгоритма может быть найдено хорошее решение задачи. При этом алгоритму требуется меньшее время, чем время вычислений с помощью CPLEX и метода имитации отжига.

Кроме того, найдена нижняя оценка φ_α, равная $\bar{\psi}(K_\alpha) = 5{,}7352$.

5.4. Решение задачи выбора энергосберегающих проектов

В данном разделе приводится пример использования модуля ID разработанного программного комплекса.

Рассмотрим задачу выбора энергосберегающих проектов (1.45), сформулированную в виде двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием. Наряду с ней будем рассматривать аналогичную задачу (5.1) с критерием в форме математического ожидания.

Будем считать, что имеются три энергосберегающих проекта со стоимостями реализаций $c_1 = 10$, $c_2 = 20$, $c_3 = 30$ млн руб. Плановый период равен одному месяцу. Первый проект позволит сэкономить $a_{1i} = a_1 = 2$ млн кВт·ч в i-й плановый период, второй — $a_{2i} = a_2 = 3$ млн кВт·ч, третий — $a_{3i} = a_3 = 4$ млн кВт·ч, $i = \overline{1,m}$. Представленные параметры модели одинаковы для всех $i = \overline{1,m}$. Пусть случайные величины X_i, $i = \overline{1,m}$, независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_m = 25$ млн кВт·ч и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 4$ млн кВт·ч. Стоимость электроэнергии составляет $q_i = q = 1{,}2$ руб. / кВт·ч, $i = \overline{1,m}$. Задача решалась для уровня доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

В таблице 5.7 приведены результаты решения задачи с помощью разработанного программного комплекса для различных параметров m, оптимальные стратегии $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^\top$, значения критериальных функций задач (1.45) и (5.1), а также усредненные по периодам значения критериальных функций.

Как видно из таблицы 5.7, при увеличении количества плановых периодов увеличивается количество реализуемых инвестиционных проектов. Для дополнительного анализа эффективности проектов приведены среднемесячные издержки. При увеличении количества плановых периодов уменьшаются среднемесячные затраты.

Представляет интерес сравнение возможных издержек при реализации и нереализации инвестиционных проектов. Данная зависимость изображена на рис. 5.5. Линия 1 соответствует издержкам по квантильному критерию (без реализации проекта); линия 2 — издержкам по квантильному критерию (при оптимальной реализации проектов); линия 3 — издержкам по критерию в форме математического ожидания (без реализации проектов); линия 4 — издержкам по критерию в форме математического ожидания (при оптимальной реализации проектов).

Таблица 5.7. Результаты решения задачи выбора проектов.

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
u_1	0	0	0	0	1	1
u_2	0	0	0	0	0	1
u_3	0	0	0	0	0	0
$[\Phi(u,X)]_\alpha$	37,896	71,167	103,676	135,792	165,656	193,341
$\frac{[\Phi(u,X)]_\alpha}{m}$	37,896	35,583	34,559	33,948	33,131	32,224
$\mathbf{M}[\Phi(u,X)]$	30,000	60,000	90,000	120,000	148,000	174,000
$\frac{\mathbf{M}[\Phi(u,X)]}{m}$	30,000	30,000	30,000	30,000	29,600	29,000
	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$	$m=11$	$m=12$
u_1	1	1	1	1	1	1
u_2	1	1	1	1	1	1
u_3	1	1	1	1	1	1
$[\Phi(u,X)]_\alpha$	215,291	235,933	256,488	276,969	297,388	317,753
$\frac{[\Phi(u,X)]_\alpha}{m}$	30,756	29,492	28,499	27,697	27,035	26,479
$\mathbf{M}[\Phi(u,X)]$	194,400	213,600	232,800	252,000	271,200	290,400
$\frac{\mathbf{M}[\Phi(u,X)]}{m}$	27,771	26,700	25,867	25,200	24,655	24,200

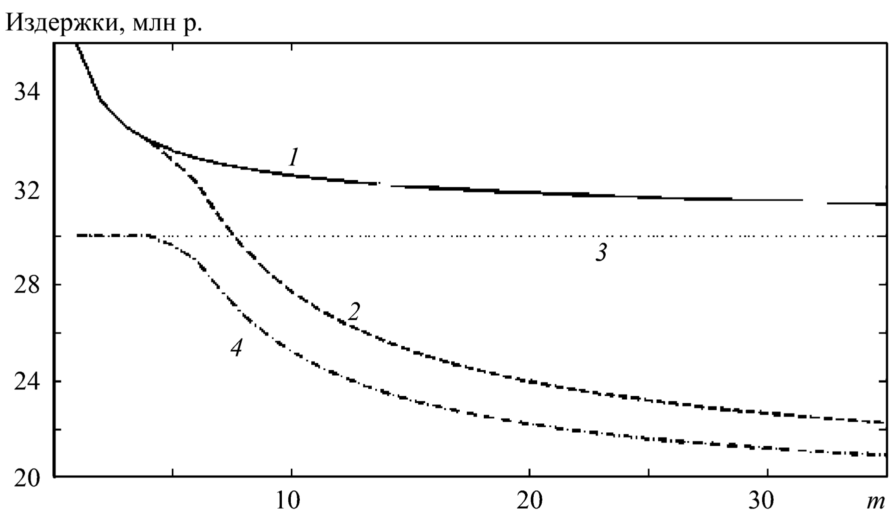

Рисунок 5.5. Среднемесячные издержки.

Как видно из рисунка 5.5, при большом количестве плановых периодов реализация проектов позволяет значительно сократить среднемесячные издержки. Как видно из таблицы, при увеличении числа плановых периодов увеличивается число реализуемых инвестиционных проектов. Данная таблица даёт представление как средних издержках, так и о квантили издержек. Для дополнительного анализа эффективности проектов приведены среднемесячные издержки. При увеличении числа плановых периодов уменьшаются среднемесячные затраты. Представляет интерес сравнение возможных издержек при реализации и нереализации инвестиционных проектов. Зависимость среднемесячных издержек от числа плановых периодов изображена на рис. 5.5. Различными линиями изображены усреднённые значения функции квантили при реализации и нереализации инвестиционных проектов. Аналогичные зависимости изображены для решения задачи с критерием в форме математического ожидания. Как видно из графика, при большом числе плановых периодов реализация проектов позволяет значительно сократить среднемесячные издержки.

5.5. Решение двухуровневой задачи планирования производства

Решим с помощью разработанного модуля TSBLPQ программного комплекса задачу моделирующую взаимодействие производителя продукции и поставщика ресурсов (1.58). Пусть параметры, описывающие постановку задачи, определены следующим образом:

$$\tilde{q} = (3; 3{,}6; 3{,}8)^\top, \quad b = (20; 25; 30)^\top,$$
$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\bar{b} = (110; 150; 180)^\top, \quad \bar{y} = (0{,}5; 0{,}2; 0{,}4)^\top.$$

Пусть случайная величина X имеет десять реализаций x_1, x_2, …, x_{10} с равными вероятностями 0,1. Значения $c(x)$ и $\hat{q}(x)$ приведены в таблице 5.8.

Уровень доверительной вероятности $\alpha = 0{,}9$. Этот уровень гарантирует получаемый доход при девяти реализациях из десяти. Обратим внимание на то, что уровни вероятности $\alpha \in (0{,}8; 0{,}9]$ обеспечивают такой же результат. Большие значения α не имеют смысла

Таблица 5.8. Исходные данные.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_1(x_k)$	50	50	50	50	45	45	45	40	40	40
$c_2(x_k)$	45	45	45	45	40	40	40	35	35	35
$\hat{q}_1(x_k)$	3	3,5	3	3,5	2,5	3	3	2	1,5	1,5
$\hat{q}_2(x_k)$	3,5	3	3,5	3	3	3,5	3	2,5	2	2,5
$\hat{q}_3(x_k)$	3,5	3,5	4	4	3,5	3,5	3,5	3	2,5	2

в решаемой задаче, поскольку будут обеспечивать стратегию, гарантирующую результат для всех десяти реализаций, что не согласуется со стохастической постановкой задачи. Уровни $\alpha \leqslant 0{,}8$ неинтересны в силу высокого риска получаемого решения.

Пусть функции, заданные в (3.23) и (3.24), определны следующим образом: $\gamma_1(u,x) \equiv \bar{\gamma}_1$, $\gamma_2(u,x) \equiv \bar{\gamma}_2$. Из (1.55) следует, что $\|y\|_\infty \leqslant 150$. Из неравенства $Q(u,x,y) \leqslant 0$ получается, что $\|u\|_\infty \leqslant 60$. Таким образом, $-600 \leqslant \Phi(u,x,y) \leqslant 2025$, $Q(u,x,y) \leqslant 840$, $\bar{\gamma}_1 = 2625$, $\bar{\gamma}_2 = 840$. С помощью предложенного метод решения задачи получается эквивалентная задача, решаемая с помощью разработанного программного комплекса:

$$\varphi \to \inf_{\varphi \in \mathbb{R}, u, y^1, \ldots, y^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n, \delta \in \{0,1\}^n} \tag{5.3}$$

при ограничениях

$$-c(x_k)^\top u + \tilde{q}^\top \tilde{y}^k - (1-\delta_k)\bar{\gamma}_1 \leqslant \varphi, \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.4}$$

$$Tu - \tilde{y}^k - b - (1-\delta_k)\bar{\gamma}_2 e_3 \leqslant 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.5}$$

$$(y^k, \lambda^k) \in V(u,x), \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \delta_k \geqslant \alpha, \tag{5.7}$$

$$u \geqslant 0,\ y^k \geqslant 0,\ \lambda^k \geqslant 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{5.8}$$

где e_3 вектор, составленный из трёх единиц. Поскольку $Y^*(u,x) \neq \varnothing$, неравенство (3.31) может быть заменено на (3.39) согласно замечанию 3.1. Условие (5.6) имеет вид

$$
\begin{aligned}
Ay^k &\geqslant b(u), \quad k=\overline{1,n}, && (5.9)\\
A^\top \lambda^k &\leqslant q(x_k), \quad k=\overline{1,n}, && (5.10)\\
(Ay^k - b(u))^\top \lambda^k &= 0, \quad k=\overline{1,n}, && (5.11)\\
(A^\top \lambda^k - q(x_k))^\top y^k &= 0, \quad k=\overline{1,n}, && (5.12)
\end{aligned}
$$

где

$$
A = \begin{pmatrix} -I_3 & O_3 \\ -D & -D \\ I_3 & O_3 \end{pmatrix},
$$

$$
q(x) = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \hat{q}(x) \end{pmatrix},
$$

$$
b(u) = \begin{pmatrix} -Tu \\ -\bar{b} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.
$$

Равенства (5.11) и (5.12) нелинейны, но они могут преобразованы в линейные неравенства с дополнительными бинарными векторами η^k, ζ^k с помощью метод, изложенного в [130]:

$$\lambda^k \leqslant L(e_m - \eta^k), \tag{5.13}$$

$$Ay^k - b(u) \leqslant L\eta^k, \quad k=\overline{1,n}, \tag{5.14}$$

$$y^k \leqslant L(e_{2k} - \zeta^k), \tag{5.15}$$

$$q(x_k) - A^\top \lambda^k \leqslant L\zeta^k, \quad k=\overline{1,n}, \tag{5.16}$$

где L — достаточно большая константа. В данном примере установлено значение $L = 2500$.

Таким образом, мы свели задачу (1.58) к смешанной целочисленной задаче линейного программирования, в которой минимизируется значение φ, определяемое через (5.3) при ограничениях (5.4), (5.5), (5.7), (5.8), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16). Решение задачи (5.3) имеет вид

$$u^* = (2{,}99, 1{,}42)^\top, \quad \varphi^*_\alpha = -86{,}21. \tag{5.17}$$

Отпимальная стратегия последователя, значения $\varphi^*(x) \triangleq \Phi(u^*, x, y^*(x))$ и $\psi(x_k) \triangleq$ $\triangleq c(x_k)^\top y^*(x_k)$ даны в таблице 5.9.

Таблица 5.9. Оптимальное решение задачи последователя.

k	1	2	3	4	5	6, 7	8, 9, 10
$\tilde{y}_1^*(x_k)$	0,5	0,5	0,5	0,5	1,35	0,5	1,35
$\tilde{y}_2^*(x_k)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
$\tilde{y}_3^*(x_k)$	20,64	0,4	0,4	0,4	20,64	20,64	20,64
$\hat{y}_1^*(x_k)$	0,84	26,15	0	26,15	0	0,84	0
$\hat{y}_2^*(x_k)$	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{y}_3^*(x_k)$	0	0	20,92	0	0	0	0
$-\varphi^*(x_k)$	132,9	209,8	209,8	209,8	108,3	110,8	86,21
$\psi(x_k)$	83,20	95,27	87,42	95,27	83,20	83,20	83,20

5.6. Решение задачи определения налоговой ставки

В данном разделе приводится ещё один пример использования модуля TSBLPQ разработанного программного комплекса. Рассмотрим задачу (1.70) определения налоговой ставки для следующих данных:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что издержки производства X_1, X_2 являются независимыми и описываются равномерным распределением на отрезке $[0, 3]$.

Результат применения алгоритма для решения задачи при $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}95$ отражён в таблице 5.10. Для удобства значение целевой функции приводится с противоположным знаком.

Для поиска оптимального значения стратегии лидера u_N в аппроксимирующей задачей перебирались её значения с шагом 0,005.

Как видно из таблицы, стабилизация значения целевой функции и стратегии наблюдается с $n = 7000$. При этом оптимальный размер налоговой ставки для уровня на-

Таблица 5.10. Решение задачи определения налоговой ставки

	$\alpha = 0{,}8$		$\alpha = 0{,}95$	
N	u_n	$-\psi_n$	u_n	$-\psi_n$
500	0,630	2,520	0,495	1,980
1000	0,625	2,500	0,490	1,960
1500	0,625	2,500	0,490	1,960
2000	0,625	2,500	0,490	1,960
2500	0,625	2,500	0,490	1,960
3000	0,625	2,500	0,495	1,980
3500	0,625	2,500	0,495	1,980
4000	0,630	2,520	0,495	1,980
4500	0,630	2,520	0,500	2,000
5000	0,630	2,520	0,500	2,000
5500	0,625	2,500	0,495	1,980
6000	0,625	2,500	0,495	1,980
6500	0,630	2,520	0,500	2,000
7000	0,630	2,520	0,495	1,980
7500	0,630	2,520	0,495	1,980
...	...	...	...	...
10000	0,630	2,520	0,495	1,980

дёжности 0,8 составляет 63%, а для уровня надёжности 0,95 — 49,5%.

График зависимости гарантированной величины сбора налогов для уровня надёжности 0,8 приведён на рис. 5.6, а для уровня надёжности 0,95 — на рис. 5.7.

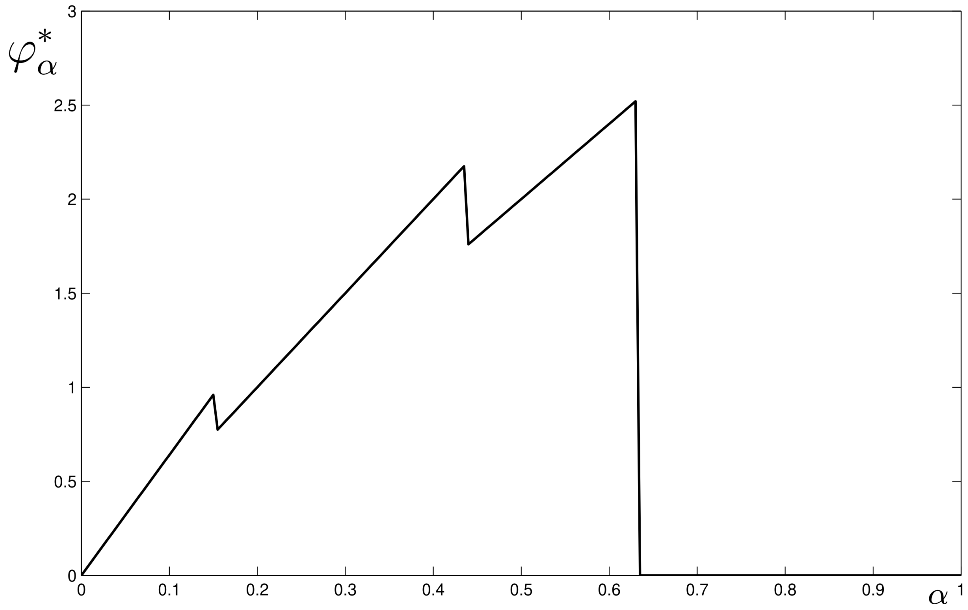

Рисунок 5.6. Результат при $\alpha = 0{,}8$.

Как и следовало ожидать, полученные графики показывают, что сбор налогов является низким как при низкой налоговой ставке, так и при высокой налоговой ставке. При высокой налоговой ставке производителю невыгодно выпускать продукцию, поэтому он уходит с рынка. Заметим, что при незначительном отклонении от оптимальной стратегии государства производитель будет уходить с рынка. По этой причине полученная в результате решения модельной задачи стратегия государства, хотя и обеспечивает максимальный сбор налогов, не может быть реализована на практике.

5.7. Решение задачи оптимизации параметров взлётно-посадочной полосы

В данном разделе для решения задачи оптимизации площади взлётно-посадочной полосы (ВПП) адаптируется метод, изложенный в разделе 3.4.4, после чего для решения задачи применяется модуль SSLPQ разработанного программного комплекса. Ранее данная задача рассматривалась в работах [53, 153], где для её решения применялся тру-

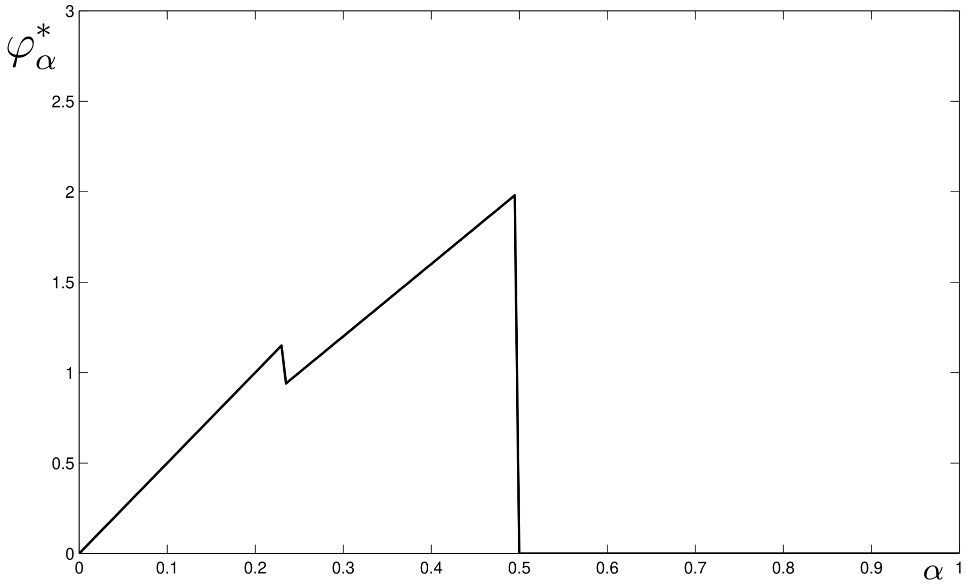

Рисунок 5.7. Результат при $\alpha = 0{,}95$.

доёмкий стохастический квазиградиентный алгоритм, и в [15], где был предложен метод поиска верхней оценки оптимального значения целевой функции. Поскольку на посадку летательного аппарата существенное влияние оказывает ветер, невозможно точно определить точку посадки. По этой причине влияние ветра описывается с помощью случайных величин. Для безопасного приземления необходимо обеспечить запас по ширине и длине ВПП. Но стоимость сооружения ВПП зависит от её площади. Требования к безопасному приземлению моделируются с помощью вероятностных ограничений. Таким образом, формулируется задача минимизации площади ВПП при ограничениях на вероятность успешной посадки. С использованием идеи, предложенной в [53], полученная задача с помощью специальной замены переменных сводится к задаче стохастического программирования с квантильным критерием. Данная задача оказывается более сложной, чем рассмотренная в первой части работы, тем не менее, разработанный алгоритм оказывается применимым для её решения.

5.7.1. Постановка задачи

Пусть требуется найти оптимальные размеры взлётно-посадочной полосы (ВПП), на которую планируется успешная посадка самолёта с заданной вероятностью. Пусть площадь ВПП равна

$$S(l_1, l_2, z_1) = 2z_1(l_0 + l_1 + l_2), \tag{5.18}$$

где l_1 — запас по длине ВПП на случай недолёта до точки посадки, l_2 — запас по длине на случай перелёта, z_1 — полуширина ВПП, l_0 — длина свободного пробега самолёта. Очевидно, что переменные l_1, l_2, z_1 должны удовлетворять ограничениям

$$l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0.$$

Предположим, что отклонение самолёта от линии посадки связано со случайной скоростью ветра в продольном $W_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ и боковом $W_z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$ направлениях, W_x, W_z независимы. Тогда отклонения в продольном и боковом направлениях можно описать соотношениями

$$X = a_{11}W_x + a_{12}|W_z|, \quad Z = a_{22}W_z.$$

Такая модель возникает при управлении самолётом во время посадки только с помощью угла крена [153]. Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} считаются известными. Посадку будем считать успешной, если выполнено вероятностное ограничение

$$\mathbf{P}\{-l_1 \leqslant X \leqslant l_2,\ |Z| \leqslant z_1\} \geqslant \alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{5.19}$$

Сформулируем задачу по выбору оптимального размера ВПП

$$S(l_1, l_2, z_1) \to \min_{l_1, l_2, z_1} \tag{5.20}$$

при наличии вероятностного ограничения (5.19).

5.7.2. Сведение к задаче минимизации функции квантили

Чтобы применить разработанный метод, преобразует задачу (5.20) с вероятностными ограничениями к задаче минимизации функции квантили. Произведём замену переменных

$$\varphi = \sqrt{S}, \quad u_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad u_2 = \frac{l_0 + l_1 + l_2}{2z_1}. \tag{5.21}$$

Тогда

$$z_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{4u_2}}, \quad l_1 = \frac{(\varphi\sqrt{u_2} - l_0)u_1}{1 + u_1}, \quad l_2 = \frac{\varphi\sqrt{u_2} - l_0}{1 + u_1}. \tag{5.22}$$

Вероятностное ограничение (5.19) преобразуется в ограничение

$$P_\varphi(u_1, u_2) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u_1, u_2, X, Z) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha, \tag{5.23}$$

где

$$\Phi(u_1,u_2,X,Z) \triangleq \max\{\Phi_1(u_1,u_2,X),\ \Phi_2(u_1,u_2,X),\ \Phi_3(u_2,Z)\},$$
$$\Phi_1(u_1,u_2,X) \triangleq \frac{-X(1+u_1)/u_1+l_0}{\sqrt{u_2}},$$
$$\Phi_2(u_1,u_2,X) \triangleq \frac{X(1+u_1)+l_0}{\sqrt{u_2}},$$
$$\Phi_3(u_2,Z) \triangleq 2|Z|\sqrt{u_2}.$$

После замены переменных задача (5.20), (5.19) может быть записана в виде задачи минимизации функции квантили

$$\varphi_\alpha(u_1,u_2) \to \min_{u_1\geqslant 0, u_2\geqslant 0}, \tag{5.24}$$

где $\varphi_\alpha(u_1,u_2) = \min\{\varphi \mid P_\varphi(u_1,u_2) \geqslant \alpha\}$. Отметим, что функция квантили связана с оптимизируемой площадью ВПП соотношением

$$S = (\varphi_\alpha(u_1,u_2))^2\,. \tag{5.25}$$

Полученная задача содержит только две стратегии оптимизации в отличие от исходной задачи (5.20) с тремя оптимизационными стратегиями.

5.7.3. Алгоритм

В [153] предложено решение сформулированной задачи, которое достаточно трудоёмкое. Оно основано на непосредственной оптимизации функции квантили и методе стохастической аппроксимации. Предложим другой подход к решению поставленной задачи. Вначале заметим, что функция потерь в данном случае имеет скалярную структуру (3.72). Однако, при этом функции g_i, $i=\overline{1,3}$, не являются выпуклыми, что требовалось разделе 3.4.4. Тем не менее, применим описанный метод решения поставленной задачи. Введём функции, определённые соотношениями

$$\varphi_1(w_x,w_z) \triangleq a_{11}w_x + a_{12}|w_z|,$$
$$\varphi_2(w_x,w_z) \triangleq -a_{11}w_x - a_{12}|w_z|,$$
$$\varphi_3(w_x,w_z) \triangleq 2|a_{22}w_z|.$$

Рассмотрим доверительный эллипсоид

$$B_\alpha = \left\{(w_x,w_z)\in\mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{w_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{w_z}{\sigma_z}\right)^2 \leqslant r_\alpha^2\right\}, \quad r_\alpha = \sqrt{-2\ln(1-\alpha)},$$

и α-ядро вероятностной меры

$$K_\alpha = \left\{(w_x, w_z) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{w_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{w_z}{\sigma_z}\right)^2 \leqslant \rho_\alpha^2.\right\}$$

Проведём дискретизацию вероятностной меры и получим точки $w^k = (w_x^k, w_z^k)^\top$, $k = \overline{1, n}$, с вероятностями $p_k = 1/n$. Поскольку нормальное распределение является непрерывным, можно считать, что все полученные точки попарно различны.

Найдём значения функций

$$\varphi_1^*(B_\alpha) \triangleq \max_{k | w^k \in B_\alpha} \varphi_1(w_x^k, w_z^k),$$
$$\varphi_2^*(B_\alpha) \triangleq \max_{k | w^k \in B_\alpha} \varphi_2(w_x^k, w_z^k),$$
$$\varphi_3^*(B_\alpha) \triangleq \max_{k | w^k \in B_\alpha} \varphi_3(w_x^k, w_z^k).$$

Будем считать, что все полученные значения положительны. С высокой вероятностью это выполнено при достаточно большом количестве точек w^k. хотя функции $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ и $\varphi_3(\cdot)$ могут принимать отрицательные значения. Рассмотрим функции, определённые соотношениями

$$\Psi_1(B_\alpha, u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{u_2}} \left(\varphi_1^*(B_\alpha) \frac{u_1 + 1}{u_1} + l_0\right),$$
$$\Psi_2(B_\alpha, u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{u_2}} \left(\varphi_2^*(B_\alpha)(u_1 + 1) + l_0\right),$$
$$\Psi_3(B_\alpha, u_1, u_2) = \varphi_3^*(B_\alpha)\sqrt{u_2}.$$

Найдём оптимальные значения $\bar{u}_1^r$, $\bar{u}_2^r$ как решение задачи

$$\bar{u}^r = \arg \min_{\bar{u}_1 \geqslant 0, \bar{u}_2 \geqslant 0} \max\{\Psi_1(B_\alpha, \bar{u}), \Psi_2(B_\alpha, \bar{u}), \Psi_3(B_\alpha, \bar{u})\}. \tag{5.26}$$

Заметим, что, хотя в данном случае получаемые функции не являются выпуклыми, но их максимум является одноэкстремальной функцией. Вначале найдём оптимальное $\bar{u}_1^r$, которое минимизирует функцию

$$u_1 \mapsto \Psi_{12}(B_\alpha, u) = \max\{\Psi_1(B_\alpha, u), \Psi_2(B_\alpha, u)\}.$$

при фиксированном u_2. В данном случае функция $(u_1, u_2) \mapsto \Psi_1(B_\alpha, u_1, u_2)$ убывает по u_1 при фиксированном u_2, а функция $(u_1, u_2) \mapsto \Psi_2(B_\alpha, u_1, u_2)$ возрастает по u_1 при фиксированном u_2. Поэтому минимум из их максимумов по u_1 достигается в точке пересечения этих функций, т. е.

$$\bar{u}_1^r = \begin{cases} \varphi_1^*(B_\alpha)/\varphi_2^*(B_\alpha), & a_{12} > 0, \\ \varphi_2^*(B_\alpha)/\varphi_1^*(B_\alpha), & a_{12} < 0, \\ 1, & a_{12} = 1. \end{cases} \tag{5.27}$$

Оптимальное значение u_2^r находится как корень уравнения

$$\Psi_{12}(B_\alpha, \bar{u}_1^r, \bar{u}_2) = \Psi_3(B_\alpha, \bar{u}_2),$$

откуда находим

$$\bar{u}_2^r = \frac{\varphi_1^*(B_\alpha) + \varphi_2^*(B_\alpha) + l_0}{\varphi_3^*(B_\alpha)}. \tag{5.28}$$

Здесь существенно используется монотонность функций $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot)$. В общем случае различные численные методы могут быть применены для поиска $\bar{u}^r$. Оптимальное значение функции максимума, которая является оценкой сверху функции квантили, равняется

$$\Psi(B_\alpha, \bar{u}_1^r, \bar{u}_2^r) = \sqrt{\varphi_3^*(B_\alpha)\left(\varphi_1^*(B_\alpha) + \varphi_2^*(B_\alpha)\right)}. \tag{5.29}$$

Заметим, что хотя функция потерь не является выпуклой, выполняется оценка сверху

$$\Psi(B_\alpha, \bar{u}_1^r, \bar{u}_2^r) \geqslant \min_{u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0} \varphi_\alpha(u_1, u_2)$$

поскольку множество B_α доверительное. Аналогично решается минимаксная задача для ядра K_α. В этой задаче $\varphi_1^*(B_\alpha)$, $\varphi_2^*(B_\alpha)$, $\varphi_3^*(B_\alpha)$ заменены $\varphi_1^*(K_\alpha)$, $\varphi_2^*(K_\alpha)$, $\varphi_3^*(K_\alpha)$ соответственно.

Рассмотрим теперь эллипсоид B_R для произвольного характерного радиуса $R \in (\rho_\alpha, r_\alpha)$. Для каждого R структура оптимального управления будет одна и та же (5.27), (5.28), будут только меняться $\varphi_1^*(B_R)$, $\varphi_2^*(B_R)$, $\varphi_3^*(B_R)$. Выберем такой минимальный параметр R, чтобы $\bar{P}_R \geqslant \alpha$. Полученное решение $(\bar{u}_1^R, \bar{u}_2^R, \bar{u}_3^R)$ будем рассматривать как начальное приближение для применения поиска с чередующимися окрестностями. Заметим, что при вариации доверительного множества S будут параллельно сдвигаться прямые, его ограничивающие в пространстве переменных (x, z). Характерный вид данного множество приведён на рис. 5.8. В пространстве (x, z) данное множество является прямоугольником, в отличие от пространства переменных (w_x, w_z), где данное множество является невыпуклым шестиугольником.

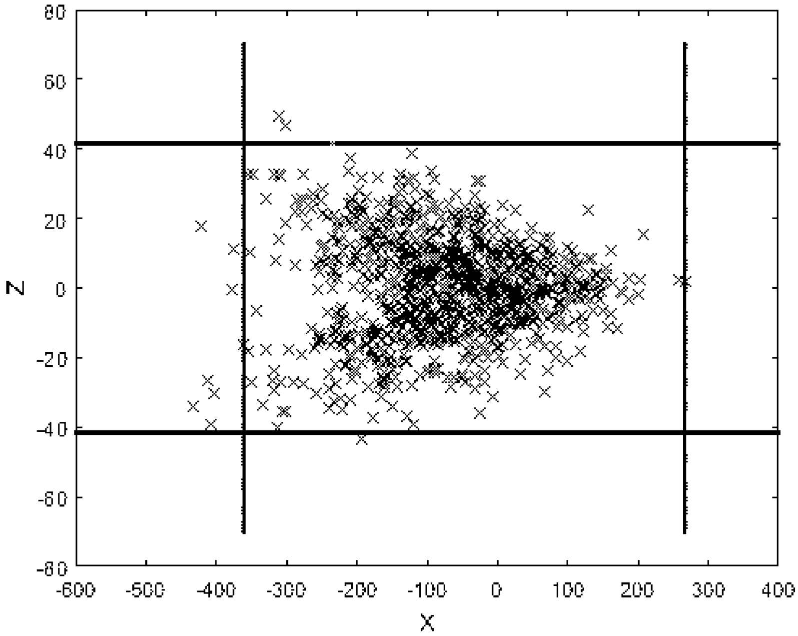

Рисунок 5.8. Типичный вид доверительного множества.

Применяя далее метод дихотомии и деля отрезок $[\rho_\alpha, r_\alpha]$ пополам, находим решение $\bar{u}_1^R$, $\bar{u}_2^R$ для эллипсоида

$$\left\{(w_x, w_z) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{w_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{w_z}{\sigma_z}\right)^2 \leqslant R^2\right\},$$

при котором вероятностная мера получаемого множества S_R вида (3.70) будет наиболее близка к α, оказываясь при этом не меньшем чем α. Поэтому получаемое решение будет давать по-прежнему оценку сверху для оптимального значения функции квантили.

Затем применим поиск с чередующимися окрестностями, чтобы улучшить полученное приближённое решение. Заметим, что при варьировании доверительного множества S его границы будут сдвигаться параллельно друг другу, что связано со скалярной структурой функции потерь. Это значительно упрощает вариацию доверительного множества на основе поиска с чередующимися окрестностями.

Пусть S — некоторое доверительное множество, состоящее из $[\alpha n]$ точек. Оно имеет вид

$$S = \left\{(w_x^k, w_z^k) \mid \varphi_j(w_x^k, w_z^k) \leqslant d_j,\ j = \overline{1,3},\ k = \overline{1,n}\right\}. \tag{5.30}$$

Заметим, что множество S полностью определяется двумя параметрами d_1 и d_2. Параметр d_3 определяется однозначно из условия $\mathbf{P}(S) = \alpha$ по значениям d_1 и d_2. Введём окрестности $O_\nu(S)$, $\nu \in \mathbb{N}$ доверительного множества S следующим образом. Включим в окрестность $O_\nu(S)$ множества S четыре доверительных множества S_1, S_2, S_3, S_4. Для построения множества S_1 увеличим значение d_1 таким образом, чтобы в получающееся множество вошли ровно ν новых точек. Значение k_2 при этом не меняется, а значение d_3 подбирается из условия $\mathbf{P}(S_1) = \alpha$. Для построения множества S_2 значением d_1 выбирается таким образом, чтобы исключить из множества S ровно ν точек. Как и в предыдущем случае, значение d_2 при этом не меняется, а значение d_3 подбирается из условия $\mathbf{P}(S_2) = \alpha$. Множества S_3 и S_4 строятся по аналогии с множествами S_1 и S_2, только изменяется значение параметра d_2. Если какие-то из множеств построить не удаётся, то в окрестность $O_\nu(S)$ включается менее четырёх множеств.

Приведём алгоритм решения задачи.

Алгоритм 5.2.

1) В качестве начального приближения доверительного множества выбирается S_R; $S :=$ $= S_R$, $\nu := 1$.

2) Строится окрестность $O_\nu(S)$. Если в построенной окрестности есть доверительное множество S^*, для которого значение целевой функции меньше лучшего из найденных, то $S := S^*$, $\nu := 1$. В противном случае $\nu := \nu + 1$.

3) Если $\nu \leqslant \nu_{\max}$, то шаг 2 повторяется.

Данный алгоритм реализован в программном комплексе как разновидность поиска с чередующимися окрестностями в модуле BLSPQ, предназначенном для решения двухэтапной билинейной задачи.

Значение $\nu_{\max}$ выступает в роли параметра алгоритма.

Из теоремы 2.17 следует сходимость

$$\min_{\substack{S \in \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha,\\ (u_1,u_2)\in U}} \Psi(S, u_1, u_2) \to \min_{u_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0} \varphi_\alpha(u_1, u_2) \tag{5.31}$$

при $n \to \infty$ для почти всех реализаций последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, если множество U компактно и содержит оптимальное решение задачи (5.24), где через $\widetilde{\mathcal{F}}_\alpha$ обозначено семейство доверительных множеств вида (5.30), состоящих из $[\alpha n]$ точек.

При использовании поиска с чередующимися окрестностями можно гарантировать лишь верхнюю границу оптимального значения критериальной функции, но, как правило, получаемое решение оказывается близким к оптимальному решению.

5.7.4. Результаты вычислений

Пусть, согласно [153], $a_{11} = a_{12} = -20$ [с], $a_{22} = 3$ [с], $l_0 = 1500$ [м], $\sigma_x = \sigma_z = 5$ [м/с]. Рассмотрим значения вероятности $\alpha = 0{,}99, 0{,}999, 0{,}9999, 0{,}99999$. В таблице 5.11 приведены решения задачи разными алгоритмами. Также приведено решение задачи с помощью полного перебора доверительных множеств известной структуры оптимального доверительного множества для дискретизированной вероятностной меры, полученной по n реализациям случайного вектора. Для ускорения работы алгоритма начальное решение для B_α находилось по аналитическим формулам, а промежуточное решение для B^R — по выборке объёма меньшего n.

Отметим, что функция потерь и оптимальное доверительное множество в рассматриваемой задаче не являются выпуклыми, однако, как видно из таблицы 5.11, удаётся найти хорошее начальное приближение для применения поиска с чередующимися окрестностями. Это говорит о возможности применения разработанной методики для решения широкого класса задач стохастического программирования с квантильным критерием для широкого класса функций потерь.

Поскольку начальное решение оказывается близким к оптимальному, за небольшое время удаётся с помощью поиска с чередующимися окрестностями найти решение, отличающееся от оптимального не более чем на 0,001. Также заметим, что время полного перебора всех доверительных множеств оказывается большим, чем время, необходимое для применения поиска с чередующимися окрестностями, особенно для больших значений α.

5.8. Выводы по главе 5

1) Разработан программный комплекс, реализующих выборочные метод решения задач стохастического программирования с квантильным критерием.

2) Проверена эффективность разработанных алгоритмов на большом количестве численных примеров.

3) Получены численные результаты решения задач выбора инвестиционных проектов,

Таблица 5.11. Решение задачи оптимизации площади ВПП.

α, n	Алгоритм	l_1 [м]	l_2 [м]	z_1 [м]	S [км^2]	Время [с]
0,99 10^5	начальное решение на B_α	429,0	300,0	45,5	0,203	0,2
	промежуточное решение на B^R	395,1	278,0	42,0	0,182	1,7
	алгоритм 5.2	444,2	262,1	39,5	0,174	0,4
	полный перебор	444,7	256,7	39,5	0,174	9,3
0,999 10^6	начальное решение на B_α	523,9	368,9	55,7	0,267	0,1
	промежуточное решение на B^R	491,6	346,7	52,1	0,244	0,8
	алгоритм 5.2	534,1	328,2	50,6	0,239	0,3
	полный перебор	534,1	328,2	50,6	0,239	8,9
0,9999 10^7	начальное решение на B_α	605,5	427,3	64,2	0,325	0,5
	промежуточное решение на B^R	577,9	394,7	61,4	0,304	0,7
	алгоритм 5.2	611,4	385,0	59,3	0,296	0,6
	полный перебор	611,4	385,0	59,3	0,296	48,3
0,99999 $2 \cdot 10^7$	начальное решение на B_α	675,1	474,6	71,8	0,380	1,3
	промежуточное решение на B^R	653,3	448,8	70,0	0,362	1,2
	алгоритм 5.2	667,2	434,9	67,2	0,350	0,4
	полный перебор	667,2	434,9	67,2	0,350	47,4

определения налоговой ставки, планирования производства с учётом деятельности поставщика ресурсов.

4) С помощью разработанного алгоритма решена задача оптимизации площади взлётно-посадочной полосы.

Основные результаты главы опубликованы в [23, 32, 37, 73, 75, 127, 140, 141]. Получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [26, 49].

Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

1) Предложен и исследован подход к построению математических моделей сложных систем, основанный на двухэтапных и двухуровневых задачах стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Предложен ряд моделей конкретных экономических систем, включая модели планирования производства, оценивания эффективности проектов, определения налоговой ставки, размещения предприятий.

2) Доказаны теоремы о свойствах критериальных функций в двухэтапных и двухуровневых стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями.

3) Для двухэтапных задач стохастического программирования доказаны теоремы об эквивалентности априорных и апостериорных постановок, обоснован доверительный метод.

4) Разработана процедура дискретизации вероятностной меры в стохастических моделях с вероятностным и квантильным критериями.

5) Разработаны численные методы решения задач стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями, основанные на дискретизации вероятностной меры. Доказана теоремы о достаточных условиях их их сходимости.

6) Предложены алгоритмы решения одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, основанные на дискретизации вероятностной меры и поиске с чередующимися окрестностями.

7) Разработаны два численных метода построения доверительного множества поглощения в статических стохастических системах: детерминированный и выборочный.

8) Разработан комплекс программ, реализующий разработанные численные методы и алгоритмы синтеза оптимальных стратегий в стохастических системах. Проведён обширный численный эксперимент.

Исследования, проведённые в диссертационной работе, могут быть продолжены в различных направлениях.

Во-первых, предложенные в работе методы могут быть распространены на многоэтапные и многоуровневые стохастические модели, что позволит моделировать системы ещё более сложной структуры, чем предложенные в работе, например, с несколькими субъектами, принимающими решения в определённом порядке и обладающими различной информацией о реализациях случайных факторов задачи.

Во-вторых, представляют интерес стохастические системы, в которых на некоторых уровнях иерархии находятся несколько игроков. Исследование подобных систем требует обширного совместного использования методов теории игр, стохастического программирования, теории управления.

В-третьих, может быть более глубоко исследована двухуровневая стохастическая задача в том случае, когда поведение последователя описывается функцией, нелинейной по его стратегии. Для исследования данных задач требуется активное использование методов нелинейной и выпуклой оптимизации.

В-четвёртых, остаётся открытым вопрос о достаточном объёме выборки для аппроксимации задачи минимизации функции квантили в общем случае произвольной функции потерь и бесконечного множества допустимых стратегий.

Список литературы

1. *Береснев В.Л* Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15. — № 4. — С. 3–24.

2. *Береснев В.Л.* Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.

3. *Береснев В.Л., Мельников А.А.* Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 17. — № 6. — С. 3–10.

4. *Богданов А.Б., Наумов А.В.* Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 12. — С. 36–42.

5. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 114–136.

6. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.

7. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям // Теория вероятн. и ее примен. — 1971. — Т. 16. — № 2. — С. 264–279.

8. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.

9. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Аавтоматика и телемеханика. — 2015. — № 9. — С. 83–101.

10. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информ. и её примен. — 2018. — Т. 12. — № 2. — С. 60–68.

11. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика — 2006 — № 6. — С. 126–143.

12. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 179–197.

13. *Груздева Т.В., Петрова Е.Г.* Численное решение линейной двухуровневой задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010. — Т. 50. — № 10. — С. 1715–1726.

14. *Демьянов В.Ф., Факкиней Ф.* Задачи двухуровневой оптимизации и штрафные функции // Изв. вузов. Матем. — 2003. — № 12. — С. 49–61.

15. *Дзотцев А.А., Кан Ю.С., Шахлевич П.К.* Оптимизация площади взлётно-посадочной полосы. // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 6. — С. 44–48.

16. *Дресвянская Н.В.* Анализ поведения генераторов в двухуровневой рыночной модели функционирования ЭЭС // Известия Иркутского государственного университета. Серия: математика. — 2016. — Т. 16. — С. 43–57.

17. *Еремин И.И.* Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 256 с.

18. *Женевская И.Д., Иванов С.В.* Оценка необходимого объема выборки для аппроксимации задачи максимизации функции вероятности // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2018». 19-23 ноября 2018 года. Москва. Тезисы. — Типография «Люксор», 2018. С. 440–441.

19. *Женевская И.Д., Наумов А.В.* Метод декомпозиции для решения двухэтапных задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 2. — С. 36–50.

20. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Пробл. управл. — 2014. — № 6. — С. 31–44.

21. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 2. Минимаксное хеджирование // Пробл. управл. — 2015. — № 1 — С. 47–52/

22. *Иванов С.В.* Двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 130–144.

23. *Иванов С.В.* Задача двухуровневого программирования со случайными параметрами в целевой функции последователя // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25. — № 4. — С. 27–45. / *Ivanov S.V.* A Bilevel Stochastic Programming Problem with Random Parameters in the Follower's Objective Function // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — V. 12. — No. 4. — P. 658–667.

24. *Иванов С.В.* О решении двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. — М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 151–152.

25. *Иванов С.В.* О сведении двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием к смешанной целочисленной задаче // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. — № 13. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 33–34.

26. *Иванов С.В.* Оценка эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов на железнодорожном транспорте // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015610746 от 16 января 2015 года.

27. *Иванов С.В.* Синтез гарантирующих и оптимальных стратегий в двухуровневых задачах стохастического линейного программирования с квантильным критерием: дис. …канд. физ.- мат. наук: 05.13.01 / Иванов Сергей Валерьевич. — М., 2013. — 130 с.

28. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 3. — С. 134–143 / *Ivanov S.V., Kibzun A.I.* Sample Average Approximation in a Two-Stage Stochastic Linear Program with Quantile Criterion // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2018. — V. 303. – Suppl. 1. P. 115–123.

29. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 2. — С. 19–35.

30. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Об общей постановке двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Проблемы оптимизации и их приложения = Optimization Problems and Their Applications (OPTA-2018): тезисы докладов VII Международной конференции (Омск, Россия, 8-14 июля 2018): памяти проф. А.А. Колоколова / [редкол.: С. В. Белим (пред.) и др.; отв. ред. А.А.Романова]. — Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. С. 115.

31. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Общие свойства двухэтапных задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 6. — С. 70–90.

32. *Иванов С.В., Кибзун А.И., Младенович Н.* Поиск с чередующимися окрестностями для двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 1. — С. 54–66.

33. *Иванов С.В., Кибзун А.И., Осокин А.В.* Оптимизационная стохастическая модель назначения локомотивов для перевозки грузовых составов // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 11. — С. 80–95.

34. *Иванов С.В., Морозова М.В.* Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 3. — С. 109–122.

35. *Иванов С.В., Морозова М.В.* Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». 30 июня – 6 июля 2014 г. Иркутск, ИСЭМ СО РАН. — 2014. С. 156.

36. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 116–129.

37. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Двухуровневая задача стохастического программирования с несколькими последователями и её приложение к оптимизации энергосберегающих проектов // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2014. — №77.

38. *Иванов С.В., Пономаренко А.Н.* Метаэвристические методы решения двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий // Моделирование и анализ данных. — 2019. — № 2. — С. 99–108.

39. *Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задаче прогнозирования скорости ветра // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2019». 18–22 ноября 2019 года. Москва. Тезисы. — Типография «Логотип», 2019. С. 192.

40. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

41. *Кан Ю.С.* Квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 2. — С. 81–86.

42. *Кан Ю.С.* О сходимости одного стохастического квазиградиентного алгоритма квантильной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 2. — С. 100–116.

43. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 3. С. 82–102.

44. *Кан Ю.С., Краснопольская А.Н.* К проблеме формирования портфеля ценных бумаг с фиксированным доходом // Автоматика и телемеханика. — 2006. —№ 4. С. 97–104.

45. *Кан Ю.С., Мистрюков А.А.* Качественные исследования функций вероятности и квантили // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 3. — С. 36–40.

46. *Кан Ю.С., Сысуев А.В.* О приближенном решении задачи формирования портфеля ценных бумаг с фиксированным доходом // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 130–141.

47. *Кан Ю.С., Тузов Н.В.* Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 11 — С. 82–92.

48. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. — 2020. — № 4. — С. 21–36.

49. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Статистическое оценивание оптимальных решений задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020611554 от 04 февраля 2020 года.

50. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 7. — С. 78–100.

51. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. — М.: Физматлит, 2009.

52. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Выпуклые свойства функции квантили в задачах стохастического программирования // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 33–44.

53. *Кибзун А.И., Курбаковский В.Ю.* Численные алгоритмы квантильной оптимизации их применение к решению задач с вероятностными ограничениями // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1992. — № 1. — С. 75–81.

54. *Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В.* О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 73–80.

55. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Достаточные условия квазивогнутости функции вероятности // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 3. — С. 54–71.

56. *Кибзун А.И., Матвеев Е.Л.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции квантили // Автоматика и телемеханика — 2010. — № 6. — С. 64–78.

57. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 1. — С. 83–93.

58. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования. — 1995. — Т. 33. — № 2. — С. 160–165.

59. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая задача оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла // Управление большими системами. — 2012. — № 38. — С. 140–160.

60. *Кибзун А.И., Наумов А.В, Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 66–86.

61. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Уланов С.В.* Оптимизация самолетного парка авиакомпании // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 8. — С. 126–137.

62. *Кибзун А.И., Тарасов А.Н.* Стохастическая модель функционирования системы закупки электроэнергии на участке железной дороги // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 3. — С. 44–60.

63. *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Стохастический квазиградиентный алгоритм минимизации функции интегральной квантили // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 2. — С. 41–60.

64. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* Выбор оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ на разных участках // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 7. — С. 89–108.

65. *Лавлинский С.М., Панин А.А., Плясунов А.В.* Модели Штакельберга в территориальном планировании // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 2. — С. 111–124.

66. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987.

67. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973.

68. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации бюджета госпиталя // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 2. — С. 87–90.

69. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации инвестиционного проекта // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — №2. — С. 33–40.

70. *Наумов А.В.* Методы и алгоритмы решения задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием: дис. ... д-ра физ.- мат. наук: 05.13.01 / Наумов Андрей Викторович. — М., 2012. — 221 с.

71. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. — № 50.

72. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая задача оценки эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов // Труды второй научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2013). Москва. 21-22 октября 2013 г. — М.: ОАО «НИИАС», 2013. С. 147-150.

73. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая модель оптимизации эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов // Интеллектуальные системы на транспорте: материалы IV международной научно-практической конференции «ИнтеллектТранс-2014» / Под редакцией д-ра техн. наук, профессора А.А. Корниенко. – Спб.: ПГУПС, 2014. С. 142-148.

74. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 2. — С. 142–158.

75. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Программно-алгоритмический комплекс для оценки эффективности проектов по экономии электроэнергии на железнодорожном транспорте // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2013. — № 12. — С. 3–9.

76. *Наумов А.В., Уланов С.В.* Учет риска в двухэтапных задачах оптимального распределения ресурсов // Автоматика и Телемеханика. — 2003. — № 7. — С. 109–116.

77. *Нечаев И.А., Паламарчук С.И.* Планирование загрузки электростанций в условиях оптового рынка электроэнергии // Известия РАН. Энергетика. — 2011. — № 6. — С. 71–83.

78. *Норкин В.И., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — Т. 50. — № 5. — С. 34–48.

79. *Норкин В.И., Роенко Н.В.* α-вогнутые функции и меры и их приложения // Кибернетика и системный анализ. — 1991. — № 6. — С. 77–88.

80. *Пономаренко А.Н., Иванов С.В.* Решение стохастической задачи размещения предприятий методом имитации отжига // 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика — 2017». 20-24 ноября 2017 года. Москва. Тезисы. — Типография «Люксор», 2017. С. 406.

81. *Райк Э.* Дифференцируемость по параметру функции вероятности и стохастический псевдоградиентный метод для ее оптимизации // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1975. — V. 24. — № 1. — С. 3–9.

82. *Райк Э.* О задачах стохастического программирования с функционалами вероятности и квантиля. // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1972. — V. 21. — № 2. — С. 142–148.

83. *Райк Э.* О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании. // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1971. — V. 20. — № 2. — С. 229–231.

84. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В.* Численное решения одного класса задач двухуровневого программирования // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2010. — Т. 13. — № 2. — С. 201–212.

85. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. — 1976. — Т. 25. — № 2. — С. 141–144.

86. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1978.

87. *Ширяев А.Н.* Вероятность. Москва: МЦНМО, 2017.

88. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. Радио, 1974.

89. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Советское радио, 1979.

90. *Abou-Kandil H., Bertrand P.* Government — private sector relations as a Stackelberg game: A degenerate case // Journal of Economical Dynamics and Control. — 1987. — V. 11. — No. 4. — P. 513–517.

91. *Al-Khayyal F.A., Horst R., Pardalos P.M.* Global optimization of concave fuctions subject to quadratic constraints: an application in nonlinear bilevel programming // Annals of Operations Research. — 1992. — No. 34. — P. 125–147.

92. *Alizadeh S.M., Marcotte P., Savard G.* Two-stage stochastic bilevel programming over a transportation network // Transportation Research Part B: Methodological. — 2013. — V. 58. — P. 92–105.

93. *Artstein Z., Wets R.J.-B.* Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs // J. Convex Anal. 1996. V. 2. P. 1–17.

94. *Bard J. F.* Practical bilevel optimization: Algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Academie Publishers, 1998. 476 p.

95. *Bard J.F., Falk J.* An explicit solution to the multi-level programming problem // Computers and Operations Research. — 1982. — No. 9. — P. 77–100.

96. *Bard J.F., Moore J.* A Branch and bound algorithm for the bilevel programming problem // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1990. — No. 11. — P. 281–292.

97. *Bard J.F., Plummer J., Sourie J.C.* A bilevel programming approach to determining tax credits for biofuel production, European Journal of Operational Research. — 2000. — V. 120 — 2000. — P. 30–46.

98. *Barrera J., Homem-de-Mello T., Moreno E., Pagnoncelli B.K., Canessa G.* Chance-constrained problems and rare events: an importance sampling approach // Math. Program. Ser. B. — 2016. — No. 157. — P. 153–189.

99. *Beresnev V., Melnikov A.* ε-Constraint method for bi-objective competitive facility location problem with uncertain demand scenario // EURO J. Comput. Optim. — 2019. — https://doi.org/10.1007/s13675-019-00117-5

100. *Bialas W., Karwan, M.* Two-level linear programming. // Management Science. — 1984. — V. 30. — P. 1004–1020.

101. *Birge J.R.* The relationship between the L-shaped method and dual basis fac- torization for stochastic linear programming. // in: Y. Ermoliev and R. Wets, Eds. Nymerical Techniques for Stochastic Optimization. — Springer-Verlag, Berlin. — 1988. — P. 267–272.

102. *Birge J.R., Holmes D.F.* Efficient solution of two-stage stochastic linear pro- grams using interiro point methods. // Comp. Optim. and Appl. — 1992. — No. 1. — P. 245–276.

103. *Birge J.R., Louveaux F.* Introduction to Stochastic Programming. N.Y.: Springer, 2011.

104. *Borell C.* Convex Set Functions in d-Space // Period. Math. Hung. — 1975. — V. 6. — No. 2. — P. 111–136.

105. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

106. *Budnitzki A.* The solution approach to linear fuzzy bilevel optimization problems // Optimization. — 2015. — V. 64. — No. 5. — P. 1195–1209.

107. *Burtscheidt J., Claus M., Dempe S.* Risk-Averse Models in Bilevel Stochastic Linear Programming [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2019. https://arxiv.org/abs/1901.11349v1.

108. *Burtscheidt J., Claus M.* Bilevel Optimization under Uncertainty [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2019. https://arxiv.org/abs/1907.04663v1

109. *Campi M.C., Garatti S.* A Sampling-and-Discarding Approach to Chance-Constrained Optimization: Feasibility and Optimality // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 148. P 257–280.

110. *Candler W., Townsley R.* A Linear Two-Level Programming Problem // Computers and Operations Research. — 1982. — V. 9. — No. 1. — P. 59–76.

111. *Charnes A., Cooper W.W.* Chance-Constrained Programming // Management Science. — 1959. — V. 6. — No. 1. — P. 73–79.

112. *Charnes A., Cooper W. W.* Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance-Constraints // Operations Research. — 1963. — V. 11. — No. 1. — P. 18–39.

113. *Chen A., Kim J., Zhong Zh., Chootinan P.* Alpha Reliable Network Design Problem // Transportation Research Record: Journal of the Tranportation Research Board. — 2007. — No. 2029. — P. 49–57.

114. *Chen A., Luedtke J.* On Sample Average Approximation for Two-stage Stochastic Programs without Relatively Complete Recourse // [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2019. https://arxiv.org/abs/1912.13078v1

115. *Cheng L., Wan Zh., Wang G.* Bilevel newsvendor models considering retailer with CVaR objective // Computers & Industrial Engineering. — 2009. — V. 57. — N. 1. — P. 310–318.

116. *Christiansen S., Patriksson M., Wynter L.* Stochastic bilevel programming in structural optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. — 2001. — V. 21. — No. 5. — P. 361–371.

117. *Choirat C., Hess C., Seri R.* Approximation of Stochastic Programming Problems. In: Niederreiter, H., Talay, D. (eds.), Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2004. P. 45–59. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

118. *Colson B., Marcotte P., Savard G.* An overview of bilevel optimization // Annals of Operations Research. —2007. —V. 153. —No. 1. —P. 235–256.

119. *Colson B., Marcotte P., Savard G.* Bilevel programming: A survey // 4OR. —2005. —V. 3. —No. 2. —P. 87–107.

120. *Constantin I., Florian M.* Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach // International Transactions in Operational Research. — 1995. — No. 2. — P. 149–164.

121. *Chen G., Daskin M.S., Shen Z.-J. M., Uryasev S.* The α-Reliable Mean-Excess Regret Model for Stochastic Facility Location Modeling // Naval Res. Logist. — 2006. — V. 5. — No. 7. — P. 617–626.

122. *Dempe S.* Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints // Optimization. — 2003. — V. 52. — No. 3. — P. 333–359.

123. *Dempe S.* Bilevel Programming — A Survey // Preprint TU Bergakademie Freiberg Nr. 2003-11, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2003.

124. *Dempe S.* Bilevel optimization: theory, algorithms and applications // Preprint TU Bergakademie Freiberg Nr. 2018-11, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2018.

125. *Dempe S.* Foundations of bilevel programming. — Dordrecht: Kluwer Academie Publishers, 2002. 309 p.

126. *Dempe S., Franke S.* Solution algorithm for an optimistic linear Stackelberg problem // Computers & Operations Research. — 2014. — V. 41. — P. 277–281.

127. *Dempe S., Ivanov S., Naumov A.* Reduction of the bilevel stochastic optimization problem with quantile objective function to a mixed-integer problem // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2017. — V. 33. — No. 5. — P. 544–554.

128. *Dempe S., Kalashnikov V., Pérez-Valdés G. A., Kalashnykova N.* Bilevel programming problems - theory, algorithms and applications to energy network. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Verlag, 2015. 325 p.

129. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczýnski* Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming. Mathematical Programming. 2000. V. 89. P. 55–77.

130. *Fortuny-Amat J., McCarl B.* A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem // Journal of the Operational Research Society. — 1981. — V. 32. — No. 9. — P.783–792.

131. *Edmunds T., Bard J.F.* Algorithms for nonlinear bilevel mathematical programs // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — 1991. — No. 21. — P. 83–89.

132. *Frauendorfer K.* Stochastic Two-Stage Programming. Berlin—Heidelberg: Springer, 1992.

133. *Gartska S. J.* The Economic Equivalence of Several Stochastic Programming Models. / / Stochastic Programming, ed. M.A.H. Dempster, Academic Press, New York. 1980. P. 83–91.

134. *Gauvin J.* A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming // Mathematical Programming. — 1977. — V. 12. — P. 136–139.

135. *Ghosh A., McLafferty S.L.* Locating stores in uncertain environments: A scenario planning approach // J. Retail. — 1982. — V. 58 — No. 4. — P. 5—22.

136. *Guigues V., Juditsky A., Nemirovski A.* Non-asymptotic Confidence Bounds for the Optimal Value of a Stochastic Program // Optim. Method. Softw. — 2017. — V. 32. — No. 5. — P. 1033–1058.

137. *Hansen P., Mladenović N., Pérez J.A.M.* Variable Neighbourhood Search: Methods and Applications // Ann. Oper. Res. 2010. V. 175. No. P. 367–407.

138. *Henrion R.* On the Connectedness of Probabilistic Constraint Sets // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — V. 112. — No. 3. — P. 657–663.

139. *Higle J.L., Sen S.* Statistical Approximations for Stochastic Linear Programming Problems // Ann. Oper. Res. — 1999. — V. 85. — P. 173–192.

140. *Ivanov S.V., Kibzun A.I., Mladenović N., Urošević D.* Variable Neighborhood Search for Stochastic Linear Programming Problem with Quantile Criterion // Journal of Global Optimization. — 2019. — V. 74. — No. 3. — P. 549–564.

141. *Ivanov S.V., Kibzun A.I., Stepanova A.S.* An algorithm to solve a quantile optimization problem with loss function having a separable structure and its application to an aerospace problem // Applied stochastic models in business and industry. — 2019. — V. 35. — P. 1269–1281.

142. *Ivanov S.V., Korbulakova V.K.* Bilevel Programming Problem with Quantile Follower's Objective Function // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — V. 1623. — P. 28–34.

143. *Ivanov S.V., Selivanova O.S.* Bilevel stochastic linear programming problem with quantile criterion and continuous random parameters // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Irkuts: ESI SB RAS, 2017. P. 43.

144. *Ivanov S.V., Zhenevskaya I.D.* Estimation of the necessary sample size for approximation of stochastic optimization problems with probabilistic criteria // Lecture Notes in Computer Science. — 2019. — V. 11548. — P. 552–564.

145. *Ishizuka Y., Aiyoshi E.* Double penalty method for bilevel optimization problems // Annals of Operations Research. — 1992. — No 34. — P. 73–88.

146. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming. — Wiley, Chichester, 1994.

147. *Kall P., Mayer J.* Stochastic Linear Programming: Models, Theory and Computation. N.Y.: Springer, 2011.

148. *Katagiri H., Uno T., Kato K., Tsuda H., Tsubaki H.* Random fuzzy bilevel linear programming through possibility-based value at risk model // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. — 2014. — V. 5. — No. 2. — P. 211-224.

149. *Kataoka S.A.* Stochastic Programming Model // Econometrica — 1963. — V. 31. — No. 1–2. — P. 181–196.

150. *Khamisov O.* A global optimization approach to maximization of the probability function // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2019. — V. 537. — 042004.

151. *Kibzun A.I.* Comparison of Two Algorithms for Solving a Two-Stage Bilinear Stochastic Programming Problem with Quantile Criterion // Appl. Stochast. Models Business Industry. 2015. V. 31. No. 6. P. 862–874.

152. *Kibzun A.I., Ivanov S.V.* Convergence of Discrete Approximations of Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria // Lecture Notes in Computer Science. —2016. — V. 9869. — P. 525–537.

153. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester—N.Y.—Brisbane—Toronto—Singapore: John Wiley & Sons, 1996.

154. *Kibzun A., Lepp R.* Discrete approximation in quantile problem of portfolio selection / Uryasev, S., Pardalos, P.M. (eds.) Stochastic Optimization: Algorithms and Applications. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 119–133.

155. *Kibzun A., Uryasev S.* Differentiability of probability function // Stochastic Analysis and Applications. — 1998. — V. 16. — No. 6. — P. 1101–1128.

156. *Kleywegt A.J., Shapiro A., Homem-De-Mello T.* The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12 — No. 2. — P. 479–502.

157. *Kosuch S., Le Bodic P., Leung J., Lisser A.* On a stochastic bilevel programming problem with knapsack constraints / Proceedings of the International Network Optimization Conference, 2009.

158. *Pavlikov K., Veremyev A., Pasiliao E.L.* Optimization of Value-at-Risk: computational aspects of MIP formulations // Journal of the Operational Research Society. — 2018. — V. 69. — No. 5. — P. 676–690.

159. *Kovacevic R.M., Pflug G.Ch.* Electricity Swing Option Pricing by Stochastic Bilevel Optimization: A survey and new approaches // Euro. J. of Operational Res. — 2013. — V. 237. — P. 389–403.

160. *Kulkarni A.A., Shanbhag U.V.* Recourse-Based Stochastic Nonlinear Programming: Properties and Benders-SQP Algorithms // Comput. Optim. Appl. — 2012. — V. 51. — No. 1. — P. 77–123.

161. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. — 2018 (online first). DOI: 10.1007/s10479-018-2934-8.

162. *Lejeune M., Noyan N.* Mathematical Programming Approaches for Generating p-Efficient Points // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 207 P. 590–600.

163. *Lepp R.* Approximate solution of stochastic programming problems with recourse // Kybernetika. — 1987. — V. 23. — No. 6. — P. 476–482.

164. *Lepp R.* Projection and discretization methods in stochastic programming // J. Comput. Appl. Math. — 1994. — V. 56. — P. 55–64.

165. *Lepp R.* Discrete Approximation of Extremum Problems with Chance Constraints // Lecture Notes in economics and mathematical systems. — 2002. — V. 513. — P. 21–33.

166. *Lepp R.* Approximation of Value-at-Risk Problems with Decision Rules / Uryasev S.P. (ed.), Probabilistic Constrained Optimization, 2000. P. 186–197.

167. *Luedtke J. Ahmed S.* A Sample Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints // SIAM J. Optim. — 2008. — V. 19. — No. 2. — P. 674–699.

168. *Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G.* An Interger Programming Approach for Linear Programs with Probabilistic Constraints // Math. Program. 2010. V. 122. P. 247–272.

169. *Marcotte P.* Network design problem with congestion effects: a case of bilevel programming. Mathematical Programming. — 1986. — V. 34. — P. 23–36.

170. *Melnikov A., Beresnev V.* Upper Bound for the Competitive Facility Location Problem with Quantile Criterion // Lecture Notes in Computer Science. — 2016. — V. 9869. — P. 373–387.

171. *Mladenović N., Hansen P.* Variable neighborhood search // Computers & Operations Research. — 1997. — V. 24. — P. 1097–1100.

172. *Mosteller F.* One Some Useful Inefficient Statistics // The Annals of Mathematical Statistics. — 1946. — V. 17. — P. 317–408.

173. *Nemirovski A., Shapiro A.* Scenario Approximations of Chance Constraints / Calafiore G., Dabbene F. (eds) Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty. London: Springer, 2006. P. 3–47.

174. *Nicholls M.G.* Aluminum Production Modeling — A Nonlinear Bilevel Programming Approach // Operations Research. — 1995. — V. 43. — No. 2. — P. 208–218.

175. *Norkin V.* On mixed integer reformulations of monotonic probabilistic programming problems with discrete distributions // Optimization-

online [электронный ресурс]. — 2010. — Режим доступа: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2010/05/2619.html (18.01.2020)

176. *Owen S.H., Daskin M.S.* Strategic facility location: A review // Eur. J. Oper. Res. — 1998. — V. 111. — No. 3. — P. 423–447.

177. *Özaltin O.Y., Prokopyev O.A., Schaefer A.J.* The bilevel knapsack problem with stochastic right-hand sides // Operations Research Letters. — 2010. — V. 38. — No. 4. — P. 328–333.

178. *Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A.* Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 142. P. 399–416.

179. *Patriksson M., Wynter L.* Stochastic nonlinear bilevel programming // Technical report, PRISM, Université de Versailles – Saint Quentin en Yvelines, Versailles, France, 1997.

180. *Pflug G.Ch.* Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization // Math. Program. — 2001. V. 89. — P. 251–271.

181. *Pflug G.Ch., Weisshaupt H.* Probability Gradient Estimation by Set-Valued Calculus and Applications in Network Design // SIAM J. Optim. — 2005. — V. 15. — No. 3. — P. 898–914.

182. *Peña-Ordieres A.,Luedtke J.R., Wächter A.* Solving Chance-Constrained Problems via a Smooth Sample-Based Nonlinear Approximation // [Электронный ресурс] // arXiv.org. 2019. https://arxiv.org/abs/1905.07377v1

183. *Pennanen T., Koivu M.* Epi-convergent discretizations of stochastic programs via integration quadratures // Numer. Math. — 2005. — V. 100. — P. 141–163.

184. *Pennanen T.* Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs via integration quadratures // Math. Program., Ser. B. — 2009. — V. 116. — P. 461–479.

185. *Prékopa A.* Dual method for the solution of a one-stage stochastic programming problem with random rhs obeying a discrete probability distribution // ZOR-Methods and Models of Operations Research. 1990. V. 34. P. 441–461.

186. *Prékopa A.* Logarithmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1971. — V. 32. — P. 301–316.

187. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1973. — V. 34. — P. 335–343.

188. *Prékopa A.* On Probabilistic Constrained Programming / Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming (Princeton University Press, Prenceton, N.J.), 1970. P. 113–138.

189. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Boston: Kluwer Acad. Publishers, 1995.

190. *Prékopa A., Szántai T.* Flood control reservoir system design // Math. Pro. Study, North-Holland. — 1978. — No. 9. — P. 138–151.

191. *Rockafellar R.T., Wets R.J.-B.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 2009.

192. *Ruszczyński A.* Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra // Math. Program. 2002. V. 93. P. 195–215.

193. *Sakawa M., Katagiri H., Matsui T.* Stackelberg solutions for fuzzy random bilevel linear programming through level sets and probability maximization // Operational Research. — 2012. — V. 12. — No. 3. — P.271–286.

194. *Saxena A., Goyal V., Lejeune M.A.* MIP Reformulations of the Probabilistic Set Covering Problem // Math. Program. — 2010. — V. 121. — P. 1–31.

195. *Sen S.* Relaxation for Probabilistically Constrained Programs with Discrete Random Variables // Operations Research Letters. — 1992. — V. 11. — P. 81–86.

196. *Sen S.* Subgradient Decompositon and Differentiability of the Recourse Function of a Two Stage Stochastic Linear Program // Operations Research Letters. — 1993. – V. 13. — No. 3. — P. 143–148.

197. *Shapiro A.* Monte Carlo Sampling Methods. / Ruszczyński A., Shapiro A. (eds.) Handbooks in OR Handbooks in Operations Research and Management Science & MS, vol. 10, pp. 353–425 North-Holland, Dordrecht, The Netherlands, 2003.

198. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

199. *Sheppard E.S.* Aconceptual framework for dynamic location–allocation analysis // Environment and Planning A. — 1974. — V. 6. — P. 547–564.

200. *Schultz R., Tiedemann S.* Conditional Value-at-Risk in Stochastic Programs with Mixed-Integer Recourse // Math. Program. Ser. B. — 2006. — V. 105. — P. 365–386.

201. *Snyder L.V.* Facility location under uncertainty: a review // IIE Transact. — 2006. — V. 38. — No. 7. — P. 547–564.

202. *Stackelberg H.F.* Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer-Verlag, 1934.

203. *Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V.* On computational search for optimistic solutions in bilevel problems // Journal of Global Optimization. — 2010. — V. 48. — No. 1. — P. 159–172.

204. *Symonds G.H.* Deterministic Solutions for a Class of Chance-Constrained Programming Problems // Oper. Res. 1967. V.15. No. 3. P. 495–512.

205. Stochastic Quasi-Gradient Algorithms for Maximization of the Probability Function. A New Formula for the Gradient of the Probability Function // Lecture Notes in economics and mathematical systems. — 2002. — V. 513. — P. 117–139.

206. *Tuy H., Migdalas A., Värbrand P.* A global optimization approach for the linear two-level program // Journal of Global Optimization. — 1993. — V. 3. — No. 1. — P. 1–23.

207. *Uryasev S.* Derivatives of Probability Functions and some Applications // Annals of Operations Research. — 1995. — V. 56. — P. 287–311.

208. *Van Ackooij W.* Eventual Convexity of Chance Constrained Feasible Sets // Optimization (J. Math. Programm. Oper. Res.). — 2015. — V. 64. — No. 5. — P. 1263–1284.

209. *Van Ackooij W., Henrion R.* Gradient Formulae for Nonlinear Probabilistic Constraints with Gaussian and Gaussian-like Distributions // SIAM J. Optim. — 2014. — V. 24. — No. 4. — P. 1864–1889.

210. *Van Ackooij W., Berge V, de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. — 2017. — V. 77. — P. 177–193.

211. *Vicente L.N., Calamai P.H.* Bilevel and multilevel programming: A bibliography review // Journal of Global Optimization. — 1994. — V. 5. — No. 3. — P. 291–306.

212. *Walkup D.W., Wets R.J.-B.* Stochastic Programs with Recourse // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1967 — V. 15. — No. 5. — P. 1299–1314.

213. *Werner A.S.* Bilevel Stochastic programming problems: analysis and application to telecommunications // Dr. ing. thesis, 2004. Section of Investment, Finance and Accounting, Dept of Industrial Economics and Technology Management, NUST, Norway.

214. *Wets R.J.-B.* Stochastic Programs with Fixed Recourse: the Equivalent Deterministic Program // SIAM Review. — 1974. — V. 16. — No. 3. — P. 309–339.

215. *Yadollahi E., Aghezzaf El-H., Raa B.* Managing inventory and service levels in a safety stock-based inventory routing system with stochastic retailer demands // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2017. — V. 33. — No. 4. — P. 369–381.

216. *Yan N., Dai H., Sun B.* Optimal bi-level Stackelberg strategies for supply chain financing with both capital-constrained buyers and sellers. // Applied Stochastic Models in Business and Industry. — 2014. — V. 30. — P. 783–796.

217. *Yang H., Bell M.G.H.* Transportation bilevel programming problems: Recent methodological advances // Transportation Research. Part B. — 2001. — V. 35. — No. 1. — P. 1–4.

218. *Yanıkoğlu İ, Kuhn D.* Decision Rule Bounds for Two-Stage Stochastic Bilevel Programs // SIAM J. Optim. — 2018. — V. 28. — No. 1. — P. 198–222.