ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТЕХНИКЕ. 2021. Т. 13. №6. С. 258–263

УДК 536.2

Автомодельные процессы теплопереноса в твердом теле с осесимметричным тепловым источником

А.В. Аттетков, И.К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru

DOI: 10.34759/tpt-2021-13-6-258-263

Поступила в редакцию 30.05.2021
После доработки 20.06.2021
Принята к публикации 21.06.2021

Сформулирована задача определения температурного поля изотропного твердого тела с осесимметричным тепловым источником в виде кругового цилиндра. Анализируемая математическая модель процесса теплопереноса в изучаемой системе базируется на гипотезе, что тепловой источник является термически тонким, т.е. на реализации идеи «сосредоточенная емкость», и представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие теплового источника в системе. С использованием предложенной в работе автомодельной подстановки сформулирована и решена автомодельная задача теплопереноса в изотропном твердом теле с термически тонким тепловым источником, обладающим осевой симметрией. Идентифицировано достаточное условие, устанавливающее возможность реализации автомодельного процесса теплопереноса в анализируемой системе. Полученные результаты использованы при качественном анализе физических свойств изучаемого автомодельного процесса теплопереноса.

Ключевые слова: изотропное твердое тело, осесимметричный тепловой источник, температурное поле, автомодельное решение.

Введение

Автомодельные («самоподобные») процессы теплопереноса [1–4] занимают важное место в математической теории теплопроводности твердых тел [5–10]. В работах [1, 2] представлены результаты теоретического анализа автомодельных процессов теплопереноса в изотропном твердом теле с постоянной и зависящей от температуры теплопроводностью при воздействии на объект исследований мгновенного плоского или точечного (сферически симметричного) теплового источника. Дальнейшее развитие эти исследования получили в [4].

В работах [11–15] теоретически обоснована возможность существования автомодельных процессов теплопереноса в изотропном твердом теле со сферическим очагом разогрева различных физических свойств – шаровой полостью, заполненной высокотемпературным газом, при неподвижной или движущейся по заданному закону ее границы [11–13], поглощающим проникающее излучение сферическим включением [14] или включением в виде шарового слоя [15].

Несмотря на достигнутые результаты в изучении автомодельных процессов теплопереноса в анализируемой системе на ряд вопросов ответы еще не получены. В частности, это относится к вопросу теоретического обоснования возможности существования автомодельного процесса теплопереноса в изотропном твердом теле с тепловым источником, обладающим осевой симметрией. Рассмотрению этого вопроса и посвящены проводимые исследования.

Исходная математическая модель и ее преобразование

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное пространство с теплоактивным стержневым элементом в виде кругового цилиндра радиуса R (далее – осесимметричный тепловой источник), плотность мощности тепловыделения которого равна f .

В предположении идеальности теплового контакта в анализируемой системе [6, 7] математическую модель изучаемого процесса теплопереноса, записанную в цилиндрической системе координат, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\chi\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}+\Lambda f(\rho,\mathrm{Fo})\right\},$$

$$0<\rho<R,\ \ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},\tag{1}$$

$$\rho>R,\ \ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\rho,0)=0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=0}<+\infty;\qquad \rho\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=0}=0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R-0}=\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R+0};$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R-0}=\Lambda\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R+0};$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2_\rho\left[0,+\infty\right);\,\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\ge0}\in L^2\left[0,+\infty\right);$$

$$f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2\left[0,R\right);\,f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{0\le\rho\le R}\in L^2\left[0,+\infty\right).$$

В математической модели (1) использованы следующие обозначения:

$$\mathrm{Fo}=\frac{a_1t}{r_*^2};\ \ \rho=\frac{r}{r_*};\ \ \theta=\frac{T-T_0}{T_0};$$

$$R=\frac{r_0}{r_*};\ \chi=\frac{a_2}{a_1};\ \Lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2};\ f=\frac{qr_*^2}{\lambda_1T_0},$$

где $T(r,t)$ – температура в момент времени t в точках изучаемой системы, отстоящих от оси симметрии на расстоянии r; r_* – выбранная единица масштаба; λ – теплопроводность; a – температуропроводность; индексы: 1 – изотропное пространство; 2 – тепловой источник; 0 – начальное значение.

Для достижения основной цели исследований далее предполагаем, что тепловой источник является термически тонким, т.е. допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [8], суть которой определена совокупностью равенств

$$\theta(R-0,\mathrm{Fo})=\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle=\theta(R+0,\mathrm{Fo}),\ \ \mathrm{Fo}\ge0;$$
$$\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle=\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R\theta(\rho,\mathrm{Fo})\rho d\rho.\tag{2}$$

Используемое предположение (2) позволяет трансформировать математическую модель (1) к виду:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},\ \ \rho>R,\mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\rho,0)=0;$$

$$\rho\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R}=-Q(\mathrm{Fo})+\varepsilon\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\,\mathrm{Fo}}\bigg|_{\rho=R};\tag{3}$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2_\rho\left[R,+\infty\right);\,\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\ge R}\in L^2\left[0,+\infty\right),$$

где $\varepsilon=R^2(2\chi\Lambda)^{-1}$ – определяющий положительный параметр анализируемой модели;

$$Q(\mathrm{Fo})=\int\limits_0^R f(\rho,\mathrm{Fo})\rho d\rho$$

– интегральная величина, характеризующая реализуемый режим тепловыделения в термически тонком тепловом источнике.

Математическая модель (3) – модель «сосредоточенная емкость» – предоставляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, наличие теплового источника в которой фактически учтено специфическим краевым условием при $\rho=R$, явно содержащим производную безразмерной температуры по переменному Fo.

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничим последующий анализ простейшей ситуацией $R=+0$ (бесконечно тонкий осесимметричный тепловой источник), формально полагая в (3) $\varepsilon=0$.

Постановка автомодельной задачи и ее решение

Выполним в смешанной задаче, представленной математической моделью (3) при $\varepsilon = 0$, автомодельную подстановку

$$\xi = \left(\frac{\rho^2}{\mathrm{Fo}}\right)^{\mu}, \tag{4}$$

где $\mu > 0$ – показатель автомодельности.

Тогда, с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}} = -\frac{\mu}{\mathrm{Fo}}\xi\frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{2\mu}{\rho}\xi\frac{d}{d\xi};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} = \frac{4\mu^2}{\rho^2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2\mu(2\mu-1)}{\rho^2}\xi\frac{d}{d\xi}$$

и введенного обозначения

$$U(\xi) \triangleq \theta(\rho, \mathrm{Fo})$$

смешанная задача (3) эквивалентна краевой задаче

$$\xi\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{\xi^{1/\mu}}{4\mu}\right)\frac{dU(\xi)}{d\xi} = 0, \ \xi > 0;$$

$$\xi\left.\frac{dU(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{Q(\mathrm{Fo})}{2\mu}; \tag{5}$$

$$U(\xi) \in L^2_{\xi}\left[0, +\infty\right).$$

Заметим, что начальное условие при $\mathrm{Fo} = 0$ в смешанной задаче (3) в автомодельных переменных (4) будет иметь вид краевого условия задачи (5), заданного при $\xi = +\infty$.

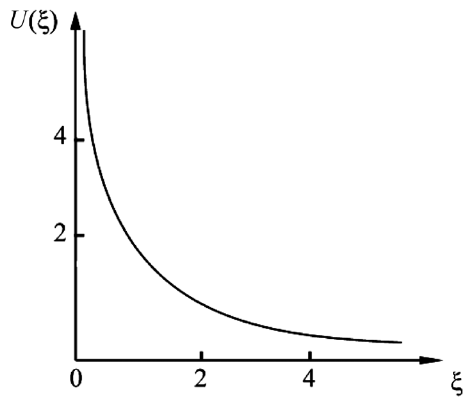

График функции $U(\xi)$ при показателе автомодельности $\mu = 1$ $(\beta_0 = 1)$

Непосредственный анализ краевой задачи (5) показывает, что используемая подстановка (4) приводит к автомодельному решению при выполнении условия

$$(2\mu)^{-1}Q(\mathrm{Fo}) = \beta_0 - \mathrm{const},$$

где β_0 – положительная постоянная. При выполнении этого условия решение краевой задачи (5) находится стандартными методами и имеет вид

$$U(\xi) = -\beta_0\int\frac{1}{\xi}\exp\left(-\frac{\xi^{1/\mu}}{4}\right)d\xi, \ \xi \geq 0. \tag{6}$$

Для иллюстрации представленных результатов и получении содержательной информации о свойствах изучаемого автомодельного процесса теплопереноса подробнее рассмотрим случай $\mu = 1$. Автомодельное решение (6) краевой задачи (5) в этом случае преобразуется к виду

$$U(\xi) = -\beta_0\mathrm{Ei}\left(-\xi/4\right), \ \xi \geq 0, \tag{7}$$

где $\mathrm{Ei}(\bullet)$ – интегральная показательная функция [16, 17], и справедливы следующие асимптотические оценки при малых и больших значениях автомодельной переменной ξ:

$$-\beta_0\mathrm{Ei}\left(-\xi/4\right) \sim -\beta_0\ln\left(\gamma\xi/4\right) \underset{\xi\to+0}{\to} +\infty;$$

$$-\beta_0\mathrm{Ei}\left(-\xi/4\right) \sim \frac{4\beta_0}{\xi}\exp\left(-\frac{\xi}{4}\right) \underset{\xi\to+\infty}{\to} 0,$$

где γ – постоянная Эйлера [16].

На рисунке показан график функции $U(\xi)$, определенной равенством (7).

Заключение

Сформулирована и решена автомодельная задача теплопереноса в изотропном твердом теле с термически тонким тепловым источником, обладающим осевой симметрией. Идентифицировано достаточное условие, выполнение которого обеспечивает возможность реализации автомодельного процесса теплопереноса в анализируемой системе. Качественно исследованы физические свойства изучаемого автомодельного процесса и установлены его специфические особенности. Приведенные результаты – наглядный пример автомодельных решений, иллюстрирующих свойства автомодельных процессов теплопереноса в твердых телах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
2. **Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
3. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.
4. **Волосевич П.П., Леванов Е.И.** Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.
5. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
7. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
8. **Пудовкин М.А., Волков И.К.** Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
9. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.
10. **Формалёв В.Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
11. **Аттетков А.В., Волков И.К.** О возможности реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 3. С. 141–147.
12. **Аттетков А.В., Волков И.К.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 7. С. 297–300.
13. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, подвижная граница которого обладает пленочным покрытием // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 4. С. 178–183.
14. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением при наличии фазовых превращений в системе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2019. № 2. С. 60–70.
15. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 5. С. 212–224.
16. **Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.** Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1968. 344 с.
17. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Self-similar processes of heat transfer in a solid with axisymmetric heat source

A.V. Attetkov, I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru

Self-similar (self-congruent) heat transfer processes occupy an important place in mathematical theory of solids thermal conductivity. The results of self-similar heat transfer processes in the isotropic solid under the impact of the instant flat or point (spherically symmetric) heat source on the object under study are well known. The specific features of the self-similar heat transfer process in a solid with spherical focus of various physical properties, i.e. spherical cavity filled with high-temperature gas with its fixed or moving according to the specified law boundary, and spherical inclusion or an inclusion in the form of a spherical layer absorbing penetrating radiation are known as well.

Despite the results achieved in the self-similar heat transfer processes in the analyzed system studying, a number of questions is still unanswered. It refers, in particular, to the issue of the possibility of self-similar process existence in the isotropic body with a heat source wielding axial symmetry.

The article formulates a problem of the temperature field determining of an isotropic solid with an axisymmetric heat source in the form of a circular cylinder. The mathematical model being analyzed of the heat transfer process in the system under study is based on the hypothesis that the heat source is thermally thin, i.e. on the realization of the “concentrated capacity” idea. It represents a mixed problem for a parabolic type second-order partial differential equation with a specific boundary condition actually accounting for the heat source presence in the system.

Using a self-similar substitution proposed in the article, a self-similar problem of heat transfer in an isotropic solid with a thermally thin heat source wielding axial symmetry was formulated and solved. A sufficient condition setting the possibility of a self-similar heat transfer process implementing in the system being analyzed has been identified. The obtained results were employed in a qualitative analysis of physical properties of the self-similar heat transfer process under study.

Keywords: isotropic solid body, axisymmetric heat source, temperature field, self-similar solution.

REFERENCES

1. **Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P.** *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy* [Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena]. Moscow: Nauka, 1966. 686 p. In Russ.
2. **Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S.** K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchey ot temperatury [To the Theory of Heat Propagation with Temperature-Dependent Thermal Conductivity] // *Sbornik, posvyashchennyy 70-letiyu akademika A.F. Ioffe [Collection dedicated to the 70th anniversary of academician A.F. Ioffe]*. Moscow: USSR Academy of Sciences Publishing House, 1950. pp. 61–71. In Russ.
3. **Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P.** *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Regimes with Aggravation in Problems for Quasilinear Parabolic Equations]. Moscow: Nauka, 1987. 478 p. In Russ.
4. **Volosevich P.P., Levanov E.I.** *Avtomodel'nye resheniya zadach gazovoy dinamiki i teploperenosa* [Automodel Solutions to the Problems of Gas Dynamics and Heat Transfer]. Moscow: Publishing House of the Moscow Institute of Physics and Technology, 1997. 240 p. In Russ.
5. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Thermal Conductivity of Solids]. Moscow: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
6. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [The Theory of Heat Conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
7. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 552 p. In Russ.
8. **Pudovkin M.A., Volkov I.K.** *Kraevye zadachi matematicheskoy teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh poley v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary Problems of the Mathematical Theory of Thermal Conductivity as Applied to Calculations of Temperature Fields in Oil Reservoirs during Waterflooding]. Kazan: Publishing House of the Kazan University, 1978. 188 p. In Russ.
9. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoy termouprugosti* [Analytic Theory of Thermal Conductivity and Applied Thermoelasticity]. Moscow: URSS, 2012. 653 p. In Russ.
10. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal Conductivity of Anisotropic Bodies. Analytical Methods for Solving Problems]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 312 p. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** O vozmozhnosti realizatsii rezhima termostatirovaniya granitsy sfericheskogo ochaga razogreva [On the Possibility of the Realization of Thermostating Mode of a Spherical Hot Spot Boundary] // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2016, no. 3, pp. 141–147. In Russ.
12. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushchim termicheski tonkim pokrytiem [Self-Similar Solution of Heat Transport Problems in a Solid with a Spherical Hot Spot Having a Thermally Thin Coating] // *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 297–300. In Russ.
13. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'noe reshenie zadachi teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, podvizhnaya granitsa kotorogo obladaet plenochnym pokrytiem [Self-Similar Solution of the Problem of Heat Transfer in a Solid with Spherical Hot Spot, which Moving Boundary has a Firm Coating] // *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 178–183. In Russ.
14. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'nye protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshchayushchim vklyucheniem pri nalichii fazovykh prevrashcheniy v sisteme [Self-Similar Heat Transfer Processes in a Radiation-Transparent Solid Body Containing an Absorptive Inclusion with the System Featuring Phase Transitions] // *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series “Mechanical Engineering”*, 2019, no. 2. pp. 60–70. In Russ.
15. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'nye protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshchayushchim vklyucheniem v vide sharovogo sloya [Self-Similar Heat Transfer Processes in a Transparent for Radiation Solid

Body with Absorbing Inclusion in the Form of a Spherical Layer] // *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 212–224. In Russ.

16. **Yanke E., Emde F., Lesh F.** *Spetsial'nye funktsii* (Formuly, grafiki, tablitsy) [Special Functions (Formulas, Graphs, Tables)]. Moscow: Nauka, 1968. 344 p. In Russ.
17. **Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.** *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. In Russ.