УДК 531.38

Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью

Ай Мин Вин*, Темнов А. Н.**

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., д.5, г. Москва, 105005, Россия

**e-mail: ayeminwin84@gmail.com*

***e-mail: antt45@mail.ru*

Аннотация

Актуальность работы связана с возрастающим использованием криогенных жидкостей в ракетной космической технике. Непременным свойством криогенной (стратифицированной) жидкости является неоднородность температуры и плотности, наблюдаемые во всех режимах хранения и эксплуатации. В данной статье, в предположении отсутствия теплообмена с внешней средой, рассмотрена задача об устойчивости вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной идеальной стратифицированной жидкостью.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, устойчивость вращения, эллипсоидальная полость, собственные колебания, криогенная жидкость.

Введение

Задачи о движении твердых тел с полостями, заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью, являются достаточно изученными. Однако развитие современной техники и потребности практики в настоящее время ставят перед исследователями ряд новых вопросов динамики твердых тел, имеющих полости с жидкостью. Одной из таких проблем, требующей изучения, является задача о движении твердых тел с полостями, заполненными криогенной жидкостью. Вопросы устойчивости движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость, всегда привлекало внимание исследователей. В книге [1] рассматривалось движение твердого тела с полостью эллипсоидальной формы, заполненной идеальной жидкостью. Задача об устойчивости движения волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, была рассмотрена в работах [2, 3]. В работах [4-7] изучались вращательные движения тела с вязкой жидкостью. Ранее авторами [8, 9] была исследована задача о движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела. В данной статье представлена задача об устойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью. Полученное характеристическое уравнение рассматривается в следующих случаях: А) вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью, Б) вращение динамически симметричного твёрдого тела с однородной жидкостью, имеющего полость в виде эллипсоида вращения, В) вращение твёрдого тела со стратифицированной жидкостью. Приведены области неустойчивости твердого тела с однородной жидкостью в плоскости двух параметров, которая совпадает с результатами работы Докучаева [10]. В конце текста представлены области неустойчивости вращения твердого тела со стратифицированной жидкостью в различных случаях.

Формулировка краевой задачи.

Пусть твердое тело с эллипсоидальной полостью равномерно вращается вокруг неподвижной точки O, являющейся центром масс всей механической системы и находящейся на расстоянии l_0 от геометрического центра полости, расположенным на оси Ox_3.

Предположим, что угловая скорость вращения $(\omega_0 = const)$ в невозмущенном движении удовлетворяет условию $\omega_0^2 \dfrac{\ell}{g} \ll 1$, ($\ell$ – характерный размер) и, следовательно, можно считать $\Pi_0 = U_0 = jx_3$, т.е. будем пренебрегать центробежными силами инерции, действующими на частицы жидкости. Используем двойное приближение Буссинеска [11]: $\rho_0 = \rho_0^* = const$ в уравнениях движения, для вычисления функций ρ, $\vec{u}$. С учетом сделанных допущений уравнения возмущённого движения криогенной жидкости запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \dot{\vec{\Omega}} \times r = -\nabla p + {}^{\rho}\!\big/_{\rho_0^*} \nabla \Pi_0; \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d\rho_0}{dx_3} \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 0; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S. \end{aligned} \qquad (1)$$

где $p = \rho_0^{*-1} \delta p + S, \quad S = \omega_0 \left[\Omega_1 x_3 x_1 + \Omega_2 x_3 x_2 - \Omega_3 \left(x_1^2 + x_2^2 \right) \right],$

Для изучения волновых движений жидкости предположим, что все величины Ω, p, u, ρ зависит от времени пропорционально множителю $e^{\lambda t}$. Уравнения гидродинамики тогда могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} &\lambda \vec{u} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} + \lambda \vec{\Omega} \times r = -\nabla p + \rho \big/ \rho_0^* \nabla \Pi_0; \\ &\lambda \rho + \rho_0' \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 0; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad \vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = 0 \quad \text{на } S. \end{aligned} \tag{2}$$

Введём линейное преобразование [8]:

$$L \cdot \vec{a} = \vec{a} + \left(\vec{a} \times \vec{e}_3 \right) \chi - \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \left(\vec{e}_3 \cdot \vec{a} \right); \tag{3}$$

где $\chi = \dfrac{2\omega_0}{\lambda}$, $\quad N^2 = -\dfrac{g}{\rho_0^*} \dfrac{d\rho_0}{dx_3}$, N^2 - частота плавучести, $\vec{a}$ - произвольный вектор и тензор L запишется в виде

$$L = \begin{vmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1+\chi^2}{N^2 + \lambda^2} \lambda^2 \end{vmatrix}$$

Тогда вектор относительной скорости запишется в виде

$$\vec{u} = -\frac{1}{\left(1 + \chi^2\right)\lambda} L \cdot \vec{g}; \tag{4}$$

где $\vec{g} = \lambda \vec{\Omega} \times r + \nabla p;$

используя уравнение неразрывности и граничные условия, получаем краевую задачу для определения функции $p(x)$

$$\nabla \cdot \left(L \cdot \vec{g} \right) = 0; \quad \nu \cdot \left(L \cdot \vec{g} \right) = 0 \quad на\ S. \tag{5}$$

Таким образом, в рассматриваемом общем случае удается свести гидродинамическую задачу (1) к краевой задаче математической физики для функции p. Имея решение задачи (5), поле скоростей неоднородной жидкости легко находится по формуле (4). Следуя [12], решение задачи (5) будем искать в виде:

$$p = -\lambda \sum_{j=1}^{3} \Omega_j \varphi_j; \quad \vec{u} = \frac{\lambda^2}{1+\chi^2} \sum_{j=1}^{3} \Omega_j L \cdot \left(\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \tag{6}$$

Тогда краевая задача (5) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & div\left[L \cdot \left(\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \right] = 0 \ в\ \tau, \quad j = 1,2,3... \\ & \vec{n} \cdot \left[L \cdot \left(\nabla \varphi_j - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \right] = 0 \ на\ S. \end{aligned} \tag{7}$$

Сформулируем краевые задачи для определения обобщенных потенциалов φ_j в случае, когда эллипсоидальная полость целиком заполнена неоднородной вращающейся жидкостью, плотность которой в невозмущенном движении изменяется по закону $\rho_0 = \rho_0^* \left(1 - \beta x_3 \right)$. Краевые задачи для определения функций φ_j в условиях двойного приближения Буссинеска принимают вид:

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi_j+\sigma^2\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_3^2}=2\chi\delta_{j3};\quad j=1,2,3;\\&\vec{n}\cdot\left[L\cdot\left(\nabla\varphi_j-\vec{e}_j\times\vec{r}\right)\right]=0\ на\ S.\end{aligned}\tag{8}$$

где $\sigma^2=\dfrac{4\omega_0^2-N^2}{N^2+\lambda^2}$, δ_{j3} – символ Кронекера.

Непосредственной проверкой можно установить, что при $N^2=0$ краевая задача (7) совпадает с краевой задачей для однородной вращающейся жидкости, а функции φ_j превращаются в обобщенные потенциалы Ф. Л. Черноусько. При $N=\omega_0=0$ оператор L становится единичным и функции φ_j будут являться потенциалами Жуковского [13]. Соблюдая терминологию, сложившуюся в работах по вращающейся жидкости, будем называть функции φ_j задачи (7) обобщенными потенциалами движения неоднородной $\left(\omega_0=0\right)$ или вращающейся неоднородной $\left(\omega_0\neq 0\right)$ жидкости.

Преобразование интегралов, выражающих гидродинамическое влияние жидкости

Определив обобщённые потенциалы φ_j, оценим влияния стратифицированной (криогенной) жидкости на движение системы тело жидкость. Уравнения возмущённого движения твёрдого тела с жидкостью приобретают вид

$$J\dot{\vec{\Omega}}+\int\limits_\tau\rho_0\vec{r}\times\dot{\vec{u}}d\tau+\vec{\omega}_0\times J\cdot\vec{\Omega}+\int\limits_\tau\dot{\rho}\left(\vec{r}\times\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)d\tau+\vec{\Omega}\times J\cdot\vec{\omega}_0+\int\limits_\tau\rho_0\vec{\omega}_0\times\vec{r}\times\vec{u}d\tau=\int\limits_\tau\rho\vec{r}\times\vec{j}d\tau,\tag{9}$$

где $J_{jk}=J_{jk}^0+J'_{jk}$; $\left(J_{jk}=J_{kj};\quad j,k=1,2,3\right)$.

здесь J_{jk}^{0} - моменты инерции твёрдого тела, J'_{jk} - момент инерции затвердевшей жидкости.

В уравнение (9) слагаемые с интегралами по области, после определения потенциалов φ_j могут быть записаны в виде

$$\int_\tau \rho_0 \vec{r}\times\vec{u}\,d\tau = \int_\tau \left\{ \rho_0 \vec{r}\times \frac{1}{1+\chi^2}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j \cdot \vec{L}\cdot\left(\nabla\varphi_j - \vec{e}_j\times\vec{r}\right)\right\} d\tau = I^{(1)}\cdot\vec{\Omega} = \sum_{j,k=1}^{3}\vec{e}_j I_{jk}^{(1)}\Omega_k; \qquad (10)$$

где

$$I_{jk}^{(1)} = \frac{1}{1+\chi^2}\int_\tau \rho_0\left(\vec{r}\times\vec{e}_j\right)\cdot\left[\vec{L}\cdot\left(\nabla\varphi_k - \vec{e}_k\times\vec{r}\right)\right]d\tau. \qquad (11)$$

Далее преобразуем интеграл $\int_\tau \dot{\rho}\left(\vec{r}\times\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)d\tau$

$$\dot{\rho} = -\rho_0'\vec{u}\cdot e_3 = -\rho_0'\frac{\vec{e}_3}{1+\chi^2}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j\cdot\vec{L}\cdot\left(\nabla\varphi_j - \vec{e}_j\times\vec{r}\right) = -\rho_0'\frac{\lambda^2\vec{e}_3}{N^2+\lambda^2}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j\cdot\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_3}\vec{e}_3 - \vec{e}_j\times\vec{r}\right);$$

$$\begin{aligned}
\int_\tau \dot{\rho}\left(\vec{r}\times\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)d\tau &= -\int_\tau \rho_0'\frac{\lambda^2\vec{e}_3}{N^2+\lambda^2}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j\cdot\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_3}\vec{e}_3 - \vec{e}_j\times\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)d\tau = \\
&= -\omega_0\int_\tau \rho_0'\frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2}\sum_{j=1}^{3}\Omega_j\vec{e}_3\cdot\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_3}\vec{e}_3 - \vec{e}_j\times\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{e}_3\times\vec{r}\right)d\tau = \\
&= -\omega_0\int_\tau \rho_0'\frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2}\sum_{j=k=1}^{3}\Omega_j\vec{e}_3\cdot\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_3}\vec{e}_3 - \vec{e}_j\times\vec{r}\right)\left(\vec{r}\times\vec{e}_3\times\vec{r}\right)_k\vec{e}_k\,d\tau;
\end{aligned}$$

$$\int_\tau \dot{\rho}\left(\vec{r}\times\vec{\omega}_0\times\vec{r}\right)d\tau = I^{(2)}\cdot\vec{\Omega}\cdot\omega_0 = \omega_0\sum_{j=k=1}^{3}\vec{e}_k I_{jk}^{(2)}\Omega_j \qquad (12)$$

где

$$I_{kj}^{(2)} = -\int_\tau \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2} \vec{e}_3 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r} \right)_k d\tau; \tag{13}$$

или

$$I_{kj}^{(2)} = -\int_\tau \rho_0' \frac{1}{1+\chi^2} \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \times \vec{r} \right)_k \cdot \vec{e}_3 \left[\vec{e}_3 \cdot \vec{L} \cdot \left(\nabla \varphi_j - e_j \times \vec{r} \right) \right] d\tau. \tag{14}$$

Преобразуем интеграл $\int_\tau \rho \left(r \times j \right) d\tau$

$$\int_\tau \rho \left(\vec{r} \times \vec{j} \right) d\tau = -\int_0^t \left\{ \int_\tau \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \sum_{j=1}^{3} \Omega_j \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \left(\vec{r} \times \vec{j} \right) d\tau \right\} dt =$$

$$= -\int_\tau \rho_0' g \frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2} \sum_{j=1}^{3} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times \vec{r} \right) \left(\vec{r} \times \vec{\varphi}_3 \right) d\tau =$$

$$= -\int_\tau \rho_0' N^2 \frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2} \sum_{j=k=1}^{3} \vec{e}_k \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - e_j \times r \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \right)_k d\tau =$$

$$= -4\omega_0^2 \int_\tau \rho_0^* \frac{N^2}{4\omega_0^2} \frac{\lambda^2}{N^2+\lambda^2} \sum_{j=k=1}^{3} \vec{e}_k \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - e_j \times r \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \right)_k d\tau;$$

В результате преобразования получим формулу

$$\int_\tau \rho \left(\vec{r} \times \vec{j} \right) d\tau = 4\omega_0^2 I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = 4\omega_0^2 \sum_{j=k=1}^{3} \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right), \tag{15}$$

которая также может быть записана в виде

$$\int_\tau \rho \left(\vec{r} \times \vec{j} \right) d\tau = g I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = g \sum_{j=k=1}^{3} \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \tag{16}$$

или

$$\int_{\tau} \rho\left(\vec{r} \times \vec{j}\right) d\tau = N^2 I_3^{(3)} \int_0^t \vec{\Omega} dt = N^2 \sum_{j=k=1}^{3} \vec{e}_k I_{kj}^{(3)} \left(\int_0^t \Omega_j dt \right) \tag{17}$$

В формулах (15)-(17) приняты соответственно обозначения:

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0^* \frac{N^2}{4\omega_0^2} \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \right)_k d\tau \tag{18}$$

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0' \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \right)_k d\tau \tag{19}$$

$$I_{kj}^{(3)} = \int_{\tau} \rho_0^* \frac{\lambda^2}{N^2 + \lambda^2} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_3} \vec{e}_3 - \vec{e}_j \times r \right) \left(\vec{r} \times \vec{e}_3 \right)_k d\tau \tag{20}$$

Будем использовать 2-ую формулу:

$$\int_{\tau} \rho\left(r \times j \right) d\tau = g I^{(3)} \cdot \int_0^t \vec{\omega} dt; \quad F_r^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2};$$

Собственные колебания вращающегося тела с жидкостью.

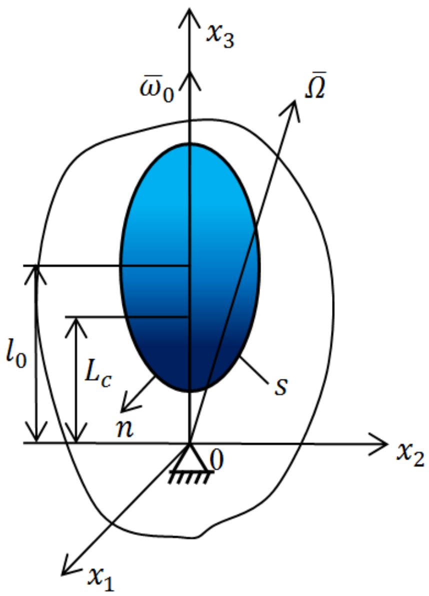

Рис. 1. Твердое тело с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной жидкостью

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях свободного вращающегося твердого тела с криогенной жидкостью около стационарного вращения (см. Рис. 1). Момент внешних сил относительно точки O примем равным нулю ($\bar{M} = 0$, тело свободно и точка O совпадает с центром масс твёрдого тела с затвердевшей жидкостью), и пусть ось вращения Ox_3 является главной осью инерции системы. Тогда будут выполняться равенства

$$J_{3j} = J_{j3} = 0 \quad (j = 1,2); \quad \bar{J} \cdot \bar{\omega}_0 = J_{33}\omega_0\bar{e}_3; \quad \bar{\omega}_0 \times \bar{J} \cdot \bar{\omega}_0 = 0. \tag{21}$$

Считая $\bar{M} = 0$ получаем следующее уравнение возмущённого движения вращающегося твёрдого тела с полостью, целиком наполненной несжимаемой стратифицированной (криогенной) жидкостью, и находящегося в однородном поле массовых сил интенсивности j

$$\left(J_0 + I_0^{(1)}\right) \cdot \dot{\vec{\Omega}} + \omega_0 \vec{e}_3 \times \left[\left(J_0 + I_0^{(1)}\right) \cdot \vec{\Omega} - J_{33}\vec{\Omega}\right] + \omega_0 I_0^{(2)} \cdot \vec{\Omega} + jI_0^{(3)} \cdot \int \vec{\Omega} dt = 0. \tag{22}$$

Будет считать отклонения твёрдого тела от оси невозмущённого вращения твёрдого тела малыми величинами и введем вектор малых углов поворота $\vec{\Theta}(t)$

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Theta}}{dt}$$

Тогда уравнение (22) запишется в виде

$$\left(J_0 + I_0^{(1)}\right) \cdot \ddot{\vec{\Theta}} + \omega_0 \vec{e}_3 \times \left[\left(J_0 + I_0^{(1)}\right) \cdot \dot{\vec{\Theta}} - J_{33}\dot{\vec{\Theta}}\right] + \omega_0 I_0^{(2)} \cdot \dot{\vec{\Theta}} + jI_0^{(3)} \cdot \vec{\Theta} = 0. \tag{23}$$

Положив $\vec{\Theta} = \vec{\theta} e^{\lambda t}$, запишем уравнение (23) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} q^2K_{11}-\frac{q}{2}\left(K_{21}+I_{11}^{(2)}\right)+F_r{}^2I_{11}^{(3)} & q^2K_{12}-\frac{q}{2}\left(K_{22}+I_{12}^{(2)}-J_{33}\right)+F_r{}^2I_{12}^{(3)} & q^2K_{13}-\frac{q}{2}K_{23} \\ q^2K_{21}+\frac{q}{2}\left(K_{11}-I_{21}^{(2)}-J_{33}\right)+F_r{}^2I_{21}^{(3)} & q^2K_{22}+\frac{q}{2}\left(K_{12}-I_{22}^{(2)}\right)+F_r{}^2I_{22}^{(3)} & q^2K_{23}+\frac{q}{2}K_{13} \\ q^2K_{31} & q^2K_{32} & q^2K_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=0 \qquad (24)$$

В уравнении (24) приняты обозначения

$$K_{jk}=J_{jk}+I_{jk}^{(1)}; \quad q=\frac{\lambda}{2\omega_0}, \quad F_r{}^2=\frac{N^2}{4\omega_0^2}.$$

Составив определитель линейной однородной системы (относительно компонент вектора $\vec{\theta}$) и приравнивая определитель нулю, получим характеристическое уравнение.

$$F\left(q,a_1,a_2,a_3,J_{jk},\beta\right)=0 \qquad (25)$$

В полученном уравнении компоненты J_{jk} - постоянные, а $I_{jk}^{(1)},I_{jk}^{(2)},I_{jk}^{(3)}$ есть функции q, зависящие от формы полости. Корни q уравнения (25) определяют собственные числа $\lambda=2\omega_0 q$ задачи о колебаниях вращающегося тела с жидкостью. Рассмотрим уравнение (25) в некоторых случаях.

Случай отсутствия массы жидкости

В случае твердого тела без жидкости, т.е. при $\rho_0\left(x_3\right)=0$, уравнение (24) сводится к квадратному

$$\left[\left(J_{33}^0-J_{11}^0\right)\left(J_{33}^0-J_{22}^0\right)-\left(J_{12}^0\right)^2\right]+4q^2\left(J_{11}^0J_{22}^0-\left(J_{12}^0\right)^2\right)=0. \qquad (26)$$

Свободный член уравнения (26) положителен, так как тензор инерции $\bar{J}$ - положительно определенный тензор. Для устойчивости вращения необходимо, чтобы q было чисто мнимым, а для этого нужно

$$\left(J_{33}^{0}-J_{11}^{0}\right)\left(J_{33}^{0}-J_{22}^{0}\right)\geq\left(J_{12}^{0}\right)^{2}. \qquad (27)$$

Неравенство (27) известное условие устойчивости стационарного вращения свободного твердого тела. Если оси y_1, y_2 являются главными центральными осями инерции, тогда $J_{12}^{0}=0$, и условие (27) сводится к требованию, чтобы момент инерции J_{33}^{0} был либо наибольшим, либо наименьшим главным центральным моментом инерции системы. Корни уравнения (26) при $J_{12}^{0}=0$ равны

$$q_{1,2}^{0}=\pm 0.5i\left(J_{11}^{0}J_{22}^{0}\right)^{-1/2}\left[\left(J_{33}^{0}-J_{11}^{0}\right)\left(J_{33}^{0}-J_{22}^{0}\right)\right]^{1/2}. \qquad (28)$$

Вращение твердого тела с затвердевшей жидкостью

В этом случае относительное движение жидкости отсутствует, центр масс жидкости относительно твердого тела не изменяет своего положения, и моменты инерции все механической системы $J_{jk}=J_{jk}^{0}+J'_{jk}$ также остаются постоянными, поэтому предыдущий вывод остается справедливым: вращение твёрдого тела с затвердевшей жидкостью будет устойчиво вокруг оси с наибольшим или наименьшим главным центральным моментом инерции системы.

Вращение твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость целиком заполненную однородной жидкостью

В этом случае тензоры $I_0^{(2)}$, $I_0^{(3)}$, характеризующие влияние отклонения плотности жидкости от невозмещённого состояния равны нулю и устойчивость вращения твердого тела оказывается зависимым от кинематического состояния самой жидкости, которое может быть безвихревым (в случае начало раскручивания жидкости, при вращательном движении твёрдого тела) или вихревым в случая вращения всей массы жидкости. Покажем, что в последнем случае характеристическое уравнение и условия устойчивости вращения твердого тела, получаемые при помощи определителя (24) согласуются с уравнением и условиями устойчивости, полученными раннее в других работах и иными способами [10].

Подставляя в уравнение (25) значения компонент тензора $I_0^{(1)}$ при $N^2 = 0$, получим после раскрытия определителя и алгебраических преобразований

$$A_1 q^4 + A_2 q^2 + A_3 = 0; \tag{29}$$

где $A_1 = 4\left(a_1^2 + a_3^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2\right)a_1^{-2}a_2^{-2}\left(J_{11}^* J_{22}^* - J_{12}^2\right);$

$$A_2 = \left(a_1^2 + a_3^2\right)\left(a_2^2 + a_3^2\right)a_1^{-2}a_2^{-2}\left[\left(J_{33} - J_{11}^*\right)\left(J_{33} - J_{22}^*\right) - J_{12}^*\right] + 4\left(J_{11}J_{22} - J_{12}^2\right) - 4\rho^*\gamma a_3^2 J_{33};$$

$$A_3 = \left(J_{33} - J_{11}\right)\left(J_{33} - J_{22}\right) - J_{12}^2;$$

$$J_{11}^* = J_{11} - \frac{\rho^* V_{эл} 4a_2^2 a_3^2}{5\left(a_2^2 + a_3^2\right)}; \quad J_{22}^* = J_{22} - \frac{\rho^* V_{эл} 4a_1^2 a_3^2}{5\left(a_1^2 + a_3^2\right)}.$$

где $\gamma = {}^{4}\!/_{5} V_{эл}$ и J_{11}^{*}, J_{22}^{*} моменты инерции преобразованного тела (согласно Н. Е. Жуковскому), равные сумме моментов инерции твердого и эквивалентного тел.

$$J_{11}^{*} = J_{11}^{0} + J_{11}^{(э)}; \quad J_{22}^{*} = J_{22}^{0} + J_{22}^{(э)}.$$

$$J_{11}^{(э)} = \frac{\rho^{*} V_{эл} \left(a_2^2 - a_3^2\right)^2}{5\left(a_2^2 + a_3^2\right)}; \quad J_{22}^{(э)} = \frac{\rho^{*} V_{эл} \left(a_3^2 - a_1^2\right)^2}{5\left(a_3^2 + a_1^2\right)}$$

Величина J_{11}^{*} (и аналогично J_{22}^{*}) может быть представлена также в виде

$$J_{11}^{*} = J_{11} - \left(J_{11}' - J_{11}^{(э)}\right), \quad J_{11} = J_{11}^{0} + J_{11}'$$

Из биквадратного уравнения (29) легко найти q

$$q_{12} = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_3 A_1}}{2A_1}.$$

Для устойчивости движения необходимо, чтобы все корни уравнения (29) были чисто мнимыми (при $A_1 \geq 0$), т.е. $A_3 \geq 0; \quad A_2 \geq 2\sqrt{A_1 A_3}$.

Для динамического симметричного твердого тела ($J_{11}^{0} = J_{22}^{0}, \quad J_{12}^{0} = 0$), имеющего полость в виде эллипсоида вращения ($a_1 = a_2$), ось которого совпадает с осью динамической симметрии тела $O_1 y_3$, уравнения (29) преобразуется к виду

$$A_4 \sigma^2 - A_5 \sigma - A_6 = 0, \quad q = \pm i\sigma; \tag{30}$$

где $A_4 = 2\left(a_1^2 + a_3^2\right) a_1^{-2} J_{11}^{0}; \quad A_5 = \left(a_1^2 + a_3^2\right) a_1^{-2} \left(J_{33} - J_{11}^{0}\right) - 2J_{21}; \quad A_6 = J_{33} - J_{11}$.

Для устойчивости вращения в этом случае необходимо потребовать, чтобы корни уравнения (30) были действительными числами, т.е. чтобы выполнялось условие

$$A_5^2 + 4A_4A_6 \geq 0. \qquad (31)$$

Подставив выражения для коэффициентов $A_j \left(j = 4,5,6 \right)$ и приравняв нулю полученное уравнение, можно построить область устойчивости в плоскости двух параметров $y = J_{33} - J_{11}$, $\bar{a}_3 = a_3/a_1$ (см. Рис. 2), которая совпадает с результатами работы [10]. Пунктирная линия представляет собой границу на плоскости параметров y, $\bar{a}_3$ физически возможных значений моментов инерции тела жидкостью. Поэтому область под этой линий должно быть исключена из рассмотрения [10]. Для случая, когда масса твёрдого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой жидкости, точки пересечения пунктирной линии с нижней границей $\bar{a}_3 = 1$, $\bar{a}_3 = 3$ дают границы устойчивости свободного вращения, невесомой оболочки с жидкостью. Области устойчивости приведены на Рис. 2 (зоны неустойчивости заштрихованы).

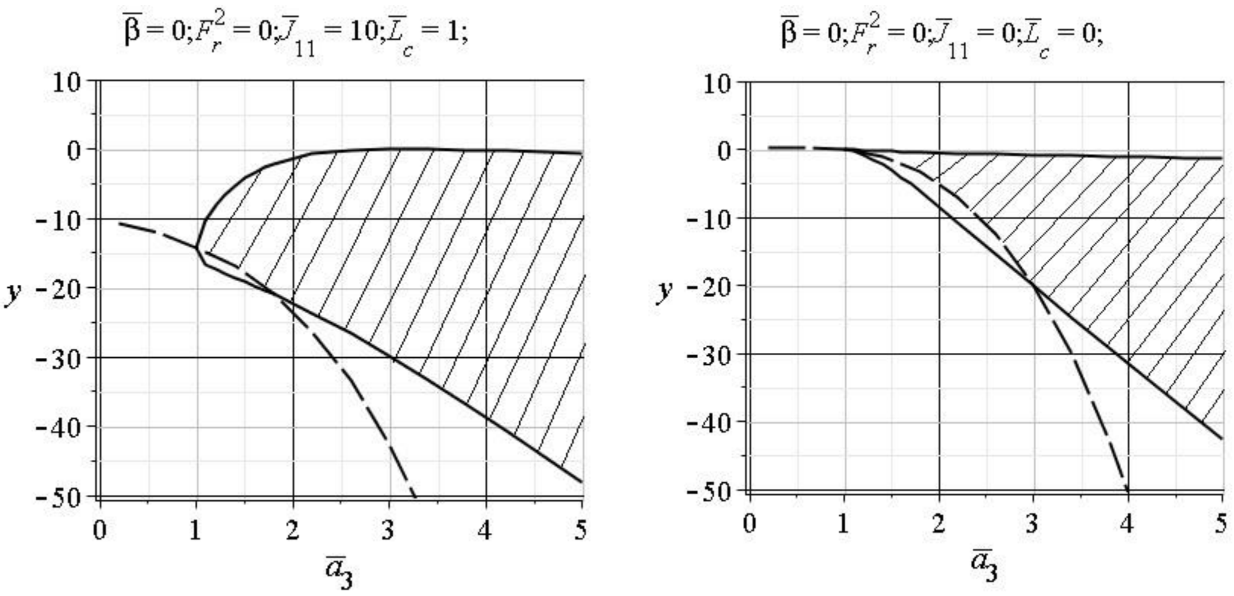

Рис. 2. Области устойчивости в плоскости двух параметров $y, \overline{a}_3$

Вращение твердого тела со стратифицированной жидкостью

Выясним условия устойчивости вращения динамическим симметричного тела твёрдого тела с эллипсоидальной полостью вращения. Для рассматриваемого случая положим $\lambda = i\omega$ и пусть $q = \dfrac{\omega}{2\omega_0}$. Тогда первые два уравнения из матричной записи (24) перепишутся в виде

$$\begin{pmatrix} q^2K_{11} + i\dfrac{q}{2}\left(K_{21} + I_{11}^{(2)}\right) + F_r^2 I_{11}^{(3)} & q^2K_{12} + i\dfrac{q}{2}\left(K_{22} + I_{12}^{(2)} - J_{33}\right) + F_r^2 I_{12}^{(3)} \\ q^2K_{21} - i\dfrac{q}{2}\left(K_{11} - I_{21}^{(2)} - J_{33}\right) + F_r^2 I_{21}^{(3)} & q^2K_{22} - i\dfrac{q}{2}\left(K_{12} - I_{22}^{(2)}\right) + F_r^2 I_{22}^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (32)$$

Умножим верхнее уравнение векторного равенства (32) на мнимую единицу и сложим со вторым уравнением системы (32). В результате после простых преобразований получим

$$\theta\left[q^2\left(K_{11}+\bar{K}_{12}\right)-\frac{q}{2}\left(K_{11}+\bar{K}_{12}-J_{33}\right)+\frac{q}{2}\bar{I}_{11}^{(2)}+F_r{}^2 I_{22}^{(3)}+F_r{}^2 I_{12}^{(3)}+\frac{q}{2}\omega_0 I_{21}^{(2)}\right]=0 \tag{33}$$

где $\theta = i\theta_1 + \theta_2$.

Подставив в уравнение (33) значения компонент тензоров $I_{jk}^{(1)}, I_{jk}^{(2)}, I_{jk}^{(3)}$, получим после громоздких и несложных преобразований характеристическое уравнение, записанное в безразмерном виде

$$\begin{aligned}&2q^3\left[\bar{J}_{11}\left(1+\bar{a}_3^2\right)-\bar{\gamma}\alpha\bar{a}_3^2\right]+q^2\left[\Delta\left(1+\bar{a}_3^2\right)-2\bar{J}_{11}+\bar{\gamma}\alpha^*\bar{a}_3^2\right]-\\&-q\left[2\bar{J}_{11}\bar{a}_3^2F_r^2+\bar{\Delta}-\bar{\gamma}\bar{a}_3^2F_r^2\right]-\bar{\Delta}\bar{a}_3^2F_r^2=0;\end{aligned} \tag{34}$$

где $\bar{J}_{11}=\dfrac{J_{11}}{\rho_0^* d a_1^5}$; $\bar{\Delta}=\dfrac{\Delta}{\rho_0^* d a_1^5}$; $\Delta = J_{33}-J_{11}$; $\bar{\gamma}=\dfrac{16}{15}\pi\bar{a}_3$; $\bar{a}_3=\dfrac{a_3}{a_1}$; $\alpha = 1-\dfrac{3}{2}\dfrac{\beta}{d}l_0$;

$\alpha^* = 1-2\dfrac{\beta}{d}l_0$; $d = 1-\beta l_0$.

Для устойчивости стационарного вращения (необходимое условие) все корни уравнения (34) должны быть действительными. Для кубического уравнения $b_0q^3+b_1q^2+b_2q+b_3=0$ корни будут действительными, если дискриминант $D<0$, где

$$D=-b_1^2b_2^2+27b_3^2b_0^2+4b_1^3b_3-18b_0b_1b_2b_3+4b_0b_2^3.$$

Границу, разделяющую действительные и комплексные корни, получим из уравнения $D=0$.

В выражении для дискриминанта D коэффициенты b_k, $k = 0,1,2,3$ выражаются формулами

$$b_0 = 2\left[\bar{J}_{11}\left(1+\bar{a}_3^2\right) - \bar{\gamma}\alpha\bar{a}_3^2\right] \qquad b_1 = \Delta\left(1+\bar{a}_3^2\right) - 2\bar{J}_{11} + \bar{\gamma}\alpha^*\bar{a}_3^2$$

$$b_2 = -\left[2\bar{J}_{11}\bar{a}_3^2 F_r^2 + \bar{\Delta} - \bar{\gamma}\bar{a}_3^2 F_r^2\right] \qquad b_4 = -\bar{\Delta}\bar{a}_3^2 F_r^2$$

Рассмотрим устойчивость вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью в условиях невесомости. Положим $j = 0$, $N^2 = 0$, т.е. $F_r^2 = 0$, тогда компоненты тензора $I_0^{(1)}$ будут совпадать с компонентами тензора $I_0^{(1)}$ для однородной жидкости, а компоненты тензора $I_0^{(2)}$, учитывающего изменения плотности жидкости, выразятся формулами.

$$I_{11}^{(2)} = \frac{\rho_0^*\gamma\chi\beta^2}{2d\Delta^*}; \quad I_{22}^{(2)} = I_{11}^{(2)};$$

$$I_{12}^{(2)} = \frac{-\rho_0^*\gamma\chi\left(a_2^2 + a_3^2\right)\beta^2}{2d\Delta^* a_2^2}; \quad I_{21}^{(2)} = \frac{-\rho_0^*\gamma\chi\left(a_1^2 + a_3^2\right)\beta^2}{2d\Delta^* a_1^2};$$

Дискриминант кубического уравнения оказывается равным дискриминанту с обратным знаком, соответствующего квадратного уравнения, получаемого из (34) при $F_r^2 = 0$.

$$D = -D_2, \quad D_2 = b_1^2 - 4b_0 b_3$$

Приравнять $D_2 = 0$, также можно получить области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью. Для случае безмассовой оболочки твёрдого тела области устойчивости для разных β приведены на Рис. 3.

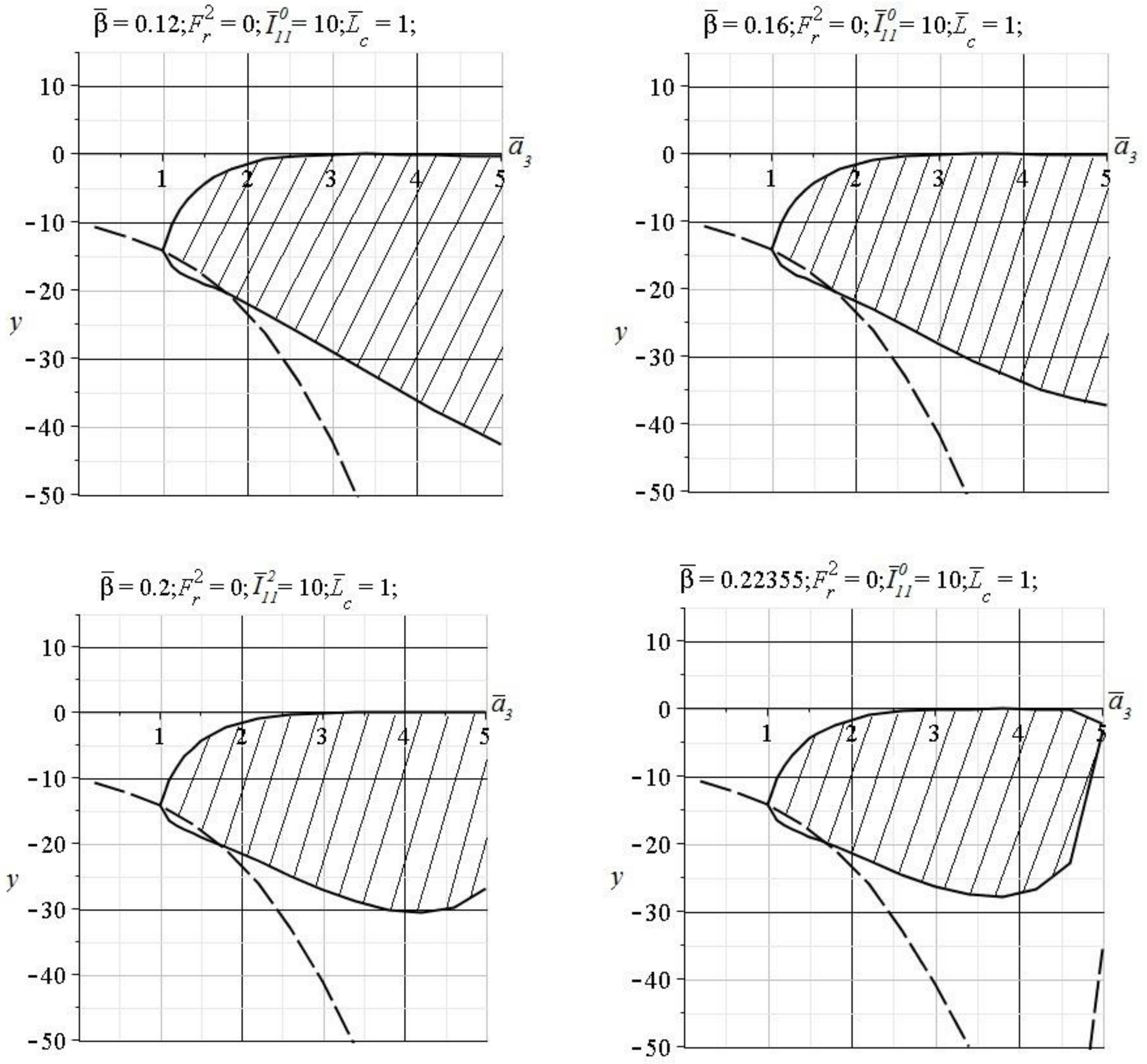

Рис. 3. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью $\left(F_r^2 = 0\right)$

Исследуем далее устойчивость вращение твёрдого тела с криогенной жидкостью в случае $F_r^2 \neq 0$. С этой целью положим $D_2 = 0$ и заменив коэффициенты b_k, $k = 0,1,2,3$ через их значения построим области устойчивости, которые представлены на Рис. 4.

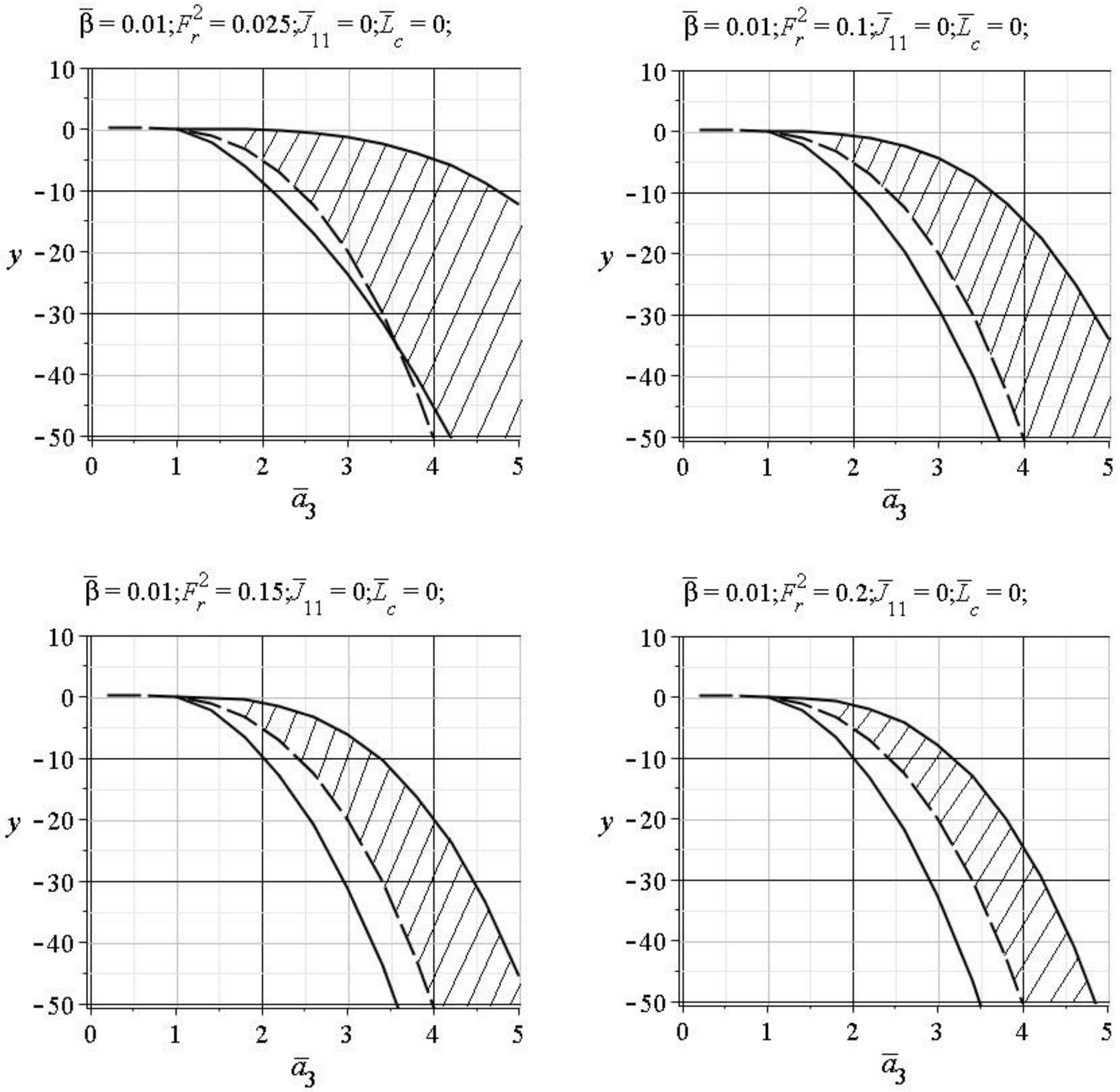

Рис. 4. Области устойчивости вращательного движения твёрдого тела с криогенной жидкостью $\left(F_r^2 \neq 0\right)$

Заключение

В статье представлены области неустойчивости вращения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью, при вращении вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы. Рассмотрены различные случаи: а) случай невесомости, но с учетом инерции твёрдого тела, б) случай с учётом действия внешних массовых сил, но когда момент инерции твёрдого тела равен нулю, либо не равняется нулю. Устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твердого тела с эллипсоидной полостью целиком наполненной жидкостью. Результаты решения показывают также, что в случае эллипсоидальной полости гидродинамическое воздействие стратифицированной жидкости создается конечным числом парциальных движений, число которых больше, чем для однородной вращающейся жидкости.

Библиографический список

1. Моисеев Н.К., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями содержащими жидкость. – М.: Наука, 1966. – 440 с.

2. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Журнал прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 65-75.

3. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журнал прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 20-55.

4. Казмерчук И.М., Самсонов В.А. О квазистационарных движениях волчка с жидким наполнением. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1996. № 2. С. 32-36.

5. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем. // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. № 3. С. 427-433.

6. Карапетян А.В., Лагутина И.С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 53-57.

7. Карапетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С. Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений твердого тела с жидким наполнением // Прикладная математика и механика. 2004. Т.68. №6. С. 994-998.

8. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012. С. 86-101.

9. Ай Мин Вин, Темнов А. Н. О движении твёрдого тела с криогенной жидкостью // Электронный журнал « Наука и образование», 2013, выпуск № 12: http://technomag.bmstu.ru/doc/627898.html (дата публикации 04.12.2014).

10. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Механика твердого тела. 1973. № 2. С. 6-14.

11. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: дис…канд. физ. мат. наук. – М:. 1984.- 192 с.

12. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. - М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. - 232 с.

13. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – М.: Гостехиздат, 1948. - 143 с.