
УДК 539.3:534.1

Нелинейная задача динамического изгиба стержня после потери устойчивости

И.Н. Воробьев, Т.В. Гришанина

Аннотация

Решена плоская задача о динамическом поведении упругого стержня, нагруженного статическими силами, вызывающими его потерю устойчивости. Для решения нелинейной задачи использовался метод конечных элементов. Рассмотрены примеры динамического поведения стержня после потери устойчивости под действием сил тяжести.

Ключевые слова: конечная деформация; нелинейная динамика; устойчивость; метод конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Коды проектов 12-08-00577-а, 12-08-00590-а).

Введение

Гибкие стержневые системы, являющиеся расчетными моделями определенных элементов конструкций, могут совершать колебательные движения с амплитудами порядка их длин, как, например, разворачиваемые космические системы.

Для решения плоских задач динамики гибких стержневых систем при больших углах поворота и конечных упругих деформациях будем использовать метод конечных элементов (МКЭ) в геометрически нелинейной постановке. Применение метода конечных элементов для расчета нелинейных продольно-поперечных колебаний стержней рассмотрено в работах [1-3]. При учете продольных деформаций стержней получаются нелинейные уравнения сравнительно простой структуры.

Уравнения нелинейных колебаний

Рассмотрим плоскую стержневую систему, совершающую упругие колебания с большими амплитудами в своей плоскости. Уравнения колебаний будем составлять,

используя МКЭ в геометрически нелинейной формулировке. Для этого разделим стержневую систему на n балочных конечных элементов (КЭ), испытывающих конечные деформации изгиба, растяжения-сжатия и поперечного сдвига. С каждым КЭ свяжем свою подвижную систему координат $\xi\eta$, начало которой расположим на левом конце упругой оси, а ось η – в плоскости поперечного сечения деформированного стержня (рис. 1, а). Будем считать, что элемент неподвижно закреплен на левом краю: $\Delta u(0) = \Delta v(0) = \Delta \vartheta(0) = 0$. Обозначим через Δu_k , Δv_k , $\Delta \vartheta_k$ – продольное перемещение, поперечное перемещение и угол поворота поперечного сечения на правом краю КЭ, а через N_k , Q_k , L_k соответствующие им продольную силу, поперечную силу и изгибающий момент. Конечная деформация удлинения оси стержня равна $\varepsilon = u' + \frac{1}{2}v'^2$, а соответствующая растягивающая сила равна $N = EF_k \varepsilon$. Для гибкого стержня при конечных углах поворота ($\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$) $N \approx N_k$, и поэтому при $EF_k = \text{const}$ можно считать, что $\varepsilon = \text{const}$. При этом допущении, интегрируя выражение для ε с учетом $u(l_k) = \Delta u_k$, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{l_k} \left(\Delta u_k + \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \Delta v'^2 d\xi \right) \quad (1)$$

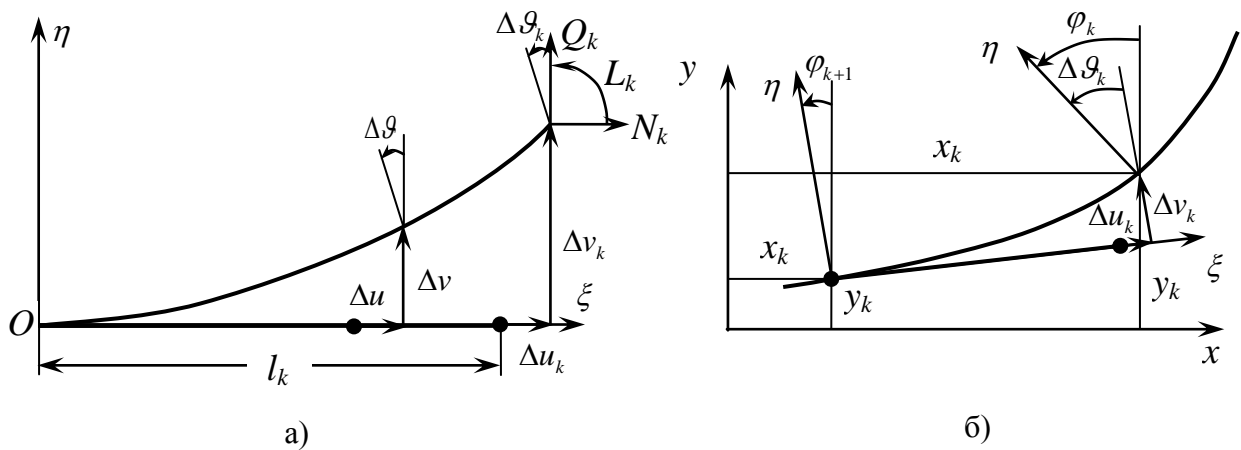


Рис. 1

Для поперечного перемещения и угла поворота в пределах длины КЭ будем использовать аппроксимацию

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta v_k \varphi(\xi) + \Delta \vartheta_k \psi(\xi); \\ \Delta \vartheta &= \Delta v_k \eta(\xi) + \Delta \vartheta_k \chi(\xi), \end{aligned} \quad (2)$$

представляющую точное решение квазистатической задачи изгиба – сдвига для стержня постоянного поперечного сечения без учета продольной силы (т.е. при $EI = \text{const}$, $GF_c = \text{const}$, $N = 0$). Здесь

$$\begin{aligned}
 \varphi(\xi) &= (1 - \kappa_k) \frac{\xi}{l_k} + 3\kappa_k \frac{\xi^2}{l_k^2} - 2\kappa_k \frac{\xi^3}{l_k^3}; \\
 \psi(\xi) &= -\frac{(1 - \kappa_k)}{2} \xi + \frac{(1 - 3\kappa_k)}{2} \frac{\xi^2}{l_k} + \kappa_k \frac{\xi^3}{l_k^2}; \\
 \eta(\xi) &= 6 \frac{\kappa_k}{l_k} \left(\frac{\xi}{l_k} - \frac{\xi^2}{l_k^2} \right); \\
 \chi(\xi) &= (1 - 3\kappa_k) \frac{\xi}{l_k} + 3\kappa_k \frac{\xi^2}{l_k^2}; \\
 \kappa_k &= \left(1 + \frac{12}{l_k^2} \frac{EI_k}{GF_{c,k}} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Если пренебречь поперечным сдвигом, положив $GF_{c,k} \rightarrow \infty$, то $\kappa_k = 1$.

Потенциальная энергия растяжения, изгиба и сдвига КЭ будет

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \left[EI_k \Delta \vartheta'^2 + GF_{c,k} (\Delta v' - \Delta \vartheta)^2 + EF_k \varepsilon^2 \right] d\xi$$

с учетом (1) – (2) она записывается в виде

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{l_k^3} \kappa_k \left[\Delta v_k^2 - l_k \Delta v_k \Delta \vartheta_k + \frac{1 + 3\kappa_k}{12\kappa_k} l_k^2 \Delta \vartheta_k^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{N_k^2 l_k}{EF_k}, \tag{4}$$

где

$$N_k = \frac{EF_k}{l_k} \left[\Delta u_k + \frac{1}{2l_k} \left(1 + \frac{\kappa_k^2}{5} \right) \Delta v_k^2 - \frac{\kappa_k^2}{10} \Delta v_k \Delta \vartheta_k + \frac{l_k}{24} \left(1 + \frac{3}{5} \kappa_k^2 \right) \Delta \vartheta_k^2 \right]. \tag{5}$$

Сила Q_k и момент L_k , соответствующие перемещению Δv_k и углу поворота $\Delta \vartheta_k$, определяются как

$$\begin{aligned}
 Q_k &= \frac{\partial \Pi_k}{\partial \Delta v_k} = b_k \Delta v_k - c_k \Delta \vartheta_k; \\
 L_k &= \frac{\partial \Pi_k}{\partial \Delta \vartheta_k} = -c_k \Delta v_k + d_k \Delta \vartheta_k,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{12\kappa_k EI_k}{l_k^3} + \frac{N_k}{l_k} \left(1 + \frac{\kappa_k^2}{5}\right); \\
c_k &= \frac{6\kappa_k EI_k}{l_k^2} + N_k \frac{\kappa_k^2}{10}; \\
d_k &= \frac{(1+3\kappa_k)EI_k}{l_k} + N_k \frac{l_k}{12} \left(1 + \frac{3}{5}\kappa_k^2\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

В коэффициентах жесткости b_k , c_k , d_k вторые нелинейные слагаемые учитывают влияние продольной силы (5), т.е. так называемой геометрической жесткости.

В качестве обобщенных координат будем рассматривать абсолютные перемещения x_k , y_k и углы поворота φ_k в узлах $k = 1, 2, \dots, n$ (рис. 1, б). Упругие перемещения Δu_k , Δv_k и угол поворота $\Delta \mathcal{G}_k$ выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta u_k &= (x_k - x_{k-1}) \cos \varphi_{k-1} + (y_k - y_{k-1}) \sin \varphi_{k-1} - l_k; \\
\Delta v_k &= -(x_k - x_{k-1}) \sin \varphi_{k-1} + (y_k - y_{k-1}) \cos \varphi_{k-1}; \\
\Delta \mathcal{G}_k &= \varphi_k - \varphi_{k-1},
\end{aligned} \tag{8}$$

Потенциальная энергия всей системы получается путем суммирования по всем элементам:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k. \tag{9}$$

Кинетическую энергию системы и вариацию работы внешних нагрузок запишем по методу сосредоточенных масс и сил, учитывая дополнительно приведенные к узлам моменты инерции и моменты внешних сил:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + J_k \dot{\varphi}_k^2 \right]; \\
\delta A_p &= \sum_{k=1}^n \left[X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + M_k \delta \varphi_k \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

где m_k и J_k приведенные к k -му узлу сосредоточенная масса и массовый момент инерции, а $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $M_k(t)$ – приведенные к k -му узлу внешние силы и момент.

Уравнения для обобщенных координат x_k , y_k , φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) на основании (9), (10) с учетом (4) – (8) записываются в виде

$$\begin{aligned}
m_k \ddot{x}_k + N_k \cos \varphi_{k-1} - N_{k+1} \cos \varphi_k - Q_k \sin \varphi_{k-1} + Q_{k+1} \sin \varphi_k &= X_k; \\
m_k \ddot{y}_k + N_k \sin \varphi_{k-1} - N_{k+1} \sin \varphi_k + Q_k \cos \varphi_{k-1} - Q_{k+1} \cos \varphi_k &= Y_k; \\
J_k \ddot{\varphi}_k + N_{k+1} v_{k+1} - Q_{k+1} (l_{k+1} + u_{k+1}) + L_k - L_{k+1} &= M_k; \\
(k = 1, \dots, n).
\end{aligned} \tag{11}$$

Пример расчета

В качестве примера рассмотрим консольно закрепленный вертикальный стержень прямоугольного сечения ($0.06\text{ м} \times 0.02\text{ м}$), с сосредоточенными массами m_k и моментами инерции J_k , находящийся под действием силы тяжести g (Рис. 2). Тогда в уравнениях (11) следует положить $X_k = -m_k g$, $Y_k = 0$, $M_k = 0$. Стержень разобьем на пять КЭ ($n = 5$) одинаковой длины $l_k = l$.

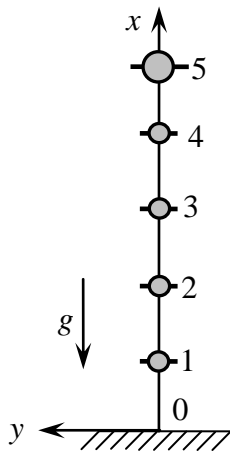


Рис. 2

Для расчета примем следующие параметры:
 $EI_k \rightarrow EI = 28 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$, $EF_k \rightarrow EF = 84 \cdot 10^6 \text{ Н}$ $EF_k \rightarrow EF$,
 $\kappa_k \rightarrow \kappa = 1$; $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 4 \text{ кг}$, $m_5 = 28 \text{ кг}$, 25 кг и 35 кг ;
 $J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0.25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_5 = 1.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $l = 1 \text{ м}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Критическое значение сжимающей силы на конце консольного стержня:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{4(5l)^2} = 276 \text{ Н}. \quad (12)$$

Вес массы на конце стержня: $G_5 = m_5 g$. Расчет был проведен для двух вариантов начальных условий.

В первом варианте были заданы следующие начальные условия при $t = 0$, соответствующие принудительно изогнутому 5-ому КЭ:

$$x_1 = 1\text{ м}, x_2 = 2\text{ м}, x_3 = 3\text{ м}, x_4 = 4\text{ м}, x_5 = (5 - 6 \cdot 10^{-3})\text{ м} \quad (\Delta u_5 = -6 \cdot 10^{-3} \text{ м});$$

$$y_1 = 0\text{ м}, y_2 = 0\text{ м}, y_3 = 0\text{ м}, y_4 = 0\text{ м}, y_5 = 0.1\text{ м} \quad (\Delta v_5 = 0.1 \text{ м});$$

$\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0.15$ ($\Delta \vartheta_5 = 0.15$); $\dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{\varphi}_k = 0$, при $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Во втором варианте были приняты начальные условия, соответствующие поперечному удару по массе m_5 :

$$x_k = y_k = \varphi_k = 0, \text{ при } k = 1, 2, 3, 4, 5; \dot{x}_k = \dot{y}_k = \dot{\varphi}_k = 0, \text{ при } k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\dot{x}_5 = 0, \dot{y}_5 = 0.1\text{ м/с}, \dot{\varphi}_5 = 0.$$

Для контроля устойчивости вычислительного процесса, в процессе интегрирования дифференциальных уравнений (11) определялась полная энергия стержня по отношению к

уровню $x = 0$. Полная энергия для консервативной системы должна оставаться постоянной, равной своему значению в начальный момент времени. Для данной стержневой системы полная энергия равна:

$$E = \Pi + T = \sum_{k=1}^5 \left\{ \frac{1}{2} \frac{12EI_k}{l_k^3} \kappa_k \left[\Delta v_k^2 - l_k \Delta v_k \Delta \vartheta_k + \frac{1+3\kappa_k}{12\kappa_k} l_k^2 \Delta \vartheta_k^2 \right] + \frac{N_k^2 l_k}{2EF_k} + m_k g x_k \right\} + \sum_{k=1}^5 [m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + J_k \dot{\varphi}_k^2]$$

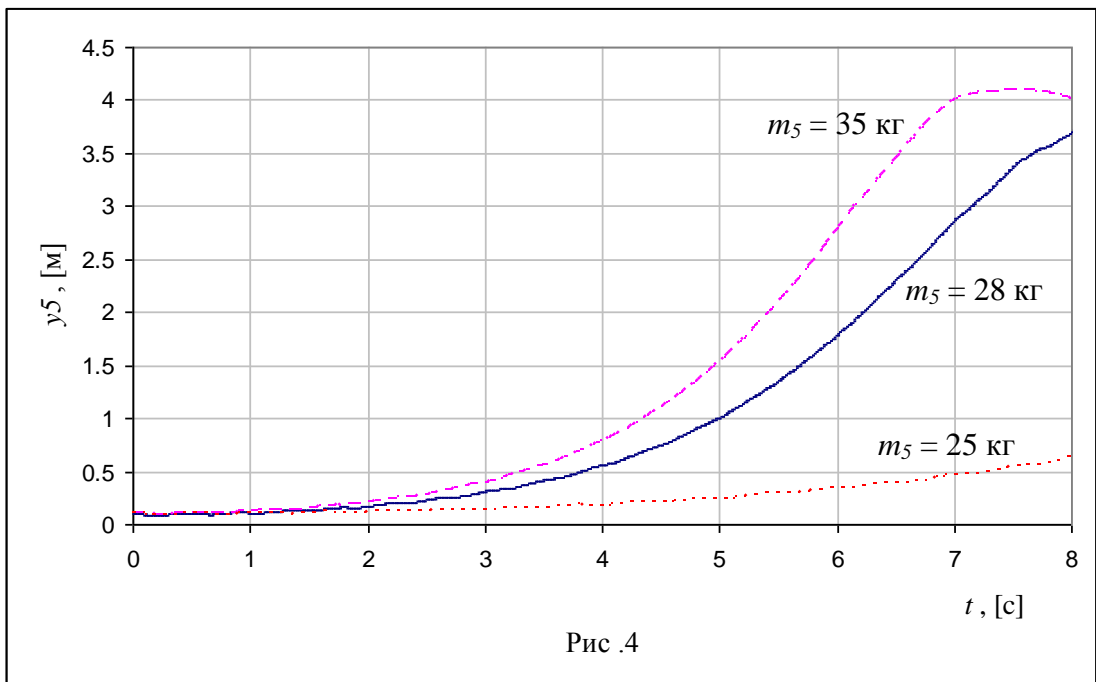
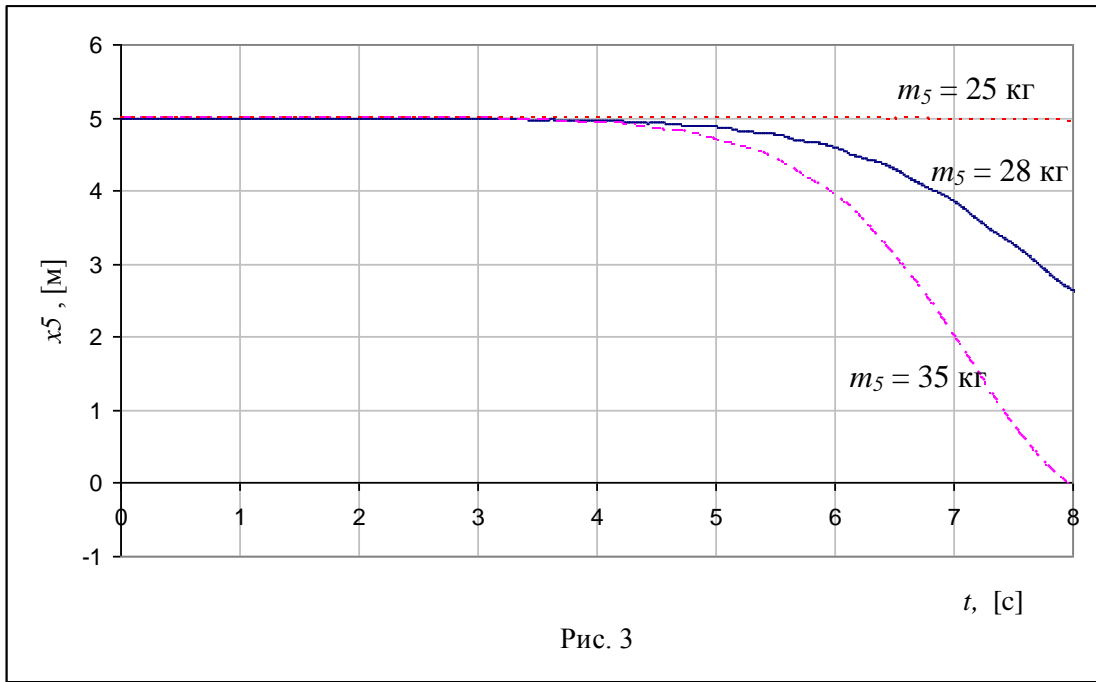
В первом варианте начальных условий при $m_5 = 28$ кг полная энергия в начальный момент времени равна

$$E = 6EI \left[\Delta v_5^2 - \Delta v_5 \Delta \vartheta_5 + \frac{1}{3} \Delta \vartheta_5^2 \right] + mg(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + m_5 g x_5 = 1840.32 [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Для второго варианта начальных условий при $m_5 = 28$ кг полная энергия в начальный момент времени равна

$$E = mg(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + m_5 g x_5 + \frac{1}{2} m_5 \dot{y}_5^2 = 1814 [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

На рис. 3 – 5 приведены графики изменения вертикального $x_5(t)$ и горизонтального $y_5(t)$ перемещений и угла поворота φ_5 для первого варианта начальных условий при различных значениях массы m_5 . Для этого же варианта на рис. 6-8 показаны формы деформированного состояния стержня в различные моменты времени для $m_5 = 28, 35$ и 25 кг, соответственно. Из графиков видно, что перемещения стержня являются достаточно большими (максимальное отклонение составляет более 3,5 м в момент времени $t = 8$ с), что соответствует геометрически нелинейной задаче динамики.



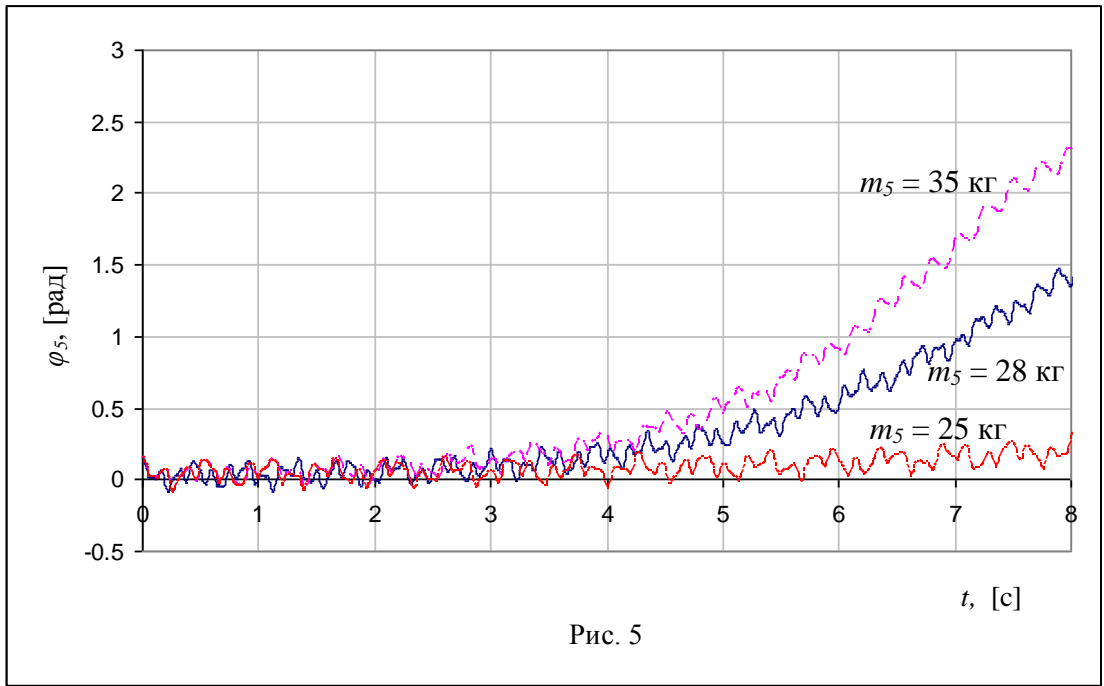


Рис. 5

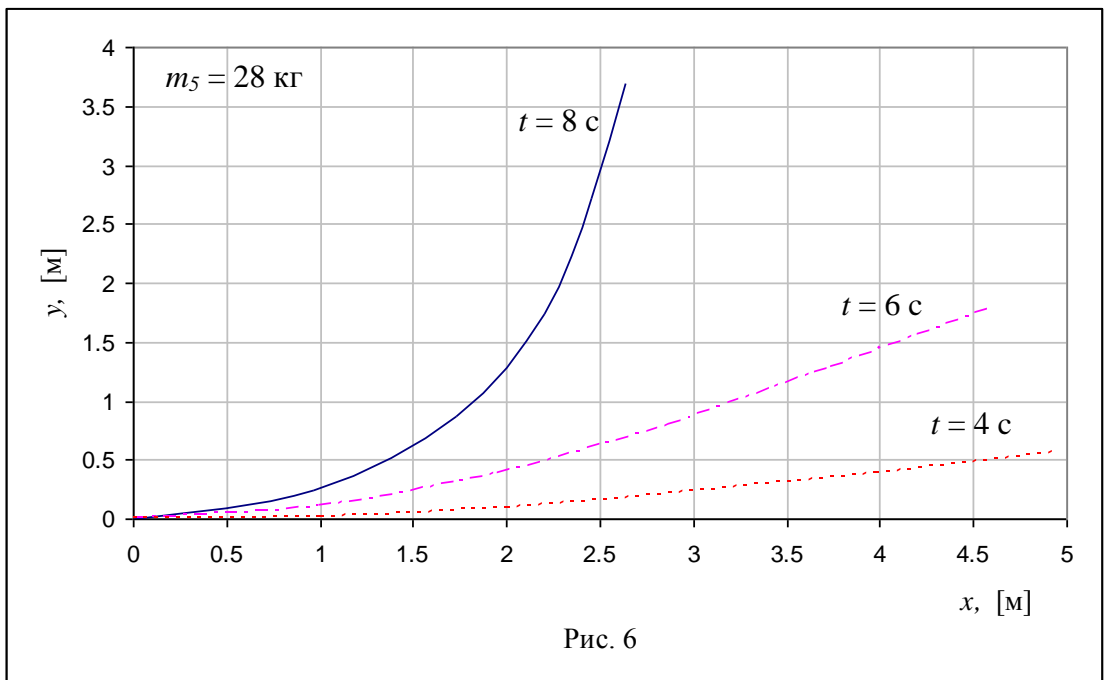
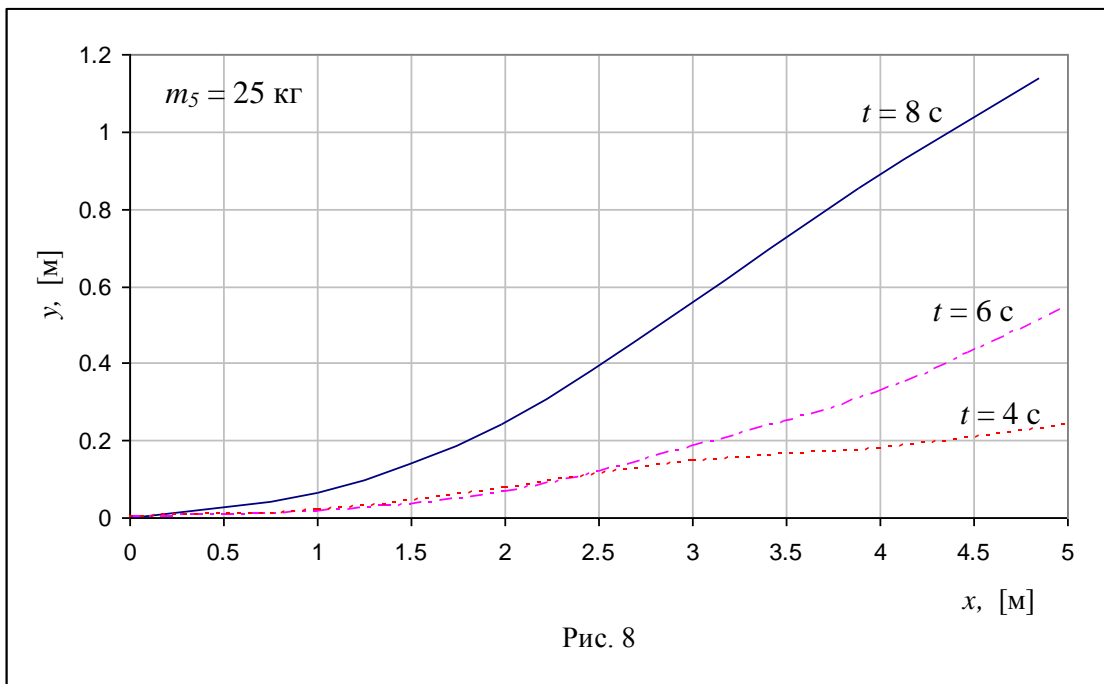
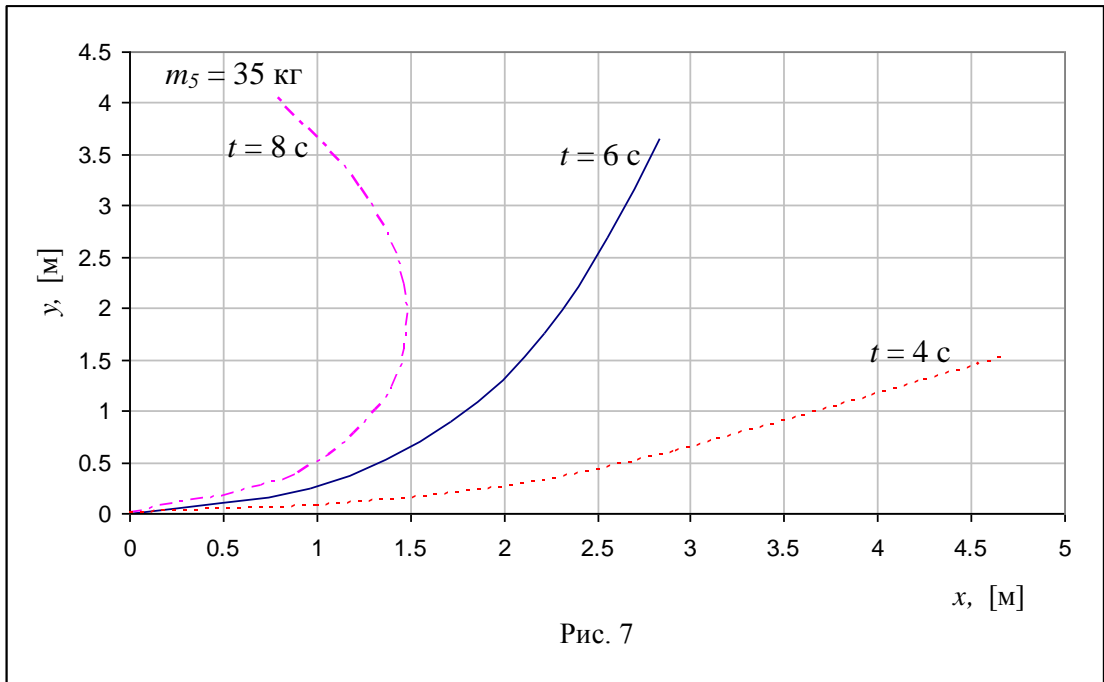
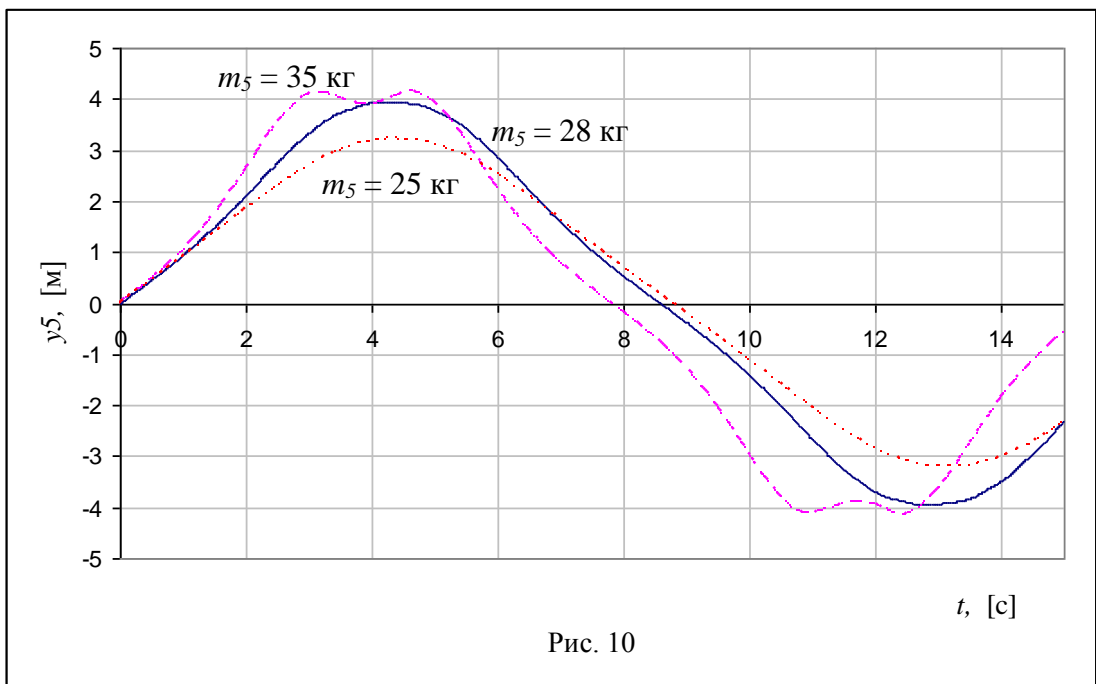
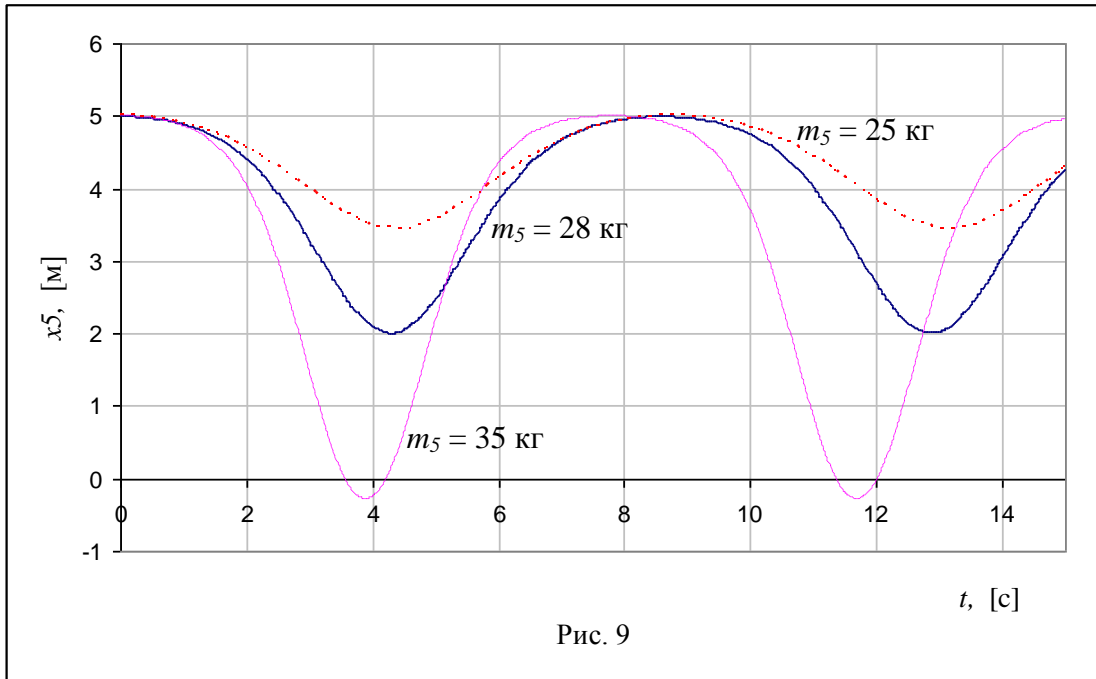
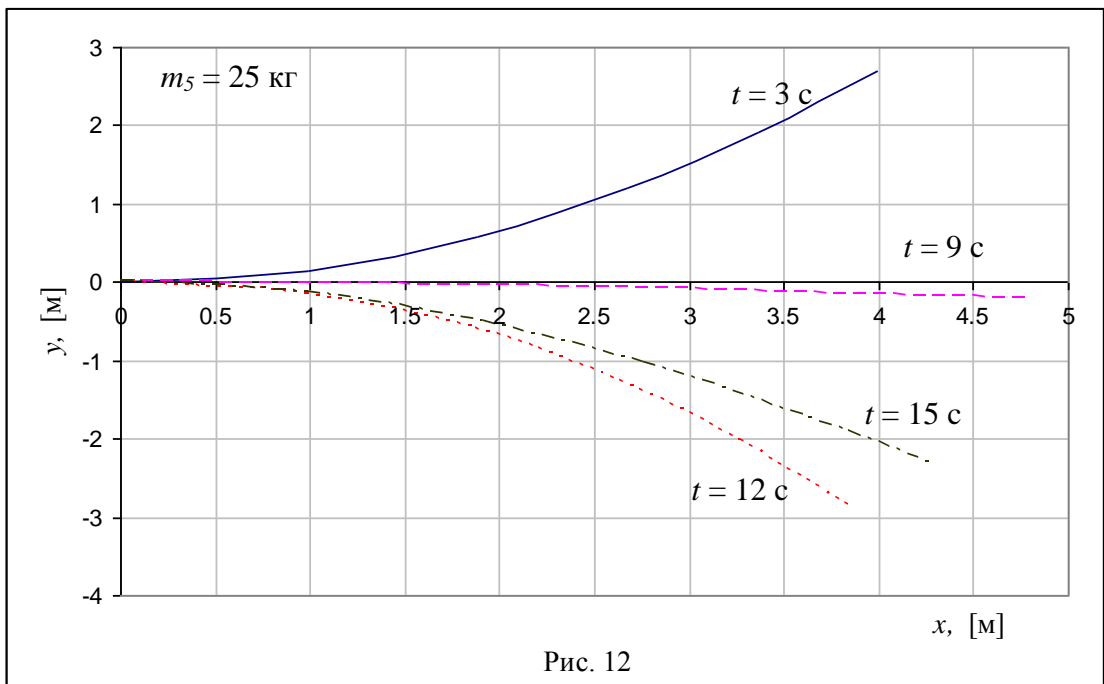
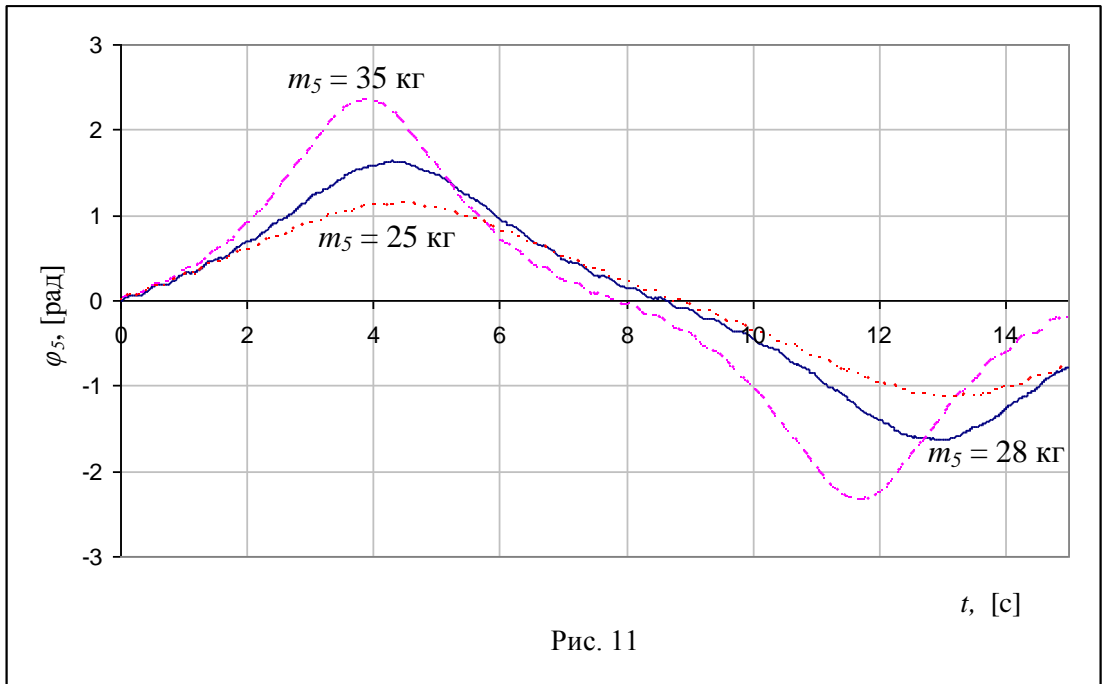


Рис. 6



На рис. 9 – 11 приведены графики вертикального $x_5(t)$ и горизонтального $y_5(t)$ перемещений и угла поворота φ_5 для второго варианта начальных условий при различных значениях массы m_5 . Для этих же значений на рис. 12-14 показаны формы деформированного состояния стержня в различные моменты времени.





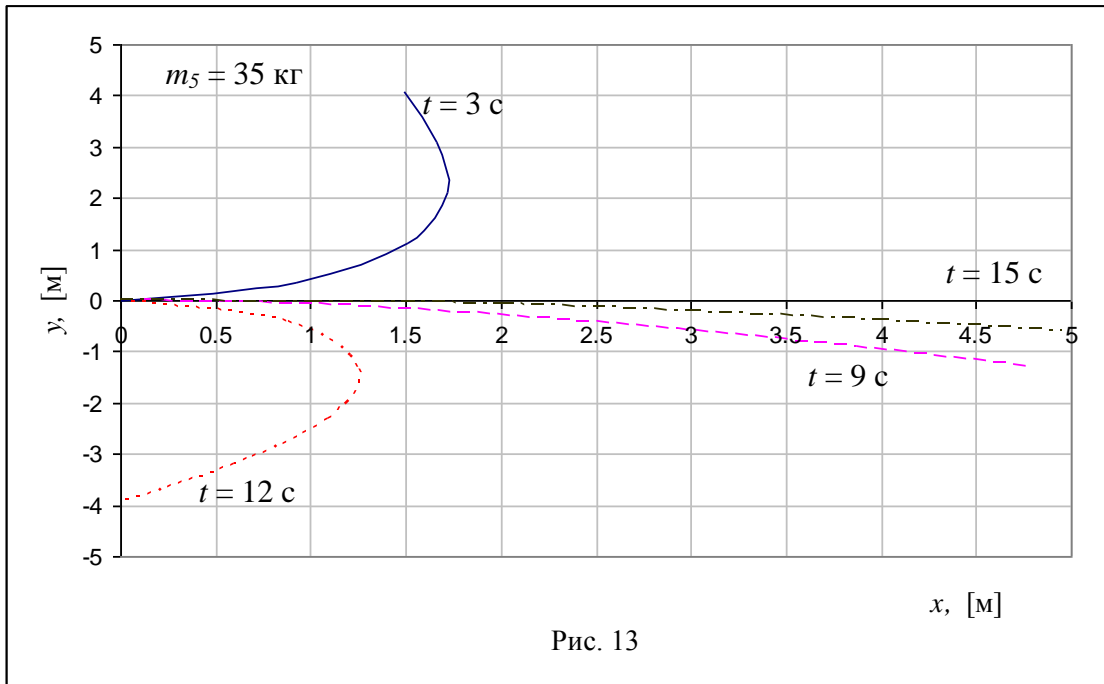


Рис. 13

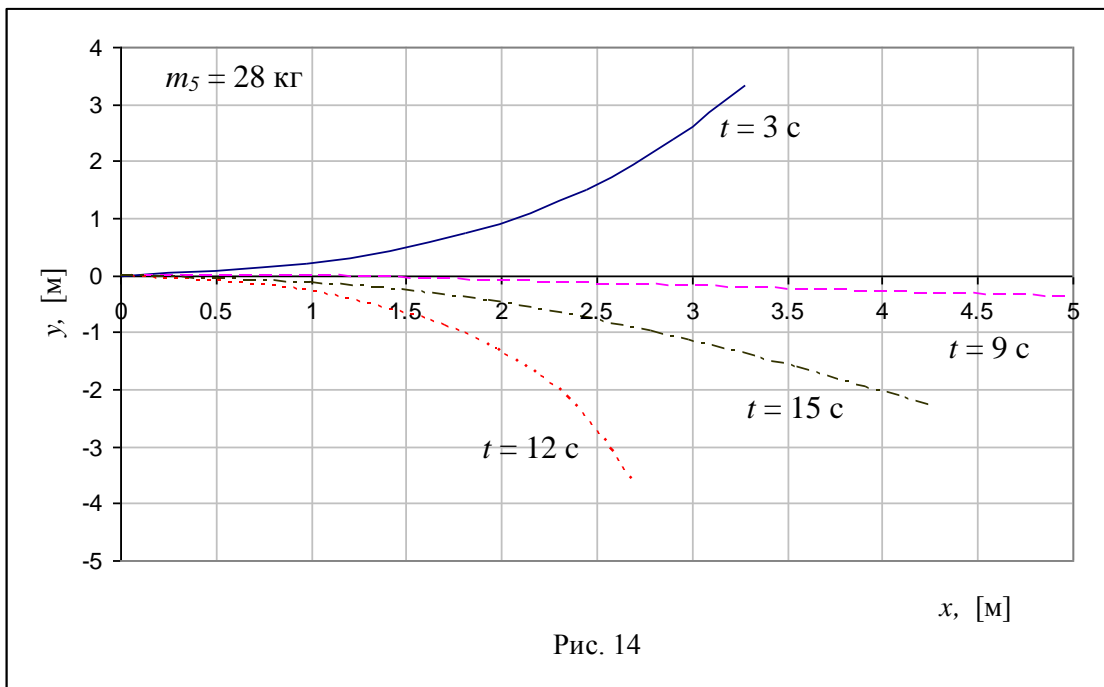


Рис. 14

В процессе интегрирования полная энергия E оставалась постоянной с точностью до $10^{-7} \dots 10^{-10}$.

Выводы

Построена математическая модель для расчета нелинейных колебаний плоской стержневой системы. Рассмотрены примеры динамического поведения стержня под действием сил тяжести при различных вариантах параметров системы и начальных условий.

Библиографический список

1. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем.. - М.: МАИ, 1993, 68 с..
2. Гришанина Т.В. Задачи по теории колебаний упругих систем. М.: Изд-во МАИ, 1998, 48 с.
3. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

Сведения об авторах

Воробьев Илья Николаевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, Российская Федерация, А-80, GSP-3, 125993.

Гришанина Татьяна Витальевна, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м. н., доцент, тел.: +7-499-158-48-10, e-mail:t.grishanin@mai.ru..