УДК 513.628

КРЕМОНОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА, РАССЛАИВАЮЩИЕСЯ В ПУЧКЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ НА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИРСТА

Г.С. Иванов, С.А. Фурзиков

Рассматривается конструктивный способ задания инволюционных преобразований пространства, представляющих собой совокупность преобразований Гирста, принадлежащих пучку параллельных плоскостей. Выведены формулы преобразования, изучены F– и P– системы, исследованы свойства гомалоида. Преобразования предназначено для моделирования зависимостей «фактор–два свойства»

Геометрические преобразования представляют собой мощный аппарат конструирования и исследования свойств сложных кривых линий и поверхностей [1, 2, 3]. С их помощью решаются две основные задачи:

1) прямая – конструируются и исследуются свойства сложных кривых и поверхностей как образов прямых линий и плоскостей или изученных кривых линий и поверхностей.
2) обратная – преобразованием сложных линий и поверхностей в более простые исследуются свойства первых и решаются задачи с их участием в упрощенном варианте.

Настоящая статья посвящена решению прямой задачи, то есть конструированию рациональных алгебраических поверхностей, несущих непрерывный каркас рациональных кубик с несобственной точкой возврата и двумя ортогональными асимптотами [4]. Так как указанные кубики получаются посредствам преобразований Гирста, то предлагаются поверхности конструировать с помощью преобразований пространства расслаивающегося на преобразования Гирста.

Рассмотрим конструктивное задание аппарата преобразования J_{n-n}. Так как оно расслаивается в пучке параллельных плоскостей $\alpha_i // Oxy$ на преобразования Гирста J_2, определяемые несобственным центром $F_1^\infty \in Ox$ и инвариантным эллипсом d_i^2, то необходимо задать лишь инвариантную поверхность Δ^m – носитель эллипсов d_i^2. Преобразование J_{n-n} будет центральным, так как все инволюции J_2 имеют общий центр $F_1^\infty \in Ox$. Поэтому порядок n преобразования J_{n-n} будет равен порядку m инвариантной поверхности Δ^m [1]: $n = m$.

Для задания инвариантной поверхности Δ^m необходимо задать законы изменения абсолютных значений полуосей a_i, b_i эллипса d_i^2 (образующей поверхности Δ^m) как функции от z:

$$|a_i| = f_1(z), \ |b_i| = f_2(z).$$

Так как в каждой плоскости расслоения α_i значения a_i, b_i должны быть однозначными и конечными, то в качестве рассматриваемых функций следует взять полиномы:

$$|a_i| = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots + k_{n_1} z^{n_1}, \quad (1)$$

$$|b_i| = t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}. \quad (2)$$

Уравнение поверхности Δ^n выводится подстановкой в уравнение эллипса d^2 значений $a_{i,}, b_i$, из (1) и (2). Имеем

$$\frac{x^2}{\left(k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots k_{n_1} z^{n_1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}\right)^2} = 1 \quad (3)$$

Таким образом, получили алгебраическую поверхность, порядок *n* которой равен $2(n_1 + n_2)$ Порядок преобразования J_{n-n} пространства равен

$$n = 2(n_1 + n_2) \quad (4)$$

Инвариантная поверхность Δ^n с произвольной плоскостью расслоения α_i

$$z = q$$

пересекается по эллипсу. Поэтому общая несобственная ось Δ^∞ пучка плоскостей (α_i) является для нее $(n-2)$ – кратной или $2(n_1 + n_2 - 1)$ – кратной.

Координатная плоскость *Oxz* пересекает поверхность Δ^n по двум симметричным параболам $f_1^{n_1}$ (1) порядка n_1 – траекториям движения концов большой оси эллипса d_i^2, и по n_2 двойным прямым, проходящим через точки пересечения двух парабол (2) с осью *Oz*, то есть сечение является приводимой кривой порядка $2(n_1 + n_2)$. Аналогично, поверхность Δ^n пересекается координатной плоскость *Oyz* по двум симметричным параболам $f_2^{n_2}$ (2) – траекториям движения концов малой оси эллипса d_i^2, и по n_1 двойным прямым, которые проходят через точки пересечения двух парабол (1) с осью *Oz*. Указанные двойные прямые появляются тогда, когда одна из осей эллипса d_i^2 "стягивается" в точку, то есть величина его больше или малая ось становится равной нулю.

Таким образом, сечение поверхности Δ^n координатными плоскостями *Oxz* и *Oyz* являются распавшимися кривыми также порядка $2(n_1 + n_2)$. Плоскость общего положения пересекает эту поверхность по не распавшейся кривой порядка $2(n_1 + n_2)$ с одной несобственной $2(n_1 + n_2 - 1)$ – кратной точкой и $n_1 + n_2$ собственными двойными точками.

Из алгоритма преобразования Гирста [4] следует алгоритм рассматриваемого преобразования J_{n-n}:

1) через данную точку *A* пространства проводим плоскость расслоения α_i // Oxy и прямую $l = l' \,//\, Ox$;

2) плоскость α_i пересекает инвариантную поверхность Δ^n по эллипсу d_i^2, который с прямой $l = l'$ пересекается в двух точках D, $\overline{D}$;

3) относительно двойных точек D, $\overline{D}$; инволюции на $l = l'$ строим точку A', четвертую гармоническую точке *A*, то есть $(D\overline{D}AA') = -1$.

Оператор этого преобразования J_{n-n} получается подстановкой в оператор преобразования Гирста значений a_i из (1) и b_i из (2). Имеем

$$x' = \frac{\left(k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots + k_{n_1} z^{n_1}\right)^2 \left[\left(t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}\right)^2 - y^2\right]}{\left(t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}\right)^2 x}, \qquad (5)$$

$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Формулы обратного преобразования J_{n-n}^{-1} в силу его инволюционности симметричны формулам (5), то есть получаются заменой x' на x, y' на y и z' на z.

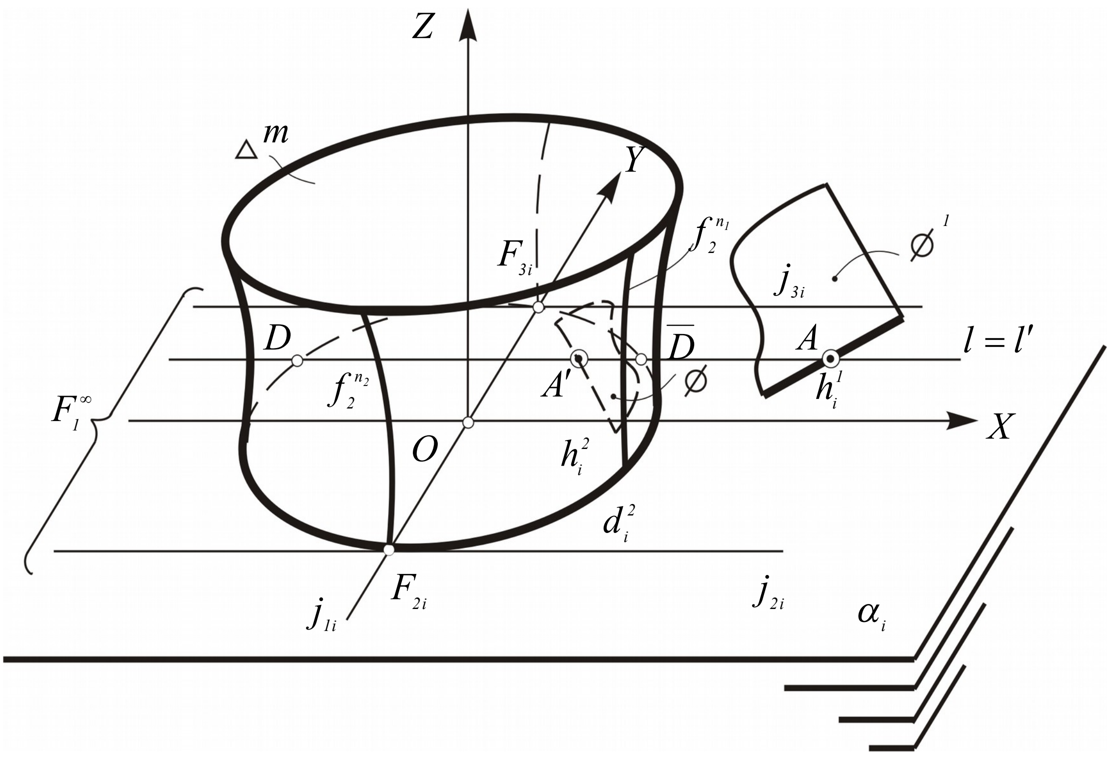

Рис.1

Рассмотрим основные свойства гомолоида Φ – образа произвольной плоскости Φ' (рис. 1).

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0. \tag{6}$$

Уравнение гомолоида Φ выводится подстановкой в (6) значений x', y', z' из (5). Имеем

$$\begin{aligned} &A\left(k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots + k_{n_1} z^{n_1}\right)^2 \left[\left(t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}\right)^2 - y^2\right] + \\ &+ \left(By + Cz + Д\right)\left(t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{n_2} z^{n_2}\right)^2 x = O \end{aligned} \tag{7}$$

– алгебраическую поверхность порядка $n = 2(n_1 + n_2)$.

Эта поверхность в плоскостях расслоения α_i содержит линейный каркас парабол h_i^2 – образов прямых $h_i' = \Phi' \cap \alpha_i$. Кривые h_i^2 являются параболами, так как они проходят через все три F – точки $F_1^\infty, F_{2i}, F_{3i}$ преобразований Гирста в плоскостях α_i, из которых точка F_1^∞ является несобственной. Отсюда следует, что несобственная ось l^∞ пучка (α_i) для каждого гомолоида Φ^n является $(n-2)$ – кратной. Все гомолоиды инцидентны двум симметричным параболам (2) – геометрическим местам F – точек F_{2i} и F_{3i}. Точка F_1^∞, как центр преобразования J_{n-n}, является для гомалоидов $(n-1)$ – кратной [2]. Таким образом, поверхности Φ^n являются моноидами.

В плоскостях α_i, в которых большая или малая ось инвариантного эллипса d_i^2 равна нулю, парабола h_i распадается на две прямые. Действительно, в n_1 плоскостях α_i, в которых парабола $f_1^{n_1}$ (1) пересекает ось *Oz*, большая ось инвариантного эллипса d_i^2 "стягивается" в точку, то есть эллипс d_i^2 распадается на две совпавшие прямые $d = \bar{d}$. Из алгоритма построения соответственных точек $A \sim A'$ преобразования Гирста следует, что любой точке A' прямой $h_i' = \Phi' \cap \alpha_i$, кроме $D' = h_i' \cap (d = \bar{d})$, соответствует точка $A = F_1^\infty A' \cap (d = \bar{d})$. А одной точке D' соответствует вся прямая $\bar{h}_i = F_1^\infty D'$. Таким образом, в этих плоскостях парабола h_i^2 распадается на фиксированную прямую h_i и переменную прямую $\bar{h}_i$.

Аналогичная картина имеет место и в несобственной плоскости α^∞, так как кривая $f_1^{n_1}$ (1) инцидентна точке F_1^∞ и большая ось несобственного эллипса $d_i^{2\infty} = \Delta^m \cap \alpha^\infty$ также "стягивается" в точку.

В плоскостях α_i, в которых парабола $f_2^{n_2}$ (2) пересекает ось *Oz*, малые оси эллипсов d_i^2 "стягиваются" в точку. Поэтому эллипс d_i^2 распадается на две совпавшие прямые $d = \bar{d}$, проходящие через точку F_1^∞. В этом вырожденном случае преобразования Гирста любой точке B'_k прямой $h'_i = \Phi' \cap \alpha_i$, кроме точки $A' = h'_i \cap (d = \bar{d})$, соответствует точка B_k^∞ совпавшая с F_1^∞. А точке A' соответствует целая прямая $F_1^\infty A'$ считаемая дважды, то есть парабола h_i^2 распалась на две совпавшие прямые $h = \bar{h}$. Это следует из свойств преобразования Гирста с совпавшими F – точками [2].

Так как преобразование J_{n-n} является центральным, то любая плоскость $\beta_i \ni F_1^\infty$ пересекает гомолоид Φ^n по моноидальной кривой $b^n = \beta_i \cap \Phi^n$ – образу прямой $b' = \beta_i \cap \Phi'$. А плоскость γ_i общего положения пересекает гомолоид по рациональной кривой q^n, для изучения свойств которой необходимо изучить F – и P – системы преобразования J_{n-n}. То же самое следует сказать и о свойствах пространственной кривой n – го порядка, q^n – образа произвольной прямой q' прообраза Φ' гомолоида Φ^n.

Следующей важной задачей является изучение фундаментальной и принципиальной систем (F – и P – систем) рассматриваемого преобразования. Как известно [1, 2], кремоново преобразование пространства имеет F – элементы трех видов:

- изолированная F – точка,
- F – кривая первого вида,
- F – кривая второго вида.

Изолированной F– точке соответствует P– поверхность, пересекающаяся с множеством гомолидов только по F– кривым. F– кривой первого вида соответствует P– поверхность. При этом каждой точке этой F– кривой соответствует своя линия на P– поверхности. F– кривой второго вида соответствует P– кривая с нарушением однозначности, то есть каждой точке этой F– кривой соответствует вся P– кривая.

Суммарный порядок обоих видов F– кривых определяется из следующих рассуждений. Два гомолоида Φ^n и $\overline{\Phi}^n$ пересекаются по пространственной кривой порядка n^2, которая распадается на пространственную кривую q^n порядка n– образ прямой $q' = \Phi' \cap \overline{\Phi'}$, где Φ', $\overline{\Phi'}$ – плоскости – прообразы гомолоидов Φ^n, $\overline{\Phi^n}$, и на F– кривую порядка $n^2 - n = n(n-1)$. Через эту F– кривую проходят все гомолоиды, то есть она является общей частью линии пересечения как образов плоскостей (гомалоидов Φ_k^n), так и каких-либо других поверхностей. Естественно, эта F– кривая может быть как не распавшейся (в случае простых преобразований), так и распавшейся на различные комбинации составных частей в общих случаях.

В случае центральных преобразований эта кривая представляет собой линию пересечения инвариантной поверхности Δ^n с принципиальной поверхностью Θ, соответственной центру F_1^∞ преобразования J_{n-n}. Точка F_1^∞ является изолированной F– точкой, так как ей соответствует целая P– поверхность θ– первая полярная поверхность точки F_1^∞ относительно Δ^n. Как известно, порядок этой поверхности θ равен $n-1$. Поэтому суммарный порядок F– кривой равен $n(n-1)$ и других F– кривых, кроме $f^{n(n-1)} = \Delta^n \cap \theta^{n-1}$, быть не может.

P– поверхность θ^{n-1} представляет собой геометрическое место P– прямых j_{1i}, а F– кривая $f^{n(n-1)}$– геометрическое место точек F_{2i}, F_{3i} (рис.1). В нашем случае P– поверхность θ^{n-1} является распавшейся на $n-1$ или $2(n_1+n_2-1)$ плоскостей:

1) плоскость симметрии $\theta = Oyz$ (носитель P– прямых j_{1i}) инвариантной поверхности Δ^n;

2) n_2 плоскостей α_i, считаемых дважды и содержащих эллипсы d_i^2, малые оси которых равны нулю.

3) $n_1 - 1$ плоскостей α_i, касающихся, в F_1^∞ каждой из $n_1 - 1$ ветвей двух симметричных парабол $f_1^{n_1}$ (1).

В указанных n_2 плоскостях α_i любой их точке B'_k по алгоритму построения соответственных точек в преобразовании Гирста соответствует одна точка $B^\infty = F_1^\infty$. Каждая из этих плоскостей считается дважды, так как две симметричные относительно оси Oz параболы $f_2^{n_2}$ (2) пересекают последнюю в одних и тех же n_2 точках.

Аналогичная ситуации возникает и в плоскостях α_i, касающихся в F_1^∞ попарно ветвей симметричных парабол $f_1^{n_1}$ (1). В этих плоскостях большие оси инвариантных эллипсов d_i^2 становятся бесконечно большими и "стягиваются" в несобственную точку F_1^∞, а малые оси имеют конечную величину, поэтому эти эллипсы d_i^2 распадаются на две параллельные прямые d, $\overline{d}$ пересекающиеся в несобственной точке F_1^∞. Поэтому по алгоритму соответствия все точки этих плоскостей отображаются в точку F_1^∞.

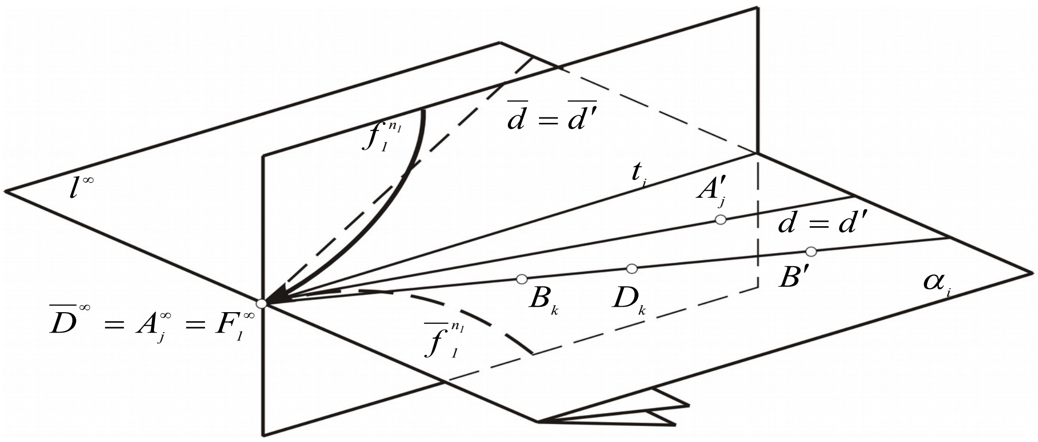

Рис. 2

Таким образом, в сумме имеем $1+2n_2+2(n_1-1)=2(n_1+n_2)-1$ или $n-1$ P– плоскостей, соответственных одной изолированной F– точке F_1^∞.

Далее, изучим составляющие F – кривой $f^{n(n-1)}=\Delta^n\cap\theta^{n-1}$. Ее порядок в развернутом виде:

$n(n-1)=2(n_1+n_2)(2n_1+2n_2-1)$.

Очевидно, в состав этой F– кривой входят линии пересечения инвариантной поверхности Δ^n с рассмотренными выше $n-1$ плоскостями, входящими в состав P– поверхности θ^{n-1}. Естественно, составляющие указанной F – кривой могут быть собственными и несобственными.

Несобственной составляющей является ось l^∞ пучка плоскостей (α_i), так как она *(n-2)* – кратна как на инвариантной поверхности Δ^n, так и на P– поверхности θ^{n-1}. Кроме того, полы этих поверхностей попарно касаются вдоль l^∞, что следует из свойств поляритета. Поэтому в составе F– кривой $n(n-1)$– го порядка прямая l^∞ считается $(n-2)^2+n-2=(n-2)(n-1)$ раз.

Заметим, что прямая l^∞ представляет собой составляющие тех распавшихся эллипсов d^2 инвариантной поверхности Δ^n, большие и малые оси которых стали бесконечно большими в силу того, параболы $f_1^{n_1}, f_2^{n_2}$ имеют соответственно (n_1-1) и (n_2-1) – кратные несобственные точки.

Таким образом, суммарный порядок собственных составляющих F– кривой равен

$n(n-1)-(n-2)(n-1)=2n-2$

или

$4(n_1+n_2)-2.$

Найдем эти составляющие как линии пересечения инвариантной поверхности Δ^n с найденными выше *n-1* P– плоскостями, соответственными центру преобразования F_1^∞.

1) Плоскость симметрии $\theta=Oyz$ пересекает поверхность Δ^n, как было ранее показано при изучении свойств поверхности Δ^n, по двум параболам f^{n_2} (2) порядка n_2 и по n_1 двойным прямым $d=\bar{d}$, которые проходят через точки пересечения двух парабол $f_1^{n_1}$ (1) с осью Oz. Таким образом, плоскость θ пересекает поверхность Δ^n по F– кривой порядка $n=2(n_1+n_2)$. Эта кривая, точнее, ее составляющие являются F – кривыми первого вида, так как каждой их точке соответствует прямая, совокупность которых составляет линейчатую P – поверхность:

- параболам f^{n_2} соответствует цилиндрическая поверхность τ^{2n_2} с образующими j_{2i}, j_{3i} (см. рис.1), касающаяся Δ^n по f^{n_2}; l^∞ на τ^{2n_2} является $2(n_2-1)$– кратной;
- n_1 двойным прямым $d=\bar{d}$ соответствуют инцидентные им плоскости α_i.

2) В состав собственной *F*– кривой второго вида входят n_2 прямые $d=\overline{d}$, считаемые дважды и принадлежащие плоскостям α_i, в которых малые оси инвариантных эллипсов d^2 "стянулись" в точку.

Эти плоскости α_i проходят через точки пересечения симметричных парабол $f_2^{n_2}=\overline{f}_2^{n_2}$ (2) с осью *Oz*. Любой точке A' прямой $d=\overline{d}$ соответствует вся прямая d, так как каждая ее точка $D=\overline{D}$ представляет собой две совпавшие двойные точки инволюции. Поэтому образ A точки A' совпадает с $D=\overline{D}$, а в итоге любой ее точке A' соответствует вся прямая $d=\overline{d}$, как симметричное место точек *A*. Таким образом, эти прямые в составе *F*– кривой инволюции J_{n-n} считаются $2n_2$ раза. Аналогичная картина возникает и на несобственной прямой l^∞ – оси пучка плоскостей α_i. Поэтому прямая l^∞ также является *F*– кривой второго вида.

Теперь рассмотрим еще раз картину соответствия, возникающую в плоскостях α_i, касающихся в точке F_1^∞ симметричных парабол $f_1^{n_1}$, $\overline{f}_1^{n_1}$. Выше отметили, что эти плоскости входят в состав *P*– поверхности, соответственной изолированной *F*– точке F_1^∞. Теперь проанализируем алгоритм построения точки, соответственной произвольной точке B' инвариантных эллипсов d_i^2, распавшихся в этих плоскостях на две параллельные прямые d, $\overline{d}$ инцидентные несобственной точке F_1^∞.

Из алгоритма построения соответственных точек преобразования Гирста [4] следует, что образ B точки B' строится как четвертая гармоническая относительно точек D, $\overline{D}$ пересечения $F_1^\infty B'$ с d_i^2. В нашем случае точка $\overline{D}^\infty$ или D^∞ совпадает с F_1^∞, а положение второй точки D^∞ на d или $\overline{D}$ на $\overline{d}$ неопределенно, так как $F_1^\infty B'$ совпадает с d или $\overline{d}$. Поэтому точке $B'\in d$ соответствует вся прямая d, а точке $B'\in\overline{d}$ – прямая $\overline{d}$. Таким образом, прямые d и $\overline{d}$ в рассматриваемых плоскостях α_i являются *F*– прямыми второго вида, соответственными сами себе с нарушением однозначности. Всего таких прямых имеем $2(n_1-1)$.

В итоге суммарный порядок собственных *F*– кривых второго вида равен

$$2n_2+2(n_1-1)=2(n_1+n_2-1),$$

а суммарный порядок собственных *F*– кривых первого и второго вида равен

$$2(n_1+n_2)+2(n_1+n_2-1)=4(n_1+n_2)-2,$$

что соответствует вычислительному ранее суммарному порядку собственных составляющих *F*– кривой. Таким образом, найдена вся *F*– и *P*– системы рассматриваемого центрального преобразования J_{n-n}.

Изученное преобразование использовано для моделирования технико–экономических показателей электрохимического окисления диацетон–сорбозы [5]. Оно также может быть применено при построении зависимостей типа «фактор–двасвойство».

Литература

1. Hudson H. Cremona transformations in plane and space. - Cambridge, 1921, - 433 с.
2. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
3. Яглом И.М. Геометрические преобразования. – М., ГИТТЛ, т.1, 1955, - 282 с., т.2., 1956, - 612 с.
4. Фурзиков С.А. Конструирование рациональной кубики с несобственной точкой возврата.//Труды 12 – ой международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению.– Нижний Новгород, 2002.– с. 104 –106.
5. Фурзиков С.А. Моделирование технико-экономических показателей процесса электрохимического окисления. // Актуальные вопросы обучения молодежи графическим дисциплинам. V Всероссийская научно-методическая конф., Рыбинск. 2003: Тез. докл.– Рыбинск, 2003. – с. 92–94.