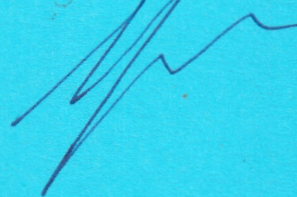


На правах рукописи



Никитченко Юрий Алексеевич

СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ НИХ  
МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Московском авиационном институте  
(Национальном исследовательском университете)

Научный консультант  
действительный член РАН, доктор технических наук, профессор Ю.А.Рыжов

Официальные оппоненты:

Галкин Владлен Сергеевич, доктор физико-математических наук,  
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е.Жуковского,  
главный научный сотрудник.

Козлов Виктор Владимирович, доктор физико-математических наук,  
профессор, Институт теоретической и прикладной механики им.  
С.А.Христиановича СО РАН, зав. лабораторией "Аэрофизических  
исследований дозвуковых течений".

Кузнецов Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук,  
профессор, Московский государственный областной университет,  
профессор кафедры "Теоретической физики".

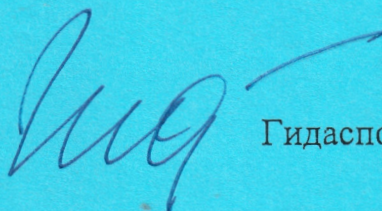
Ведущая организация: Институт теплофизики им. С.С.Кутателадзе СО РАН.

Защита состоится 30 октября 2015г. в 10 часов на заседании  
диссертационного совета Д 212.125.14 по защите докторских и кандидатских  
диссертаций при Московском авиационном институте, г. Москва,  
Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_».

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.125.14  
кандидат физико-математических наук



Гидаспов В.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы.**

В настоящей работе рассматриваются течения высокой степени динамической неравновесности. Под термином "динамическая неравновесность" понимается такое состояние газа, при котором энергия теплового движения молекул существенно неравномерно распределена между их степенями свободы.

Разработка методов описания течений высокой динамической неравновесности относится к числу наиболее актуальных задач современной аэромеханики и газовой динамики.

Одной из основных тенденций развития современной авиационной и ракетной техники является разработка гиперзвуковых летательных аппаратов. Особое внимание уделяется численному моделированию процессов, протекающих в области взаимодействия головной части аппарата с гиперзвуковым потоком. В этих областях возникают течения высокой динамической неравновесности, описание которых требует адекватных физико-математических моделей.

**Объект исследования** – течения высокой степени динамической неравновесности.

**Предмет исследования** – физико-математические модели неравновесных течений однокомпонентных газов.

### **Степень разработанности темы.**

Физико-математические модели, использующие статистические методы и методы кинетических уравнений, наиболее детально описывают процессы, протекающие в газовой среде. Модели этого уровня отличаются минимальным количеством дополнительных допущений, что повышает их адекватность описываемым физическим процессам. Основным недостатком этих моделей является избыточная информативность и, как следствие, высокая

трудоемкость численной реализации, в смысле количества вычислительных операций.

Модели гидродинамического уровня описания, базирующиеся на теории сплошной среды, ограничены малыми значениями чисел Кнудсена. Они наименее информативны и наиболее экономичны. В слабонеравновесных течениях, в которых число Кнудсена мало, но конечно, модель Навье–Стокса–Фурье (НСФ) является достаточно информативной и, по существу, основной физико-математической моделью динамики газовой среды, используемой в практических задачах.

Особый случай представляют течения с умеренными и большими характерными числами Кнудсена ( $Kn^*$ ), т.е. числами Кнудсена, вычисленными по размеру сильно возмущенной области течения. Отметим, что даже в плотных газах могут возникать области течения, в которых значения  $Kn^*$  близки к единице. Такие области динамической неравновесности образуются, например, при торможении сверх- и гиперзвуковых потоков.

Моделям неравновесных течений в макроскопических переменных занимают промежуточное положение между кинетическими и гидродинамическими моделями. Эти модели, с одной стороны, лишены избыточной информативности кинетических моделей, с другой – содержат необходимую информацию о молекулярных процессах, отсутствующую в теории сплошной среды.

В основе большей части этих моделей неравновесных течений лежит или метод Чепмена–Энскога или метод Грэда. Некоторые методы, возникшие в последние десятилетия, рассмотрены в диссертационной работе.

Два упомянутых метода, по существу, альтернативны. Метод Чепмена–Энскога, включая его обобщенные версии, принципиально ограничен значениями  $Kn < 1$ . Система дифференциальных уравнений содержит только уравнения сохранения, т.е. неполную систему моментных уравнений второго порядка. Численная реализация получаемых моделей существенно затруднена

в виду высокой нелинейности дифференциальных уравнений, начиная со второго (барнеттова) приближения.

Метод Грэда не содержит явных ограничений чисел Кнудсена и порядка системы уравнений. Численная реализация систем моментных уравнений относительно проста, а при использовании многопроцессорной обработки данных, достаточно экономична, т.к. допускает эффективное распараллеливание вычислительного процесса.

К основным недостаткам метода Грэда следует отнести коротковолновую неустойчивость получаемых систем моментных уравнений и высокую сложность аналитического анализа этих систем. Построение систем с помощью аппроксимирующей функции распределения, также усложняет метод, особенно в случае систем высокого порядка. Кроме этого, практические приложения требуют распространения метода на многоатомные газы.

В настоящее время разрабатываются способы усовершенствования метода Грэда. Характерно, что рассматривается 13-моментная система, уступающая 20-моментной системе в смысле теоретической обоснованности и не имеющая существенных преимуществ перед последней с точки зрения численной реализации.

Приведенные доводы определили направление и содержание настоящей работы.

**Цель работы** – развитие метода моментных уравнений и расширение его на течения многоатомных газов.

**Основные задачи работы.**

- Разработка метода построения системы моментных уравнений с минимальной конкретизацией аппроксимирующей функции распределения.
- Распространение метода на течения многоатомных газов.
- Разработка метода снижения коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений.

- Разработка физико-математических моделей неравновесных течений, базирующихся на системе моментных уравнений многоатомных газов.
- Исследование свойств моделей первого и второго приближения, следующих из системы моментных уравнений.
- Разработка граничных условий на твердой поверхности для широкого интервала чисел Кнудсена.
- Разработка инженерных моделей неравновесных течений многоатомного однокомпонентного газа.
- Численное тестирование разработанных моделей.

### **Методология и методы исследования.**

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученных систем моментных уравнений и физико-математических моделей использовался метод численного эксперимента. В численных экспериментах рассматривались, в основном, вырожденные течения: задача о структуре ударной волны, плоское течение Куэтта, теплопередача в плоском слое неподвижного газа.

Изучение основных свойств систем моментных уравнений проводилось на основе решения задачи о структуре ударной волны.

### **Научная новизна работы.**

- Предложен метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида, без конкретизации модели межмолекулярного взаимодействия. Метод не имеет аналогов.
- Предложены два метода снижения коротковолновой устойчивости системы моментных уравнений. Процедура получения дополнительных соотношений для системы моментных уравнений имеет аналог.
- Впервые показана физическая неадекватность 5-моментной модели в отношении определения температур поступательных и внутренних степеней свободы молекулы.

- Разработана модель второго приближения, не содержащая посторонних решений. Показано, что в условиях равновесия эта модель не имеет единственного решения. Модель не имеет аналогов.
- Разработана модель граничных условий на твердой поверхности, не имеющая ограничений по числам Кнудсена. Модель не имеет аналогов.
- Разработаны инженерные модели, обеспечивающие достаточно широкий профиль ударной волны. Модели не имеют аналогов.

**На защиту выносятся:**

- метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида;
- методы снижения коротковолновой неустойчивости моментной системы;
- модель граничных условий на твердой поверхности, не имеющая ограничений по числам Кнудсена;
- внепорядковая и гибридная инженерные модели.

**На защиту, также выносятся положения:**

- об основной причине коротковолновой неустойчивости моментных систем;
- о физической неадекватности температур поступательных и внутренних степеней свободы, определенных 5-моментными системами уравнений.

**Научная и практическая значимость работы.**

Метод построения системы моментных уравнений в совокупности с методами снижения ее коротковолновой неустойчивости позволяют разрабатывать физико-математические модели с моментами более высокого порядка, что позволит расширить область применения этих моделей как по числам Маха, так и по числам Кнудсена.

Инженерные модели и модель граничных условий на твердой поверхности могут быть использованы при разработке пакетов прикладных программ для расчетов неравновесных течений.

**Достоверность результатов исследования** подтверждена сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальных исследований разных авторов.

#### **Апробация и внедрение результатов.**

Результаты работы были представлены на следующих семинарах:

- видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбГТУ – НИИМ МГУ, 4 февраля 2014г.;
- семинар Сектора кинетической теории газов Вычислительного центра им. А.А.Дородницына, 3 марта 2015г.;
- международный авиационно-космический научно-гуманитарный семинар им. С.М. Белоцерковского, 19 марта 2015г..

Результаты работы включены в курс лекций по дисциплине "Динамика неравновесных сред", читаемый на кафедре "Аэродинамика ЛА" Московского авиационного института.

#### **Публикации.**

Основные результаты работы опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК (13 статей), в монографии и в учебном пособии.

Из указанных публикаций 10 статей и монография опубликованы лично автором.

#### **Структура и объем работы.**

Диссертация состоит из введения, семи разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка использованных источников. Общий объем составляет 252 страницы, включая 51 рисунок. Список использованных источников содержит 106 наименований.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы и направления исследований, сформулированы основные цели и задачи работы, показаны



научная новизна и ценность результатов, выносимых на защиту, описана структура диссертации.

**В первом разделе** построена система моментных уравнений третьего порядка для многоатомных однокомпонентных газов и разработан метод построения системы моментных уравнений для функции распределения общего вида. Этот раздел является центральной частью проведенного исследования.

Рассматриваются центрированные моменты вида:  $M_{ijk\dots}^{(N)} = m_0 \int c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$  и  $M_{ijk\dots}^{\Omega(N)} = \int \varepsilon c_i c_j c_k \dots f d\bar{c} d\varepsilon$ . В этих выражениях:  $m_0$ ,  $\varepsilon$  – масса и энергия внутренних степеней свободы молекулы;  $c_i$  – проекция тепловой скорости молекулы;  $f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$  – одночастичная функция распределения;  $N$  – порядок момента. Основные моменты в формальном и газодинамическом обозначениях:  $M^{(0)} \equiv \rho$ ;  $M_i^{(1)} \equiv 0$ ;  $M_{ij}^{(2)} \equiv P_{ij}$ ;  $M^{\Omega(2)} \equiv E_\Omega$ ;  $M_{ijk}^{(3)} \equiv 2\phi_{ijk}$ ;  $M_i^{\Omega(3)} \equiv \omega_i$ .

Общее моментное уравнение порядка  $N \geq 2$ :

$$\frac{\partial M_{ijk\dots}^{(N)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha M_{ijk\dots}^{(N)}) + M_{***\dots\alpha}^{(N)} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} - \frac{M_{***\dots}^{(N-1)}}{\rho} \frac{\partial P_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial M_{ijk\dots\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_\alpha} = \frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^+} - \frac{M_{ijk\dots}^{(N)}}{\tau}. \quad (1)$$

Здесь  $\frac{M_{ijk\dots}^{(N)+}}{\tau^+} = \int V_{ijk\dots}^{(N)} J^+ d\bar{\xi} d\varepsilon - u_* \int V_{***\dots}^{(N-1)} J^+ d\bar{\xi} d\varepsilon - u_* u_* \int V_{***\dots}^{(N-2)} J^+ d\bar{\xi} d\varepsilon - \dots$

– быстрота наработки момента в результате обратных столкновений;  $M_{ijk\dots}^{(N)+}$  – момент, вычисленный по распределению столкнувшихся молекул;  $\tau$  – среднее время свободного пробега молекулы;  $1/\tau^+$  – средняя частота обратных столкновений. В уравнениях моментов, содержащих энергию внутренних степеней свободы, символ  $M_{***\dots}$  должен быть заменен символом  $M_{***\dots}^{\Omega\dots}$ .

Повторяющийся в одночлене греческий индекс обозначает операцию свертки тензора. Подстрочный символ “звездочка” обозначает операцию симметрирования (компактного симметрирования) с исключением повторений тождественных по величине одночленов.

Уравнения моментов второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_{*\alpha}}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\Omega + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha E_\Omega) + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{E_\Omega^+}{\tau^+} - \frac{E_\Omega}{\tau} = \frac{\tau}{\tau^+} \frac{E_\Omega^+ - E_\Omega}{\tau} = \Xi. \quad (3)$$

Здесь  $\Xi$  – быстрота передачи энергии от поступательных степеней свободы к внутренним.

Тензор напряжений может быть разложен на сферический и бездивергентный тензоры следующим образом:

$$P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m \quad (4)$$

Здесь  $p_{ij}^m$  – неравновесные напряжения;  $p^m = P_{\alpha\alpha}/3$  – "механическое" давление.

С учетом (4) правая часть уравнения (2) может быть представлена как:

$$\begin{aligned} \frac{P_{ij}^+}{\tau^+} - \frac{P_{ij}}{\tau} &= \frac{p_{ij}^{m+} + \delta_{ij} p^{m+}}{\tau^+} - \frac{p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m}{\tau} = \\ &= -\frac{1}{\tau} \left( p_{ij}^m - \frac{\tau}{\tau^+} p_{ij}^{m+} \right) - \delta_{ij} \frac{1}{\tau} \left( p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right) = -\frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \Pi \right) p_{ij}^m - \delta_{ij} \frac{2}{3} \Xi \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициентом  $\Pi$  обозначено отношение неравновесных напряжений, создаваемых молекулами после и до столкновений, т.е.  $\Pi = p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$ .

В разрабатываемом методе построения системы моментных уравнений принято следующее положение: главные оси тензора не меняют своего направления в процессе релаксации (изотропность релаксации). Из этого положения в частности следует, что отношение  $p_{ij}^{m+} / p_{ij}^m$  не зависит от значения индексов, т.е. является скаляром.

Выражение  $\tau / (1 - \tau / \tau^+ \Pi)$ , фигурирующее в (5), имеет смысл времени релаксации напряжений:

$$\tau_p = \tau / \left( 1 - \frac{\tau}{\tau^+} \frac{p_{ij}^{m+}}{p_{ij}^m} \right). \quad (6)$$

В отношении релаксационного процесса принято еще одно положение: в процессе релаксации энергия теплового движения молекул не переходит в энергию их группового движения. На основании этого положения члены уравнений (3) и (5), отвечающие за энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы, обозначены единым символом  $\Xi$ :

$$\Xi = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\tau}{\tau^+} E_{\Omega}^+ - E_{\Omega} \right) \text{ и } \Xi = \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} \left( p^m - \frac{\tau}{\tau^+} p^{m+} \right)$$

Условие энергообмена в терминах температуры:

$$c_{\Omega} \frac{\rho}{\tau} \left( \frac{\tau}{\tau^+} T_{\Omega}^+ - T_{\Omega} \right) = \frac{3}{2} R \frac{\rho}{\tau} \left( T_t - \frac{\tau}{\tau^+} T_t^+ \right). \quad (7)$$

Здесь  $c_{\Omega} = c_v - 3/2 R$  – теплоемкость внутренних степеней свободы;  $c_v$  – изохорная теплоемкость;  $R$  – удельная газовая постоянная. Поступательная ( $T_t$ ) и внутренняя ( $T_{\Omega}$ ) температуры связаны с термодинамической температурой ( $T$ ) соотношением:

$$c_v T = \frac{3}{2} R T_t + c_{\Omega} T_{\Omega}. \quad (8)$$

Из (7) в совокупности с выражениями  $\Xi$  следует:

$$\Xi = \frac{3}{2} \rho R \frac{c_{\Omega}}{c_v} \frac{\theta}{\tau_{\theta}} = \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\rho R \theta}{\tau_{\theta}}. \quad (9)$$

где  $\theta = T_t - T_{\Omega}$ ;  $\tau_{\theta}$  – время релаксации разности температур, определенное аналогично времени релаксации напряжений (6);  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Время релаксации  $\tau_{\theta}$  представлено в виде  $\tau_{\theta} = h \tau_p$ . В настоящей работе величина  $h$  рассматривается как свободный параметр модели или оценивается в соответствии с известными рекомендациями.

Уравнения моментов третьего порядка  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  следуют из общего моментного уравнения (1). Вид релаксационных членов этих уравнений и времена релаксации  $\tau_\varphi$  и  $\tau_\omega$  получены аналогично (5), (6).

Для замыкания системы третьего порядка использована аппроксимирующая функция распределения эллипсоидального вида. Локальные, т.е. определенные аппроксимирующей функцией, выражения моментов четвертого порядка:

$$M_{ijkl}^{(4)} = R^2 \rho (T_{ij} T_{kl} + T_{ik} T_{jl} + T_{il} T_{jk}) \equiv R^2 \rho T_{**} T_{**}; \quad (10)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = c_\Omega R \rho T_\Omega T_{ij} \quad (11)$$

В диссертационной работе рассмотрены аппроксимирующие функции более общего вида, приводящие к идентичным выражениям замыкающих моментов четвертого порядка. Для моментов более высокого порядка получены выражения:

$$M_{ijklm}^{(5)} = R \rho T_{**} \psi_{***}. \quad (12)$$

$$M_{ijk}^{\Omega(5)} = c_\Omega \rho T_\Omega \psi_{ijk} + R \rho T_{**} \varpi_*. \quad (13)$$

$$M_{ijklmn}^{(6)} = R^3 \rho T_{**} T_{**} T_{**}. \quad (14)$$

$$M_{ijkl}^{\Omega(6)} = c_\Omega R^2 \rho T_\Omega T_{**} T_{**}. \quad (15)$$

Здесь использованы переменные  $T_{ij} = P_{ij}/(\rho R)$ ,  $\psi_{ijk} = 2\varphi_{ijk}/\rho$  и  $\varpi_i = \omega_i/\rho$ , отражающие структуру полученных выражений лучше, чем системные переменные  $P_{ij}$ ,  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$ .

Анализ выражений (10) ÷ (15) с учетом основных свойств центрированных моментов позволил принять допущение: моменты высших порядков могут быть адекватно аппроксимированы линейной комбинацией моментов низших порядков. Под моментами низших порядков понимаются моменты, определенные системой, требующей замыкания.

Это допущение позволяет более простым способом получать аппроксимации высших моментов, а начиная с моментов шестого порядка – и более общие аппроксимации.

Другой позитивной стороной допущения о линейной зависимости низших моментов является возможность отказаться от аппроксимирующей функции распределения. Сам факт использования аппроксимирующей функции, определяющей моменты локально, имеет характер сильного допущения.

Для определения времен релаксации  $\tau_p$ ,  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_\omega$  принято допущение: время релаксации неравновесной величины не зависит от степени неравновесности течения. Это допущение позволило выразить указанные величины посредством закона трения Стокса и закона Фурье. В результате получены следующие значения:  $\tau_p = \mu(T_t)/p^m$ ;  $\tau_\varphi = 3/2 \tau_p$ ;  $\tau_\omega = \tau_p$ . В последнем выражении использована аппроксимация Эйкена  $Pr = 4\gamma/(9\gamma - 5)$ .

На основании принятых положений и допущений сформулирован метод построения системы моментных уравнений порядка  $N \geq 4$  для функции распределения общего вида, без конкретизации модели межмолекулярного взаимодействия. Метод имеет феноменологический характер. Алгоритм метода состоит в следующем.

1) Записываются моментные уравнения со второго до  $N$ -го порядка с использованием зависимости (1).

2) Правые части уравнений приводятся к виду релаксационного члена. Время релаксации неравновесной величины типа  $a_{ijk\dots}$  ( $p_{ij}^m, \varphi_{ijk}, \omega_i, \dots$ ) выражаются

как  $\tau_a = \tau / \left( 1 - \frac{\tau a_{ij\dots}^+}{\tau^+ a_{ij\dots}} \right)$ . Член, описывающий энергообмен между

поступательными и внутренними степенями свободы записывается с учетом (9).

3) Время релаксации моментов второго и третьего порядка определяются с использованием закона трения Стокса и закона Фурье. Время релаксации моментов порядка  $N > 3$  принимаются в качестве свободных параметров модели.

4) Для моментов  $(N + 1)$ -го порядка записываются зависимости вида (10) ÷ (13).

Описанным методом построена система моментных уравнений третьего порядка, называемая в дальнейшем 24-моментной системой или системой M24. Одна из форм записи, удобная для много процессорной численной реализации:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho u_i u_\alpha + P_{i\alpha}) = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_\Omega + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha E_\Omega) + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma - 1)}{2} c_\Omega \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial \varphi_{ij\alpha}}{\partial x_\alpha} = - \frac{P_{ij} - \delta_{ij} p^m}{\tau_p} - \delta_{ij} \frac{5 - 3\gamma}{2} R \rho \frac{\theta}{h \tau_p}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} = - \frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{E_\Omega}{\rho} \right) = - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}. \quad (21)$$

Свойства 24-моментной системы в отношении коротковолновой неустойчивости такие же, как и у 20-моментной системы Грэда. На Рисунке 1 показаны профили скорости и температуры в плоской ударной волне одноатомного газа.

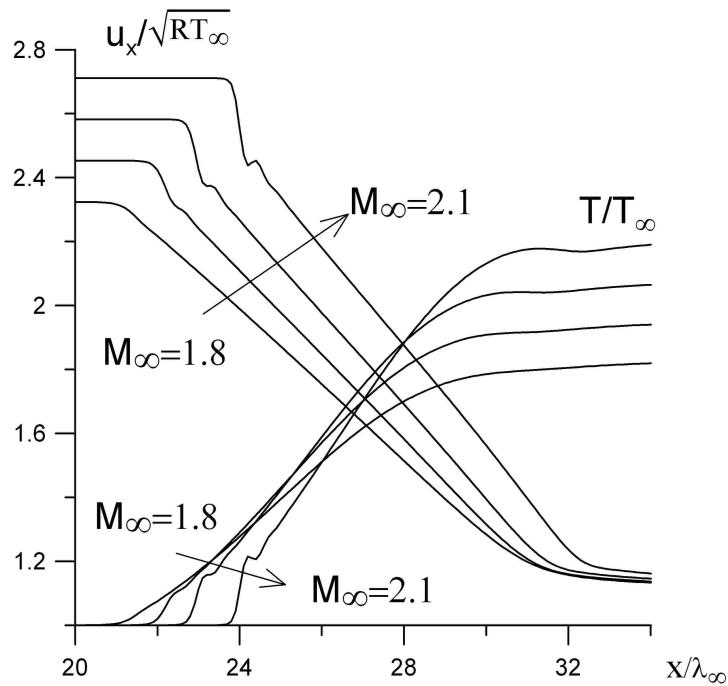


Рисунок 1. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Система М24.

При  $M > 1.8$  возникает физически неадекватное искажение профиля (субскачок). На профилях ударной волны в многоатомных газах субскачок проявляется аналогичным образом.

**Во втором разделе** разработаны методы снижения коротковолновой неустойчивости систем моментных уравнений.

Показано, что локальные выражения замыкающих моментов (10), (11) не удовлетворяют их моментным уравнениям (балансовым соотношениям).

В целях согласования локального и балансового выражений замыкающих моментов их локальные выражения представлены в следующем виде:

$$M_{ijkl}^{(4)} = RT_{**}P_{**} + m_{ijkl}^{(4)}; \quad (22)$$

$$M_{ij}^{\Omega(4)} = c_\Omega T_\Omega P_{ij} + m_{ij}^{\Omega(4)}. \quad (23)$$

В этих выражениях  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  выполняют функции согласующих добавок. Используемая методика выделения согласующих добавок аналогична методике "регуляризации" 13-моментной системы Грэда.

Подстановка (22) и (23) в соответствующие моментные уравнения позволяет получить уравнения согласующих добавок:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{***\alpha}^{(4)}}{\rho} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} + R \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \psi_{***}}{\partial x_{\alpha}} + \psi_{**\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_{\alpha}} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left( \frac{p_{**}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right)^2 = - \frac{m_{ijkl}^{(4)}}{\rho \tau_4} ; \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + u_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho} \right) + \frac{m_{*\alpha}^{\Omega(4)}}{\rho} \frac{\partial u_{*}}{\partial x_{\alpha}} + c_{\Omega} \psi_{ij\alpha} \frac{\partial T_{\Omega}}{\partial x_{\alpha}} + R \left( T_{*\alpha} \frac{\partial \varpi_{*}}{\partial x_{\alpha}} + \varpi_{\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right) = - \frac{m_{ij}^{\Omega(4)}}{\rho \tau_{\Omega 4}} . \quad (25)$$

В правых частях уравнений фигурируют времена релаксации моментов четвертого порядка  $\tau_4$  и  $\tau_{\Omega 4}$ , определяемые в соответствии с описанным выше методом построения системы моментных уравнений.

Система M24, дополненная зависимостями (24) и (25), образует систему 45-ти скалярных уравнений, условно называемую системой M45. Область течений, свободная от коротковолновой неустойчивости, у системы M45 несколько шире, чем у системы M24. На Рисунке 2 показаны профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа, рассчитанные с помощью системы M45.

Коротковолновая неустойчивость системы M45 связана с тем, что моменты пятого порядка, присутствующие в выражениях моментов четвертого порядка представлены своими локальными выражениями.

Ослабление влияние локальных выражений моментов пятого порядка на решения системы и сокращение ее до 24-х уравнений, будет достигнуто,



если вместо дифференциальных уравнений согласующих добавок  $m_{ijkl}^{(4)}$  и  $m_{ij}^{\Omega(4)}$  использовать их приближения.

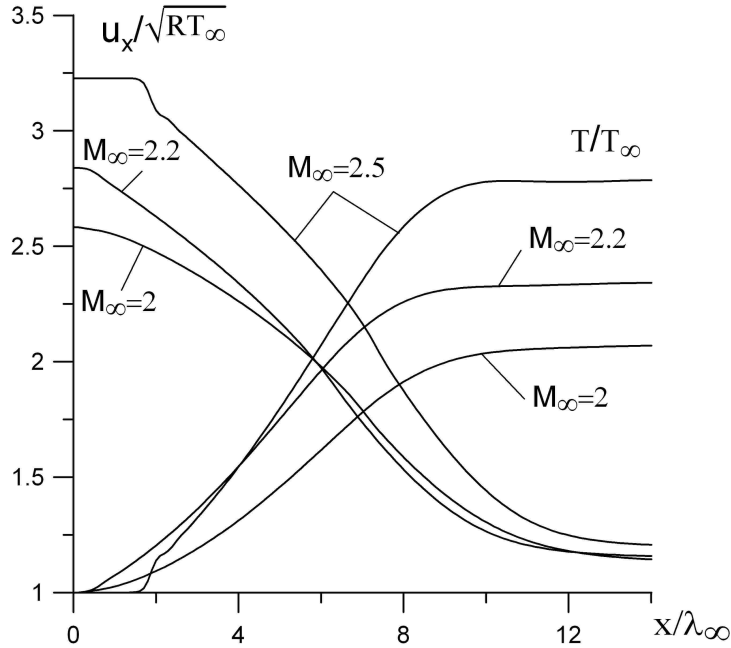


Рисунок 2. Профили скорости и температуры в ударной волне одноатомного газа. Система М45;  $\tau / \tau_p = 0.5$ ,  $\tau_4 / \tau_p = 1$ .

Если рассматривать время релаксации как малую величину и принять  $T_{ij} \approx \delta_{ij} T_t$ , то выделение старших членов (24), (25) приводит к выражениям:

$$m_{ijkl}^{(4)} = -\frac{\tau_4}{\tau_p} \tau_p \left( \begin{aligned} & 2R \left( T_t \left( \frac{\partial \varphi_{***}}{\partial x_*} - \varphi_{***} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{**\alpha} \varphi_{**\alpha} \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) - \\ & - \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\tau_p}{\rho} \left( \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \left( \frac{p_{**}^m}{\tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) \end{aligned} \right); \quad (26)$$

$$m_{ij}^{\Omega(4)} = -\frac{\tau_{\Omega 4}}{\tau_p} \tau_p \left( \begin{aligned} & 2c_\Omega \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{R\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\tau_p} + \delta_{ij} \frac{c_\Omega}{c_v} \frac{R\rho\theta}{h\tau_p} \right) + \\ & + R \left( T_t \left( \frac{\partial \omega_*}{\partial x_*} - \omega_* \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_*} \right) + \delta_{ij} \omega_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} \right) \end{aligned} \right). \quad (27)$$

Уравнения моментов третьего порядка с учетом (22), (23) примут вид:

$$\frac{\partial \varphi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{**\alpha} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{2} P_{*\alpha} \frac{\partial T_{**}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ijk\alpha}^{(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p}; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + c_\Omega P_{i\alpha} \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial m_{i\alpha}^{\Omega(4)}}{\partial x_\alpha} = -\frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{\omega_i}{\tau_p}. \quad (29)$$

Остальные уравнения системы M24 остаются неизменными. Полученная система уравнений в дальнейшем называется системой M24с. Ее коротковолновую неустойчивость демонстрирует Рисунок 3.

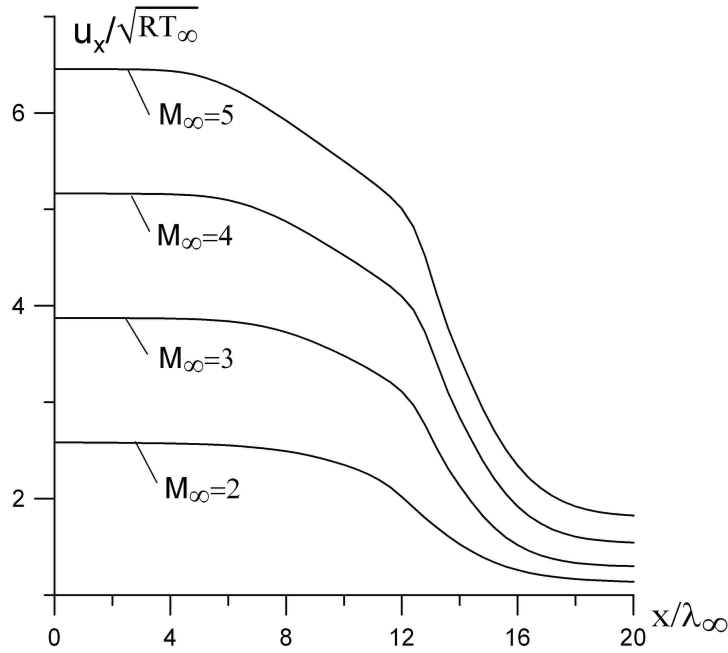


Рисунок 3 Профили скорости в ударной волне одноатомного газа. Система M24с;  $\tau/\tau_p = 0.612$ ;  $\tau_4/\tau_p = 1$ .

При  $M_\infty \geq 3$  профиль начинает «делиться» на два участка, что не соответствует природе явления. Субскачок в характерном для него виде не возникает даже при гиперзвуковых числах Маха.

Дальнейшее ослабление влияние локальных выражений моментов пятого порядка на решения системы будет достигнуто, если приближение  $T_{ij} \approx \delta_{ij} T_t$  дополнить приближением  $\varphi_{ijk} \approx (\delta_{jk} \varphi_i + \delta_{ik} \varphi_j + \delta_{ij} \varphi_k)/5$ . Уравнения (26) и (27) примут следующий вид:

$$m_{ijkl}^{(4)} = -\tau_4 \rho \left[ \frac{1}{5} R \left( T \delta_{**} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} + \delta_{**} \psi_* \frac{\partial T}{\partial x_*} + 2 \delta_{**} \delta_{**} \psi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{\tau}{\tau_p} \tau_p \left( \frac{p_{**}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{**} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right)^2 \right]; \quad (30)$$

$$m_{ij}^{\Omega(4)} = -\tau_{\Omega 4} R \rho \left[ \frac{1}{5} \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} \left( \psi_* \frac{\partial T}{\partial x_*} + \delta_{ij} \psi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) + T \frac{\partial \varpi_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \varpi_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{\tau}{\tau_p} \frac{\theta}{h} \left( \frac{p_{ij}^m}{\rho \tau_p} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \frac{R\theta}{h \tau_p} \right) \right]. \quad (31)$$

Система M24с, в которой уравнения (28), (29) записаны с учетом (30), (31), в дальнейшем обозначается как M24сс. Профили скорости, рассчитанные с помощью системы M24сс представлены на Рисунке 4.

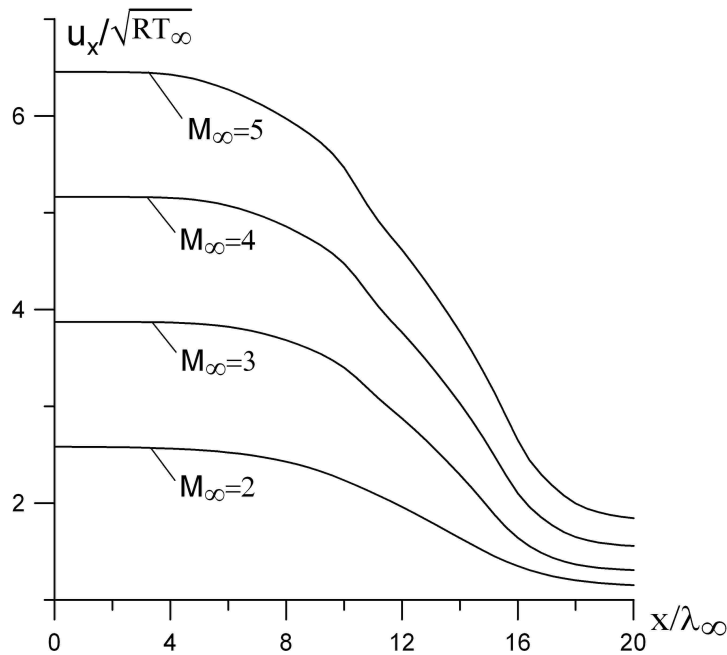


Рисунок 4. Профили скорости в ударной волне одноатомного газа. Система M24сс;  $\tau / \tau_p = 0.612$ ;  $\tau_4 / \tau_p = 1$ .

Согласующие добавки (26), (27) приводят к появлению вторых производных  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$  в их моментных уравнениях (28), (29). Известным свойством вторых производных является сглаживание решения. Кривые Рисунка 3 сглажены вторыми производными моментов  $\varphi_{ijk}$  и  $\omega_i$ .

Согласующие добавки в виде (30), (31) не содержат момента  $\varphi_{ijk}$ , и будучи подставленными в (28) не повышают порядка дифференциального уравнения. Таким образом, сглаженный вид профилей Рисунка 4 следует отнести к достоинствам метода согласования.

Принято считать, что причиной коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений является нарушение сходимости в среднем ряда, используемого Грэдом в аппроксимирующей функции распределения.

Аппроксимирующая функция распределения системы M24 не содержит разложения в ряд, тем не менее, на профиле ударной волны, рассчитанной с помощью системы M24, при  $M_\infty \approx 1.8$  возникает субскачок, см. Рисунок 1. Характер коротковолновой неустойчивости системы M24 полностью соответствует характеру 20-моментной системы Грэда.

Согласование балансового и локального выражений замыкающих моментов позволяет исключить субскачок, см. Рисунок 2. Ослабление влияния локального выражения моментов пятого порядка, присутствующих в зависимостях замыкающего момента, в еще большей степени снижают коротковолновую неустойчивость, см. Рисунок 3 и Рисунок 4.

Материалы Раздела 2 приводят к следующим выводам:

- основной причиной коротковолновой неустойчивости систем моментных уравнений является рассогласование локального и балансового выражений высших моментов, в частности – замыкающих моментов;
- совокупность описанных выше способов согласования локального и балансового выражений моментов высших порядков может рассматриваться как метод снижения коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений.

**В третьем разделе** получены первое и второе приближения системы M24.

Линейные комбинации уравнений (16), (18), (19) позволяют записать уравнения температур:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0; \quad (32)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{2}{3R\rho} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{5-3\gamma}{2} \frac{\theta}{h\tau_p}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{\theta}{h\tau_p}. \quad (34)$$

Два последних уравнения дают уравнение разности температур:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h\tau_p}. \quad (35)$$

Линейная комбинация уравнения (19) с его сверткой приводит к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}^m) + P_{*\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varphi_\alpha \right) = -\frac{p_{ij}^m}{\tau_p}. \quad (36)$$

Первые приближения (в смысле процедуры Чепмена-Энскога) системы M24 могут быть получены в предположении того, что время релаксации напряжений  $\tau_p$  является малой величиной, по отношению к величине основных газодинамических переменных. Из уравнений неравновесных величин следует, что порядок малости этих величин –  $\tau_p$ . Удерживая в уравнениях неравновесных величин только старшие по величине члены, приходим к выражениям:

$$\theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad (37)$$

$$p_{ij}^{m[1]} = -\mu \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad (38)$$

$$\varphi_i^{[1]} \equiv \varphi_{i\alpha\alpha}^{[1]} = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}; \quad (39)$$

$$\omega_i^{[1]} = -\left( \frac{c_p}{Pr} - \frac{15}{4} R \right) \mu \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_i}. \quad (40)$$

В этих выражениях надстрочные квадратные скобки обозначают порядок приближения. Коэффициент вязкости определен как  $\mu = \tau_p p^m$ .

В механике сплошной среды тензор напряжений разложен как:

$$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p, \quad (41)$$

где  $p_{ij}$  – термодинамические неравновесные напряжения;  $p = \rho RT$  – термодинамическое давление.

С учетом (4), (8) и (41)

$$p_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta. \quad (42)$$

В первом приближении:

$$p_{ij}^{[1]} = p_{ij}^{m[1]} + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} \rho R \theta^{[1]} = -\mu \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (43)$$

Это выражение содержит коэффициент объемной вязкости  $\mu'$  в явном виде:

$$\mu' = \frac{5-3\gamma}{2} h \mu \quad (44)$$

Первое приближение теплового потока:

$$q_i^{[1]} = \varphi_i^{[1]} + \omega_i^{[1]} = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (45)$$

Полученные уравнения представляют собой строгие (не содержащие дополнительных допущений) первые приближения неравновесных величин, следующие из системы М24. Эти уравнения в совокупности с уравнениями сохранения массы и импульса позволяют построить две неэквивалентные системы уравнений первого приближения.

Система, содержащая 5 моментных уравнений и называемая в дальнейшем 5-моментной системой или 5-моментной моделью, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0; \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} h \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad q_i = -\frac{c_p}{\text{Pr}} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \mu = \mu(T^s)$$

Температуры  $T_t$  и  $T_\Omega$  в приближении, соответствующем приближению системы (46), могут быть определены следующим образом:

$$T_t = T + \frac{5-3\gamma}{2} \theta^{[1]} = T - \frac{5-3\gamma}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad (47)$$

$$T_\Omega = T - \frac{3}{2} (\gamma - 1) \theta^{[1]} = T + (\gamma - 1) h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (48)$$

На Рисунке 5 показаны профили температур в ударной волне двухатомного газа. Значение параметра  $h$  составляло  $h = 2.5$  ( $s = 1$  – модель максвелловских молекул).

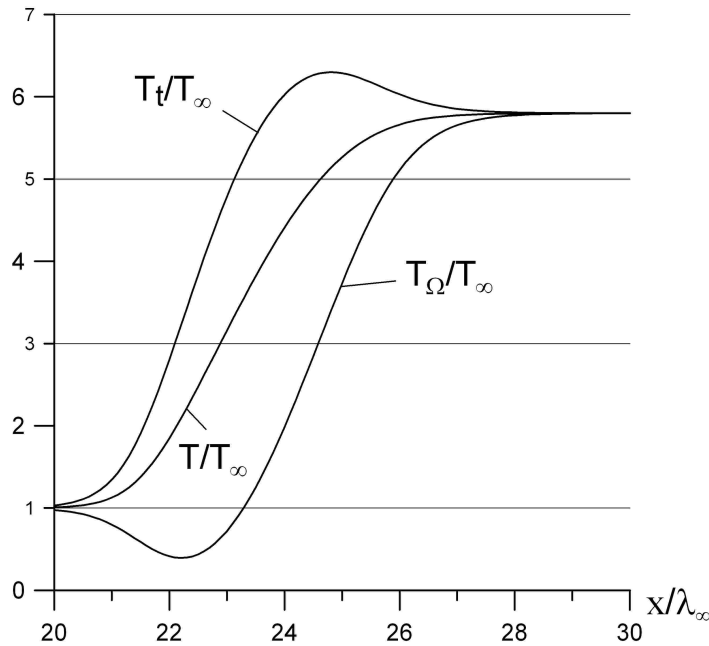


Рисунок 5. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа. 5-моментная система;  $M_\infty = 5$ ;  $s = 1$ ;  $h = 2.5$ .

На профиле температуры внутренних степеней свободы имеет место физически неадекватная область. Этот модельный эффект наблюдается при всех значениях  $h > 1$  и подробно рассмотрен в диссертационной работе. В

частности показано, что первого приближения разности температур  $\theta$  не достаточно для определения температур  $T_t$  и  $T_\Omega$  в том же приближении. Это положение распространено на модели высших приближений.

Термодинамическая температура определена качественно верно. Если расчет поля течения ограничивается только этой температурой, то 5-моментная модель может рассматриваться как модель, уточняющая классическую модель НСФ в отношении коэффициента объемной вязкости.

Система, содержащая 6 моментных уравнений (двухтемпературная модель), также является строгим первым приближением системы M24.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} &= 0 \\
 \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} &= 0 \\
 \frac{\partial T_t}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_t}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3\rho R} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{5-3\gamma}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p}; \\
 \frac{\partial T_\Omega}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c_\Omega \rho} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\alpha} &= \frac{3(\gamma-1)}{2h} \frac{T_t - T_\Omega}{\tau_p} \\
 p_{ij}^m &= -\mu \left( \frac{\partial u_{*j}}{\partial x_{*i}} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad \varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -c_\Omega \mu \frac{\partial T_\Omega}{\partial x_i}.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Здесь  $P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m$ ,  $\mu = \mu(T_t^s)$ . Коэффициент объемной вязкости, а следовательно и первое приближение разности температур, не используется.

На Рисунке 6 совмещены профили температур 5-моментной и двухтемпературной моделей. Параметры  $s$  и  $h$  моделей подобраны таким образом, чтобы наклон профиля плотности соответствовал экспериментальным данным Алсмейера (см. список литературы диссертации, [92]).

Несмотря на завышенную по сравнению с предыдущими тестами величину параметра  $h = 3.1$ , двухтемпературная модель обеспечивает качественно верное решение и дает более широкую, чем 5-моментная модель, область возмущений.



Анализ моделей первого приближения приводит к выводу: для описания течений высокой степени неравновесности с использованием модели первого приближения целесообразно применять двухтемпературную модель. Температурную зависимость коэффициента вязкости следует определять через поступательную температуру.

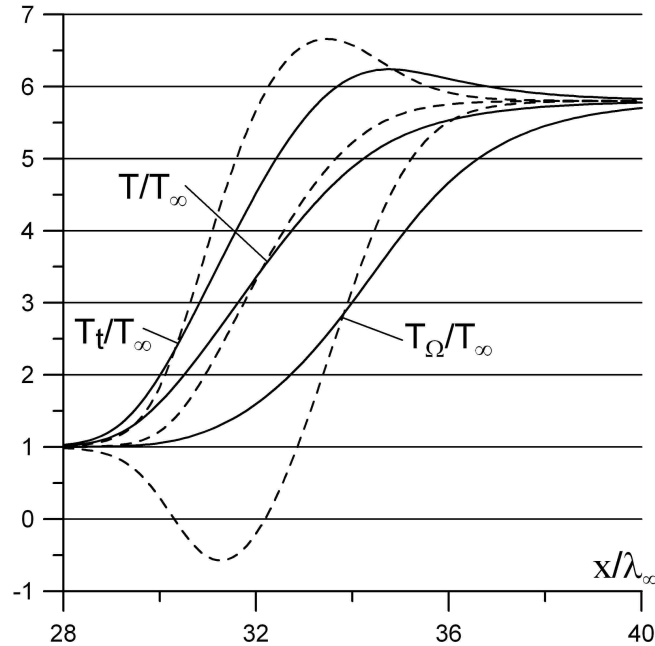


Рисунок 6. Профили температур в плоской ударной волне двухатомного газа;  $M_\infty = 5$ . Сплошные линии – двухтемпературная модель,  $s = 1$ ,  $h = 3.1$ . Пунктирные линии – 5-моментная модель;  $s = 1$ ,  $h = 4$ .

Рассмотрено второе (в смысле процедуры Чепмена-Энскога) приближение системы M24. В качестве малой величины принято среднее время свободного пробега молекулы  $\tau$ . Строгое второе приближение системы соответствует модели Барнетта с коэффициентом объемной вязкости в виде (44).

Для получения смешанных производных групповой скорости и температуры процедура Чепмена-Энскога предусматривает дифференцирование соответствующих уравнений модели Эйлера по координате геометрического пространства. Одной из особенностей уравнений Барнетта является наличие в них посторонних решений. Можно

предположить, что появление посторонних решений связано с операцией дополнительного дифференцирования дифференциальных уравнений сохранения импульса и энергии.

Во избежание дополнительного дифференцирования уравнение неравновесной величины, например (35), может быть перегруппировано и представлено в следующем виде:

$$\theta + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = -h \tau_p \left( \frac{2}{3} \left( \delta_{\alpha\beta} T_t + \frac{P_{\alpha\beta}^m}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \varphi_\alpha - \frac{1}{c_\Omega} \omega_\alpha \right) \right) \quad (50)$$

Уравнения остальных неравновесных величин преобразуются аналогично.

Левая часть (50) с точностью до величин порядка  $\tau^2$  представляет собой значение  $\theta$  в точке траектории жидкой частицы, в которой частица окажется по истечении времени релаксации  $h \tau_p$ , т. е. в более поздний момент времени. Если эту точку принять в качестве расчетной, то (50) можно переписать в виде:

$$\theta^{[2]} = \bar{\theta} - \frac{2}{3} \frac{h \tau_p}{R\rho} \left( p_{\alpha\beta}^{[1]} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \varphi_\alpha^{[1]} - \frac{3}{3} \frac{R}{c_\Omega} \omega_\alpha^{[1]} \right) \right). \quad (51)$$

Здесь в квадратных скобках указан номер приближения, а символ с обратной стрелкой представляет собой первое приближение  $\theta$  более ранний момент времени. Для  $\bar{\theta}$  справедливо уравнение:

$$\bar{\theta} + \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \right) h \tau_p = \theta^{[1]} = -\frac{2}{3} h \tau_p T \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (52)$$

Полная система уравнений модели второго приближения (релаксационной модели):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p_{i\alpha} + \delta_{i\alpha} p) = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \left( \delta_{\alpha\beta} T + \frac{p_{\alpha\beta}}{R\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0; \quad (53)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{h\tau_p} \left( \frac{2}{3} h \frac{\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \bar{\theta} \right);$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{p}_{ij}^m}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_p} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \bar{p}_{ij}^m \right);$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_\varphi} \left( \frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\varphi}_i \right);$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau_\omega} \left( c_\omega \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} + \bar{\omega}_i \right).$$

В этой системе:

$$\mu = \tau_p p; \quad c_\lambda = 1 - \left( \frac{5}{2} - \frac{\gamma}{\text{Pr}} \right) h; \quad a_1 = \frac{63}{8} - c_\mu \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_2 = \frac{9}{4} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}};$$

$$a_3 = \frac{63}{8} + \frac{\gamma}{(\gamma-1)\text{Pr}} + \frac{c_\omega^2}{c_\Omega R}; \quad a_4 = \frac{3}{2} - c_\lambda;$$

$$p_{ij} = \bar{p}_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5-3\gamma}{2} R\rho \bar{\theta} + 3R \frac{\mu}{p} \left( \mu \frac{\partial^2 T_t}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{c_\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\mu^2}{p} \left( \begin{aligned} & \left( (1-c_\mu) \frac{\partial u_*}{\partial x_*} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_*} \frac{\partial u_*}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \right. \\ & \left. - \delta_{ij} \left( c_\mu \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \left( \frac{2}{3} - c_\mu^2 \right) \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right) \right) \end{aligned} \right);$$

$$q_i = \bar{\varphi}_i + \bar{\omega}_i + \mu \left( \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) - c_\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) +$$

$$+ R \frac{\mu^2}{p} \left( a_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \left( a_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + a_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + \left( \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + a_4 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_i} \right) T \right);$$

Основные свойства полученной системы уравнений исследованы на примере решения задачи о профиле ударной волны. На Рисунке 7

представлены профили плотности, скорости и температуры при  $M_\infty = 5$ . Значения  $\rho$ ,  $u_x$ ,  $T$  преобразованы к единичному отрезку.

При числах Маха, близких к гиперзвуковым, в области невозмущенного потока возникает волнообразность профилей. В сильнонеравновесной области течения, которая, собственно, и представляет профиль ударной волны, решение является гладким. Субскачок на профилях отсутствует.

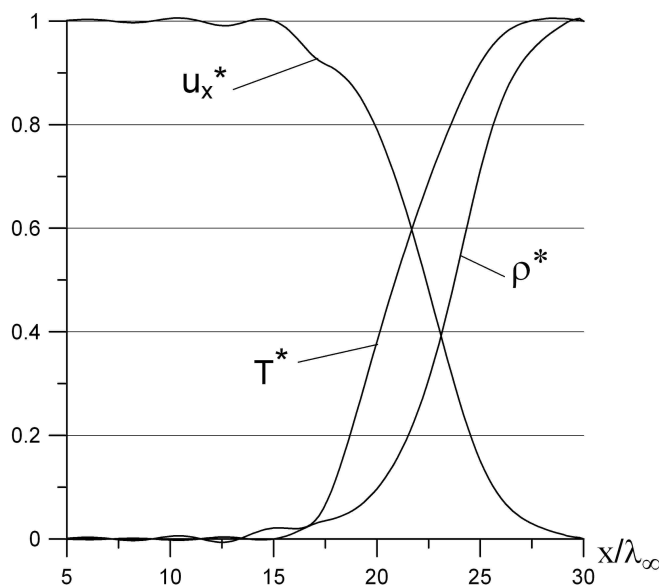


Рисунок 7. Профили плотности, скорости и температуры в плоской ударной волне одноатомного газа. Релаксационная модель,  $M_\infty = 5$ ,  $s = 1$

В отношении экономичности численного решения релаксационная модель существенно уступает моделям, построенным на базе 24-моментной системы уравнений. Это связано, прежде всего, с высокой нелинейностью и высоким (третьим) порядком уравнений данной системы.

**В четвертом разделе** построена модель граничных условий на твердой поверхности. Модель позволяет определять скольжение скорости и скачок температуры в широком интервале чисел Маха.

В геометрическом пространстве использована декартова прямоугольная система координат  $Ox_1x_2x_3$ , связанная с обтекаемой поверхностью. Ось  $Ox_1$

принята в качестве внешней нормали поверхности. Скоростная система координат  $Oc_1c_2c_3$  связана с центром массы жидкой частицы.

Принят диффузный закон отражения молекул от поверхности с полной аккомодацией энергии. Функция распределения отраженных от поверхности молекул:

$$\tilde{f} = \frac{2\tilde{n}}{(2\pi RT_w)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\tilde{c}^2}{2RT_w}\right). \quad (54)$$

Здесь  $T_w$  – температура поверхности;  $\tilde{c}_i = c_i + u_i$ . Надстрочным символом “тильда” обозначены величины, относящихся к отраженным молекулам.

Падающие на поверхность молекулы условно разбиты на группы медленных и быстрых молекул. Медленные молекулы имеют малые по модулю скорости  $c_1$ . Составляющие скорости  $c_2$  и  $c_3$  не ограничены.

Медленные молекулы испытывают последнее столкновение вблизи поверхности. Составляющие температуры  $T_{22}$  и  $T_{33}$  этих молекул приняты равными температуре газа  $T_t$  в граничной точке, а их групповая скорость – равной скорости газа  $\mathbf{u}$  в той же точке. Составляющая температуры  $T_{11}$  обозначена  $\hat{T}_*$ , концентрация –  $\hat{n}_0$ . Функция распределения медленных молекул:

$$\hat{f}_0 = \frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2} T_t \sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{c_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{c_2^2 + c_3^2}{2RT_t}\right). \quad (55)$$

Надстрочный символ “крышка” относится к падающим молекулам.

Быстрые молекулы испытывают последнее столкновение во внешней области течения. Распределение этих молекул задано в виде суммы двух функций. Первая содержит как быстрые, так и медленные молекулы:

$$\hat{f} = \frac{2\hat{n}}{(2\pi R\hat{T})^{3/2}} \exp\left(-\frac{\hat{c}^2}{2R\hat{T}}\right), \quad \hat{c}_i = c_i - \hat{u}_i, \quad \hat{u}_1 = 0. \quad (56)$$

Вторая функция “вырезает” (знак “минус”) из первой медленные молекулы:

$$\hat{f}_- = -\frac{2\hat{n}_0}{(2\pi R)^{3/2}\hat{T}\sqrt{\hat{T}_*}} \exp\left(-\frac{\hat{c}_1^2}{2R\hat{T}_*} - \frac{\hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2}{2R\hat{T}}\right). \quad (57)$$

Для того чтобы все молекулы, имеющие скорость  $c_1 = \hat{c}_1 = 0$ , были исключены из распределения  $\hat{f}$ , необходимо выполнение следующего условия:

$$\hat{f}_-(c_1 = 0) = -\hat{f}(c_1 = 0), \quad (58)$$

откуда следует:

$$\frac{\hat{n}_0}{\hat{n}} = \sqrt{\frac{\hat{T}_*}{\hat{T}}} = \sigma. \quad (59)$$

Параметр  $\sigma$ , значение которого находится в пределах  $0 \leq \sigma < 1$ , принят в качестве свободного параметра модели. Он позволяет исключить  $\hat{n}_0$  и  $\hat{T}_*$ :

$$\hat{n}_0 = \sigma\hat{n}, \quad \hat{T}_* = \sigma^2\hat{T}. \quad (60)$$

Функция распределения  $f$  в граничной точке представлена как:

$$f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{при } c_1 > 0; \\ \hat{f} + \hat{f}_- + \hat{f}_0 & \text{при } c_1 \leq 0. \end{cases} \quad (61)$$

На Рисунке 8 моделирующие функции представлены схематически линиями уровня в пространстве тепловых скоростей.

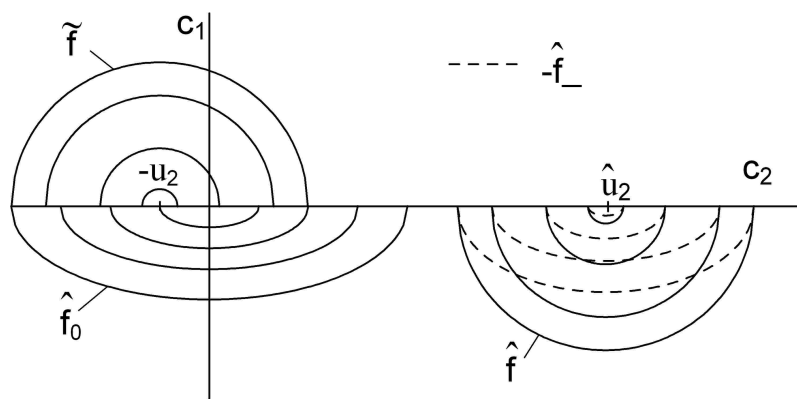


Рисунок 8. Схема расположения моделирующих функций распределения в пространстве тепловых скоростей

Функция распределения в граничной точке содержит восемь неизвестных величин:  $\tilde{n}$ ,  $\hat{n}$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\hat{u}_2$ ,  $\hat{u}_3$ ,  $T_t$ ,  $\hat{T}$  ( $\sigma$  – свободный параметр). Для их определения могут быть записаны пять скалярных уравнений сохранения и уравнения для  $p_{12}$ ,  $p_{13}$ ,  $\phi_1$ .

Система восьми уравнений может быть получена интегрированием функции распределения  $f$  с соответствующими молекулярными скоростями. Решение этой системы:

$$u'_i = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \vartheta}{\vartheta + (1 + \sigma)\vartheta^2} p'_{1i}, \quad i = 2, 3; \quad (62)$$

$$\Delta T' = \frac{(3 - 2\sigma)(\vartheta^2 - 1) + \vartheta(1 + \frac{\vartheta}{1 - \sigma})u'^2}{3\vartheta + 3 - 2\sigma}. \quad (63)$$

Здесь:

$$u'_i = \frac{u_i}{\sqrt{RT_w}}; \quad \Delta T' = \frac{T_t - T_w}{T_w}; \quad p'_{1i} = \frac{p_{1i}}{\rho RT_w}, \quad i = 2, 3;$$

$$\phi'_1 = \frac{\phi_1}{\sqrt{\frac{2RT_w}{\pi} \rho RT_w}}; \quad \vartheta = \sqrt{\frac{\hat{T}}{T_w}} = 2A \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{B}{2A^3}\right)\right);$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{3} \frac{2 - \sigma^2 + 0.5u'^2 - \sigma^2 \Delta T' - \phi'_1}{2 - \sigma^2 + 0.5 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} u'^2}}; \quad B = \frac{\phi'_1}{2 - \sigma^2 + 0.5 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} u'^2}.$$

В течениях, близких к свободномолекулярным, значение  $\sigma$  должно быть близко к нулю. В гидродинамическом приближении параметр  $\sigma$  должен принимать некоторое конечное значение –  $\sigma_0$ .

Оценка параметра  $\sigma_0$  проведена по модели граничных условий с 13-моментной функцией распределения падающих молекул. Сравнение результатов расчетов, полученных в условиях близких к равновесию по двум моделям, дает значение  $\sigma_0 = 0.47$ .

Параметр  $\sigma$  представлен в следующем виде:

$$\sigma = \frac{0.47}{1 + \beta \text{Kn}^*}; \text{Kn}^* = \frac{\lambda}{L^*}. \quad (64)$$

Здесь  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега;  $L^*$  – характерный размер возмущенной области течения, вычисленный по нормали к поверхности;  $\beta$  – свободный параметр модели, значение которого подобрано в Разделе 6.

**В пятом разделе** построены инженерные модели неравновесных течений.

Показано, что в задаче о структуре ударной волны модели первого приближения дают слишком высокие градиенты газодинамических переменных. Вязкость этих моделей недостаточна. Коэффициент вязкости определен первым приближением моментного уравнения неравновесного напряжения (36), приводящим к выражению (38). Из последнего следует  $\mu = \tau_p p^m$ .

В (36) член, отвечающий за наработку напряжений  $p_{ij}^m$ , имеет вид

$$-\tau_p P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \equiv -\tau_p (\delta_{j\alpha} p^m + p_{j\alpha}^m) \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \tau_p (\delta_{i\alpha} p^m + p_{i\alpha}^m) \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}. \quad (65)$$

Вязкие свойства модели будут улучшены, если коэффициент вязкости (тензорный коэффициент вязкости) определить как  $\mu_{ij} = \tau_p P_{ij}$ .

В отличие от коэффициента вязкости  $\mu$ , соответствующего первому приближению, тензорный коэффициент вязкости содержит внепорядковый член – неравновесное напряжение  $p_{ij}^m$ . Целесообразно ввести параметр ( $\chi$ ), позволяющий изменять влияние внепорядкового члена:

$$\mu_{ij} = \tau_p (\delta_{ij} p^m + \chi p_{ij}^m). \quad (66)$$

Модели первого приближения, содержащие тензорный коэффициент вязкости (внепорядковые модели), позволяют получать размер возмущенной области близкий к реальному. При этом профили ударной волны отличаются от реальных профилей. Этот вопрос подробно рассмотрен в диссертационной работе с использованием вспомогательной кинетической модели.



На основе анализа дефектов 24-моментных и внепорядковых моделей разработана гибридная модель неравновесного течения. Эта модель содержит систему уравнений сохранения, общую для указанных моделей, и подсистему моментных уравнений неравновесных величин 24-моментной системы. Неравновесные величины, входящие в уравнения сохранения, представлены в гибридизированном виде:

$$r^H = k_1 r^M + (1 - k_1) r^{[2-]}. \quad (67)$$

Здесь  $r^H$ ,  $r^M$ ,  $r^{[2-]}$  – неравновесная величина в гибридном, моментном и внепорядковом (неполном втором) приближениях. Весовой коэффициент определен как:  $k_1 = (1 - W)^\eta$ , где  $\eta$  – параметр модели ( $\eta = 2 \div 3$ ),  $W$  – степень неравновесности течения:

$$W = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \frac{\sqrt{p_{\alpha\beta}^m p_{\alpha\beta}^m + \frac{3}{2}(5 - 3\gamma)(\rho R \theta)^2}}{p}. \quad (68)$$

На Рисунке 9 показаны профили скорости в ударной волне двухатомного газа при  $M_\infty = 5$ . Свободные параметры всех моделей выбирались из соображений совпадения наклона профиля плотности с экспериментальными данными (см. список литературы диссертации, [92]).

Из рисунка следует, что гибридная модель лишена коротковолновой неустойчивости. Аналогичные результаты получены и при больших числах Маха.

**В шестом разделе** представлены результаты тестовых расчетов вырожденных течений. Рассмотрены две модели граничных условий на твердой поверхности: феноменологическая модель Раздела 4 и традиционные для неравновесных течений условия скольжения. Классическая форма условий скольжения в терминах настоящей работы:

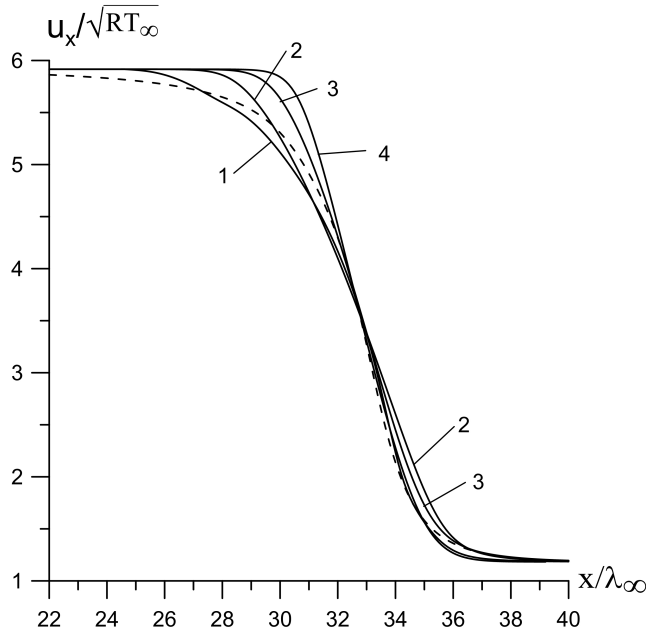


Рисунок 9. Профили скорости в ударной волне двухатомного газа,  $M_\infty = 5$ . Пунктирная линия – кинетическая модель; **1** – гибридная модель (5.57),  $s = 0.73$ ,  $h = h(s)$ ,  $\eta = 2$ ,  $\chi = 0.5$ ; **2** – внепорядковая двухтемпературная модель,  $s = 0.98$ ,  $h = h(s)$ ,  $\chi = 1$ ; **3** – двухтемпературная модель,  $s = 1$ ,  $h = 3.1$ ; **4** – 5-моментная модель,  $s = 0.82$ ,  $h = 7.3$ .

$$\Delta u_i = -1.431 \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - 0.224 \frac{\phi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (69)$$

$$\Delta T_t = -0.735 \frac{\phi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (70)$$

Здесь координата  $x_1$ , фигурирующая в напряжении  $p_{i1}^{m[1]}$  и тепловом потоке  $\phi_1^{[1]}$ , рассматривается как внешняя нормаль к обтекаемой поверхности.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных позволяют уточнить постоянные множители уравнений (69) и (70) применительно к течениям многоатомных газов. С этой целью рассмотрены граничные условия в виде:

$$\Delta u_i = -\zeta_u \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - \zeta_{uT} \frac{\phi_i^{[1]}}{p^m}, \quad i = 2, 3; \quad (71)$$

$$\Delta T_t = -\zeta_T \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}}. \quad (72)$$

Коэффициенты  $\zeta_u$ ,  $\zeta_{uT}$  и  $\zeta_T$  рассматриваются как свободные параметры.

В задаче о теплопередаче в плоском слое неподвижного газа рассмотрена зависимость отношения теплового потока  $q_1 \equiv q$  к его свободномолекулярному пределу  $q_m$  от числа Кнудсена. Результаты расчетов по различным моделям представлены на Рисунке 10.

Наилучшую согласованность с экспериментальными данными дает феноменологическая модель граничных условий и условия скольжения (72) при  $\zeta_T = 0.55$ .

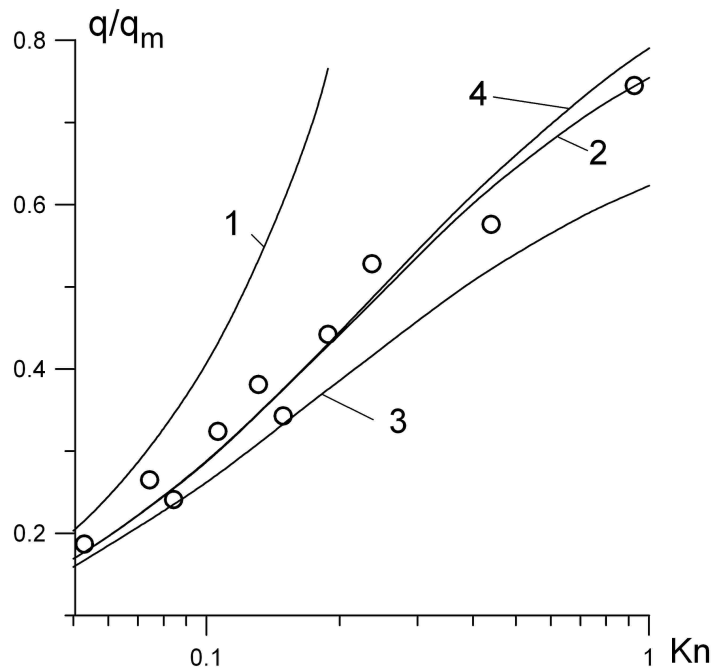


Рисунок 10. Тепловой поток в плоском слое газа. Газ – воздух,  $T_{w1}/T_{w2} = 1.2$ . О – экспериментальные данные. 1 – модель НСФ с граничными условиями прилипания; 2, 3, 4 – М24, релаксационная, 5-моментная и двухтемпературная модели; 2 – феноменологические граничные условия; 3 – граничные условия (70); 4 – граничные условия (72),  $\zeta_T = 0.55$ .

В плоском течении Куэтта рассмотрено отношение коэффициента трения  $c_f$  к его свободномолекулярному пределу  $c_{fm}$  в зависимости от числа Кнудсена. При решении этой задачи с ограничением  $M < 2$  модель M24 и базирующиеся на ней родственные модели M45, M24с, M24сс, а также гибридная модель дают близкие результаты. Ниже приведены расчетные данные только модели M24. Результаты расчетов показаны на Рисунке 11.

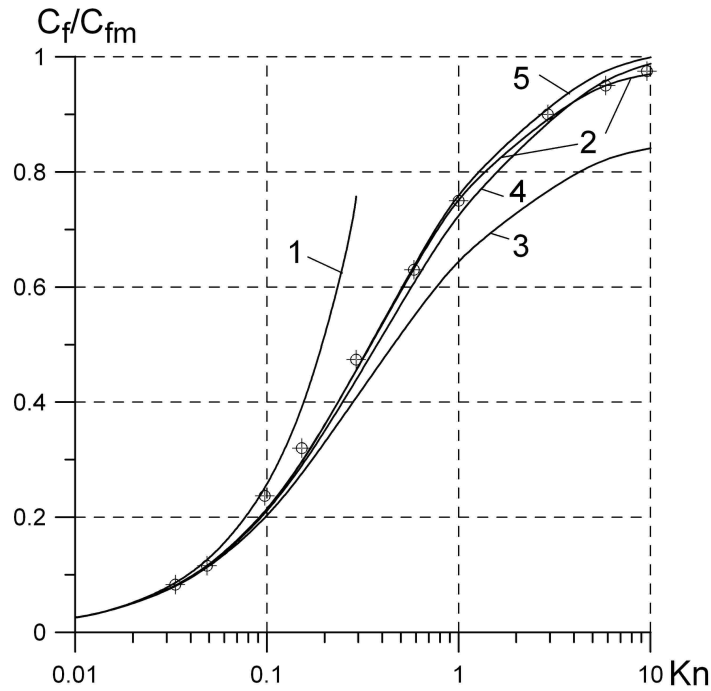


Рисунок 11. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена в плоском течении Куэтта. Газ – воздух.  $M=1.4$ .  $O$  – экспериментальные данные; **1** – модель НСФ с граничными условиями прилипания; **2, 3, 4** – модель M24; **2** – феноменологические граничные условия; **3** – граничные условия (69), (70); **4** – граничные условия (71), (72),  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$ ; **5** – 5-моментная модель, граничные условия (71), (72),  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$ .

Граничные условия скольжения при  $\zeta_u = 1.21$ ,  $\zeta_T = 0.55$  и  $Kn < 10$  обеспечивают удовлетворительные значения коэффициента трения. При больших значениях числа Кнудсена эти граничные условия дают коэффициент трения, превышающий свободномолекулярный предел. Расчеты показывают, что при  $M \approx 4$  превышение свободномолекулярного предела

наблюдается уже при  $\text{Kn} \approx 1$ . Феноменологические граничные условия лишены этого недостатка. Применительно к течению Куэтта при  $\text{Kn} \rightarrow \infty$  феноменологические граничные условия соответствуют точной свободномолекулярной функции распределения.

В задаче о структуре ударной волны анализировалась обратная ширина профиля (максимальный наклон профиля) и форма профиля плотности. На Рисунке 12 приведены экспериментальные (см. список литературы диссертации, [91; 92; 97]) и расчетные данные обратной ширины профиля плотности в ударной волне аргона.

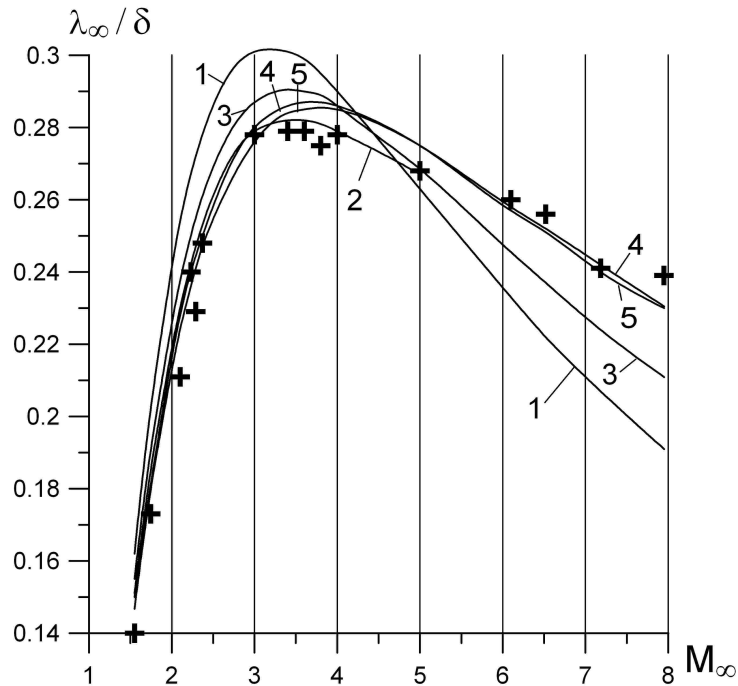


Рисунок 12. Обратная ширина ударной волны в аргоне. Знак + - экспериментальные данные; **1** - модель первого приближения (НСФ)  $s=1$ ; **2** - релаксационная модель  $M_\infty \leq 5$ ,  $s=0.9$ ; **3** - внепорядковая модель,  $s=0.9$ ,  $\chi=1$ ; **4** - внепорядковая модель,  $s=0.82$ ,  $\chi=2.3$ ; **5** - гибридная модель  $s=0.8$ .

Кривая **1** соответствует 5-моментной модели, совпадающей в данном случае с моделью НСФ. В сверхзвуковой области чисел Маха даже при  $s = 1$  профиль слишком крутой, в гиперзвуковой области – слишком пологий. Удовлетворительный наклон профиля дает релаксационная модель (кривая **2**).

Внепорядковая модель (кривая **3**) улучшает модель первого приближения. Множитель  $\chi = 2.3$  перед внепорядковым членом, позволяет получить наклон профиля, удовлетворительно согласующийся с экспериментальными данными (кривая **4**). Среди рассмотренных моделей гибридная модель является наиболее информативной, вместе с тем ее численная реализация существенно проще и экономичнее, чем у релаксационной модели.

На Рисунке 13 расчетные значения обратной ширины профиля плотности в азоте сопоставлены с экспериментальными данными (см. список литературы диссертации, [92; 98]). Кривая **1**, соответствующая модели НСФ без коэффициента объемной вязкости, проходит далеко от области экспериментальных точек. Если рассматривать  $h$  как свободный параметр модели, то при  $s = 0.82$  и  $h = 7.3$  5-моментная модель (кривая **3**) дает удовлетворительный наклон профиля.

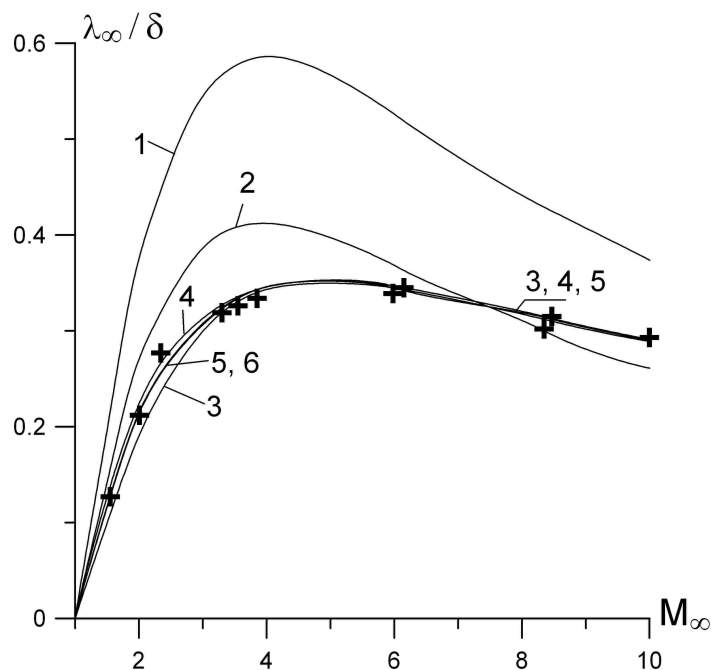


Рисунок 13. Обратная ширина ударной волны в азоте. Знак + – экспериментальные данные [92; 98]; **1** – НСФ  $s=1$ ; **2** – 5-моментная модель  $s=1$ ,  $h=2.5$ ; **3** – 5-моментная модель  $s=0.82$ ,  $h=7.3$ ; **4** – двухтемпературная внепорядковая модель  $s=0.81$ ,  $h=h(s)$ , ;  $\chi=2.3$  **5** – гибридная модель  $s=0.8$ ,  $h=h(s)$ ; **6** – релаксационная модель  $M_\infty < 6$ ,  $s=0.83$ ,  $h=h(s)$

Наклон профиля двухтемпературной внепорядковой модели хорошо согласуется с экспериментальными данными и гибридной моделью (кривая **5**) как для аргона, так и для азота при одних и тех же значениях параметров  $s$  и  $\chi$ .

Сравнение экспериментальных и расчетных профилей плотности приведены в диссертации.

**В седьмом разделе** рассмотрено гиперзвуковое обтекание тонкой пластины при нулевом угле атаки. Расчеты проведены с использованием 5-моментной, внепорядковой и гибридной моделей.

Специфика решаемой задачи заключается в том, что на носовой части пластины отсутствует точка торможения потока. Носик пластины является особой точкой течения, а именно точкой разрыва первой производной газодинамических переменных. Рассматриваемая тестовая задача направлена в большей степени на определение области применимости различных моделей течения, чем на изучение физических процессов, протекающих в области острой кромки.

Для анализа результатов расчета использованы экспериментальные данные (см. список литературы диссертации, [99]), полученные для обтекания тонкого клина. Расчеты проводились для двухатомного газа при  $M_\infty = 10.15$  и температуре поверхности пластины  $T_w = 2.16T_\infty$ . Начало прямоугольной

системы координат совмещено с носиком пластины. Ось  $Ox$  направлена вдоль пластины, ось  $Oy$  является нормалью к поверхности.

На Рисунке 14 показаны распределения нормального напряжения в плоскости пластины, полученные из решения трех рассматриваемых моделей течения. Пунктирной линией изображено нормальное напряжение, возникающее в условиях свободномолекулярного обтекания.

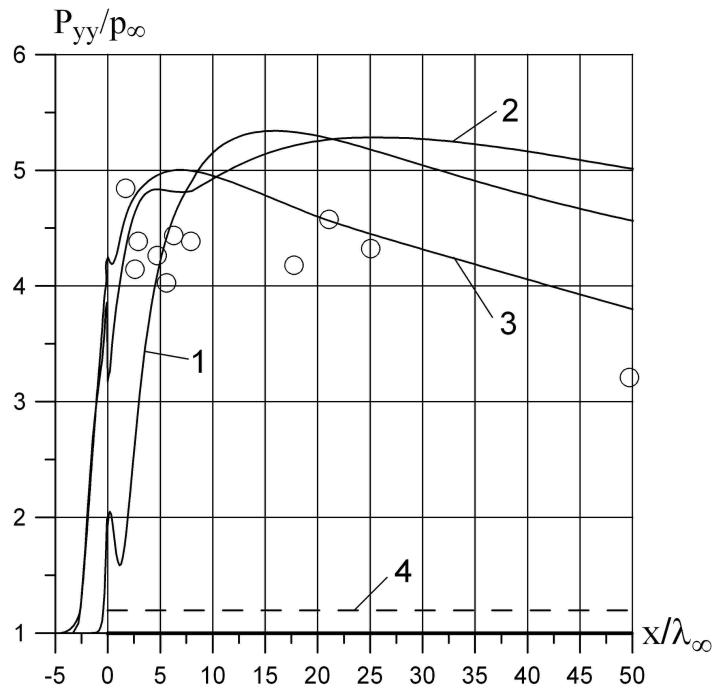


Рисунок 14. Распределение нормального напряжения при  $y=0$ ,  $M_\infty = 10.15$ ,  $T_w = 2.16$ .  $\circ$  – экспериментальные данные; **1** - 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель; **4** – нормальное напряжение на поверхности пластины при свободномолекулярном обтекании.

График 5-моментной модели (кривая **1**) существенно смещен в направлении течения относительно области экспериментальных точек. Размер возмущенной области пред носиком пластины в несколько раз меньше соответствующей области двух других моделей. Графики внепорядковой и гибридной моделей (кривые **2** и **3**) практически полностью находятся в области экспериментальных точек возле носика пластины.

Перед носиком пластины течение, рассчитанное по внепорядковой и гибридной моделям, сильно заторможено. На Рисунке 15 показано



распределение продольной составляющей скорости  $u_x$  в этой области. Вблизи носика локальные числа Маха составляют: 7.58 – 5-моментная модель; 3.21 – внепорядковая модель; 2.29 – гибридная модель.

Существует мнение о том, что характер гиперзвукового обтекания острых кромок близок к свободномолекулярному. Тесты трех моделей свидетельствуют о наличии сильно возмущенной зоны перед носиком бесконечно тонкой пластины. Нормальное напряжение на носике в несколько раз превышает свободномолекулярное значение (см. линию 4 на Рисунке 14). Проведение аналогии между гиперзвуковым и свободномолекулярным течениями в области носовой части заостренного тела представляется необоснованным.

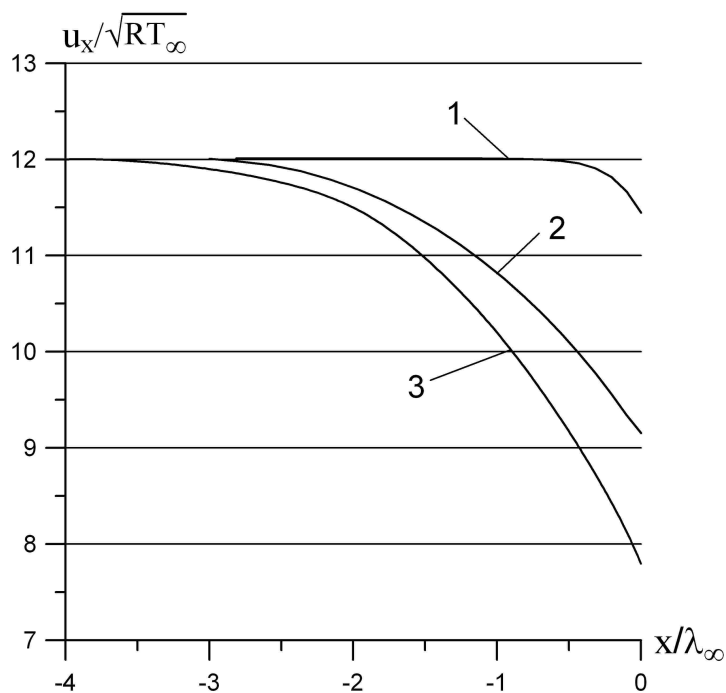


Рисунок 15. Распределение скорости  $u_x$  при  $y = 0$ . Область торможения потока перед носиком пластины. **1** – 5-моментная модель; **2** – внепорядковая модель; **3** – гибридная модель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен метод, предусматривающий построения системы моментных уравнений многоатомных газов в терминах моментов функции распределения молекул по скоростям. Микроскопические характеристики газовой среды – функция распределения и потенциал межмолекулярных столкновений, в предложенном методе не конкретизируются. Отказ о такого рода конкретизаций является концептуальной основой метода.

Указанным методом построена замкнутая система моментных уравнений третьего порядка (24-моментная система). Тесты показали, что 24-моментная система содержит основной "дефект" моментных систем – коротковолновую неустойчивость. В остальном эта система дает результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными.

На базе разработанного метода может быть решена задача о необходимом порядке системы моментных уравнений для описания течений при  $Kn \geq 1$ .

2. Установлена основная причина коротковолновой неустойчивости моментных систем, заключающаяся в несоответствии локального выражения замыкающего момента его моментному уравнению. Предложены методы частичного устранения этого дефекта. Представляется перспективным распространение разработанных методов снижения коротковолновой неустойчивости на моменты более высокого порядка, чем замыкающий момент. Предполагается проведение исследований в этом направлении на базе 24-моментной системы.

3. Показано, что первое приближение 24-моментной системы уравнений приводит к двум неэквивалентным моделям течения многоатомного газа: к модели Навье-Стокса-Фурье с коэффициентом объемной вязкости (5-моментная модель) и к двухтемпературной модели.

Показано, что в условиях высокой неравновесности течения 5-моментная модель определяет поступательную и внутреннюю температуры

качественно неверно. Качественно верное определение температур в первом приближении дает только двухтемпературная модель.

Установлена причина неэквивалентности моделей. Показано, что первого приближения разности температур  $T_t - T_\Omega$  не достаточно для определения самих температур в том же приближении.

Для описания течений высокой степени неравновесности с использованием модели первого приближения рекомендуется применять двухтемпературную модель. Температурную зависимость коэффициента вязкости следует определять через поступательную температуру.

4. Построена модель второго приближения (релаксационная модель), не содержащая посторонних решений, вносимых дополнительным дифференцированием уравнений модели Эйлера. Установлено, что на границе гиперзвуковой области течения разработанная модель дает физически неадекватные решения. Дальнейшее исследование модели не планируется.

5. Разработана модель граничных условий на твердой поверхности, не имеющая ограничений по числам Кнудсена. Модель предназначена для определения скорости скольжения и скачка температуры в условиях сильно неравновесного течения.

6. Разработана внепорядковая модель, позволяющая улучшить вязкие свойства моделей первого приближения. В сильнонеравновесном течении внепорядковая модель позволяет получать физически адекватный размер возмущенной области. Поле течения в этой области может существенно отличаться от реального.

7. Разработана гибридная модель неравновесного течения. Модель лишена коротковолновой неустойчивости и позволяет получить физически адекватное поле течения в высоко неравновесной области.

Для высоко эффективной численной реализации модели требуется разработка специальных методов решения.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Статьи в журналах из перечня ВАК:**

1. Никитченко, Ю.А. Модель течения газа вблизи поверхности раздела сред / Ю.А.Никитченко // Математическое моделирование. – 2003. – Т.15. – №8. – С. 88-98.

2. Никитченко, Ю.А. Сравнение различных моделей течения газа в широком интервале чисел Кнудсена / Ю.А.Никитченко // Математическое моделирование. – 2004. – Т.16. – № 8. – С. 77-93.

3. Никитченко, Ю.А. Система моментных уравнений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Полет. – 2010. – № 11. – С. 43-51.

4. Никитченко, Ю.А. Применение модели Навье–Стокса–Фурье к расчету гиперзвукового обтекания тонкой пластины / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2011. – Т. 18. – № 3. – С. 21-28.

5. Никитченко, Ю.А. Снижение коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений за счет ее расширения / Ю.А.Никитченко // Ученые записки ЦАГИ. – 2015. – Т. 46. – № 1. – С. 72-84.

6. Никитченко, Ю.А. Оценка эффективности методов распараллеливания вычислений в задачах динамики разреженных газов / Ю.А.Никитченко, Ю.А.Рыжов, С.А.Попов, О.Ю.Власов // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 211. – С. 85-92.

7. Никитченко, Ю.А. Моментные модели для течений с большим числом Маха / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2014. – Т.21. – № 4. – С. 39-48.

8. Никитченко, Ю.А., Модели первого и второго приближений для течений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19. – № 2. – С. 11-17.

9. Никитченко, Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов / Ю.А.Никитченко // Электронный журнал Труды МАИ. – 2014, – № 77.

10. Никитченко, Ю.А. Феноменологическая модель граничных условий на твердой поверхности / Ю.А.Никитченко // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19. – №3. – С. 5-14.

11. Никитченко, Ю.А. Инженерная модель неравновесного течения / Ю.А.Никитченко // Изв. Вузов. Авиационная техника. – 2014. – № 3. – С. 37-40.

12. Рыжов, Ю.А. Гибридная модель гиперзвукового течения / Ю.А.Рыжов, Ю.А.Никитченко, С.А.Попов // Изв. Вузов. Авиационная техника. – 2015. – № 1. – С. 7-11.

13. Рыжов, Ю.А. Численное исследование гиперзвукового обтекания острой кромки на основе модели Навье–Стокса–Фурье / Ю.А.Рыжов, Ю.А.Никитченко, И.В.Парамонов // Электронный журнал Труды МАИ. – 2012. – № 55. – 9 с.

### **Монография**

Никитченко, Ю.А. Модели неравновесных течений: монография / Ю.А.Никитченко. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.

### **Учебное пособие**

Свирщевский, С.Б. Кинетические методы в аэрогазодинамике: учебное пособие / С.Б.Свирщевский, Ю.А.Никитченко. – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 63 с.