

Труды МАИ. 2022. № 124

Trudy MAI, 2022, no. 124

Научная статья

УДК 519.62

DOI: [10.34759/trd-2022-124-24](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-24)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЭЛЛИпсоИДНЫМИ ОЦЕНКАМИ ПАРАМЕТРОВ

Александр Юрьевич Морозов

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ФИЦ ИУ РАН,

Москва, Россия

morozov@infway.ru

Аннотация. В работе выполняется обобщение ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем с интервальными параметрами на случай эллипсоидных оценок параметров. Идея модификации заключается в использовании преобразования d -мерного единичного куба в d -мерный эллипсоид при задании области неопределенности параметров модели. Рассматривается два варианта такого преобразования: первое — сохраняющее переход поверхности куба в поверхность эллипсоида и второе — на основе перехода из сферической системы координат в декартову систему координат.

На нескольких примерах продемонстрировано, что второе преобразование предпочтительнее с позиции требуемых вычислительных затрат.

Ключевые слова: эллипсоидные оценки, алгоритм адаптивной интерполяции, интервальная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для цитирования: Морозов А.Ю. Интерполяционный подход в задачах моделирования динамических систем с эллипсоидными оценками параметров // Труды МАИ. 2022. № 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-24](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-24)

INTERPOLATION APPROACH IN PROBLEMS OF MODELING DYNAMIC SYSTEMS WITH ELLIPSOID PARAMETER ESTIMATIONS

Alexander Yu. Morozov

Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

morozov@infway.ru

Abstract. In practice, problems often arise in which some of the parameters are not exactly known, but there is information about the set of their possible values. Although the interval description of uncertainties is the most general, nevertheless, the area of uncertainty can be a more complex structure — for example, be an ellipsoid. The paper generalizes the previously developed adaptive interpolation algorithm for modeling dynamic systems with interval parameters to the case of ellipsoidal parameter estimates.

The idea of the modification is to use the transformation of a d-dimensional unit cube into a d-dimensional ellipsoid when specifying the region of uncertainty of the model parameters. Two variants of such a transformation are considered: the first one, which preserves the transition of the cube surface to the ellipsoid surface, and the second one, based on the transition from the spherical coordinate system to the Cartesian coordinate system. It is analytically shown that the first variant has singularities: the derivative undergoes a discontinuity at certain points. Several examples demonstrate that the computational cost estimates differ by orders of magnitude when using different transformation options. Due to the presence of features in the first version of the transformation, in the process of the algorithm, pronounced densifications of the interpolation grid are formed. Moreover, densification occurs in places where the derivative is discontinuous (this additionally confirms that the adaptive interpolation algorithm can be used to identify features). It has been found that it is preferable to use the second option based on the transition from a spherical coordinate system to a Cartesian one.

Keywords: ellipsoid estimates, adaptive interpolation algorithm, interval system of ordinary differential equations

For citation: Morozov A.Yu. Interpolation Approach in Problems of Modeling Dynamic Systems with Ellipsoid Parameter Estimations. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-24](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-24)

1. Введение

На практике часто возникают задачи, в которых часть параметров точно не известна, но есть информация о множестве возможных их значений. Для таких задач необходимо уметь получать множество возможных решений, которое соответствует области неопределенности параметров. Выделяется несколько подходов к решению данного класса задач, в основе которых лежат:

- классическая интервальная арифметика [1–4];
- представление множества решений с помощью геометрических примитивов [5, 6];
- представление решения в виде полинома относительно интервальных параметров [7, 8];
- символьные вычисления [9, 10];
- стохастическое моделирование [11].

Ранее разработанный алгоритм адаптивной интерполяции относится к третьей группе. Его суть заключается в построении кусочно-полиномиальной функции, которая интерполирует зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. Для алгоритма был выполнен анализ вычислительных затрат и получены рекомендации по выбору оптимальной степени интерполяционного полинома. Предложены две модификации [12, 13] на основе разложения в тензорный поезд [14–16] и разреженных сеток [17–19], позволяющие моделировать динамические системы с большим количеством интервальных

неопределенностей. В [20] детально рассмотрены вопросы параллельной реализации алгоритма на основе разреженных сеток с использованием технологии OpenMP [21].

Для получения кусочно-полиномиальной функции, которая интерполирует решение задачи, выполняется построение интерполяционной сетки над областью неопределенностей параметров, представляющей собой прямоугольный многомерный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, и соответствующей заданным интервальным оценкам. Хотя и интервальное описание неопределенностей наиболее общее, на практике область неопределенности может представлять собой более сложную структуру. Например, являться эллипсоидом или не быть сориентированной параллельно осям координат. В этом случае, для того чтобы интерполяционная сетка по-прежнему строилась над прямоугольной областью, необходимо ввести дополнительное преобразование, которое будет трансформировать эту прямоугольную область в нужную форму. В работе рассматриваются эллипсоидные области неопределенности параметров.

Без ограничения общности и для удобства далее будем предполагать, что интерполяционная сетка всегда строится над единичным m -мерным кубом $E_m = [0,1]^m$.

В основе трансформации E_m в произвольный эллипсоид лежит преобразование куба в многомерный шар. В работе рассматриваются два варианта такого преобразования: первое — сохраняющее переход поверхности куба в поверхность шара и второе — на основе перехода из сферической системы координат в

декартову систему координат. На представительном ряде примеров выполняется сравнение вычислительных затрат при использовании разных вариантов.

Отметим, что в авиационно-космической отрасли часто возникают задачи с неопределенностями [22]. Например, химическая кинетика играет важную роль при моделировании течений [23–25] (в том числе в сопле жидкостного ракетного двигателя), но зачастую кинетические механизмы, которые описывают одни и те же химические превращения, могут существенно различаться. Учет этих различий позволяет получать более адекватные математические модели.

2. Постановка задачи

Наиболее часто используются математические модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Без ограничения общности рассмотрим автономную систему ОДУ без параметров с m -мерной областью неопределенности в начальных условиях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ i = 1, \dots, n, \\ (y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0))^T \in \chi, \\ t \in [t_0, t_N], \end{array} \right. \quad (1)$$

где n — количество уравнений в системе ($n \geq m$), χ — m -мерный эллипсоид в n -мерном пространстве.

Решение системы ОДУ (1) в каждый момент времени t_k является параметрическим множеством:

$$\mathbf{Y}^k = \left\{ \mathbf{y}^k (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \mid (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T \in \chi \right\}. \quad (2)$$

Определим m -мерный эллипсоид χ :

$$\chi = \left\{ \mathbf{y}^c + \mathbf{A} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{E}_m \right\}, \quad (3)$$

где $\mathbf{y}^c \in \mathbb{R}^n$ — вектор, задающий центр эллипса, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)^T$, $\mathbf{g}: \mathbf{E}_m \rightarrow \mathbf{B}_m$ — вектор-функция, отображающая точки единичного m -мерного куба $\mathbf{E}_m = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \mid x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m \right\}$ в соответствующие точки m -мерного шара единичного радиуса $\mathbf{B}_m = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_m)^T \mid \sum_{i=1}^m z_i^2 \leq 1 \right\}$, $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ — матрица размера $n \times m$ ранга m , которая задает поворот и растяжение шара.

С учетом (3) система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_i(t_0) = y_i^c + \sum_{j=1}^m a_{i,j} g_j(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ i = 1, \dots, n, \\ t \in [t_0, t_N], \end{cases} \quad (4)$$

где $x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m$ и (2) запишется как

$$\mathbf{Y}^k = \left\{ \mathbf{y}^k (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m \right\}.$$

В результате получаем систему ОДУ с интервальными неопределенностями, которую можно проинтегрировать с помощью алгоритма адаптивной интерполяции. Отличие в применении алгоритма к данной системе от применения его к обычной системе, с интервальными начальными условиями, заключается в необходимости интерполяции на первом шаге вектор-функции \mathbf{g} . Возникают следующие вопросы:

каким образом задать вектор-функцию \mathbf{g} и как она будет влиять на вычислительные затраты и погрешность алгоритма?

3. Алгоритм адаптивной интерполяции

Приведем краткое описание алгоритма адаптивной интерполяции в соответствии с работами [13, 20] для системы ОДУ (4). Цель алгоритма заключается в построении для каждого момента t_k полинома $\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, интерполирующего $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m$. В начальный момент \mathbf{P}^0 определяется как

$$\mathbf{P}^0(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} y_1^c + \sum_{j=1}^m a_{1,j} g_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ y_2^c + \sum_{j=1}^m a_{2,j} g_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n^c + \sum_{j=1}^m a_{n,j} g_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Построение полинома \mathbf{P}^{k+1} по \mathbf{P}^k заключается в интерполяции неявной функции $\mathbf{w}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\hat{y}_1(t_{k+1}), \hat{y}_2(t_{k+1}), \dots, \hat{y}_n(t_{k+1}))^T$, заданной в виде системы ОДУ:

$$\begin{cases} \hat{y}'_i(t) = f_i(\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \dots, \hat{y}_n(t)), \\ \hat{y}_i(t_k) = P_i^k(x_1, x_2, \dots, x_m), i = 1, \dots, n, \\ t \in [t_k, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Интерполяционный полином строится по некоторому набору узлов, образующих интерполяционную сетку. Сначала выполняется перенос решений, находящихся в узлах сетки, с k -го слоя на $(k+1)$ -й слой. И в зависимости от погрешности интерполяции выполняется адаптация сетки путем добавления и

удаления узлов. При расчетах далее используется интерполяция на разреженных сетках с нелинейным базисом [20].

4. Преобразования многомерного куба в многомерный шар

Рассмотрим два варианта вектор-функции \mathbf{g} , которая преобразует куб в шар. Первый вариант сохраняет переход поверхности куба в поверхность шара. Пусть есть куб с центром в начале координат и длиной стороны 2:

$$\hat{\mathbf{E}}_m = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \mid x_i \in [-1, 1], i = 1, \dots, m \right\},$$

который также можно задать через единичный куб \mathbf{E}_m :

$$\hat{\mathbf{E}}_m = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 \\ 2x_2 - 1 \\ \dots \\ 2x_m - 1 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbf{E}_m \right\}.$$

Вектор-функция \mathbf{g} , отображающая $\hat{\mathbf{E}}_m$ в \mathbf{B}_m , задается следующим образом:

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{L(x_1, x_2, \dots, x_m)}}, \frac{x_2}{\sqrt{L(x_1, x_2, \dots, x_m)}}, \dots, \frac{x_m}{\sqrt{L(x_1, x_2, \dots, x_m)}} \right)^T,$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \hat{\mathbf{E}}_m$, $L(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — квадрат длины отрезка, начинающегося в начале координат, проходящего через точку (x_1, x_2, \dots, x_m) и заканчивающегося на границе куба. Функция $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = L^{(m)}$ и задается с помощью рекуррентной формулы:

$$L^{(1)} = 1,$$

$$L^{(k)} = \begin{cases} L^{(k-1)} \left(1 + \frac{x_k^2}{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2} \right), & L^{(k-1)} x_k^2 < \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2, \\ 1 + L^{(k-1)}, & L^{(k-1)} x_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2, \\ 1 + \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2}{x_k^2}, & L^{(k-1)} x_k^2 > \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2. \end{cases}$$

Выполним анализ для $m = 2$. В этом случае $L(x_1, x_2)$ примет следующий вид:

$$L(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + \frac{\min(x_1^2, x_2^2)}{\max(x_1^2, x_2^2)}, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0, \\ 2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0. \end{cases}$$

Возьмем частные производные:

$$\frac{dL(x_1, x_2)}{dx_1} = \begin{cases} 1 + 2 \frac{x_1}{x_2^2}, & x_1^2 < x_2^2, \\ 1 - 2 \frac{x_2^2}{x_1^3}, & x_1^2 > x_2^2, \end{cases} \quad \frac{dL(x_1, x_2)}{dx_2} = \begin{cases} 1 - 2 \frac{x_1^2}{x_2^3}, & x_1^2 < x_2^2, \\ 1 + 2 \frac{x_2}{x_1^2}, & x_1^2 > x_2^2. \end{cases}$$

В точках $x_1^2 = x_2^2$ производные будут претерпевать разрыв. Следовательно, при интерполяции функции \mathbf{g} в окрестностях этих точек будет происходить уплотнение сетки, что, в свою очередь, приведет к увеличению вычислительных затрат.

Рассмотрим второй вариант преобразования, основанный на переходе из сферической системы координат в декартову систему координат. Пусть есть многомерный прямоугольный параллелепипед:

$$\tilde{\mathbf{E}}_m = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \mid x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 2\pi], x_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] i = 3, \dots, m \right\},$$

который, аналогично $\hat{\mathbf{E}}_m$, можно задать через единичный куб \mathbf{E}_m :

$$\tilde{\mathbf{E}}_m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2\pi x_2 \\ \pi(x_3 - 0.5) \\ \pi(x_4 - 0.5) \\ \dots \\ \pi(x_m - 0.5) \end{pmatrix} \middle| (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{E}_m \right\}.$$

Вектор-функция \mathbf{g} , преобразующая $\tilde{\mathbf{E}}_m$ в \mathbf{B}_m , записывается следующим образом:

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} x_1 \cos(x_2) \cos(x_3) \cos(x_4) \cos(x_5) \dots \cos(x_{m-1}) \cos(x_m) \\ x_1 \sin(x_2) \cos(x_3) \cos(x_4) \cos(x_5) \dots \cos(x_{m-1}) \cos(x_m) \\ x_1 \sin(x_3) \cos(x_4) \cos(x_5) \dots \cos(x_{m-1}) \cos(x_m) \\ x_1 \sin(x_4) \cos(x_5) \dots \cos(x_{m-1}) \cos(x_m) \\ \dots \\ x_1 \sin(x_{m-1}) \cos(x_m) \\ x_1 \sin(x_m) \end{pmatrix},$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \tilde{\mathbf{E}}_m$. В отличие от первого варианта преобразования, здесь все производные будут гладкими. В данном варианте не сохраняется переход поверхности куба в поверхность шара, однако в рамках рассматриваемого класса задач это не является важным.

5. Результаты

Выполним численное интегрирование двух систем ОДУ с помощью алгоритма адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток [12, 20]. Для оценки вычислительных затрат используется критерий I , численно равный числу решенных неинтервальных систем (4) при точечных значениях интервальных параметров. Для оценки погрешности, в соответствии с работой [13], в начальный момент времени

случайным образом генерируется тестовое множество точек из области неопределенности параметров системы и строятся соответствующие решения, с которыми выполняется сравнение. Расчеты выполнялись при значении $\varepsilon = 10^{-3}$.

Рассмотрим систему ОДУ [20] с двухмерной областью неопределенности в начальных условиях:

$$\begin{cases} u' = -v\sqrt{v^2 + u^2}, \\ v' = \sin(u), \\ \left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{B}_2 \right\}, \\ t \in [0, 8]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При использовании первого варианта преобразования \mathbf{g} получим:

$$u(0) = \begin{cases} (2x_1 - 1) \left(1 + \frac{\min[(2x_1 - 1)^2, (2x_2 - 1)^2]}{\max[(2x_1 - 1)^2, (2x_2 - 1)^2]} \right)^{-1/2}, & x_1 \neq \frac{1}{2} \vee x_2 \neq \frac{1}{2}, \\ (2x_1 - 1)/\sqrt{2}, & x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$v(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{cases} (2x_2 - 1) \left(1 + \frac{\min[(2x_1 - 1)^2, (2x_2 - 1)^2]}{\max[(2x_1 - 1)^2, (2x_2 - 1)^2]} \right)^{-1/2}, & x_1 \neq \frac{1}{2} \vee x_2 \neq \frac{1}{2}, \\ (2x_2 - 1)/\sqrt{2}, & x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и при использовании второго варианта:

$$u(0) = x_1 \cos(2\pi x_2),$$

$$v(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_1 \sin(2\pi x_2),$$

где $x_1 \in [0, 1]$ и $x_2 \in [0, 1]$.

При интегрировании использовались разреженные сетки с квадратичным базисом. На рис. 1 сверху показано множество решений системы (5) в различные моменты времени при использовании первого варианта преобразования. На рис. 1 снизу показаны получающиеся в процессе работы алгоритма разреженные сетки. Точки на верхних рисунках соответствуют точкам на нижних рисунках. Здесь наблюдается уплотнение сетки в окрестностях прямых $x_1 = x_2$ и $x_1 = 1 - x_2$, соответствующих точкам, в которых производные функции L претерпевают разрыв. Значение апостериорной оценки погрешности $error = 9.5 \times 10^{-3}$ и критерия $I = 25\ 125$.

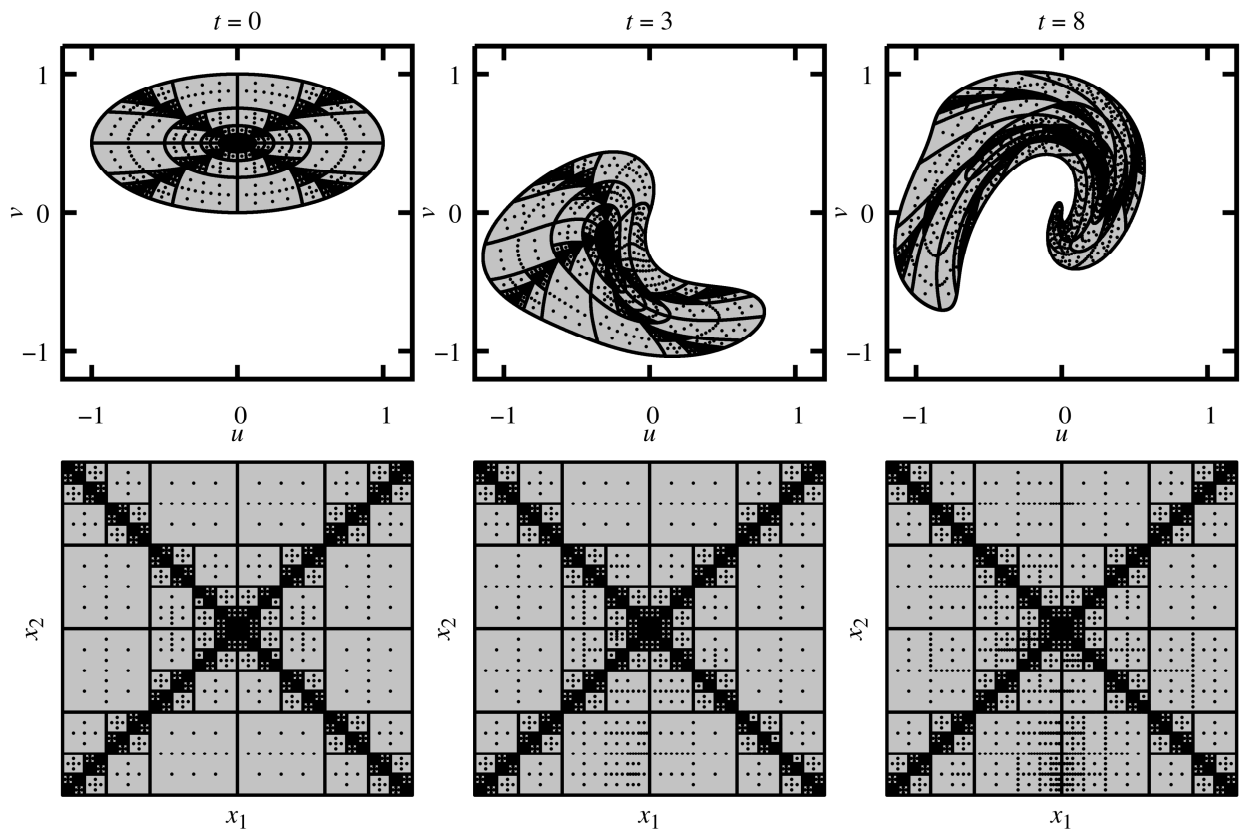


Рис. 1. Множество решений системы (5) и получающаяся интерполяционная разреженная сетка в различные моменты времени при использовании первого варианта преобразования

На рис. 2 показаны результаты интегрирования системы (5) при использовании второго варианта преобразования. Значение апостериорной оценки погрешности $error = 6.3 \times 10^{-3}$ и критерия $I = 952$. При приблизительно одинаковой погрешности, вычислительных затрат здесь потребовалось в 25 раз меньше. В первую очередь это связано с тем, что все производные функции \mathbf{g} в данном случае являются гладкими и при интерполяции не требуется существенного уплотнения сетки.

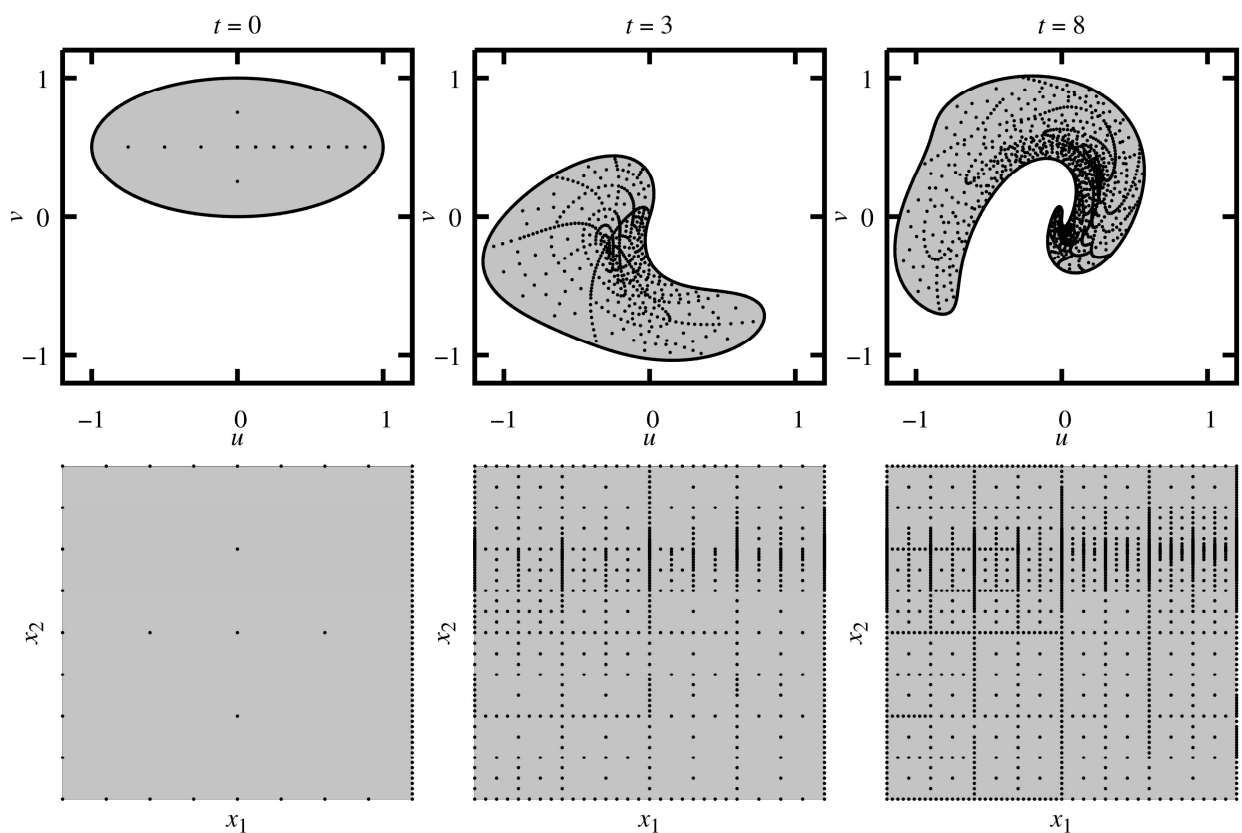


Рис. 2. Множество решений системы (5) и получающаяся интерполяционная разреженная сетка в различные моменты времени при использовании второго варианта преобразования

Далее рассматривается система ОДУ с трехмерной областью неопределенности:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = 4u - \frac{5}{4}uv - \frac{\alpha}{100}u^2, \\ v' = -2v + \frac{1}{2}uv - \frac{1}{20}v^2, \quad \alpha' = 0, \\ \left(\begin{array}{l} u(0) \\ v(0) \\ \alpha(0) \end{array} \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{l} 9/2 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \right) \mid \left(\begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \right) \in \mathbf{B}_3 \right\}, \\ t \in [0,10]. \end{array} \right. \quad (6)$$

При использовании первого варианта преобразования \mathbf{g} получим:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{2x_1 - 1}{\sqrt{L(2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1)}}, \\ v(0) &= 3 + \frac{1}{5} \frac{2x_2 - 1}{\sqrt{L(2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1)}}, \\ \alpha(0) &= 5 \frac{2x_3 - 1}{\sqrt{L(2x_1 - 1, 2x_2 - 1, 2x_3 - 1)}}, \end{aligned}$$

и при использовании второго варианта:

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} x_1 \cos(2\pi x_2) \cos\left(\pi x_3 - \frac{\pi}{2}\right), \\ v(0) &= 3 + \frac{1}{5} x_1 \sin(2\pi x_2) \cos\left(\pi x_3 - \frac{\pi}{2}\right), \\ \alpha(0) &= 5 \sin\left(\pi x_3 - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

где $x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [0,1]$ и $x_3 \in [0,1]$.

Для того чтобы уменьшить влияние особенностей функции L , здесь при интегрировании использовались разреженные сетки с линейным базисом. На рис. 3 показано множество решений системы (6) в различные моменты времени и получающаяся разреженная сетка в процессе работы алгоритма при использовании первого варианта преобразования. Аналогично рис. 1 здесь наблюдается уплотнение

сетки в местах разрыва производных функции L . Значение апостериорной оценки погрешности $error = 2.87 \times 10^{-2}$ и критерия $I = 159\,011$.

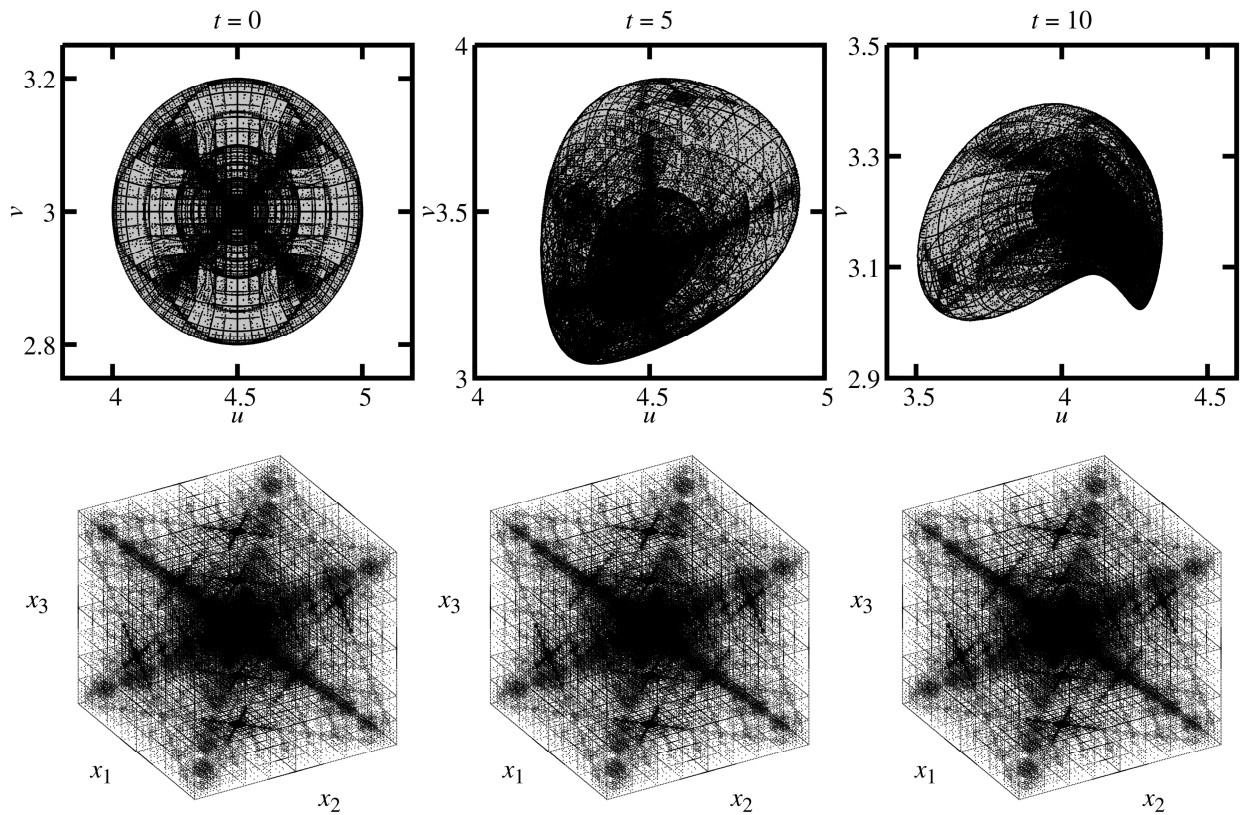


Рис. 3. Множество решений системы (6) и получающаяся интерполяционная разреженная сетка в различные моменты времени при использовании первого варианта преобразования

На рис. 4 показана получающаяся разреженная сетка в процессе работы алгоритма при использовании второго варианта преобразования. Значение апостериорной оценки погрешности $error = 1.4 \times 10^{-2}$ и критерия $I = 2\,251$. В данном случае значение критерия I , которое характеризует вычислительные затраты, меньше более чем в 100 раз.

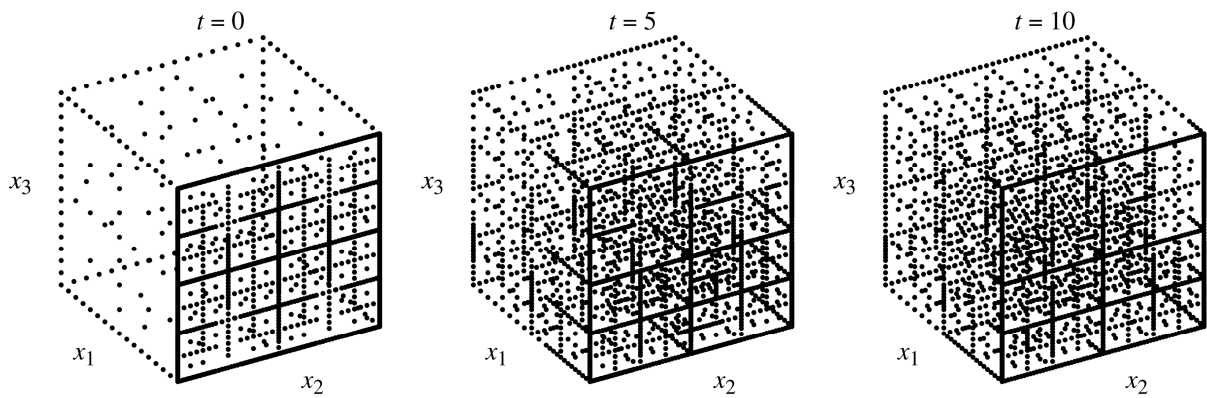


Рис. 4. Получающаяся интерполяционная разреженная сетка в процессе решения системы (6) в различные моменты времени при использовании второго варианта преобразования

В обоих рассмотренных примерах при приблизительно одинаковых значениях апостериорной погрешности оценка вычислительных затрат различается на порядки при использовании разных вариантов преобразования куба в шар.

6. Заключение

В работе выполнено обобщение ранее разработанного алгоритма адаптивной интерполяции на динамические системы с эллипсоидными оценками параметров. Рассмотрены два варианта преобразования интервальной области неопределенности в эллипсоидную область неопределенности. Первый — на основе трансформации, сохраняющей переход поверхности многомерного куба в поверхность многомерного шара, и второй — на основе перехода из сферической системы координат в декартову систему координат. Аналитически показано, что первый вариант обладает особенностями: производная в определенных точках претерпевает разрыв. На двух примерах продемонстрировано, что оценка вычислительных затрат различается на

порядки при использовании разных вариантов преобразования. Из-за наличия особенностей в первом варианте преобразования, в процессе работы алгоритма образуются ярко выраженные уплотнения интерполяционной сетки. Предпочтительным является использование второго варианта — на основе перехода из сферической системы координат в декартову.

Список источников

1. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009, 223 p.
2. Добронец Б.С. Интервальная математика. - Красноярск: Красноярский государственный университет, 2007. - 218 с.
3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. - Новосибирск: Изд-во XYZ, 2017. – 618 с.
4. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Модификация методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=73407>
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов. - М.: Наука, 1988. - 319 с.
6. Kurzhanski A.B., Vdlyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control, SCFA, Boston, 1997. DOI:[10.1007/978-1-4612-0277-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0277-6)

7. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, no. 68, pp. 240–256. DOI: [10.1016/j.cnsns.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.08.004)
8. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables // [Journal of Sound and Vibration](#), 2020, no. 466, pp. 115047. DOI: [10.1016/j.jsv.2019.115047](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115047)
9. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // Reliable Computing, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 361–369.
10. Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 5. С. 102–116.
11. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982. - 296 с.
12. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределенностями // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 976–987. DOI: [10.31857/S0374064121070104](https://doi.org/10.31857/S0374064121070104)
13. Гидаспов В.Ю., Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием ТТ-разложения для моделирования динамических

- систем с интервальными параметрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 9. С. 1416–1430. DOI: [10.31857/S0044466921090106](https://doi.org/10.31857/S0044466921090106)
14. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // SIAM Journal on Scientific Computing, 2011, vol. 33, no 5, pp. 2295–2317. DOI: [10.1137/090752286](https://doi.org/10.1137/090752286)
15. Oseledets I., Tyrtyshnikov E. TT-cross approximation for multidimensional arrays // Linear Algebra and its Applications, 2010, vol. 432, no. 1, pp. 70–88. DOI: [10.1016/j.laa.2009.07.024](https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.024)
16. Оселедец И.В. Тензорные методы и их применение: дисс. ... д. ф-м. наук. - М.: Институт вычислительной математики РАН, 2009. - 282 с.
17. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042-1045.
18. Bungartz H-J., Griebel M. Sparse grids // Acta Numerica, 2004, vol. 13, no. 1. pp. 147–269.
19. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids // Encyclopedia of Quantitative Finance / Ed. R. Cont. New York, 2010.
20. Морозов А.Ю. Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Программная инженерия. 2021. Т. 12. № 8. С. 395–403. DOI: [10.17587/prin.12.395-403](https://doi.org/10.17587/prin.12.395-403).
21. OpenMP. URL: <https://www.openmp.org/>

22. Морозов А.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции для решения задач небесной механики с интервальными неопределенностями // Труды МАИ. 2022. №123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165501>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-14](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-14)
23. Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А. Численное моделирование инициирования детонации в керосино-воздушной газокапельной смеси падающей ударной волной // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=74647>.
24. Гидаспов В.Ю., Кононов Д.С. Численное моделирование сжигания топлива в стационарной детонационной волне в канале переменного сечения со сверхзвуковым потоком на входе и выходе // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111353>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-6](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-6)
25. Крюков В.Г., Абдуллин А.Л., Никандрова М.В., Исхакова Р.Л. Сокращение механизмов реакций при моделировании высокотемпературных течений в соплах // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104166>

References

1. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, 2009, 223 p.
2. Dobronets B.S. *Interval'naya matematika* (Interval mathematics), Krasnoyarsk, Krasnoyarskii gosudarstvennyi universitet, 2007, 218 p.
3. Sharyi S.P. *Konechnomernyi interval'nyi analiz* (Finite-dimensional interval analysis), Novosibirsk, Izd-vo XYZ, 2017, 618 p.

4. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=73407>
5. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovykh sostoyanii dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* (Estimation of phase states of dynamical systems. Ellipsoid method), Moscow, Nauka, 1988, 319 p.
6. Kurzhanski A.V., Vdlyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, SCFA, Boston, 1997. DOI:[10.1007/978-1-4612-0277-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0277-6)
7. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, no. 68, pp. 240–256. DOI: [10.1016/j.cnsns.2018.08.004](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.08.004)
8. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables, *Journal of Sound and Vibration*, 2020, no. 466, pp. 115047. DOI:[10.1016/j.jsv.2019.115047](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115047)
9. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models, *Reliable Computing*, 1998, vol. 4, no. 4, pp. 361–369.
10. Rogalev A.N. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2003, vol. 8, no. 5, pp. 102–116.
11. Ermakov S.M., Mikhailov G.A. *Statisticheskoe modelirovanie* (Statistical modeling), Moscow, Nauka, 1982, 296 p.
12. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. *Differentsial'nye uravneniya*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 976–987. DOI: [10.31857/S0374064121070104](https://doi.org/10.31857/S0374064121070104)

13. Gidaspov V.Yu., Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2021, vol. 61, no. 9, pp. 1416–1430. DOI: [10.31857/S0044466921090106](https://doi.org/10.31857/S0044466921090106)
14. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, vol. 33, no 5, pp. 2295–2317. DOI: [10.1137/090752286](https://doi.org/10.1137/090752286)
15. Oseledets I., Tyrtyshnikov E. TT-cross approximation for multidimensional arrays, *Linear Algebra and its Applications*, 2010, vol. 432, no. 1, pp. 70–88. DOI: [10.1016/j.laa.2009.07.024](https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.024)
16. Oseledets I.V. *Tenzornye metody i ikh primeneniye* (Tensor methods and their applications), Dissertation of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Moscow, M.: Institut vychislitel'noi matematiki RAN, 2009, 282 p.
17. Smolyak S.A. *Doklady AN SSSR*, 1963, vol. 148, no. 5, pp. 1042-1045.
18. Bungartz H-J., Griebel M. Sparse grids, *Acta Numerica*, 2004, vol. 13, no. 1. pp. 147–269.
19. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids, *Encyclopedia of Quantitative Finance*, New York, 2010.
20. Morozov A.Yu. *Programmnaya inzheneriya*, 2021, vol. 12, no. 8, pp. 395–403. DOI: [10.17587/prin.12.395-403](https://doi.org/10.17587/prin.12.395-403).
21. *OpenMP*. URL: <https://www.openmp.org/>
22. Morozov A.Yu. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165501>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-14](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-14)

23. Gidasпов V.Yu., Moskalenko O.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 90. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=74647>
24. Gidasпов V.Yu., Kononov D.S. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111353>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-6](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-6)
25. Kryukov V.G., Abdullin A.L., Nikandrova M.V., Iskhakova R.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104166>

Статья поступила в редакцию 12.04.2022

Статья после доработки 13.04.2022

Одобрена после рецензирования 16.04.2022

Принята к публикации 21.06.2022

The article was submitted on 12.04.2022; approved after reviewing on 16.04.2022; accepted for publication on 21.06.2022.