УДК 539.3:534.1

Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений

Зверяев Е.М.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Миусская пл., 4, Москва, 125047, Россия

e-mail: zveriaev@gmail.com

Аннотация

В качестве исходных общих уравнений взяты динамические уравнения пространственной задачи теории упругости для пластины. Уравнения приводятся к безразмерному виду, и в них выделяется малый параметр, равный отношению высоты пластины к ее характерной длине. Интегрирование системы из 12 уравнений с 12 неизвестными производится с помощью метода простых итераций, позволяющего установить вид асимптотических разложений по малому параметру и показатели весовых коэффициентов каждого искомого неизвестного. В качестве величин нулевого приближения, позволяющего выделить заданные НДС, выбираются функции поперечного перемещения и напряжения перечного сдвига, и через них последовательно определяются остальные неизвестные в нулевом приближении и наконец, эти же величины как величины первого приближения. Если функции нулевого приближения выбраны зависящими только от координат срединной плоскости, решение записывается в квадратурах. Если нагрузка является

медленно меняющейся вдоль координат, решение задачи также сводится к определению медленно меняющихся неизвестных функций напряжений и перемещений. В этом случае задача существенно упрощается и сводится к решению последовательности классических задач таким образом, что выходные данные одной элементарной задачи являются входными для следующей.

Ключевые слова: принцип сжатых отображений, теория Тимошенко, колебания, пластина, малый параметр.

Введение

С научной точки зрения существенно, чтобы свойства конструируемых моделей и процессов формулировались отчетливо на рациональной основе. Во многих современных проблемах разумно избегать чрезмерных усложнений, т. к. соответствующие эксперименты и явления, как правило, связаны с разбросом экспериментальных данных, которые вносятся трудно контролируемыми различиями в самих объектах изучения. Тем не менее, вопрос о построении уточненных моделей новых материальных сред с учетом новых и дополнительных свойств и эффектов актуален.

Современная наука и техника остро нуждаются в построении технических моделей для расчета ударных явлений разного вида[1-3]. Одновременно нужны другие, пусть более сложные модели математического характера, способные предсказывать качественные характеристики при ударе с тем, чтобы указывать ожидаемую интенсивность удара и его последствия для грамотного построения численного расчета, поскольку последний не дает причинно-следственной связи.

Известно, что использование хорошо угаданной формы асимптотического разложения неизвестных позволяет легко найти решение задачи [4]. Как считает М. Ван-Дайк «Итерации иногда (но не всегда!) автоматически приводят к надлежащей последовательности. Обычно чувствуется, когда решение развивается правильно: все члены согласуются, запутанные выражения часто упрощаются. С приобретением опыта можно научиться распознавать, когда отсутствие таких успокаивающих признаков внушает мысль о перепроверке предположенной формы ряда. Однако единственным совершенно надежным процессом является такой, в котором асимптотическая последовательность не устанавливается заранее, а определяется – член за членом – в ходе решения». На взгляд автора настоящей работы метод простых итераций и принцип сжатых отображений позволяют построить необходимый механизм установления вида асимптотического разложения по малому параметру и, вполне возможно, по нескольким [5], удовлетворяя предложенному М. Ван-Дайком правилу.

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях простейшим и в то же время наиболее важным является, так называемый, принцип сжатых отображений [6].

Отображение $x = Ax$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением (сжатием), если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho\left(Ax, Ay\right) \le \alpha\rho\left(x, y\right)$. Точка x называется неподвижной точкой отображения, если $x = Ax$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $x = Ax$.

Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения x_0. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению x независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ находятся с помощью формулы

$$x_{n+1} = Ax_n .$$

В случае двумерных или трехмерных задач с большим числом неизвестных стандартные методы малого параметра не работают, т.к. каждое искомое неизвестное имеет свой весовой множитель и свою изменяемость, определяющие его вклад в каждое отдельно взятое уравнение. Определение весовых коэффициентов с помощью метода простых итераций дано в работе [7] для задач теории оболочек и в [8, 9] на примере длинной упругой полосы.

При построении решения путем асимптотических разложений искомых неизвестных задача легко решается и пространственные уравнения сводятся к двумерным, если угадан вид разложения. В этом случае все неизвестные задачи определяются из уравнений нулевого приближения, и ни одно неизвестное при этом не обращается в ноль. Тогда первое и следующие приближения служат только для численного уточнения полученной в нулевом приближении величины, но не могут изменить саму установленную видом разложения причинно-следственную функциональную связь. Для установления вида разложения в настоящей работе используется метод простых итераций. В работах [5, 7-9] показано, что после установления вида разложения можно переходить к выполнению граничных условий, в результате чего получаются уравнения для быстро (типа пограничного слоя) и медленно меняющихся составляющих решения, совпадающие с уравнениями, полученными в результате использования асимптотических разложений. Строится оператор последовательного вычисления неизвестных в нулевом и первом приближении. Первое приближение используется для оценки сходимости процесса с помощи малого параметра, играющего в методе простых итераций такую же роль, как и в методе асимптотического интегрирования.

Поскольку метод простых итераций обосновывается принципом сжатых отображений, решение сходится независимо от выбора величин начального приближения, но скорость сходимости, тем более что производится вычисление только одной итерации, зависит от них. Для построения решения используются предположения начального приближения:

– в нулевом приближении утонение (утолщение) пластины пренебрежимо мало;

– поперечные сдвиги в нулевом приближении распределены равномерно по толщине пластины.

1. Построение решения

Будем исходить из уравнений пространственной теории упругости, отметив звездочкой размерные величины. Совместим срединную плоскость прямоугольной плиты с плоскостью $x^* y^*$ декартовой системы координат $x^* y^* z^*$. Пусть a, b – размеры плиты вдоль осей x^* и y^* соответственно, $2h$ – толщина плиты и $0 \le x^* \le a,\ 0 \le y^* \le b,\ -h \le z^* \le h$. Классические динамические уравнения теории упругости имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y^*} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^{*2}}, \qquad \tau_{xy}^* = \frac{E^*}{2(1+\nu)} \gamma_{xy},$$

$$\frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x^*} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^{*2}}, \qquad \tau_{xz}^* = \frac{E^*}{2(1+\nu)} \gamma_{xz},$$

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y^*} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^{*2}}, \qquad \tau_{yz}^* = \frac{E^*}{2(1+\nu)} \gamma_{yz},$$

$$E^* \varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu(\sigma_y^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*},$$

$$E^* \varepsilon_y = \sigma_y^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_z^*), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v^*}{\partial y^*}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*},$$

$$E^* \varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu(\sigma_x^* + \sigma_y^*), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*}.$$

Введем безразмерные координаты $x = x^*/a,\ y = y^*/a,\ z = z^*/h$, безразмерные перемещения $u = u^*/h,\ v = v^*/h,\ w = w^*/h$, безразмерное время $t = t^*/T$ (T –

некоторый характерный период колебаний пластины, имеющей длину a, ширину b, высоту h) и безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^* / E,\ \sigma_y = \sigma_y^* / E,\ \sigma_z = \sigma_z^* / E$. Область, занятая пластиной, в безразмерных координатах задается выражениями: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le b / a$, $-1 \le z \le 1$.

Безразмерные уравнения, описывающие состояние пластины, запишем в форме, удобной для решения методом простых итераций, путем преобразования соотношений упругости и записи уравнений в порядке, позволяющем определить все искомые неизвестные последовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{xz},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + 2(1+\nu)\tau_{yz},$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + p^2 w,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + p^2 u, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + p^2 v$$

Здесь введены малый параметр $\varepsilon = h / a$ и безразмерный оператор

$p^2 = \frac{\rho h^2}{ET^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, в котором ρ – удельная плотность материала полосы.

Записанная система уравнений позволяет использовать метод последовательных приближений (метод простых итераций) для нахождения решения. Если в трех первых уравнениях перемещение $w = w_0$ и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau_{xz0}$, $\tau_{yz} = \tau_{yz0}$ рассматривать в качестве известных величин начального приближения, остальные неизвестные могут быть вычислены последовательно. Сначала из первых трех уравнений вычисляются u_0, v_0 и σ_{0z}, затем через них путем прямых действий, алгебраических и дифференцирования, из следующих шести уравнений выражаются $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \tau_{xy0}, \sigma_{x0}, \sigma_{y0}, \varepsilon_{z0}$. Потом по известным $\varepsilon_{z0}, \tau_{xy0}, \sigma_{x0}, \sigma_{y0}$ вычисляются w_1 и τ_1 в первом приближении и т.д.

Величины начального приближения выберем такими:

$$w = w_0(x, y),\ \tau_{xz} = \tau_{0xz}\left(x, y\right),\ \tau_{yz} = \tau_{0yz}\left(x, y\right), \tag{1.2}$$

считая поперечное перемещение и касательные напряжения в нулевом приближении не зависящими от поперечной координаты. Для удобства процедуру вычислений разделим в силу линейности задачи на три элементарных: w, τ и 0-процессы. В w-процессе задаются величины начального приближения

$$w = w_0(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0} = 0. \tag{1.3}$$

В τ-процессе –

$$w = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0}(x, y). \tag{1.4}$$

В 0-процессе –

$$w = w_0 = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz0} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz0} = 0. \tag{1.5}$$

0-процесс выделен для того, чтобы учесть появляющиеся в процессе вычисления произволы интегрирования, не учитываемые в w и τ-процессах. Проводя теперь вычисления по описанной схеме, получаем следующие выражения для искомых неизвестных в:

– w-процессе: $w = w_0\left(x, y\right), \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xz0} = \tau_{yz0} = 0$, $u_0 = -\varepsilon \dfrac{\partial w_0}{\partial x} z$,

$$v_0 = -\varepsilon \frac{\partial w_0}{\partial y} z, \quad \varepsilon_{x0} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z, \quad \varepsilon_{y0} = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z, \quad \tau_{xy0} = -\frac{1}{1+\nu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y},$$

$$\sigma_{z0} = p^2 w_0 z, \quad \sigma_{x0} = -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} p^2 w_0 z,$$

$$\varepsilon_{z0} = \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon^2 \Delta w_0 z + \frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu} p^2 w_0 z, \quad \tau_{xz1} = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_0 - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2},$$

$$\tau_{yz1} = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2}, \quad \sigma_{z1} = \left(-\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2} \Delta^2 w_0 + \varepsilon^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \Delta w_0 \right) \frac{z^3}{6};$$

– τ-процессе: $w = w_0 = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{xz0}\left(x, y\right),\ \tau_{yz} = \tau_{yz0}\left(x, y\right),\ u_0 = 2\left(1+\nu\right)\tau_{xz0} z$,

$$v_0 = 2\left(1+\nu\right)\tau_{yz0} z, \ \varepsilon_{x0} = 2\left(1+\nu\right)\varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z, \quad \varepsilon_{y0} = 2\left(1+\nu\right)\varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} z,$$

$$\sigma_{z0} = -\varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z, \quad \sigma_{x0} = \varepsilon \left(\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z,$$

$$\tau_{xy0} = \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial x} \right) z, \quad \varepsilon_{z0} = \frac{1-\nu-6\nu^2}{1-\nu} \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z,$$

$$w_0 = \frac{1-\nu-6\nu^2}{1-\nu} \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2},$$

$$\tau_{xz1}=\left[\varepsilon^2 L_{xy}+p^2 2\left(1+\nu\right)\tau_{xz0}\right]\frac{z^2}{2},\text{ где } L_{xy}=-\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial y^2}+\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\tau_{yz1}=\left[\varepsilon^2 L_{yx}+p^2 2\left(1+\nu\right)\tau_{yz0}\right]\frac{z^2}{2},\text{ где } L_{yx}=-\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x^2}+\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\sigma_{z1}=\left[\frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)-p^2\varepsilon 2\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\right]\frac{z^3}{6};$$

– 0-процессе: $w=w_0=0, \tau_{xz}=\tau_{yz}=\tau_{xz0}=\tau_{yz0}=0$, $u_0=u_0\left(x,y\right)$, $v_0=v_0\left(x,y\right)$,

$$\sigma_{z0}=\sigma_{z0}\left(x,y\right),\ \ \varepsilon_{x0}=\varepsilon\frac{\partial u_0}{\partial x},\ \ \varepsilon_{y0}=\varepsilon\frac{\partial v_0}{\partial y},\ \ \tau_{xy0}=\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{x0}=\varepsilon\frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{z0},\ \ \varepsilon_{z0}=-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

$$w_0=\left[-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}\sigma_{z0}\right]z,$$

$$\tau_{xz0}=\left[\varepsilon^2 K_{xy}-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}+p^2 u_0\right]z,$$

где $K_{xy}=-\left[\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2\left(1-\nu\right)}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right]$,

$$\tau_{yz0}=\left[\varepsilon^2 K_{yx}-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}+p^2 v_0\right]z,$$

где $K_{xy}=-\left[\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2\left(1-\nu\right)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right]$,

$$\sigma_{z1}=\left[\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_{z0}-\right.$$

$$-\frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon p^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+p^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_{z0}\Bigg]\frac{z^2}{2};$$

В итоге получаем следующую запись искомых неизвестных в первом приближении:

– нормальное перемещение w

$$w=w_0+\frac{1-\nu-6\nu^2}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\frac{z^2}{2}+\left[-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_{z0}\right]z;$$

– тангенциальные перемещения u, v

$$u=-\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial x}z+2(1+\nu)\tau_{xz0}z+u_0,\quad v=-\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial y}z+2(1+\nu)\tau_{yz0}z+v_0;$$

– касательные напряжения $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xz}$

$$\tau_{xy}=-\frac{1}{1+\nu}\varepsilon^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}+\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial x}\right)z+\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{xz}=\left(\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0+\varepsilon^2 L_{xy}-\varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial x}+2(1+\nu)p^2\tau_{xz0}\right)\frac{z^2}{2}+$$

$$+\tau_{xz0}+\left(\varepsilon^2 K_{xy}-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}+p^2u_0\right)z,$$

(1.6)

$$\tau_{yz}=\left(\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0+\varepsilon^2 L_{yx}-\varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial y}+2(1+\nu)p^2\tau_{yz0}\right)\frac{z^2}{2}+$$

$$+\tau_{yz0}+\left(\varepsilon^2 K_{yx}-\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial y}+p^2v_0\right)z,$$

считающиеся в традиционных теориях постоянными по толщине;

– нормальное поперечное напряжение σ_z

$$\sigma_z = \left[-\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2} \Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu} \varepsilon^3 \Delta \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \Delta w_0 - - p^2 \varepsilon 2 (1+\nu) \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) \right] \frac{z^3}{6} +$$

(1.7)

$$\left[\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2} \Delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \sigma_{z0} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \varepsilon p^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + p^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \sigma_{z0} \right] \frac{z^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + p^2 w_0 z + \sigma_{z0},$$

также отсутствующее в традиционных теориях пластин;

– нормальные напряжения в плоскости пластины σ_x, σ_y

$$\sigma_x = -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} p^2 w_0 z +$$

$$+\varepsilon \left(\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} \right) z + \varepsilon \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0},$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{1-\nu^2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) z + \frac{\nu}{1-\nu} p^2 w_0 z +$$

$$+\varepsilon \left(\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} \right) z + \varepsilon \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{z0};$$

– компоненты тангенциальной деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$

$$\varepsilon_x = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} z + 2(1+\nu) \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ \varepsilon_x = -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} z + 2(1+\nu) \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} z + \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial y};$$

– поперечную деформацию ε_z

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon^2 \Delta w_0 z + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} p^2 w_0 z + \frac{1-\nu-6\nu^2}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) z -$$

$$-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_{z0},$$

которая в традиционных теориях не определяется вследствие принятия гипотезы недеформируемой нормали.

2. Выполнение граничных условий на лицевых плоскостях

Теперь надо выполнить граничные условия на верхней и нижней сторонах пластины. Примем, что нагрузки, приложенные к верхней и нижней поверхностям пластины, уравновешены возникающими в пластине нормальными и касательными напряжениями

$$\begin{gathered} \tau_{xz} = \tau_{xz+} \text{ при } z = 1,\ \tau_{xz} = \tau_{xz-} \text{ при } z = -1, \\ \tau_{yz} = \tau_{yz+} \text{ при } z = 1,\ \tau_{yz} = \tau_{yz-} \text{ при } z = -1, \\ \sigma_z = q_+ \text{ при } z = 1,\ \sigma_z = q_- \text{ при } z = -1. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Подставив выражения τ_{xz}, τ_{yz}, из (1.6) в первые четыре условия, получим четыре уравнения

$$\tau_{xz}(1) = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{xy} - \varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(1+\nu)p^2\tau_{xz0}\right)\frac{1}{2} +$$

$$+\left(\varepsilon^2 K_{xy} - \varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} + p^2 u_0\right) + \tau_{xz0} = \tau_{xz+}$$

$$\tau_{xz}(-1) = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{xy} - \varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial x} + 2(1+\nu)p^2\tau_{xz0}\right)\frac{1}{2} -$$

$$-\left(\varepsilon^2 K_{xy} - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} + p^2 u_0\right) + \tau_{xz0} = \tau_{xz-}$$

$$\tau_{yz}\left(1\right) = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{yx} - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2\left(1+\nu\right) p^2 \tau_{yz0}\right)\frac{1}{2} +$$

$$+\left(\varepsilon^2 K_{yx} - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} + p^2 v_0\right) + \tau_{yz0} = \tau_{yz+}$$

$$\tau_{yz}\left(-1\right) = \left(\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{yx} - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2\left(1+\nu\right) p^2 \tau_{yz0}\right)\frac{1}{2} -$$

$$-\left(\varepsilon^2 K_{yx} - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} + p^2 u_0\right) + \tau_{yz0} = \tau_{yz-}$$

После попарного сложения и вычитания при $z=1$ и $z=-1$ этих уравнений получаем следующие выражения

$$\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{xy} - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial x} + 2\left(1+\nu\right) p^2 \tau_{xz0} + 2\tau_{xz0} = \tau_{xz+} + \tau_{xz-}$$

$$\varepsilon^2 K_{xy} - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial x} + p^2 u_0 = \tau_{xz+} - \tau_{xz-}$$

$$\varepsilon^3 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 + \varepsilon^2 L_{yx} - \varepsilon \frac{1+\nu}{1-\nu} p^2 \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2\left(1+\nu\right) p^2 \tau_{yz0} + 2\tau_{yz0} = \tau_{yz+} + \tau_{yz-} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon^2 K_{yx} - \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial y} + p^2 v_0 = \tau_{yz+} - \tau_{yz-}$$

Запишем уравнения, соответствующие последним двум условиям (2.1) для σ_z на лицевых плоскостях

$$\sigma_z\left(1\right) = \left[-\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2}\Delta^2 w_0 + \frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3 \Delta\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) +\right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\Delta w_0-p^2\varepsilon 2\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\Bigg]\frac{1}{6}+$$

$$+\left[\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_{z0}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon p^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+p^2\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}\sigma_{z0}\right]\frac{1}{2}-\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+p^2w_0+\sigma_{z0}=-q,$$

$$\sigma_z\left(-1\right)=-\left[-\varepsilon^4\frac{1}{1-\nu^2}\Delta^2w_0+\frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+\right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\Delta w_0-p^2\varepsilon 2\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\Bigg]\frac{1}{6}+$$

$$+\left[\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_{z0}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon p^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+p^2\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}\sigma_{z0}\right]\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)-p^2w_0+\sigma_{z0}=0;$$

После вычитания и сложения этих уравнений получим два уравнения

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2}\Delta^2w_0+\frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\Delta w_0-\right.$$

$$\left.-\varepsilon 2\left(1+\nu\right)p^2\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\right]-2\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+2p^2w_0=-q$$

$$\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_{z0}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon p^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+ \tag{2.3}$$

$$+p^2\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}\sigma_{z0}+2\sigma_{z0}=-q$$

Второе, четвертое уравнения в (2.2) и второе в (2.3) содержат неизвестные u_0, v_0, σ_{z0}, образуя замкнутую систему разрешающих уравнений, описывающую деформации растяжения-сжатия в плоскости пластины. Первое, третье в (2.2) и первое в (2.3) также образуют замкнутую систему разрешающих уравнений относительно неизвестных изгиба $w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$.

3. Уравнение движения пластины типа Тимошенко

Ограничимся рассмотрением только последней системы, описывающей изгиб и называемой в статическом случае антиплоской задачей теории упругости. Примем для упрощения изложения касательную нагрузку на лицевых плоскостях пластины отсутствующей, т.е. в (2.2) $\tau_{xz+} = \tau_{xz-} = \tau_{yz+} = \tau_{yz-} = 0$. В силу линейности задачи такую нагрузку можно учесть отдельно и наложить на результат действия нагрузки q. Продифференцируем первое уравнение из системы (2.2) по x, третье по y, умножим оба на $\frac{1}{3}\varepsilon$

$$\frac{1}{3}\left[\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w_0 + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial x}L_{xy} - \varepsilon^2 \frac{1+\nu}{1-\nu}p^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2(1+\nu)p^2\varepsilon\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + 2\varepsilon\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x}\right] = 0$$

$$\frac{1}{3}\left[\varepsilon^4 \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w_0 + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial y}L_{yx} - \varepsilon^2 \frac{1+\nu}{1-\nu}p^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2(1+\nu)p^2\varepsilon\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y} + 2\varepsilon\frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right] = 0$$

и сложим их. Получим

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2}\Delta^2 w_0 - \frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) - \varepsilon^2\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\Delta w_0 + \right.$$

$$\left. +\varepsilon 2(1+\nu)p^2\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right)\right] + \frac{2}{3}\varepsilon\left(\frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial y}\right) = 0$$

Складывая это уравнение с первым уравнением из (2.3), имеем

$$\frac{4}{3}\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)-2p^2w_0=q \tag{3.1}$$

Подставим соотношение (3.1) в первое уравнение (2.3). Это дает такое уравнение

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}\left[\frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2}\Delta^2 w_0-\frac{8-\nu}{2(1-\nu)}\varepsilon^2p^2\Delta w_0+3(1+\nu)p^4w_0\right]+2p^2w_0= \\ =-q+\frac{2-\nu}{2(1-\nu)}\varepsilon^2\Delta q-(1+\nu)p^2q\end{gathered} \tag{3.2}$$

Сравнив его с уравнением колебаний полосы, полученным в [6] также с помощью метода простых итераций

$$\begin{gathered}\frac{2}{3}\left[\varepsilon^4 w_0^{1V}-(4+2.5\nu)\varepsilon^2p^2w_0''+3(1+\nu)p^4w_0\right]+2p^2w_0= \\ =-q+\frac{2+\nu}{2}\varepsilon^2q''-(1+\nu)p^2q\end{gathered}$$

и уравнением С.П. Тимошенко [7], полученным на основании механических соображений

$$EI\frac{\partial^4y^*}{\partial x^{*4}}-\rho I\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4y^*}{\partial x^{*2}\partial t^{*2}}+\frac{\rho^2I}{k'G}\frac{\partial^4y^*}{\partial t^{*4}}+\rho F\frac{\partial^2y^*}{\partial t^{*2}}=0$$

и приведенным здесь к безразмерному виду

$$\frac{2}{3}\left[\varepsilon^4y^{1V}-(4+3\nu)\varepsilon^2p^2y''+3(1+\nu)p^4y\right]+2p^2y=0,$$

где $y=y^*/h$ – безразмерный прогиб и балка имеет прямоугольное сечение с характеристиками $I=2bh^3/3$, $F=2bh$, $k'=2/3$, видим, что уравнение (3.2) можно считать уравнением пластины типа Тимошенко.

4. Уточненные уравнения динамики пластины

Граничные условия (2.1) приводят к шести уравнениям для шести искомых неизвестных $u_0, v_0, \sigma_{z0}, w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$. После произведенных выше тождественных преобразований и исключения величин, обозначенных как $L_{xy}, L_{yx}, K_{xy}, K_{yx}$, эти уравнения сводятся к следующему виду:

– уравнения плоской задачи с неизвестными u_0, v_0, σ_{z0}

$$\varepsilon^2\left[\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right]+\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}-p^2u_0=0$$

$$\varepsilon^2\left[\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}\right]+\varepsilon\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_{z0}}{\partial x}-p^2u_0=0 \tag{4.1}$$

$$\varepsilon^3\frac{1}{1-\nu^2}\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\sigma_{z0}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\varepsilon p^2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)+$$

$$+p^2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\sigma_{z0}+2\sigma_{z0}=-q$$

– уравнения антиплоской задачи с неизвестными $w_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial y^2}+\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x\partial y}\right)+2(1+\nu)p^2\tau_{xz0}+2\tau_{xz0}=$$

$$=-\frac{\varepsilon^3}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w_0+\varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{yz0}}{\partial x^2}+\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau_{xz0}}{\partial x\partial y}\right)+2(1+\nu)p^2\tau_{yz0}+2\tau_{yz0}= \tag{4.2}$$

$$=-\frac{\varepsilon^3}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0+\varepsilon\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{\varepsilon^4}{1-\nu^2}\Delta^2 w_0+\frac{2-\nu}{1-\nu}\varepsilon^3\Delta\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\frac{1+\nu}{1-\nu}p^2\Delta w_0-\right.$$

$$\left.-\varepsilon 2(1+\nu)p^2\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)\right]-2\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz0}}{\partial y}\right)+2p^2 w_0=-q$$

Это полная система уточненных динамических уравнений для плиты относительно шести неизвестных. Уравнения (4.1) гиперболического типа относительно перемещений u_0, v_0 и параболического относительно σ_{z0}. Уравнения (4.2) являются гиперболического типа относительно напряжений τ_{xz0}, τ_{yz0} и параболического относительно прогиба w_0. это имеет место в силу отсутствия волновых движений по толщине пластины в направлении оси z. При этом изменяемость функций $u_0, v_0, \tau_{xz0}, \tau_{yz0}$ велика, их производные в ε^{-1} больше функций.

В обзоре [11] приведены уточненные уравнения колебаний пластины различных типов, полученные путем гипотез и\или разложений искомых неизвестных в степенные ряды по поперечной координате. Если уравнениям первого типа придается конкретный физический смысл, то уравнения второго типа физического толкования не получали. При этом уравнения по методу гипотез имеют ряд противоречий. Полученные в настоящей работе уравнения свободны от противоречий и имеют выделенные высокочастотные волновые члены и низкочастотные колебательные. Если учесть [12], что для продольных колебаний справедлива оценка $p\sim\varepsilon^2$, а для поперечных колебаний – $p\sim\varepsilon^4$, можно убедиться, что все члены в уравнениях (4.1) и (4.2) одного порядка по ε. Таким образом можно утверждать, что эти уравнения, будучи выделенными из общих уравнений теории упругости, содержат все главные члены, тогда как все второстепенные отброшены. Можно показать, что если в этих уравнениях отбросить быстроменяющиеся члены, получатся классические уравнения колебаний пластины.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-08-01243.

Библиографический список

1. Тишков В.В., Фирсанов В.В. Аналитическая модель для прогнозирования динамического состояния объекта авиационной техники при ударе // Авиакосмическое приборостроение, 2005. № 1. С. 10-17.

2. Фирсанов В.В., Тишков В.В. Упруго-пластические напряжения оболочки вращения из материала с линейным упрочнением, нагруженной силой в полюсе // Авиационная техника. 2012. № 4. С. 30-33.

3. Фирсанов В.В., Тишков В.В. Многоуровневый подход при построении расчетных моделей динамического состояния объектов авиационной техники при среднескоростном ударе о твердую преграду // Научный вестник МГТУ ГА. 2010. № 161. С.74-84.

4. Ван-Дайк. М. Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, 1967. - 311 с.

5. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Оценка погрешности уравнений теории пологих оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 4. С. 38-42.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального

анализа. - М.: Наука, 1976. - 544 с.

7. Зверяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. №2. С. 3-19.

8. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.

9. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.

10. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. - М.: Машиностроение, 1985. - 472 с.

11. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. - М.: ВИНИТИ, 1973.- 272 с.

12. Зверяев Е.М. Макаров Г.И. Модель взаимодействия волновых и колебательных движений при поперечном импульсивном воздействии на высокое здание // Вестник отделения строительных наук РААСН. 2012. Вып.16. С. 84-91.