УДК 518.8

Поиск решений на множестве Парето на основе многоцелевого подхода к учету неопределенности

В.А. Глухов, А.Л.Суздальцев

Рассматриваются проблемы поиска решений в случае совокупности критериев, которые, в отличие от известных подходов, интерпретируются в виде неопределенности способов оценки.

Это позволяет сформулировать проблему выбора решений в терминах многоцелевого подхода и свести ее к оптимизации многоэлементного решения

Пусть качество решения $y \in Y$ оценивается некоторой совокупностью из n скалярных показателей $f = (f_1,...,f_n)$, которая обычно интерпретируется в виде некоторого вектора эффективности F. Необходимо выбрать на допустимом множестве Y наилучший в некотором смысле вариант $\hat{y}$.

Такой постановке, как известно, соответствует математическая модель векторной оптимизации .

$$F(\hat{y}) = \mathop{\mathbf{opt}}_{y \in Y} F(y), F = \{f_1,...,f_n\} \qquad (1)$$

где **opt** - оператор оптимизации вектора эффективности, который конкретизирует принцип предпочтения вариантов решений.

При решении такой задачи, которая лишь внешне аналогична задаче скалярной оптимизации, возникает проблема установления содержания "лучшее" или "оптимальное" решение, т.е. определения принципа оптимальности.

Действительно, в скалярной задаче показатель эффективности каждому варианту $y \in Y$ сопоставляет конкретное значение его эффективности на числовой оси $\boldsymbol{F}$. При этом совокупность всех возможных значений представляет собой упорядоченное множество $\bigcup_{y \in Y} f(y) \in R_1$ -отрезок числовой оси $\boldsymbol{f}$ - $[\min f, \max f]$. Такая упорядоченность предопределяет один естественный принцип оптимальности (или предпочтение) и единственное, как правило, наилучшее решение $\bar{y} \in Y$. В задаче (1) аналогичное множество представляет собой в пространстве n компонент неупорядоченный пучок векторов эффективности $F(y)$, концы которых образуют область $\boldsymbol{F} = \bigcup_{y \in Y} F(y) \in R_n$ (Рис. 1).

На границе этой области существуют подмножества $\boldsymbol{F}_0^{max}$ и $\boldsymbol{F}_0^{min}$ векторов эффективности, неулучшаемых (в смысле $\min\boldsymbol{F}$ или $\max\boldsymbol{F}$) одновременно по всем компонентам (см. Рис.1).

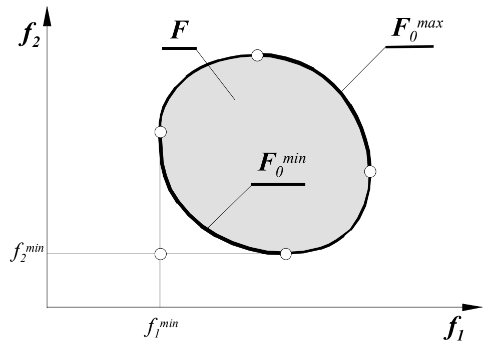


Рис.1

Эти подмножества являются аналогами точек $\min f, \max f$ оси $\boldsymbol{f}$ в задаче скалярной оптимизации и выделяют на Y области Парето-оптимальных решений Y^{min}, Y^{max}. В результате появляется неоднозначность выбора решения $\hat{y} \in Y^{min}$ или $\hat{y} \in Y^{max}$.

Для однозначности выбора вводится в рассмотрение дополнительное правило (принцип, гипотеза), конкретизирующее схему компромисса между показателями $f_1,...,f_n$.

Такое правило в математическом смысле является функционалом компонент вектора эффективности

$$F = \varphi[f_1,...,f_n] \tag{2}$$

где $\varphi \in \Phi$ - способ свертки компонент $f_1,...,f_n$.

Введение правила свертки φ трансформирует вектор эффективности в скалярный функционал и сводит процесс выбора решений в условиях множественности показателей качества решений к формальной процедуре оптимизации.

К числу наиболее распространенных способов свертки относится линейная свертка компонент $f_1,...,f_n$ в скалярный критерий

$$F(y)=\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(y) \qquad (3)$$

где a_i - весовые коэффициенты, моделирующие принятую систему предпочтений и удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,\, a_i\geq 0,\, i=1,...,n\,. \qquad (4)$$

Эти условия выделяют в пространстве весовых коэффициентов некоторую совокупность, которую будем интерпретировать как множество неопределенности в оценке эффективности. На Рис. 2 в плоскости a_1, a_2 показаны такие множества для случаев $a_1\cong a_2, a_1\leq a_2, a_1\geq a_2$.

При данном способе свертки известно наилучшее решение - точка касания гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(y)$ к поверхности $\boldsymbol{F_0^{min}}$ (для примера рассматривается случай минимизации показателей $f_1,...,f_n$). Для случая $n=2$ это точка касания прямой $a_1 f_1+a_2 f_2$ и кривой $\boldsymbol{F_0^{min}}$ (см. Рис. 3).

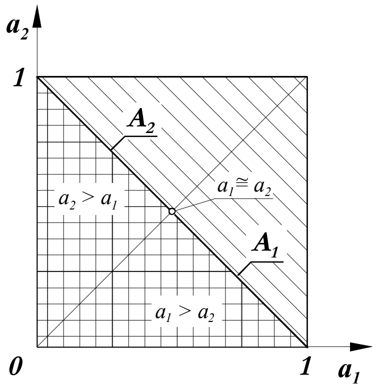


Рис.2

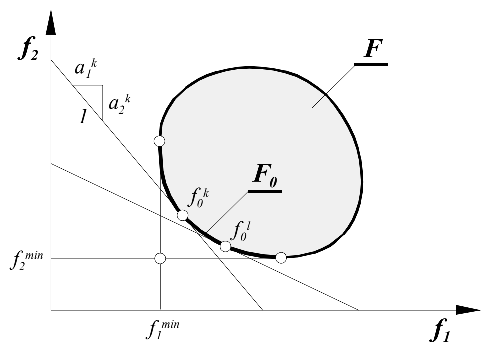


Рис.3

Соотношение весовых коэффициентов a_1 и a_2 определяет наклон этой прямой и конкретизирует суть компромисса между компонентами f_1 и f_2. Согласно такому подходу проблема принятия решений сводится к выбору (назначению) ЛПР (лицо принимающее решение) конкретных значений $a_i\in[0,1]$ и свертка $\varphi\in\Phi$ отражает множество возможных отношений к неопределенности оценки эффективности.

Широко также используется метод последовательных уступок, который сводится к решению совокупности задач условной оптимизации и ряд других [4]. Суть всех этих методов так или иначе сводится к оптимизационной процедуре, выделяющей единственное решение $\hat{y} \in Y^{min}$, а проблема выбора решений трансформируется в проблему выбора способов свертки $\varphi \in \Phi$.

Таким образом, путем строгого ранжирования показателей эффективности и точного задания всех количественных характеристик процедуры (весовых коэффициентов, ограничений и т.п.) полностью устраняется неоднозначность или неопределенность в оценке эффективности. Методологически такой подход соответствует известным попыткам замены неопределенностей одним расчетным (номинальным) случаем. Между тем, как показано в [1,3], эквивалентной замены исходного множества, как правило, не существует и полное устранение неопределенности не всегда корректно.

В определенной степени эта проблема решается методами экспертных оценок, однако они, как правило, основаны на использовании громоздких диалоговых процедур согласования и выявления предпочтений, что ограничивает их применение при проектировании технических систем.

Поэтому в рамках настоящей статьи будем использовать теоретико-множественный подход к оценке эффективности в условиях ее неопределенности, предложенный в [1] и обеспечивающий корректный учет множества неопределенностей в моделях оценки эффективности. При этом подходе, как и в случае неопределенности целей (задач), правила определения общей эффективности F на основе совокупности частных показателей $f_1,...,f_n$, будем сводить к одному из следующих видов:

$$1. \quad F(x,y) = \frac{1}{\Omega}\int_A a^T \cdot \boldsymbol{f}(x,y)da \qquad (5)$$

где $\Omega = \int_A da$ - мера области весовых коэффициентов $\boldsymbol{a} = (a_i,...,a_n)$, при интегральном подходе,

$$2. \quad F(x,y) = \max_{a \in A}(a^T \cdot \boldsymbol{f}(x,y)) \qquad (6)$$

при гарантирующем.

Здесь $\boldsymbol{f} = \{f_1,...,f_n\}$ - вектор-функция частных показателей;

$\boldsymbol{a} = \{a_i,...,a_n\}$ - вектор весовых коэффициентов, компоненты которого удовлетворяют системе неравенств (4),

A - множество неопределенностей весовых коэффициентов, определяемое (4) и принимаемой ЛПР системой предпочтений

$$
\begin{aligned}
&a_i \geq a_j,\, f_i \succ f_j \\
&a_i \leq a_j,\, f_i \prec f_j
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Кроме того, во многих проектных задачах существует возможность задания желаемых диапазонов значений самих показателей

$$f_i \in [f_{i\min}, f_{i\max}], i = 1,...,n$$

На этой основе для значений весовых коэффициентов можно также указать некоторые диапазоны

$$a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}],\ i = 1,...,n\ , \tag{8}$$

удовлетворяющие системе неравенств (4) и (7).

Тем самым проблема учета неопределенности при оценке эффективности и выбор соответствующего решения сводится к построению множества неопределенностей A и интегрированию или максимизации произведения $a^T \cdot \boldsymbol{f}(x,y)$.

Формальное описание множества A с учетом общих свойств выпуклых многогранников и систем (4), (7) и (8) алгоритмически сводится к определению координат вершин элементарных тетраэдров, вписанных в многогранник A.

Благодаря двум важным свойствам весовых коэффициентов $1 \geq a_i \geq 0, i = 1,...,n$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, а также поверхностей безразличия (когда $f_i ; f_j$) становится возможным наглядное геометрическое описание множества A в n -мерном пространстве.

Можно показать, что все коэффициенты заключены внутри параллелепипеда, ребра которого лежат на осях координат, а их длины обратно пропорциональны соответствующим весовым коэффициентам

$$\rho_i = \frac{1}{a_i}, i = 1,...,n$$

где ρ_i - длина $i-$го ребра параллелепипеда.

Действительно, первое неравенство выделяет единичный “гиперкуб”, второе – его диагональную гиперплоскость, т.е. вершины всех возможных векторов $\boldsymbol{a} \in A$ согласно этим свойствам лежат на гиперплоскости, проходящей через вершины ортов и заключенной между координатными плоскостями пространства этих векторов.

Так в случае $n = 2$ на Рис.3 показаны множество A - отрезок между вершинами $(a_1 = 1, a_2 = 0)$ и $(a_2 = 1, a_1 = 0)$ единичного квадрата (его диагональ), а также множества $A_1 = \{\boldsymbol{a} | a_1 \geq a_2, a_1 + a_2 = 1\}$ и $A_2 = \{\boldsymbol{a} | a_2 \geq a_1, a_1 + a_2 = 1\}$ - отрезки диагонали единичного квадрата при соответствующих предпочтениях.

В случае $n=3$ множеству весовых коэффициентов A соответствуют координаты точек, геометрическим местом которых служит треугольник с вершинами $(a_1=1, a_2=a_3=0)$, $(a_2=1, a_1=a_3=0)$ и $(a_3=1, a_1=a_2=0)$ расположенными на осях координат этого пространства (см. Рис 4).

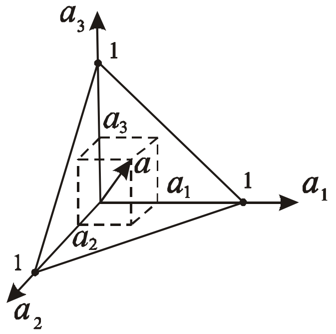


Рис. 4.

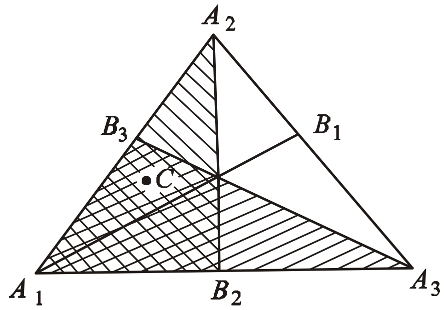
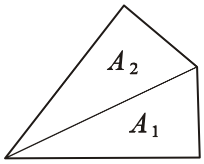


Рис. 5.

Перенеся этот треугольник на плоскость и обозначив его вершины, соответствующие весовым коэффициентам a_1, a_2, a_3, черезA₁,A₂,A₂ соответственно, нетрудно убедиться (см. Рис. 5), что часть треугольника $A_1A_2A_3$ между вершиной A_1 и медианой A_2B_2, проведенной на сторону A_1A_3 соответствует подмножеству векторов весовых коэффициентов $A_{12}=\{a_1 \in A : a_1 \geq a_2, a_1+a_2+a_3=1\}$, часть между вершиной A_1 и медианой A_3B_3, проведенной на сторону A_1A_2 соответствует подмножеству $A_{13}=A_{a_1 \geq a_3}=\{a_1 \in A : a_1 \geq a_3, a_1+a_2+a_3=1\}$ и т.д. В общем случае часть треугольника $A_1A_2A_3$ между вершиной A_i и медианой A_kB_k, проведенной на сторону $A_iA_j, k \neq i, k \neq j, i \neq j$ соответствует подмножеству $A_i=A_{a_i \geq a_k}=\{a_i \in A : a_i \geq a_k, \sum_{\mu} a_\mu = 1\}$. Например (Рис. 5), точка $C \in A_1A_2B_2$ соответствует вектору a_1, компоненты которого связаны соотношением $a_1 \in A : a_1 \geq a_2, a_1 \geq a_3$, выделяющим подмножество A_1 (аналог соответствующего отрезка на Рис.3).

Таким образом, формальное описание множества A в виде системы неравенств можно свести к простейшим геометрическим построениям, из которых видно, что оно



$A = A_1 U A_2$

Рис. 6.

представлено в $n-1$-мерном пространстве вершин векторов весовых коэффициентов - выпуклым многогранником (многоугольником при $n=3$ на Рис.6, который, заметим, образован двумя одинаковыми треугольниками). Понижение размерности многогранника на единицу по сравнению с размерностью пространства показателей вызвано зависимостью одного из весовых коэффициентов от остальных по условию $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Из этих же построений следует, что многогранник A образован совокупностью одинаковых тетраэдров (треугольников при $n=3$).

Отсюда вытекает естественная формулировка проблемы оценки эффективности по совокупности показателей на основе следующей геометрической задачи. Действительно, при гарантирующем подходе к оценке эффективности и сведении множества сверток показателей к предельной (см.выше) выражение для оценки эффективности принимает вид:

$$F = \max_{i,k} \sum_{i=1}^{n} a_i^k f_i,\ k = 1,...,K,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^k = 1,\ a_i \geq 0,\ i = 1,...,n$$

где a_i^k - координата k-ой вершины многогранника A,

K - число вершин этого многогранника.

При интегральном подходе к оценке и к выбору линейного вида свертки

$$F = \frac{1}{V} \int_A (\sum_{i=1}^{n} a_i f_i) da_1,...,da_n,\ i = 1,...,n$$

Здесь V - объем (мера) многогранника A.

Из условия нормирования весовых коэффициентов можно представить, что

$$a_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

Тогда подынтегральное выражение преобразуется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = \sum_{i=1}^{N-1} a_i f_i + f^N - f^N \sum_{i=1}^{N-1} a_i = \sum_{i=1}^{N-1} a_i (f_i - f^N) + f^N$$

Откуда после интегрирования

$$F = \sum_{i=1}^{N-1} a_i (f_i - f^N) \hat{a}_i + f^N$$

$\hat{a}_i = \dfrac{\int_A a_i da_1, ..., da_{N-1}}{\int_A da_1, ..., da_{N-1}}$ - i -я координата центра тяжести многогранника A .

В этой связи учет множества неопределенностей оценки эффективности сводится к решению относительно простой геометрической задачи определения координат вершин элементарных тетраэдров, составляющих многогранник A .

В самом деле, при интегральном подходе координаты центра тяжести многогранника определяются в виде:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^{P} \hat{a}_i^p, i = 1, ..., N-1$$

где $\hat{a}_i^p$ i -я координата центра тяжести p -го тетраэдра.

В свою очередь

$$a_i^p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^p, i = 1, ..., N$$

где a_{ik}^p i -я координата k -ой вершины p -го тетраэдра.

Процедура вычисления векторного функционала (2), разработанная на этой основе, обеспечивает оперативность вычисления оценки эффективности, достаточную для организации не только перебора альтернативных вариантов решений, но и для выполнения шага сравнения в методах оптимального поиска в качестве аналога процедуры вычисления целевой функции, позволяя “встраивать” ее в численные методы оптимизации.

При этом обеспечивается поиск решения как при гарантирующем, так и интегральном подходе к оценке эффективности в исходной задаче (1).

К настоящему времени методологически обеспечено использование этой процедуры только в методах прямого поиска, поскольку отработка её применения в градиентных методах требует значительных ресурсов для вычисления функциональных производных, а имеющиеся в нашем распоряжении технические средства такими ресурсами не располагают.

Апробация алгоритма и отработка вопросов, связанных с программной реализацией процедуры, проводилась с использованием метода прямого поиска Хука-Дживса и тестовой расчётной модели легкого самолета [3].

Таким образом, изложенные принципы вычисления оценки эффективности позволяют формализовать все этапы поиска проектных решений полностью на теоретикомножественной основе и в то же время свести эту задачу к типовым задачам оптимизации.

При этом, неизбежное в условиях неопределенности процесса принятия решений, привлечение неформальных соображений требуется лишь на стадии подготовки исходной информации, причем в естественном виде (подразумевается группировка частных показателей по степени важности, задание желаемых диапазонов значений показателей качества и т.п.).

Список литературы:

1. Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов.- М.: Машиностроение, 1974.-168с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в исследования операций. –М.:Наука,1971.-383с.
3. Брусов В.С., Баранов С.К. Оптимальное проектирование летательных аппаратов. Многоцелевой подход.- М.:Машиностроение,1989.-230с.
4. Brusow W. Optymalne projektowanie wielozadaniowych statków latających.-Warszawa: Wyd. Ilot., 1996.

Сведения об авторах:

Глухов Вадим Анатольевич, заведующий лабораторией проблем конверсии и передачи технологий НИЧ Московского авиационного института (государственного технического университета).

Суздальцев Александр Леонидович, ведущий инженер кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).