

«УТВЕРЖДАЮ»  
Ректор ФГБОУ ВПО «Казанский национальный  
исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ)»

Гельмутдинов А. Х.  
\_\_\_\_\_ 2014 г.

## ОТЗЫВ

**ведущей организации – ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ)» о диссертационной работе Никабадзе Михаила Ушангиевича «Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»**

В современном машиностроении и приборостроении наблюдается создание и интенсивное внедрение новых материалов с неклассическими свойствами и наноматериалов, свойства которых принципиально отличаются от свойств известных традиционных материалов. Известно, что классические модели деформирования таких тел из новых материалов не описывают их механическое поведение. Классическая механика сплошных сред в принципе не может описать масштабные эффекты, что, несомненно, ограничивает возможности моделирования аномальных свойств новых материалов с внутренними структурами (наноматериалов, нанокомпозитов, тонких тел и пленок и т.д.). В связи с этим исследование существующих теорий, способных описать масштабные эффекты, а также их обобщение, представляют собой **актуальную** проблему.

Рецензируемая диссертационная работа посвящена развитию метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел и его применению при построении различных вариантов теорий термоупругих тонких тел. Она в основном носит теоретический характер, состоит из введения, 6 глав, заключения и списка литературы, включающего 530 наименований, изложена на 384 страницах.

**Во введении** даны ссылки на обзоры отечественной и зарубежной литературы, а также на обзоры литературы по теориям пластин и оболочек самого автора. Описаны различные методы построения теорий многослойных пластин и оболочек. Перечислены недостатки классической теории упругости по сравнению с неклассическими теориями. Отмечается важность открытия фуллерена, используемого при создании наноматериалов. Сформулированы три основных подхода к построению математических моделей сред, отражающих внутреннее взаимодействие элементов структуры, а также приведены ссылки на эксперименты, подтверждающие необходимость учета микроструктуры материала. Приведены ссылки и на работы, в которых представления о существовании в кристаллической решетке ротационных степеней свободы и различных типов взаимодействий широко используются при изучении динамических процессов в средах сложной структуры. Кроме того, даны ссылки на работы, посвященные моделированию свойств материалов сложной структуры и теоретическому и экспериментальному исследованиям процессов распространения и взаимодействия акустических волн в средах сложной структуры. Описаны проблемы, требующие дальнейшего развития и которые по настоящее время остаются актуальными. Сформулирована актуальность темы диссертации. Поставлены цели и задачи исследования, а также описаны содержания каждой главы диссертации по отдельности.

**В первой главе** «О параметризации области тонкого тела трехмерного евклидова пространства» развита эффективная параметризация области тонкого тела, которая заключается в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями. Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Введены свойственные

предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики. В частности, рассмотрены различные семейства базисов и введены компоненты переноса единичного тензора второго ранга (ЕТВР), а также основные компоненты ЕТВР, с помощью которых выражены геометрические объекты при рассмотренных в работе семействах параметризаций. Получены выражения для компонент ЕТВР через основные компоненты того же тензора при различных частных случаях параметризаций области тонкого тела. Даны представления ЕТВР, а также изотропных тензоров четвертого ранга при рассмотренных семействах параметризаций. Введены в рассмотрение мультипликативные базисы и получены деривационные формулы для них. Даны выражения ковариантных производных компонент тензора при различных семействах параметризаций. С помощью компонент переноса ЕТВР осуществлена связь между различными семействами параметризаций. Получены выражения для различных семейств символов Кристоффеля, компонент вторых тензоров и средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством компонент переноса ЕТВР. Компоненты переноса и компоненты ЕТВР, зависящие от поперечной координаты  $x^3$ , представлены в виде рядов относительно этой координаты. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее новой параметризации.

**Во второй главе** «Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и Чебышева. Моменты тензорных полей и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов» сформулирована теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности классических полиномов. Выписаны основные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра и Чебышева первого и второго родов, посредством которых получены несколько дополнительных соотношений, используемых при построении различных вариантов теорий тонких тел.

Определены моменты тензорных полей, их компонент и некоторых дифференциальных операторов от них в криволинейных координатах. В частности, определены моменты тензорных функций, а также их производных и повторных производных. Кроме того, даны представления и найдены моменты относительно полиномов Чебышева лапласиана, градиента, ротора, повторного градиента, дивергенции, повторной дивергенции тензора второго ранга, градиента дивергенции. Получены выражения для моментов  $k$ -го порядка произведения двух функций на произвольную степень поперечной координаты  $x^3$ .

**В третьей главе** «Представления основных уравнений и определяющих соотношений для теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач» приведены представления уравнений и определяющих соотношений (ОС) классической и микрополярной теорий упругих тонких тел при новой параметризации области тонкого тела, а также уравнения притока тепла и закона теплопроводности Фурье. Выписаны трехмерные постановки задач при новой параметризации области тонкого тела.

Выведены представления уравнений в перемещениях классической теории термоупругости и уравнений в перемещениях и вращениях микрополярной теории термоупругости при новой параметризации области тонкого тела. Даны представления законов термодинамики и теплопроводности Фурье, а также уравнения притока тепла, граничных и начальных условий.

Далее из представленных уравнений и ОС, используя рекуррентные соотношения систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода, а также выражения для моментов величин, выражений и дифференциальных операторов, получены соответствующие уравнения и ОС в моментах для теории тонких тел. Выведены граничные и начальные условия в моментах. При этом получены системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах классической и микрополярной механики деформируемого твердого тонкого тела. Выведены системы уравнений в перемещениях, перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах, как при

изотермических, так и при неизотермических процессах, а также системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах.

Получены ОС классической и микрополярной теорий и закон теплопроводности Фурье нулевого приближения и приближения порядка  $r$  в моментах, как для однородного, так и неоднородного относительно  $x^3$  материала. Получены выражения для граничных условий физического и теплового содержаний (первого, второго и третьего родов) на лицевых поверхностях и выведены системы уравнений для нахождения нормирующих функций, применяемых при представлении ОС в нормированных моментах. Сформулированы определения систем уравнений в моментах приближения  $(r, N)$ , а также систем законов Гука и теплопроводности Фурье в нормированных моментах приближения  $(r, N)$  и в моментах приближения  $(r, N)$ . Выведены граничные условия физического и теплового (второго и третьего родов) содержаний на граничном контуре в моментах приближения  $(r, N)$ . Кроме того, выписаны кинематические и тепловые (первого рода) граничные условия на контуре и начальные условия в моментах приближения  $N$ . Сформулированы постановки связанной и несвязанной динамических задач, а также нестационарной температурной задачи в моментах приближения  $(r, N)$  микрополярной термоупругости тонких тел с одним малым размером.

При рассматриваемом методе построения теории тонких тел получается бесконечная система уравнений, которая имеет то преимущество, что она содержит величины, зависящие от двух переменных – гауссовых координат  $x^1$  и  $x^2$  базовой поверхности. Уменьшение числа независимых переменных на единицу достигается ценой увеличения количества уравнений до бесконечности, что, разумеется, имеет свои очевидные практические неудобства. В этой связи производится редукция бесконечной системы к конечной системе. При этом рассматривается несколько различных способов такой редукции. После редукции к конечной системе рассматриваемую задачу можно решить приближенно с соответствующими граничными условиями на граничном контуре базовой поверхности. При этом степень приближения шаг за шагом можно увеличить. Однако здесь возникает известная проблема выполнения граничных условий на лицевых поверхностях. В рассматриваемых теориях тонких тел почти во всех теоретически возможных случаях удается эту проблему решить. При упрощенной схеме приведения бесконечной системы уравнений к конечной системе для любого приближенного решения построено корректирующее слагаемое, учет которого обеспечивает выполнение граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела. В частности, построены корректирующие слагаемые, обеспечивающие выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при постановках задач в перемещениях и вращениях, а также задач в тензорах напряжений и моментных напряжений. Рассмотрен также способ, при котором компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, которые не участвуют в граничных условиях на лицевых поверхностях, разлагаются в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов, а остальные компоненты определяются через них из уравнений равновесия таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям. Этот способ при построении классической теории (однослойных и многослойных) пластин постоянной толщины в случае отсутствия объемных сил и касательных напряжений на лицевых поверхностях применял В.В. Понятовский при использовании системы полиномов Лежандра. В диссертации рассмотрен и этот способ удовлетворения граничных условий в случае классической теории призматических тонких тел с одним малым размером постоянной толщины при классической параметризации области тонкого тела с учетом объемных сил и непрерывно распределенных напряжений на лицевых поверхностях. Даны различные представления компонент  $P_{i3}$  тензора напряжений, которые согласованы с граничными условиями на лицевых поверхностях. Доказано, что такой способ представления компонент тензора напряжений эквивалентен способу разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов.

**В четвертой главе** «Применение метода ортогональных полиномов в теории многослойных тонких конструкций» рассмотрена эффективная параметризация многослойной трехмерной тонкой области. При этой параметризации, в отличие от классических подходов, используется несколько базовых поверхностей. Многие соотношения этой главы получаются из соответствующих соотношений первой главы, если в них корневые буквы снабжать снизу индексом, который обозначает номер слоя. Введены в рассмотрение геометрические характеристики параметризации. В частности, выписаны выражения для компонент переноса ЕТВР, а также соотношения, связывающие различные семейства базисов и символов Кристоффеля. Определены компоненты контакта ЕТВР. Получены различные варианты системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. Выписаны межслойные условия при различных связях соседних слоев многослойного тела. Даны постановки задач. К тому же аналогично многослойной трехмерной тонкой области рассматривается параметризация многослойной плоской криволинейной области на основе нескольких базовых кривых. Получены системы уравнений, ОС, граничные условия физического содержания приближения  $(0, N)$  для классического упругого материала, а также кинематические граничные условия и начальные условия приближения  $N$ . Выписаны межслойные контактные условия.

**В пятой главе** «Вариационные принципы микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов» выведены необходимые интегральные соотношения для формулировок вариационных принципов. Сформулированы и доказаны вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно, а также обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера в рамках трехмерной микрополярной теории, из которых получены соответствующие вариационные принципы для теории тонких тел, а из которых выведены аналогичные вариационные принципы для теории тонких тел в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева. В случае микрополярной теории многослойных тонких тел, как при полном контакте, так и при наличии зон ослабленной адгезии, получены только обобщенные вариационные принципы типа Рейсснера.

**В шестой главе** «Варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и пластин, аналитические решения в теориях тонких тел, примеры решения задач» рассмотрены некоторые вопросы параметризации, когда в качестве базы выбрана поверхность, относительно которой область оболочки несимметрично расположена. Исходя из трехмерных уравнений микрополярной теории, получены уравнения микрополярных и расширенных микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек относительно контравариантных компонент тензоров напряжений и моментных напряжений. Даны постановки задач. К тому же, приведены уравнения классической моментной теории оболочки и уравнения тонких тел, получаемые с помощью метода классических ортогональных полиномов. Даны сравнения уравнений некоторых теорий. Сформулирована кинематическая гипотеза для теории тонких тел.

Найдены обратные тензоры-операторы к тензору-оператору уравнений движения теории упругости в перемещениях изотропного однородного материала и оператору напряжения в случае кусочно-гладкой плоской границы, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. Построен обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях для изотропных однородных материалов с центром симметрии, а также для материалов, не обладающих центром симметрии. В этих случаях выведены уравнения в отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды. При этом в последнем случае уравнение относительно вектора перемещений совпадает с уравнением классической теории, а уравнение относительно вектора вращений имеет аналогичный ему вид. При отсутствии объемных нагрузок уравнения редуцированной среды не зависят от свойств материала. В связи с этим можно полагать,

что эти уравнения могут быть использованы для идентификации материальных констант этой среды. Построен также обратный матричный дифференциальный тензор-оператор к матричному дифференциальному тензору-оператору напряжения и моментного напряжения в случае редуцированной среды. Кроме того, выявлены случаи, при которых легко обратить оператор напряжения и моментного напряжения.

Из расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости получены соответствующие расщепленные уравнения квазистатической задачи теорий призматических тел постоянной толщины в перемещениях в классическом случае и в перемещениях и вращениях для микрополярной среды. Из последних систем уравнений, в свою очередь, выведены уравнения в моментах неизвестных векторов-функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышева второго рода. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с их учетом. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них – система относительно моментов четных порядков, а другая относительно моментов нечетных порядков одной и той же неизвестной векторной функции. При этом матричные дифференциальные операторы этих систем имеют треугольный вид и их определители отличны от нуля, т.е. существуют для них обратные операторы, которые нетрудно найти для треугольных операторов. На основании обратного оператора к оператору какой-нибудь из этих систем она расщепляется и для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка (порядок системы зависит от порядка приближения), характеристические корни которого легко находятся. Используя метод Векуа для решения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение.

Выведены расщепленные системы уравнений квазистатической задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений, из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Для этой системы аналогично однослойному призматическому телу, используя метод Векуа, можно выписать аналитическое решение. Аналитическое решение, конечно, можно выписать и для уравнений редуцированной среды. Кроме того, расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно произвольной системы полиномов (Лежандра, Чебышева) получены для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника. Аналогичные уравнения получены и для редуцированной среды, которые содержат уравнение классической среды.

Приведены решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с заземленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с заземленными краями.

**В заключении** сформулированы основные выводы по диссертационной работе.

**Замечания по диссертационной работе.** Наряду с отмеченными выше положениями диссертационной работы можно высказать следующие замечания.

1. В первой главе один из основных объектов – единичный тензор второго ранга.

Однако его определение не дано. В каком смысле он единичный тензор?

2. Во введении на стр. 34 написано: «Рассмотрены некоторые вопросы, касающиеся тензора Римана-Кристоффеля при новой параметризации, а также приведены тождества Ламе». Однако в диссертации их нет.

3. Замена искомых величин на их моменты удобна при выполнении граничных условий на лицевых поверхностях. Однако она приводит к неудобству анализа состояния тонких тел независимо от порядка выбранной приближенной теории, являющегося главной задачей любых расчетов и любых теорий. Не определено конкретно понятие малости для тонких областей, а именно этот вопрос и до сих пор является камнем преткновения различных прикладных теорий. Усечение бесконечных систем уравнений и замена усеченными системами по произволу или на основании локальной сходимости некорректно.

4. Не оговорена необходимость использования корректирующих слагаемых в приближениях различных порядков.

5. Несмотря на то, что основное внимание в диссертационной работе уделено новой параметризации области тонкого тела, решения всех рассмотренных тестовых задач представлены с использованием классических параметризаций областей тонких тел, а преимущества новых параметризаций никак не продемонстрированы на примерах.

6. В диссертационной работе большое внимание уделено постановкам задач в моментах при неизотермических процессах, однако, для этого случая решение ни одной даже простой задачи не приведено. Хотя предлагаемые теории, по нашему мнению, должны быть эффективными при решении задач и в этих случаях.

Приведенные выше замечания не снижают общей положительной оценки диссертационной работы и являются следствием стремления автора «объять необъятное и еще многое непонятное». Тем не менее именно это стремление автора делает работу, несмотря на указанные выше замечания, более комплексной и интересной.

В целом настоящая диссертационная работа представляет собой завершенное исследование, посвященное решениям актуальных проблем. Она содержит новые научные результаты, среди которых, по нашему мнению, наиболее важными являются следующие.

1. Существенное развитие идеи, заложенной в механике Векуа И.Н., и ее обобщение на моделирование деформирования термоупругих микрополярных анизотропных тонких тел с одним и двумя малыми размерами, а также многослойных упругих тонких тел. В частности, развитие метода ортогональных полиномов (Лежандра и Чебышева) при моделировании классических и микрополярных термоупругих анизотропных тонких тел при учете граничных условий на всех их граничных поверхностях.
2. Определяющие соотношения в моментах для неоднородных материалов и система уравнений (многокомпонентных) теорий тонких тел относительно моментов различных неизвестных величин (тензоров напряжений и моментных напряжений и векторов перемещений и вращений).
3. Уравнения для определения нормирующих функций, а также построенные корректирующие слагаемые при различных граничных условиях, которые позволяют удовлетворять граничным условиям на лицевых поверхностях.
4. Доказательство эквивалентности метода В.В. Понятовского и метода разложения всех компонент тензора напряжений в ряды по системе полиномов.
5. Система уравнений движения для многослойных тонких тел с одним малым размером в моментах.
6. Формулировка вариационных принципов для теорий тонких тел в моментах с применением систем ортогональных полиномов.
7. Уравнения микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов, а также уравнения расширенной микрополярной теории оболочек. Формулировка гипотезы о жесткости тонкого тела в поперечном направлении.
8. Уравнения в моментах вектора перемещений для квазистатической задачи классической теории призматических тел постоянной толщины.

9. Разделенные системы уравнений движения микрополярной теории упругости как для материалов с центром симметрии, так и для материалов, не обладающих центром симметрии, а также разделение граничных условий для тел с кусочно-плоской границей как в классической, так и в микрополярной теории.
10. Разделенные уравнения квазистатических задач микрополярной теории призматических упругих тонких тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений.
11. Разделенные уравнения квазистатических задач микрополярной теории многослойных призматических упругих тонких тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений.
12. Разделенные уравнения квазистатических задач микрополярной теории призматических упругих тонких тел с двумя малыми размерами в моментах векторов перемещений и вращений, а также уравнения для редуцированной среды. Решение новых тестовых задач механики тонких тел и выявление ряда эффектов и закономерностей деформирования.

Полученные в диссертации результаты свидетельствуют о высокой научной квалификации автора и имеют большое значение для дальнейших научных исследований и технических приложений. Целесообразно продолжить исследования по теме диссертации во всех организациях академического профиля в области механики, а также в таких организациях как ЦАГИ, ЦИАМ, МГУ им. М.В. Ломоносова, ИТПМ СО РАН, ИПМ РАН, ЦНИИ Маш, МАИ, КГАСУ, КНИТУ-КАИ и в других организациях, занимающихся разработкой и совершенствованием образцов автомобильной, ракетной и авиационной техники.

Автореферат отражает содержание диссертации, основные научные результаты работы доложены на научных конференциях и симпозиумах различного уровня и опубликованы во многих работах автора, в том числе в реферируемых иностранных журналах и отечественных журналах из списка ВАК.

Диссертационная работа Никабадзе Михаила Ушангиевича «Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел» представляет собой завершённую научно-квалификационную работу на актуальную тему. Соответствует предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор Никабадзе Михаил Ушангиевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела».

Диссертация обсуждена и отзыв о ней одобрен на заседании кафедры «Прочность конструкций» ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ)» 13 ноября 2014 г., протокол № 10.

Заведующий кафедрой «Прочность конструкций»  
ФГБОУ ВПО «Казанский национальный  
исследовательский технический университет  
имени А.Н. Туполева-КАИ», д.т.н., проф.



Костин В.А.

Главный научный сотрудник, профессор кафедры  
«Прочность конструкций» ФГБОУ ВПО  
«Казанский национальный исследовательский  
технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ»,  
д.ф.-м.н., академик АН РТ



В.Н. Паймушин