

УДК 629.783.001.26

## **Проблемы оптимизации движения спутниковых систем: состояние исследований и перспективы**

Г.В. Можяев

### **Аннотация**

Рассматриваются задачи оптимизации номинальных орбитальных структур спутниковых систем. Обсуждаются постановки задач, основными составляющими которых являются модели оптимизируемых динамически устойчивых орбитальных структур и критерии качества, направленные на достижение различных целей. Обсуждаются результаты исследований задач, полученные различными авторами, и намечаются пути дальнейших исследований. Сообщается об аналитических решениях ряда задач оптимизации процессов гибкой коррекции движения систем спутников. Эти решения удалось получить благодаря декомпозиции задач методами теории представлений групп.

### **Ключевые слова**

спутниковая система; орбита; оптимизация движения.

Пассивные движения искусственных спутников Земли на значительных интервалах времени близки к некоторым «номинальным» движениям. Это либо кеплеровы движения, либо отличающиеся от кеплеровых равномерным вращением плоскостей и/или перигеев орбит. Можно выделить три класса оптимизационных задач, связанных с движением спутниковых систем: задачи оптимального проектирования номинальных движений, задачи оптимизации процессов коррекции реальных и задачи перестройки орбитальных структур, т.е. перехода от одних номинальных движений к другим.

## 1. Задачи оптимизации номинальных движений спутниковых систем, использующих круговые орбиты и предназначенных для обзора поверхности Земли

1.1. Основными составными частями постановки любой задачи оптимизации номинального движения спутниковой системы являются выбор модели номинального движения и обоснование критерия качества. При выборе модели обычно руководствуются соображениями «динамической устойчивости», под которой понимают неподвижность плоскостей оскулирующих орбит спутников по отношению друг к другу и периодичность движения спутников по отношению к системе координат, связанной с плоскостями оскулирующих орбит. Динамической устойчивости часто добиваются, выбирая для всех спутников оскулирующие орбиты одинаковой формы, размеров и наклонений. Что касается критерия качества, то в большинстве работ он назначается, исходя из условия обеспечения «обзора», непрерывного различной кратности или периодического, всей Земли, заданных широтных поясов или отдельных наземных областей. Это обусловлено тем, что обмен сигналами между спутником и наземным объектом обычно возможен, если только они находятся в пределах прямой «видимости».

Типичные условия, обеспечивающие прямую видимость таковы, что в каждый момент зоной обзора спутника на поверхности Земли (её можно считать сферой) является круг некоторого геоцентрического углового радиуса с центром в подспутниковой точке. По определению, спутниковая система обеспечивает непрерывный  $p$ -кратный обзор наземной области  $A$ , если любая её точка в любой момент видна не менее, чем из  $p$  спутников, т.е. если в любой момент зоны обзора спутников обеспечивают  $p$ -кратное покрытие области. Обеспечение непрерывного обзора всей Земли кратности 1 является необходимым условием работы глобальных спутниковых систем связи (типа ИРИДИУМ), а кратности 4 и более - условием эффективной работы глобальных радионавигационных систем (типа GPS, ГЛОНАСС или GALILEO).

У систем, спутники которых имеют одну и ту же аппаратуру и движутся по круговым орбитам одинакового радиуса  $r$ , угловые радиусы  $\alpha$  зон обзора спутников одинаковы и не меняются со временем. Радиус  $\alpha$  желательно иметь возможно меньшим: тогда при фиксированном  $r$  можно осуществлять обзор при менее мощной и менее чувствительной аппаратуре; наоборот, при заданной аппаратуре можно уменьшить радиус орбит  $r$  со всеми вытекающими благоприятными последствиями. Желание уменьшить  $\alpha$  приводит к следующей оптимизационной задаче непрерывного  $p$ -кратного обзора заданной наземной области  $A$ : необходимо запустить  $N$  спутников так, чтобы их зоны обзора обеспечивали в

любой момент  $p$ -кратное покрытие области  $A$  и чтобы потребный для этого минимально возможный угловой радиус зон обзора  $\alpha$  был наименьшим. К этой задаче сводится и проблема нахождения для заданного  $\alpha$  системы непрерывного  $p$ -кратного обзора из минимального числа спутников: решение последней будет известно при любом  $\alpha$ , если наша задача будет решена для всех  $N$ .

Считается, что система осуществляет периодический обзор области  $A$  с периодичностью  $\Delta$ , если максимальная длина временного интервала «невидимости» какой-либо её точки с каких-либо спутников системы равна  $\Delta$ . Периодический обзор требует меньшего числа спутников. К такому виду обзора поневоле приходится прибегать, например, при использовании на спутниках радиолокаторов бокового обзора, когда зоной видимости отдельного спутника в каждый момент можно считать лишь узкую полосу поверхности Земли. Задача оптимизации номинального движения системы периодического обзора обычно ставится следующим образом: требуется запустить  $N$  спутников так, чтобы, чтобы при заданных условиях видимости наземных объектов со спутников периодичность обзора заданной области  $A$  была минимальной.

Будучи формализованными, наши задачи сводятся к поиску экстремумов некоторых функций от конечного числа параметров, характеризующих начальное фазовое состояние спутниковой системы, и относятся обычно к задачам кратного минимакса. Число параметров, как правило, велико, а критериальные функции сложны: вычисление их значений даже для фиксированных значений переменных часто представляет серьёзную проблему. Аналитические свойства функций не внушают оптимизма: функции недифференцируемы (как, например, в задачах непрерывного обзора) или даже разрывны и не задаются посредством формул (как в задачах периодического обзора). В настоящее время отсутствуют надёжно работающие алгоритмы решения подобных задач (хотя некоторые подвижки и произошли - см. ниже). В этих условиях различными авторами на основе, как правило, интуитивных соображений были предложены различные классы номинальных орбитальных структур спутниковых систем и исследованы возможности этих структур в ряде задач непрерывного и периодического обзора.

1.2. Рассмотрим сначала ситуацию, сложившуюся вокруг задач непрерывного обзора Земли различной кратности системой спутников на круговых орбитах одинакового радиуса. Начнём с задачи однократного обзора, которая отличается наглядностью и которая первой стала предметом исследования баллистиков. При выборе модели номинального движения оптимизируемой системы в этой задаче целесообразно на первых порах не связывать себя

требованием динамической устойчивости, так как в дальнейшем среди перспективных по критерию  $\alpha$  систем всегда можно отобрать те, которые могут быть реализованы как динамически устойчивые. Нетрудно показать, что критериальная функция  $\alpha$  не зависит ни от радиуса орбит, ни от скорости движения спутников. Поэтому задачу можно рассматривать в следующей форме.

Имеется  $N$  «спутников», равномерно обращающихся по большим кругам геоцентрической единичной сферы с единичной скоростью (и периодом  $2\pi$ ). Каждый спутник в любой момент «видит» на поверхности сферы круг, центром которого спутник является. Угловой радиус кругов - один и тот же для всех спутников и для всех моментов времени. Требуется запустить спутники так, чтобы указанные круги в любой момент покрывали сферу целиком и чтобы радиус кругов был минимальным.

Первой работой, посвящённой этой задаче, была статья *L.G. Vargo* [1]. В ней предполагалось, что система состоит простого числа  $N$  спутников. Для каждого разложения  $N = P \times S$  числа  $N$  на множители рассматривалась система, состоящая из  $P$  подсистем, каждая из которых содержит  $S$  спутников, движущихся по общей орбите на равных расстояниях друг от друга. Число  $S$  и угловой радиус  $\alpha$  зон обзора спутников считались достаточными для того, чтобы каждая подсистема гарантированно видела в любой момент на осматриваемой сфере некоторую полосу, симметричную относительно плоскости орбиты. Этими  $P$  полосами, наклонёнными к экватору под одинаковыми углами (динамическая устойчивость!), покрывалась сфера так, чтобы потребная ширина полос, а, значит, и определяемый ею угловой радиус зон обзора спутников, были минимальными. Оказалось, что для уменьшения  $\alpha$  выгоднее всего выбирать орбиты полярными. Назначение различных делителей числа  $N$  на роли  $P$  и  $S$  позволило добиться дальнейшего уменьшения величины  $\alpha$ .

Следующий шаг сделал *F.W. Gobetz* [3]. Он предложил согласовывать движение спутников в соседних плоскостях полярных орбит, выбирая в них направление движения спутников одинаковым (до тех пор, пока это возможно) и фазирова спутники в «шахматном» порядке, т.е. при переходе от одной соседней орбиты к другой сдвигать спутники по фазе на угол  $\pi/S$ . Это «подключило» к выполнению функции обзора те части зон обзора спутников, которые выступают за границы полос обзора, и повысило качество систем. В работе [3] была предпринята также попытка исследовать некоторые системы с орбитами, проходящими через вершины правильных многогранников, но результаты получились неутешительными. *W.S. Adams* и *L. Rider* [31] исследовали возможности этих систем в задачах непрерывного многократного обзора, но их характеристики оказались низкими (см.

также таблицу 5).

1.3. Хороших результатов в исследовании задачи непрерывного однократного обзора Земли (а затем и в исследовании других задач) удалось добиться в рамках теоретико-группового подхода, предложенного и развитого автором данной публикации. Поясним его суть.

Пусть  $S$  - множество всех возможных фазовых состояний спутников (т.е. пар единичных взаимно перпендикулярных векторов - геоцентрического вектора положения  $\mathbf{r}$  и вектора скорости  $\dot{\mathbf{r}}$ ),  $s_j = \{\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j\} \in S$  - начальное фазовое состояние  $j$ -го спутника,  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_N\} \subset S$  - начальное состояние оптимизируемой  $N$ -спутниковой системы. Рассмотрим область Дирихле  $j$ -го спутника в момент  $t$  - множество точек единичной сферы (по большим кругам которой обращаются спутники), отстоящих от  $j$ -го спутника в момент  $t$  не далее, чем от остальных. Если обозначить через  $\alpha_j(s)$  тот минимальный угловой радиус зоны обзора  $j$ -го спутника, который гарантирует непрерывную видимость его области Дирихле, то критериальную функцию задачи можно представить в виде

$$\alpha(s) = \max(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_N(s)). \quad (1)$$

Задача заключается в нахождении  $\min_{s \in S} \alpha(s)$ .

Интуиция подсказывает, что у искомого оптимального состояния  $s_{opt}$ , для которого

$$\alpha(s_{opt}) = \min_s [\max(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_N(s))],$$

значения  $\alpha_j(s_{opt})$  у достаточно большого числа спутников  $n$  должны равняться  $\alpha(s_{opt})$ :

$$\alpha_{j_1}(s_{opt}) = \alpha_{j_2}(s_{opt}) = \dots = \alpha_{j_n}(s_{opt}) = \alpha(s_{opt}). \quad (2)$$

Ведь если, например,

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) > \alpha_j(s) \text{ при всех } j \neq 1, \quad (3)$$

то малым изменением параметров движения первого спутника можно уменьшить значение  $\alpha_1$ , в то время как остальные  $\alpha_j$ , если и возрастут, то не превысят  $\alpha_1$ . Следовательно, новое состояние будет характеризоваться меньшим значением критерия  $\alpha$ , а прежнее  $s$  со свойством (3) оптимальным быть не может. Представляется целесообразным найти классы таких состояний  $s$ , которые удовлетворяли бы условиям вида (2):

$$\alpha_{j_1}(s) = \alpha_{j_2}(s) = \dots = \alpha_{j_n}(s) = \alpha(s) \quad (4)$$

при не слишком малом  $n$  по сравнению с  $N$ , а затем попытаться в этих классах и решить

задачу оптимизации.

Свойства функций  $\alpha_j(s)$  благоприятствуют такому намерению. Характерной их особенностью является высокая степень симметрии: множество  $S$  возможных фазовых состояний отдельных спутников допускает обширную группу  $G$  преобразований, не меняющих значение функций  $\alpha_j(s)$ :

$$\alpha_j(g(s)) = \alpha_j(s) \text{ при любых } g \in G, s \in S \text{ и любых } j=1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Такую группу  $G$  мы называем **группой автоморфизмов** рассматриваемой задачи оптимизации. Имея  $G$ , легко указать состояния  $s$ , удовлетворяющие условиям вида (4): ими будут состояния, инвариантные относительно нетривиальных подгрупп  $H$  группы  $G$ . Чем больше порядок группы  $H$ , тем, вообще говоря, больше число  $n$  в утверждении (4). Если  $s$  целиком состоит из образов некоторого элемента  $s_j \in S$  при действии преобразований группы  $H \subset G$  (тогда говорят, что  $s$  имеет **транзитивную группу симметрии**  $H$ ), то  $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = \dots = \alpha_N(s) = \alpha(s)$ .

Оставляя открытым вопрос о группе **всех** автоморфизмов при произвольных  $N$ , укажем группу, которая по-видимому является таковой, если  $N$  достаточно велико. Рассмотрим следующие преобразования фазового пространства  $S$ .

Пусть  $s_j = \{r_j, \dot{r}_j\}$  - элемент из  $S$ . Обозначим через  $w(r_j), w(\dot{r}_j)$ , образы векторов  $r_j, \dot{r}_j$  при действии ортогонального преобразования  $w$ , оставляющего неподвижным центр Земли. Будем считать состояние  $\{w(r_j), w(\dot{r}_j)\}$  образом  $w(s_j)$  состояния  $s_j$  при действии преобразования  $w$ . Множество  $W$  всех таких преобразований фазового пространства  $S$  образуют группу, которую, следуя принятой в физике терминологии, назовём **полной ортогональной группой**. Поставим в соответствие фазовому состоянию  $s_j = \{r_j, \dot{r}_j\}$ , которое спутник имел в некоторый начальный момент, то состояние, которое спутник будет иметь спустя время  $\tau$ . Обозначим его через  $u_\tau(s_j) = \{u_\tau(r_j), u_\tau(\dot{r}_j)\}$ . Совокупность  $U$  преобразований  $u_\tau$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ , является однопараметрической группой, называемой **динамической**. Наконец, рассмотрим преобразование  $e'$ , ставящее каждому  $s_j = \{r_j, \dot{r}_j\}$  состояние  $e'(s_j) = \{r_j, -\dot{r}_j\}$  и поворачивающее все спутники вспять.  $e'$  известно как **преобразование замены знака времени**. Вместе с тождественным преобразованием оно образует группу второго порядка, которую будем обозначать символом  $V$ .

Повороты спутниковой системы, как единого целого, отражения её в плоскостях, проходящих через центр Земли, сдвиги вдоль орбит всех спутников на одинаковые углы а

также одновременная замена направления движения спутников на противоположное не могут изменить ни при каком  $j = 1, 2, \dots, N$  тот минимальный угловой радиус  $\alpha_j$  зоны обзора  $j$ -го спутника, который гарантирует непрерывную видимость его области Дирихле. Поэтому равенства (5) имеют место для любых преобразований  $g$  из групп  $W, U$  и  $V$ , а значит, и из группы

$$G = \{W, U, V\}, \quad (6)$$

ими порождённой. Последняя и является группой автоморфизмов задачи непрерывного обзора Земли.

Назовём множество  $s \subset S$  **симметричным**, если существует нетождественное преобразование  $h \in \{W, U, V\}$  (а значит, и нетривиальная группа преобразований из  $\{W, U, V\}$ ), переводящее  $s$  в себя:  $h(s) = s$ . **Группой симметрии**  $H$  множества  $s$  будем считать любую совокупность преобразований из  $\{W, U, V\}$ , удовлетворяющую условиям: 1)  $H$  - группа, 2)  $h(s) = s$  для каждого  $h \in H$ . Такова, в частности, совокупность  $\bar{H}$  всех преобразований группы  $\{W, U, V\}$ , переводящих  $s$  в себя. Её будем именовать **полной группой симметрии** множества  $s$ . Симметричное множество  $s$  назовём **правильным**, если оно обладает транзитивной группой симметрии  $H$ , т.е. если для любых его элементов  $s_j$  и  $s_k$  найдется преобразование  $h \in H$ , переводящее  $s_j$  в  $s_k$  и всё  $s$  в себя. При этом  $s$  является совокупностью образов любого своего элемента, например, элемента  $s_1$ , при действии преобразований своей группы симметрии:

$$s = H(s_1). \quad (7)$$

Систему спутников назовём **кинематически симметричной** (соответственно **кинематически правильной**), если в некоторый момент  $t$  фазовое состояние  $s$  является симметричным (правильным) множеством.

Кинематически правильные и симметричные системы удовлетворяют некоторым условиям оптимальности, так как справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Если кинематически правильная спутниковая система осуществляет непрерывный обзор Земли и её критерий качества  $\alpha < \pi/2$ , то никакое достаточно малое изменение параметров движения **одного** её спутника не может улучшить строение системы, т.е. не может уменьшить значение критерия  $\alpha$  (такого изменения просто недостаточно).

**Теорема 2.** Если в кинематически симметричной системе непрерывного обзора имеется кинематически правильная подсистема, содержащая по меньшей мере два спутника, зоны обзора которых никогда не пересекаются, то никакое достаточно малое изменение параметров движения **одного** спутника указанной подсистемы не может улучшить строение

всей системы. В частности, если отмеченным свойством обладают все правильные подсистемы, то для улучшения системы недостаточно малого изменения параметров любого одного спутника.

$N$ -спутниковая система обеспечивает  $p$ -кратный обзор тогда и только тогда, когда любая её подсистема из  $N-(p-1)$  спутников осуществляет однократный обзор. Поэтому, если под  $\alpha_j(s)$  понимать минимальный угловой радиус зоны обзора  $j$ -го спутника, достаточный для видимости объединения областей Дирихле в содержащих этот спутник  $(N - p + 1)$  - спутниковых подсистемах, то все приведенные выше рассуждения, включая теоремы 1 и 2, нетрудно перенести на задачу непрерывного обзора кратности  $p$ .

Суть теоретико-группового подхода к исследованию задач непрерывного обзора состоит в том, чтобы сужать задачу и решать её на подклассах класса кинематически симметричных (в частности, кинематически правильных) систем. Реализация этого предложения требует решения двух основных проблем. **Первая проблема** заключается в том, чтобы конструктивно описать весь класс. Для её решения требуется прежде всего описать всех подгруппы (можно доказать, что - конечные) группы  $\{W, U, V\}$ . Так как  $S$  - множество фазовых состояний спутников, обращающихся по круговым орбитам, то действие на  $S$  инверсии относительно центра Земли совпадает с преобразованием динамической группы  $u_\pi$ , «сдвигающим» спутники на половину витка. В этих условиях группа  $\{W, U, V\}$  совпадает с  $\{R, U, V\}$ , где  $R$  - группа, состоящая из всевозможных поворотов вокруг осей, проходящих через центр Земли. Можно показать, что  $\{R, U, V\}$  является прямым произведением  $R \times P$  группы  $R$  и группы  $P = \{U, V\}$ , порождённой группами  $U$  и  $V$ .

Если, имея  $H$ , мы заставим элемент  $s_j$  пробегать всё пространство  $S$ , то получим согласно (7) состояния  $H(s_j)$  всех правильных систем с группой  $H$ . Число элементов в  $H(s_j)$  будет, вообще говоря, различным для различных  $s_j$ . Предположим, что  $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(q)}$  - все возможные числа элементов в множествах  $H(s_j)$ ,  $s_j \in S$ ,  $N^{(1)} > N^{(2)} > \dots > N^{(q)} \geq 1$ .

Обозначим через  $\Sigma^{(k)}$  совокупность всех тех  $s_j \in S$ , при которых  $H(s_j)$  состоит из  $N^{(k)}$  элементов,  $k = 1, 2, \dots, q$ . Тогда все правильные множества с группой симметрии  $H$  можно описать следующим образом. Каждое из них содержит  $N^{(1)}$ , или  $N^{(2)}$ , ..., или  $N^{(q)}$  элементов; все множества из  $N^{(k)}$  элементов являются множествами вида  $H(s_j)$ , когда  $s_j$  пробегает область  $\Sigma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ .

Симметричное множество  $s$ , имеющее  $N$  элементов и группу симметрии  $H$  состоит из некоторого количества непересекающихся правильных множеств с общей группой  $H$ .



Предположим, что среди них имеется  $\nu_k$  множеств, состоящих из  $N^{(k)}$  элементов;

$$0 \leq \nu_k \leq N / N^{(k)}. \quad (8)$$

Тогда

$$N = \sum_{k=1}^q \nu_k N^{(k)}. \quad (9)$$

Все множества из  $N$  элементов с заданной группой симметрии  $H$  находятся следующим образом. Зная для группы  $H$  числа  $N^{(k)}$  и области  $\Sigma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , образуем для  $N$  все возможные разложения вида (9) при целых  $\nu_k$ , удовлетворяющих неравенствам (8). Симметричные  $s$ , соответствующие конкретному разложению (9), строятся по формуле

$$s = \bigcup_{k=1}^q \bigcup_{l=1}^{\nu_k} H(s_j^{(k,l)}), \quad (10)$$

если заставить в случае  $\nu_k > 0$  каждый из элементов  $s_j^{(k,l)}$ ,  $l = 1, \dots, \nu_k$ , пробегать область  $\Sigma^{(k)}$  и потребовать, чтобы ни при каких  $k, l_1, l_2$  множества  $H(s_j^{(k,l_1)})$  и  $H(s_j^{(k,l_2)})$  не пересекались.

Решение первой проблемы сводится, таким образом, к описанию множества всех конечных подгрупп прямого произведения  $R \times P$  групп  $R$  и  $P$ , а также к нахождению для каждой подгруппы чисел  $N^{(k)}$  и областей  $\Sigma^{(k)}$ .

**Вторая проблема** касается естественного и весьма необходимого упрощения «суженной» задачи оптимизации. Дело в том, что подкласс класса кинематически симметричных систем, на котором мы собираемся решать задачу, может содержать вместе с некоторой системой и её образы при действии преобразований из группы автоморфизмов задачи. Систему и её образ логично считать эквивалентными, так как критериальная функция принимает на них одинаковые значения. Открывается возможность рассматривать задачу на ещё более узком множестве взаимно неэквивалентных систем и тем значительно её упростить. Суть второй проблемы - в том, чтобы найти минимальные по включению множества попарно неэквивалентных систем. Решение идёт по двум направлениям. Во-первых, сужается класс возможных групп симметрии, допускаемых к рассмотрению, так как понятие эквивалентности систем приводит к естественному отношению эквивалентности их групп симметрии. Поэтому при построении систем с помощью их групп симметрии нас должны интересовать только взаимно неэквивалентные группы. Во-вторых, можно сузить и класс систем с фиксированной группой симметрии, потому что в нём тоже могут быть эквивалентные системы. Продвижение в обоих направлениях существенно облегчает исследование. Например, групп  $H \subset R \times P$  даже заданного порядка оказывается бесконечно

много: они образуют двух-, трёх- и четырёхпараметрические семейства. В то же время число попарно неэквивалентных групп фиксированного порядка всегда конечно, и их можно затабулировать. Множества систем с заданной группой  $H$  также удаётся значительно сузить.

Не останавливаясь на вопросе о строении групп  $H \subset R \times P$ , отметим, что их удобно разбивать на три. Будем читать, что:

$H$  - группа первого типа, если  $H_P \subset U$  инверсия времени  $e'$  не входит в  $H$  ни самостоятельно, ни через произведения на какие-либо преобразования вида  $ru_v$ ,  $r \in R$ ,  $u_v \in U$ ;

$H$  - группа второго типа, если  $H$  содержит произведения вида  $ru_\tau e'$ , где  $r$  - некоторый нетождественный поворот, но не вида  $u_\tau e'$ ;

$H$  - группа третьего типа, в  $H$  входят преобразования вида  $u_\tau e'$ .

Опишем систему обозначений конечных групп  $H \subset R \times P$ , согласно которой одинаковыми символами снабжаются эквивалентные группы и только они, а информация, содержащаяся в символе, достаточна для построения представителя класса эквивалентных групп, обозначаемых этим символом.

Символ группы  $H$  состоит из нескольких букв и цифр. На первом месте стоит число  $|H|$ , равное порядку группы. Если  $H$  - группа второго (соответственно третьего) типа, то над (под) этим числом ставится черта. Если тип  $H$  - первый, то черта не ставится. На втором и третьем месте располагаются символы компоненты  $H_R$  группы  $H$  в прямом множителе  $R$  и пересечения  $H \cap R$ . В роли компонент и пересечений могут выступать конечные подгруппы группы вращений  $R$ :

$E$  - единичная группа, состоящая из одного тождественного преобразования (она для обозначается также символом  $C_1$ );

$C_n$ ,  $n \geq 2$ , - группа вращений правильной  $n$ -угольной пирамиды, состоящая из  $n$  поворотов вокруг некоторой оси на углы, кратные  $2\pi/n$ ;

$D_n$ ,  $n \geq 2$ , - группа вращений правильной  $n$ -угольной призмы (группа диэдра);

$T$ ,  $O$ ,  $U$  - группы вращений тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

Других конечных подгрупп в  $R$ , как известно, не существует.

На четвёртом месте в символе группы  $H$  может стоять (а может и отсутствовать) целое неотрицательное число  $k$ .

При исследовании возможностей кинематически правильных систем в задаче непрерывного однократного обзора Земли можно не принимать во внимание группы третьего типа, так как правильные системы с такими группами обладают свойством, не позволяющим надеяться на высокие характеристики: в некоторые моменты их спутники «объединяются» в пары, причём образующие каждую пару спутники располагаются в одной

точке пространства, а векторы их скоростей имеют противоположные направления (в эти моменты фазовые состояния систем переводятся в себя инверсией времени  $e'$ ). Можно не рассматривать и группы  $H \subset P$ , которые ведут к правильным системам спутников, обращающихся по одной орбите, а также группы  $H$ , компонентами  $H_R$  которых являются группы вида  $T$ ,  $O$  или  $U$  (соответствующие правильные системы либо содержат неэкваториальные спутники, обращающиеся по орбитам с разными наклонениями и являются неустойчивыми, либо не обладают высокими качествами).

Возможные символы остальных групп  $H$  представлены в таблице 1 (для всех групп

Таблица 1

Обозначения и образующие элементы групп первого и второго типа с компонентами  $H_R$  вида  $C_n$  и  $D_n$

Группы первого типа		
Символ группы $H$	Условия, налагаемые на параметры символа группы	Образующие элементы группы
$ H C_nC_m$	$ H /n$ - целое; $n \geq 2$ ; $m \geq 1$ ; $n/m = 1, 2, 3, 4$ или $6$	$c_{2\pi/n} u_{2\pi m/ H }$ , $c_{2\pi/m}$
$ H C_nC_m\kappa$	$ H /n, n/m$ - целое; $m \geq 1$ ; $n/m = 5$ или $n/m \geq 7$ ; $1 \leq \kappa < n/2m$ , $\kappa$ взаимно просто с $n/m$	$c_{2\pi/n}^\kappa u_{2\pi m/ H }$ , $c_{2\pi/m}$
$ H D_nC_n$	$ H /2n$ - целое; $n \geq 2$ ;	$c_{2\pi/n}, c_\pi^\perp u_{2\pi n/ H }$
$ H D_nD_m$	$ H /2n$ - целое; $m \geq 2$ ; $n/m = 1$ или $2$	$c_{2\pi/n} u_{4\pi m/ H }, c_{2\pi/m}, c_\pi^\perp$
Группы второго типа		
$\overline{ H }C_2E$	$ H $ чётно	$c_\pi^\perp e', u_{4\pi/ H }$
$\overline{ H }C_{2n}C_n$	$ H /2n$ - целое; $n \geq 2$ ;	$c_{\pi/n} e', u_{4\pi n/ H }$
$\overline{ H }D_nC_m$	$ H /2n$ - целое; $n \geq 2$ ; $m \geq 1$ ; $n/m = 1, 3, 4$ , или $6$	$c_{2\pi/n} u_{4\pi m/ H }$ , $c_\pi^\perp e'$

$\overline{H D_n C_m \kappa}$	$ H /2n, n/m$ - целое; $m \geq 1$ ; $n/m = 5$ , или $\frac{n}{m} \geq 7$ ; $1 \leq \kappa < n/2m$ , $\kappa$ взаимно просто с $n/m$	$c_{2\pi/n}^\kappa u_{4\pi m/ H }$ , $c_{2\pi/m}$ , $c_\pi^\perp e'$
$\overline{H D_2 E}$	$ H /4n$ - целое	$c_\pi u_{4\pi/ H }$ , $c_\pi^\perp e'$
$\overline{H D_{2n} C_n 0}$	$ H /4n$ - целое; $n \geq 2$	$c_{\pi/n} u_{4\pi m/ H }$ , $c_{2\pi/n}$ , $c_\pi^\perp e'$
$\overline{H D_{2n} C_n 1}$	$ H /4n$ - целое; $n \geq 2$	$c_{\pi/n} e'$ , $c_\pi^\perp u_{4\pi m/ H }$
$\overline{H D_{2n} D_n}$	$ H /4n$ - целое; $n \geq 2$	$c_{\pi/n} e'$ , $u_{8\pi m/ H }$ , $c_\pi^\perp$

$H \subset R \times P$  они приведены в [33]). Там же указаны образующие элементы групп, т.е. элементы, произведения которых образуют группу. При этом символом  $c_{2\pi/n}$  обозначается поворот на угол  $2\pi/n$  вокруг оси группы  $H_R$  наибольшего порядка (против часовой стрелки, если смотреть из конца оси), а символом  $c_\pi^\perp$  - поворот на угол  $\pi$  вокруг оси 2-го порядка, перпендикулярной оси поворота  $c_{2\pi/n}$  (с одним исключением: для групп  $\overline{H|C_2 E}$  поворот на угол  $\pi$  вокруг оси компоненты  $H_R = C_2$  удобнее обозначать через  $c_\pi^\perp$ ). Если для определённости считать, что ось поворота  $c_{2\pi/n}$  совпадает с осью вращения Земли, а ось поворота  $c_\pi^\perp$  направлена в точку весеннего равноденствия (от неё отсчитываются долготы восходящих узлов), то действие фигурирующих в таблице 1 преобразований будет описываться таблицей 2. В ней  $i_1$  - наклонение,  $\Omega_1$  - долгота восходящего узла,  $u_1$  - аргумент широты условного «первого» спутника.

Образы фазового состояния  $s_1 = \{i_1, \Omega_1, u_1\}$  при действии преобразований группы  $R \times P$

Преобразование	Образ состояния $s_1$
$c_\varphi$	$\{i_1, \Omega_1 + \varphi, u_1\}$
$c_\pi^\perp$	$\{\pi - i_1, \pi - \Omega_1, u_1 + \pi\}$
$u_\tau$	$\{i_1, \Omega_1, u_1 + \tau\}$
$e'$	$\{\pi - i_1, \Omega_1 + \pi, \pi - u_1\}$
$c_\pi^\perp e'$	$\{i_1, -\Omega_1, -u_1\}$

Данные таблиц 1 и 2 позволяют по символу группы симметрии  $H$  и заданному  $s_1 = \{i_1, \Omega_1, u_1\}$  находить, пользуясь правилом (10), начальные условия движения соответствующей кинематически правильной системы. Приведём наиболее важные для дальнейшего примеры. Пусть  $H$  - группа первого типа с символом  $|H| C_n C_m \kappa$ , а  $[n, |H|/m]$  - наименьшее общее кратное чисел  $n$  и  $|H|/m$ . В силу условий, налагаемых на параметры символа группы,  $[n, |H|/m]$  является делителем числа  $|H|$  и существует натуральное

$$k = \frac{|H|}{[n, |H|/m]}. \quad (11)$$

При этом начальные условия движения соответствующей правильной системы будут определяться формулами:

$$\begin{aligned} i_j &= i_1, \quad j=1, \dots, |H|; \\ u_{j+v|H|/k} &= u_1 + \frac{2\pi m}{|H|}(j-1), \\ \Omega_{j+v|H|/k} &= \Omega_1 + \frac{2\pi}{m}v + \frac{2\pi\kappa}{n}(j-1), \quad j=1, \dots, \frac{|H|}{k}, \quad v=0, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для групп  $|H| C_n C_m$  в формулах (12) надо положить  $\kappa = 1$ .

Если  $H$  - группа второго типа с символом  $\overline{|H|} D_n C_m \kappa$ , то целым является число

$$k = \frac{|H|/2}{[n, |H|/(2m)]}, \quad (13)$$

а начальные параметры движения кинематически правильной системы будут следующими:

$$\begin{aligned}
i_j &= i_1, \quad j=1, \dots, |H|; \\
u_{j+v|H|/(2k)} &= u_1 + \frac{4\pi m}{|H|}(j-1), \\
\Omega_{j+v|H|/(2k)} &= \Omega_1 + \frac{2\pi}{m}v + \frac{2\pi\kappa}{n}(j-1), \\
u_{j+v|H|/(2k)+|H|/2} &= -u_1 + \frac{4\pi m}{|H|}(j-1), \\
\Omega_{j+v|H|/(2k)+|H|/2} &= -\Omega_1 + \frac{2\pi}{m}v + \frac{2\pi\kappa}{n}(j-1), \quad j=1, \dots, \frac{|H|}{2k}, \quad v=0, \dots, k-1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Формулы (13) и (14) пригодны и для других представленных в таблице 1 групп:

$\overline{|H|} C_2 E$ , если положить  $\kappa = n = m = 1$ ;

$\overline{|H|} D_n C_m$ , если положить  $\kappa = 1$ ;

$\overline{|H|} D_2 E$ , если положить  $\kappa = 1, n = 2, m = 1$ ;

$\overline{|H|} D_{2n} C_n \theta$ , если положить  $\kappa = 1$  и сделать замены  $n \rightarrow m, n \rightarrow 2n$ .

Если  $\Omega_1$  и  $u_1$  не равны одновременно нулю, то система с начальными параметрами (14) состоит из двух  $\frac{|H|}{2}$ -спутниковых правильных подсистем вида (12), имеющих одинаковое наклонение орбит  $i_1$ , но «сдвинутых» по отношению друг к другу на угол  $2\Omega_1$  по долготам восходящих углов и на угол  $2u_1$  по аргументам широты спутников. При  $\Omega_1 = u_1 = 0$  система состоит из одной такой подсистемы.

Группы

$$|H|D_n C_n, \quad |H|D_n D_m, \quad \overline{|H|} C_{2n} C_n, \quad \overline{|H|} D_{2n} C_n I, \quad \overline{|H|} D_{2n} D_n$$

ведут к кинематически правильным системам, состоящим из двух подсистем с одинаковым количеством спутников; спутники одной из подсистем имеют наклонение орбит, равное  $i_1$ , а спутники другой - наклонение  $\pi - i_1$ . Такие системы будут устойчивыми лишь при  $i_1 = \pi/2$ .

Семейство кинематически правильных систем с фиксированной группой симметрии  $H$  является трёхпараметрическим: свободными являются параметры  $i_1, \Omega_1, u_1$  начального фазового состояния  $s_1$  1-го спутника. Задача непрерывного обзора на классе таких систем сводится к нахождению

$$\min_{s_1} \alpha(H(s_1)). \tag{15}$$

Существенное упрощение задачи связано с тем, что при различных  $s_1$  множества  $H(s_1)$  оказываются эквивалентными. Поэтому можно считать, что  $s_1$  пробегает не всё фазовое

пространство  $S$ , а лишь произвольную максимальную по включению область  $\Sigma \subset S$ , для любых двух элементов  $s_j$  и  $s_k$  которой множества  $H(s_j)$  и  $H(s_k)$  неэквивалентны. Согласно [33] в трёхмерном пространстве переменных  $i_1, \Omega_1, u_1$  областями  $\Sigma$  для групп, представленных в таблице 1, являются открытые отрезки, прямоугольники или параллелепипеды с частями своих границ. Численное решение задачи поиска минимума (15) существенно не усложнится, если заставить  $s_1$  пробегать не  $\Sigma$ , а более простое по описанию замыкание  $\bar{\Sigma}$  этой области, т.е. соответствующий замкнутый отрезок, прямоугольник или параллелепипед. Замыкания  $\bar{\Sigma}$  несложно определить, основываясь на описании областей  $\Sigma$  в книге [33]. Для рассматриваемых нами групп они указаны в таблице 3. Таким образом, семейства кинематически правильных систем с заданной группой симметрии  $H$  являются не более, чем двухпараметрическими (а часто и однопараметрическими), для групп  $H$  первого типа и не более, чем трёхпараметрическими, для групп второго и третьего типа. Соответственно, задача поиска минимума (15) является задачей на экстремум функции не более, чем трёх переменных.

Теория кинематически правильных спутниковых систем была разработана в 1966-1967 г.г. и опубликована в отчётах [5,6], докладе [7] и кандидатской диссертации [8]. Она включала:

- доказательство теоремы 1;
- алгоритм построения всех групп  $H \subset R \times P$  любого заданного порядка;
- получение необходимых и достаточных условий эквивалентности групп  $H \subset R \times P$ , разработку на этой основе системы обозначений групп  $H$ ;
- рекомендации по сужению областей изменения переменных при решении задачи оптимизации в классах кинематически правильных систем;

Таблица 3

Минимальная замкнутая область  $\bar{\Sigma}$ , в которой необходимо решать задачу оптимизации в классе кинематически правильных систем с группой симметрии  $H$

Символ группы $H$	$\bar{\Sigma}$
$ H C_n C_m; \frac{n}{m} \leq 2$	$\left\{ 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}; \Omega = 0; u = 0 \right\}$
$ H C_n C_m,  H C_n C_m \kappa; \frac{n}{m} > 2$	$\left\{ 0 \leq i \leq \pi; \Omega = 0; u = 0 \right\}$

$ H D_n C_n,  H D_n D_m$	$\left\{ 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2n}; u = 0 \right\}$
$\overline{ H }C_2 E$	$\left\{ i = \frac{\pi}{2}; 0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq u \leq \frac{\pi}{ H } \right\}$
$\overline{ H }C_{2n} C_n; n \geq 2$	$\left\{ 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}; \Omega = 0; 0 \leq u \leq \frac{\pi n}{ H } \right\}$
$\overline{ H }D_n C_m, \overline{ H }D_n C_m \kappa$	$\left\{ 0 \leq i \leq \pi; 0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2n}; 0 \leq u \leq \frac{2\pi n}{ H } \right\}$
$\overline{ H }D_{2n} E, n = 1; \overline{ H }D_{2n} C_m 0;$ $\overline{ H }D_{2n} C_n 1; \overline{ H }D_{2n} D_n$	$\left\{ 0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \Omega \leq \frac{\pi}{4n}; 0 \leq u \leq \frac{4\pi n}{ H } \right\}$

- методику расчёта характеристик оптимальных кинематически правильных систем непрерывного однократного обзора;

- результаты расчётов характеристик оптимальных кинематически правильных систем, состоящих из 5 - 11 спутников, в задаче непрерывного однократного обзора, а также каталог характеристик всех правильных систем из 5 - 11 спутников в этой задаче;

- оценку снизу для числа спутников в системе непрерывного однократного обзора, позволяющую утверждать, что в ряде случаев правильные системы состоят из минимально возможного числа спутников;

- доказательство того, что при любых условиях обзора система непрерывного однократного обзора должна состоять не менее, чем из пяти спутников.

Заметим, что последнее утверждение о минимально возможном числе спутников приведено в аннотации доклада [7], задолго до того, как к нему пришёл *A.H. Ballard* в работе [20]. Описанные результаты диссертации были приведены также в статьях [11, 12].

1.4. Характеристики лучших правильных 5- - 11-спутниковых систем оказались значительно выше, чем у систем *L.G. Vargo* и *F.W. Gobetz'*а: при использовании правильных систем экономия спутников достигала 25% и более. Все они могли быть выполнены как системы с одинаковым наклоном орбит, что обеспечивало их динамическую устойчивость.

Расчёты показали, что лучшие кинематически правильные системы с группами симметрии второго типа, как правило, имеют и группы первого типа того же порядка. Создалось впечатление, что задача поиска лучших правильных систем сводится к



нахождению оптимальных в классах систем с группами первого типа. По этой причине, а также потому, что расчёт характеристик лучших систем, имеющих группы второго типа, требует во много раз большего объёма вычислений, были подробно изучены только возможности систем с группами симметрии первого типа: в 1969 году *Г.З. Давлетшин* по методике и при участии автора данной статьи рассчитал характеристики систем однократного непрерывного обзора, число спутников в которых просто, до 47 включительно; в том же году коллектив сотрудников, возглавляемый *Б.П. Бырковым*, приступил к созданию каталогов характеристик систем, содержащих (выборочно) до 100 спутников и предназначенных для многократного (до кратности 6 включительно) непрерывного обзора Земли. Первые варианты каталогов разрабатывались с участием автора в 1969-1973 г.г. Последний, пятитомный, вариант [19] был направлен во все ведущие организации Советского Союза соответствующего профиля.

*J.G. Walker* в работе [9], исследуя задачи непрерывного одно- и двукратного обзора Земли, пришёл к «дельта-системам», являющимся кинематически правильными системами с группами симметрии  $H$  первого типа, у которых компоненты  $H_R$  в прямом множителе  $R$  являются группами вращений вокруг одной оси - вида  $C_n$ . Позднее [14] он рассчитал характеристики лучших «дельта-систем» из 5-15 спутников в задачах непрерывного обзора до кратности 4 включительно. Им была подмечена замечательная особенность «дельта-систем», состоящая в повторении относительного расположения спутников через равные промежутки времени, и даже высказано предположение о том, что, вероятно, в этом следует искать ключ к построению оптимальных систем. Однако какой-либо теории систем с отмеченным свойством *J.G. Walker* построить не попытался (а это привело бы его к кинематически симметричным системам!), не усмотрел он и связи этой особенности с симметрией критериальных функций исследуемых задач, как, впрочем, и самой симметрии. Поэтому естественно, что вне поля его зрения оказались многие другие кинематически правильные системы, а также все системы с нетранзитивными группами симметрии, имеющие во многих случаях более высокие характеристики. К моменту выхода статьи [9] её результаты для советских специалистов новыми не были, так как в этот период уже проводилась широкая работа по изучению возможностей кинематически правильных систем и составлению каталогов их характеристик.

*T.J. Lang* [29, 41] рассчитал характеристики всех «дельта - систем», содержащих до 100 спутников, в задачах непрерывного 1 – 4 - кратного обзора Земли и выявил лучшие из них. Отдавая должное большому объёму выполненной им работы, следует отметить, что по сравнению с каталогами группы *Б.П. Быркова* (они были созданы на много лет раньше и

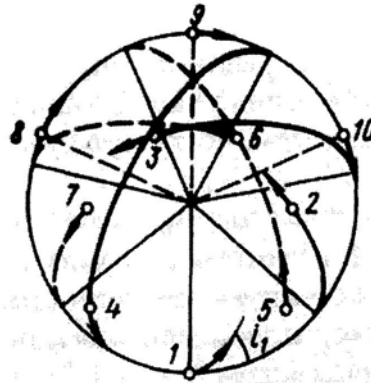
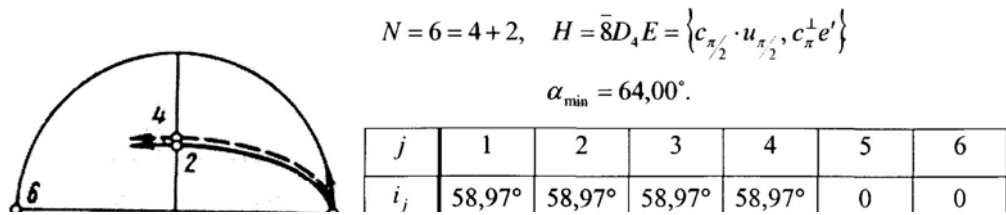
содержали характеристики  $N$  - спутниковых систем не для всех  $N \leq 100$ ) каталоги *T.J. Lang*'а менее полно представляют характеристики отдельных систем и отличаются невысокой точностью. Например, в них величины минимальных угловых радиусов зон обзора, потребных для обеспечения обзора Земли, как правило, занижены. Величина занижения достигает 0,3 град (при том, что значения радиусов в градусах приведены с тремя знаками после запятой).

1.5. Задача непрерывного однократного обзора Земли родственна известной в геометрии задаче о покрытии сферы кругами: расположить на единичной сфере  $N$  неподвижных кругов одинакового радиуса так, чтобы они покрывали всю сферу и чтобы радиус кругов был минимальным. Критериальную функцию задачи неподвижного покрытия также можно представить в виде (2): надо лишь под  $s$  понимать систему из  $N$  точек на сфере, а под  $\alpha_j(s)$  - максимальное из угловых расстояний от  $j$ -й точки до точек её области Дирихле. Имеет задача и обширную группу автоморфизмов - группу  $W$  ортогональных преобразований, оставляющих неподвижным центр сферы. Налицо, таким образом, условия для применения аналогичного теоретико-группового подхода к её исследованию.

Задача о неподвижном покрытии решена лишь для  $N \leq 7$  и  $N = 10, 12, 14$ . При  $N=4, 6$  и  $12$  оптимальными являются расположения центров кругов в вершинах правильных многогранников (тетраэдра, октаэдра и икосаэдра) и имеют транзитивные группы симметрии  $H \subset W$ . При  $N=5$  и  $N=7$  группы симметрии расположений центров кругов (в вершинах правильных бипирамид, треугольной и пятиугольной) нетранзитивны. Во всех случаях расположения имеют богатую симметрию: при  $N=4, 5, 6, 7, 10, 12, 14$  их группы симметрии имеют соответственно порядки 24, 12, 48, 20, 16, 120 и 24, намного превышающие числа кругов.

Руководствуясь указанной аналогией, в работах [10, 13] применительно к задаче однократного обзора были изучены возможности кинематически симметричных систем из 5-11 спутников, не являющихся правильными, но имеющих порядки групп симметрии фазовых состояний, не меньшие числа спутников. В книге [33], где более полно изложена методология исследования, дополнительно рассматривались 12-спутниковые системы (в частности, с группами симметрии, не представленными в таблице 1). Оказалось, что при числах спутников, равных 6, 9, 10 и 12, указанные системы лучше кинематически правильных (по критерию  $\alpha$ ). Изображения и характеристики лучших систем приведены на

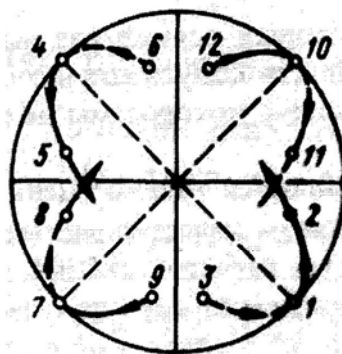
рисунках 1 и 2. Рисунок 3 посвящён 12-спутниковой системе, близкой к наилучшей.



$$N = 10 = 7 + 2 + 1, \quad H = \bar{14}D_7E1 = \{c_{2\pi/7} \cdot u_{2\pi/7}, c_{\pi}^{\perp} e'\}$$

$$\alpha_{\min} = 49,45^{\circ}$$

$j$	1	2	3	...	7	8	9	10
$i_j$	66,79°	66,79°	66,79°	...	66,79°	180°	180°	180°
$\Omega_j$	0	$\frac{2\pi}{7} \cdot 1$	$\frac{2\pi}{7} \cdot 2$	...	$\frac{2\pi}{7} \cdot 6$	0	0	0
$u_j$	0	$\frac{2\pi}{7} \cdot 1$	$\frac{2\pi}{7} \cdot 2$	...	$\frac{2\pi}{7} \cdot 6$	115,44°	180°	244,56°



$$N = 12 = 8 + 4, \quad H = \bar{24}OD_2 = \{c_{\pi/2} e', c_{2\pi/3} \cdot u_{2\pi/3}\}$$

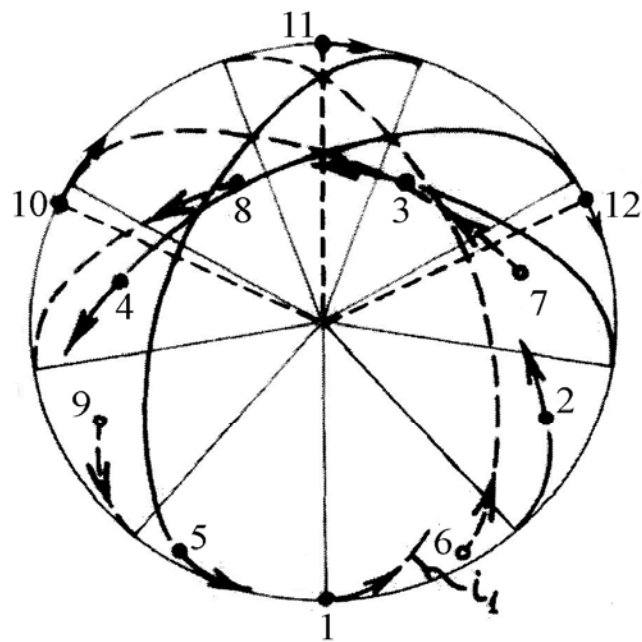
(угол между осями поворотов  $c_{\pi/2}$  и  $c_{2\pi/3}$  равен  $\arctg \sqrt{2} = 54,73^{\circ}$ )

$$\alpha_{\min} = 45,42^{\circ}$$

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_j$	54,73°	54,73°	54,73°	54,73°	54,73°	54,73°	125,27°	125,27°	125,27°	125,27°	125,27°	125,27°
$\Omega_j$	45°	45°	45°	225°	225°	225°	135°	135°	135°	315°	315°	315°
$u_j$	0	61,42°	298,58°	0	61,42°	298,58°	180°	241,42°	118,58°	180°	241,42°	118,58°

Рисунок

1



$$N = 12 = 9 + 2 + 1, \quad H = \overline{18D}, E1 = \{c_{2\pi/9} \cdot u_{2\pi/9}, c_{\pi}^{\perp} e'\}.$$

$$\alpha_{\min} = 45,96^{\circ}.$$

Рисунок 2

$j$	1	2	3	...	9	10	11	12
$i_j$	$68,75^{\circ}$	$68,75^{\circ}$	$68,75^{\circ}$	...	$68,75^{\circ}$	$180^{\circ}$	$180^{\circ}$	$180^{\circ}$
$\Omega_j$	0	$\frac{2\pi}{9} \cdot 1$	$\frac{2\pi}{9} \cdot 2$	...	$\frac{2\pi}{9} \cdot 8$	0	0	0
$u_j$	0	$\frac{2\pi}{9} \cdot 1$	$\frac{2\pi}{9} \cdot 2$	...	$\frac{2\pi}{9} \cdot 8$	$116,7^{\circ}$	$180^{\circ}$	$243,3^{\circ}$

### Рисунок 3

Лучшие кинематически симметричные системы из 6, 9 и 10 спутников, а также близкая к лучшей система из 12 спутников имеют удачную орбитальную структуру. Каждая из них содержит кинематически правильную подсистему с неэкваториальными орбитами одинакового наклона и несколько экваториальных спутников с наклонами  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . Относительное расположение плоскостей таких орбит практически не меняется при их эволюции. К тому же небольшим изменением периода обращения экваториальных спутников можно добиться, чтобы последние «следили» за прецессией узлов орбит правильной подсистемы, т.е. чтобы система была динамически устойчива. Лучшая 12-спутниковая система (рисунок 2) состоит из неэкваториальных спутников двух существенно различных наклонов и поэтому динамически неустойчива. *T.J. Lang* и *J.L. Mayer* в работе

[43] вновь «открыли» 6 - спутниковую систему, через 22 года после опубликования характеристик и изображения системы в статье [13].

По указанным выше причинам кинематически правильные системы с группами симметрии второго типа после выхода работ [5-8, 10-12] долгое время не исследовались. Каталоги [19, 29, 41] (см. также таблицу 4) показали, однако, что кинематически правильные  $N$ -спутниковые системы с группами симметрии первого типа при больших  $N$  теряют свою эффективность и часто уступают, например, фазированным полярным системам *F.W. Gobetz*'а, которые также не идеальны из-за скапливания спутников у полюсов. Всё это, а также возросшие возможности вычислительной техники побудили приступить к изучению систем с группами второго типа. В докладе автора [63] были сообщены результаты расчётов характеристик таких систем, содержащих до 24 спутников включительно, в задачах непрерывного 1-, 4- и 5-кратного обзора. В ряде случаев лучшие системы этого класса имели и группы симметрии первого типа того же порядка. Но немало было и систем с более высокими характеристиками.

Вскоре после доклада [63] автор познакомился с рукописью статьи *В.К. Саульского* [67]. В ней для решения задачи непрерывного однократного обзора предлагались «системы с линейной структурой», удовлетворяющие, по определению, следующим условиям (в нашей терминологии, но с обозначениями *В.К. Саульского*):

- спутники системы обращаются по орбитам одинакового радиуса и наклона;
- система состоит из некоторого количества  $G$ ,  $G \geq 2$ , кинематически правильных подсистем с общей группой симметрии  $H$  первого типа, у которых компонентой  $H_R$  является группа поворотов вокруг оси вращения Земли вида  $C_n$  (таким образом, число  $N$  спутников в системе должно делиться на  $G$ , а порядок  $|H|$  группы  $H$  - равняться числу  $N/G$ );
- все подсистемы получаются из одной последовательно поворотами вокруг оси вращения Земли на углы  $\delta\Omega, 2 \cdot \delta\Omega, \dots, (G-1) \cdot \delta\Omega$  и одновременным сдвигом вдоль орбит на углы  $\delta U, 2 \cdot \delta U, \dots, (G-1) \cdot \delta U$  соответственно (величины углов  $\delta\Omega$  и  $\delta U$  подлежат определению);
- зоны обзора спутников каждой подсистемы должны образовывать непрерывающуюся «цепочку» (условие А);
- между «цепочками» зон обзора «соседних» подсистем («соседними» считаются подсистемы, одна из которых является образом другой при указанном выше одновременном сдвиге на углы  $\delta\Omega$  и  $\delta U$ ), не должно быть просветов (условие Б).

*В.К. Саульский* исследовал возможности систем с линейной структурой,

характеризующихся значениями  $G=2$  и  $G=3$ , в задачах непрерывного однократного обзора всей Земли и широтного пояса  $\pm 65^\circ$ . В ряде случаев при больших числах спутников характеристики этих систем оказались высокими. При  $G=2$  класс систем с линейной структурой относится к классу кинематически правильных систем с группами второго типа, начальные фазовые состояния которых задаются формулами (14) (и совпал бы с ним, если бы не условия А и Б). Поэтому результаты *В.К. Саульского* для  $G=2$  в задаче глобального обзора лучшими из известных к тому времени, в основном, не были (уже были обчислены системы с группами второго типа, содержащие до 36 спутников). Но системы с  $G=3$  вызвали серьёзный интерес. Они относятся к классу кинематически симметричных  $N$ -спутниковых систем с группами симметрии  $H$  второго типа, характеризующихся разложениями (9) вида

$$N = |H| + \frac{|H|}{2}, \quad (16)$$

и состоят из двух правильных подсистем, содержащих  $|H|$  и  $\frac{|H|}{2}$  спутников.

1.6. Итак, к настоящему времени для решения задач непрерывного обзора Земли спутниковыми системами на круговых орбитах одинакового радиуса были предложены и исследованы (в порядке появления, за исключением систем *L.G. Vargo*, уступающих системам *F.W. Gobetz*'а):

- фазированные полярные системы (*F.W. Gobetz*);
- кинематически правильные системы с группами симметрии первого типа (*Г.В. Можяев*, позже - *J.G. Walker*);
- кинематически правильные системы с группами симметрии второго типа (*Г.В. Можяев*);
- кинематически симметричные системы с «богатой» симметрией, т.е. с порядками групп симметрии, не меньшими числа спутников (*Г.В. Можяев*);
- системы с линейной структурой (*В.К. Саульский*);
- кинематически симметричные системы с группами симметрии второго типа и разложениями вида (16) (*Г.В. Можяев*).

Характеристики лучших  $N$ -спутниковых систем этих классов (их мы обозначаем для краткости аббревиатурами ФПС, КПС-1, КПС-2, КСС, СЛС и КСС-2 соответственно) в задачах непрерывного однократного обзора (до  $N=60$  включительно) и четырёхкратного обзора Земли (до  $N=40$  включительно) представлены в таблицах 4 и 5. Учитывая отмеченные

выше недостатки каталогов [19, 29, 41], а также выявленные неточности характеристик систем *F.W. Gobetz*'а, приведенных в работе [31], все системы (кроме систем с линейной структурой: величина  $\alpha$  для них взята из статьи [67]) обсчитывались заново. В таблицах 6 и 7 приведены данные, позволяющие найти начальные параметры движения лучших систем указанных классов. Для КПС-1 – это наклонение орбит  $i$  (величины  $\Omega_j$  и  $u_j$  находятся по символу группы симметрии с помощью формул (12), в которых надо положить  $\Omega_1 = u_1 = 0$ ). Для КСС - это:

- наклонение орбит  $i$  неэкваториальной правильной подсистемы ( $\Omega_j$  и  $u_j$  для её спутников находятся по символу указанной в таблице 4 или 5 группы симметрии второго типа с помощью формул (14), в которых надо положить  $\Omega_1 = u_1 = 0$ ; число спутников в этой подсистеме равно половине порядка группы - первому слагаемому в приведенном в таблице 4 или 5 разложении числа  $N$  вида (9));

- наклонение  $i_{\text{эkv}}$  орбит экваториальных правильных подсистем (оно всегда одно и то же у всех экваториальных спутников; количество таких подсистем равно числу слагаемых в разложении числа  $N$  минус 1, а числа спутников в них - слагаемым, стоящим на втором, третьем и т.д. местах);

- аргументы широты  $u_{\text{эkv}}$  одного из спутников каждой правильной экваториальной подсистемы (по нему находятся с помощью соответствующих формул (14), в которых надо положить  $u_1 = u_{\text{эkv}}$ , аргументы широты других спутников подсистемы).

Для КПС-2 в таблицах 6 и 7 приведены параметры  $i_1, \Omega_1, u_1$  первого спутника (аналогичные параметры остальных находятся по символу группы с помощью формул (14)). Начальные параметры движения лучших СЛС не приводятся (см. [67]). Для КСС-2 указаны  $i_1, \Omega_1, u_1$  (по ним параметры остальных спутников  $|H|$  - спутниковой правильной подсистемы находятся по символу группы симметрии с помощью формул (14), а  $\frac{|H|}{2}$  - спутниковой правильной подсистемы - по формулам (14), в которых надо положить  $\Omega_1 = u_1 = 0$ ). Для ФПС в таблице 7 приведены углы  $\Delta\Omega$  между соседними плоскостями орбит с одинаковым направлением движения спутников и сдвиги  $\Delta u$  по фазе, которые претерпевают спутники при переходе от одной соседней плоскости к другой. В отличие от задачи однократного



Таблица 4

Характеристики лучших спутниковых систем непрерывного однократного обзора Земли

N	ФПС		КПС-1		КСС			КПС-2		СЛС		КСС-2	
	P×S	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	H	Разложе- ние N	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\min}$		H	$\alpha_{\min}$
										G=2	G=3		
5			$5C_5E1$	69.16									
6	2×3	66.72	$6C_6C_2$	66.42	$\bar{8}D_4E$	4+2	64.00	$\bar{6}D_3E$	66.42			$\bar{4}D_2C_2$	66.72
7			$7C_7E3$	60.26	$\bar{10}D_5E1$	5+2	61.7						
8	2×4	56.95	$8C_8C_2$	56.52	$\bar{12}D_3E$	6+2	57.6	$\bar{8}D_4C_20$	56.52				
9	3×3	60.92	$9C_9E4$	54.81	$\bar{14}D_7E1$	7+2	52.96					$\bar{6}D_3E$	54.81
10	2×5	53.22	$10C_{10}E3$	51.54	$\bar{14}D_7E1$	7+2+1	49.45	$\bar{10}D_5E2$	51.43				
11			$11C_{11}E3$	47.61	$\bar{14}D_7E1$	7+2+2	48.1						
12	3×4	48.59	$12C_3E$	47.90	$\bar{24}OD_2$ $\bar{18}D_9E1$	8+4 9+2+1	45.42 45.96	$\bar{12}D_3E$	47.90			$\bar{8}C_2E$	48.59
13			$13C_{13}E5$	43.77	$\bar{18}D_9E1$	9+2+2	44.5						
14	2×7	49.26	$14C_7E2$	41.96	$\bar{20}D_{10}E1$	10+2+2	43.8	$\bar{14}D_7E3$	41.96				
15	3×5	42.07	$15C_3E$	42.14	$\bar{20}D_2E$	10+5	42.07					$\bar{10}C_2E$	42.07
16	2×8	48.03	$16C_8E3$	40.11	$\bar{28}D_{14}C_22$	14+2	42.2	$\bar{16}D_4E$	40.11				
17			$17C_{17}E5$	38.91	$\bar{26}D_{13}E1$	13+2+2	41.6						
18	3×6	38.69	$18C_6C_2$	38.36	$\bar{24}D_2C_2$	12+6	38.69	$\bar{18}D_3E$	38.36			$\bar{12}C_2E$	38.69
19			$19C_{19}E7$	37.12			>40						

Продолжение таблицы 4

N	ФПС		КПС-1		КСС			КПС-2		СЛС		КСС-2	
	P×S	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	H	Разложе- ние N	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\min}$		H	$\alpha_{\min}$
										G=2	G=3		
20	4×5	38.03	20C <sub>10</sub> E3	36.62	$\overline{32}D_8C_2$ $\overline{36}D_9E4$	16+4 18+2	37.8	$\overline{20}D_{10}C_21$	36.48	36.48			
21	3×7	36.30	21C <sub>7</sub> E2	36.68	$\overline{28}D_2E$	14+7	36.30					$\overline{14}C_2E$	36.30
22			22C <sub>22</sub> C <sub>2</sub> 4	35.24			>36.2	$\overline{22}D_{11}E5$	34.01	34.01			
23			23C <sub>23</sub> E5	34.68			>38						
24	4×6	33.58	24C <sub>6</sub> E	35.64	$\overline{40}D_{20}C_23$	20+4	33.8	$\overline{24}D_{12}C_2$	32.81	32.77		$\overline{16}D_8C_40$	36.8
25	5×5	36.38	25C <sub>25</sub> E7	34.28	$\overline{40}D_{20}E7$	20+5	36.2						
26			26C <sub>26</sub> C <sub>2</sub> 5	33.19	$\overline{44}D_{22}C_22$	22+4	34.3	$\overline{26}D_{13}E6$	31.11	31.18			
27	3×9	33.85	27C <sub>9</sub> E2	32.77	$\overline{42}D_{21}E8$	21+6	33.0					$\overline{18}D_3E$	32.77
28	4×7	30.79	28C <sub>7</sub> E3	32.94	$\overline{48}D_{24}E5$	24+4	31.9	$\overline{28}D_{14}C_21$	30.16	30.23			
29			29C <sub>29</sub> E8	32.40			>36						
30	5×6	31.25	30C <sub>10</sub> C <sub>2</sub> 2	31.56	$\overline{54}D_{27}E8$	27+3	31.0	$\overline{30}D_{15}E7$	29.20	29.25		$\overline{20}D_{10}C_21$	31.56
31			31C <sub>31</sub> E7	31.25			>35						
32	4×8	28.86	32C <sub>32</sub> C <sub>4</sub> 1	30.80	$\overline{56}D_7E2$	28+4	29.4	$\overline{32}D_{16}C_21$	28.49	28.49			
33	3×11	32.66	33C <sub>33</sub> E8	30.31	$\overline{54}D_{27}E8$	27+6	30.1					$\overline{22}D_{11}E5$	29.97
34			34C <sub>17</sub> E7	29.93	$\overline{56}D_{28}E13$	28+4+2	31.7	$\overline{34}D_{17}E8$	27.83	27.97			
35	5×7	27.96	35C <sub>35</sub> E9	29.55	$\overline{56}D_4E$	28+7	29.7						

Продолжение таблицы 4

N	ФПС		КПС-1		КСС			КПС-2		СЛС		КСС-2	
	P×S	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	H	Разложе- ние N	$\alpha_{\min}$	H	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\min}$		H	$\alpha_{\min}$
										G=2	G=3		
36	4×9	27.62	36C <sub>18</sub> E7	28.87	$\overline{56D_7E2}$	28+8	28.87	$\overline{36D_{18}C_21}$	27.41	27.42		$\overline{24D_{12}C_2}$	28.29
37			37C <sub>37</sub> E7	28.36									
38			38C <sub>19</sub> E4	28.08				$\overline{38D_{19}E9}$	27.00	27.02			
39			39C <sub>39</sub> E16	27.54							26.72	$\overline{26D_{13}E6}$	26.68
40	5×8	25.74	40C <sub>20</sub> C <sub>5</sub>	27.87				$\overline{40D_{20}C_21}$	26.54				
41			41C <sub>41</sub> E16	26.78									
42	6×7	26.53	42C <sub>21</sub> E4	26.45				$\overline{42D_{21}E10}$	26.22		25.43	$\overline{28D_{14}C_21}$	25.43
43			43C <sub>43</sub> E9	26.17									
44			44C <sub>22</sub> E9	25.76				$\overline{44D_{11}E2}$	25.76				
45	5×9	24.18	45C <sub>45</sub> C <sub>5</sub> 2	26.02								$\overline{30D_{15}E7}$	24.45
46			46C <sub>23</sub> E9	25.15				$\overline{46D_{23}E7}$	25.12				
47			47C <sub>47</sub> E9	24.95									
48	6×8	24.00	48C <sub>24</sub> E5	24.78				$\overline{48D_{12}E5}$	24.78		23.57	$\overline{32D_{16}C_21}$	23.47
49			49C <sub>49</sub> E20	24.41									
50	5×10	23.05	50C <sub>25</sub> C <sub>5</sub> 1	24.78				$\overline{50D_{25}E9}$	24.30				
51			51C <sub>51</sub> E20	24.07							22.82	$\overline{34D_{17}E8}$	22.63
52	4×13	24.99	52C <sub>26</sub> E5	23.79				$\overline{52D_{13}E4}$	23.74				

Окончание таблицы 4

$N$	ФПС		КПС-1		КСС			КПС-2		СЛС		КСС-2	
	$P \times S$	$\alpha_{\min}$	$H$	$\alpha_{\min}$	$H$	Разложе- ние $N$	$\alpha_{\min}$	$H$	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\min}$		$H$	$\alpha_{\min}$
										$G=2$	$G=3$		
53			$53C_{53}E11$	23.81									
54	6×9	22.21	$54C_{27}E11$	23.50				$\overline{54D_3E}$	23.24		22.15	$\overline{36D_{12}C_21}$	22.14
55	5×11	22.17	$55C_{55}C_52$	23.92									
56	7×8	23.07	$56C_{28}E11$	23.12				$\overline{56D_{14}E3}$	23.12				
57			$57C_{57}E11$	22.99							21.57	$\overline{38D_{19}E9}$	21.55
58			$58C_{29}E6$	22.93				$\overline{58D_{29}E9}$	22.65				
59			$59C_{59}E24$	22.69									
60	6×10	20.89	$60C_{20}C_23$	22.67				$\overline{60D_3C_3}$	21.86			$\overline{40D_{10}C_21}$	21.06

Таблица 5

Характеристики лучших спутниковых систем непрерывного четырёхкратного обзора Земли

N	ФПС		КПС-1		КСС			КПС-2		КСС-2	
	P×S	$\alpha$	H	$\alpha$	H	Разложе- ние N	$\alpha$	H	$\alpha$	H	$\alpha$
12		90.0	12C <sub>12</sub> C <sub>2</sub>	82.40	$\overline{20D}_{10}E1$	10+2	85.51	$\overline{12D}_6C_2$	82.40	$\overline{8D}_4C_20$	83.1
13			13C <sub>13</sub> E6	77.15	$\overline{22D}_{11}E1$	11+2	82.6				
14		90.0	14C <sub>14</sub> C <sub>2</sub> 1	75.82	$\overline{20D}_{20}C_22$	10+4	78.2	$\overline{14D}_7E3$	73.44		
15	3×5	77.1	15C <sub>15</sub> E7	70.84	$\overline{24D}_4E$	12+3	72.70			$\overline{10D}_5E2$	70.87
16	4×4	74.3	16C <sub>16</sub> E3	69.03	$\overline{24D}_{12}C_2$	12+4	71.3	$\overline{16D}_8E3$	69.03		
17			17C <sub>17</sub> E3	66.98	$\overline{28D}_{14}E1$	14+2+1	70.9				
18	3×6	71.0	18C <sub>3</sub> E	64.13	$\overline{24D}_4E1$	12+6	64.00	$\overline{18D}_3E$	64.13	$\overline{12D}_3E$	65.01
19			19C <sub>19</sub> E4	63.03	$\overline{28D}_{14}E1$	14+2+2+1	68.5				
20	4×5	71.8	20C <sub>10</sub> E3	62.05	$\overline{30D}_{15}E7$	15+5	62.36	$\overline{20D}_5E2$	62.05		
21	3×7	67.6	21C <sub>3</sub> E	58.71	$\overline{30D}_{15}E4$	15+6	61.1			$\overline{14D}_7E3$	61.7
22	2×11	67.5	22C <sub>22</sub> C <sub>2</sub> 4	58.06	$\overline{40D}_{20}E9$	20+2	60.6	$\overline{22D}_{11}E2$	58.06		
23			23C <sub>23</sub> E4	56.81			>60				
24	4×6	63.2	24C <sub>12</sub> E5	54.94	$\overline{32D}_4C_20$	16+8	54.74	$\overline{24D}_6E$	54.94	$\overline{16D}_4E$	56.5
25	5×5	62.0	25C <sub>25</sub> E4	54.53	$\overline{40D}_{20}E9$	20+5	56.6				
26	2×13	60.5	26C <sub>26</sub> C <sub>2</sub> 4	52.57	$\overline{48D}_{12}C_2$	24+2	54.8	$\overline{26D}_{13}E2$	52.57		
27	3×9	61.6	27C <sub>27</sub> E4	52.54	$\overline{36D}_{18}E7$	18+6+3	52.85			$\overline{18D}_9E4$	52.46
28	4×7	57.5	28C <sub>28</sub> C <sub>4</sub> 1	50.88	$\overline{40D}_5E1$	20+8	50.82	$\overline{28D}_{14}C_23$	50.88		
29			29C <sub>29</sub> E7	50.37			>55				
30	2×15	56.4	30C <sub>30</sub> E13	49.79	$\overline{40D}_{20}C_5$	20+10	50.2	$\overline{30D}_{15}E2$	49.79	$\overline{20D}_{10}E3$	50.0
31			31C <sub>31</sub> E10	49.09			>55				
32	4×8	53.8	32C <sub>32</sub> C <sub>4</sub> 1	48.20	$\overline{48D}_6C_2$	24+8	48.85	$\overline{32D}_{16}C_4$	48.16		
33	3×11	60.6	33C <sub>33</sub> E8	47.61	$\overline{48D}_{24}C_33$	24+6+3	48.15			$\overline{22D}_{11}E3$	47.51
34	2×17	53.7	34C <sub>34</sub> C <sub>2</sub> 5	47.17	$\overline{60D}_{30}C_22$	30+4	47.7	$\overline{34D}_{17}E6$	46.92		
35	5×7	53.8	35C <sub>35</sub> E8	46.39	$\overline{50D}_5C_5$	25+10	46.97				
36	4×9	51.6	36C <sub>4</sub> E	45.99	$\overline{54D}_{27}E8$	27+6+3	45.59	$\overline{36D}_2E$	45.99	$\overline{24D}_4E$	45.99
37			37C <sub>37</sub> E16	45.32			>50				
38	2×19	51.8	38C <sub>38</sub> C <sub>2</sub> 5	44.99	$\overline{68D}_{17}E8$	34+4	46.6	$\overline{38D}_{19}E4$	44.94		
39	3×13	>55	39C <sub>39</sub> E17	44.36	$\overline{60D}_{30}C_33$	30+6+3	45.26			$\overline{26D}_{13}E4$	44.36
40	5×8	48.8	40C <sub>4</sub> E	43.69	$\overline{60D}_6E$	30+10	43.70	$\overline{40D}_2E$	43.69		

Таблица 6

Параметры движения лучших спутниковых систем непрерывного однократного обзора

N	КПС-1	КСС			КПС-2			СЛС <i>i</i>		КСС-2		
	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i<sub>экв</sub></i>	<i>u<sub>экв</sub></i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u</i>	<i>G=2</i>	<i>G=3</i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u<sub>1</sub></i>
5	43.65											
6	126.86	58.97	0	90.00	53.14	30.00	120.00			52.23	0.00	120.00
7	55.70	60.6	180	131.2								
8	118.13	67.5	0	90.00	61.87	22.50	135.00					
9	70.31	60.96	180	135.95						70.31	160.00	40.00
10	47.93	66.79	180	115.44 180.00	131.91	16.92	53.30					
11	53.79	69.6	180	107.5 162.5								
12	50.73	68.75	180	116.7 180.00	129.27	0.00	45.00			90.00	69.30	45.00
13	121.65	71.3	180	108.0 162.0								
14	53.98	71.7	180	100.0 160.0	126.02	0.00	90.00					
15	53.50	65.5	0	180.0						90.00	65.51	36.00
16	123.46	56.4	180	90.00	56.54	22.50	59.06					
17	55.47	72.7	180	108.0 162.5								
18	56.56	64.34	0	30.00	123.44	30.00	40.00			90.00	64.38	30.00
19	57.40											
20	56.78	84.9 123.3	180 0	65.2 90.00	115.45	1.01	128.40	64.58				
21	118.88	62.86	0	25.71						90.00	62.86	25.71
22	58.36				62.32	1.39	49.87	62.28				
23	58.72											
24	58.38	60.9	0	45.00	115.77	0.00	51.02	65.41		112.5	0.0	120.0
25	118.78	57.6	0	36.00								
26	59.53	59.4	180	60-85	62.63	5.08	40.40	63.45				
27	59.90	99.8	180	44-47						120.12	39.75	53.50
28	120.90	61.7	0	45.00	115.16	3.34	137.17	64.75				
29	118.28											
30	60.59	78.8	0	60.00	63.80	4.95	121.10	65.00		60.59	0.00	120.00
31	60.96											
32	106.19	114.3	180	45.00	114.86	5.01	58.78	65.44				
33	76.85	81.5	0	50-53						63.28	8.18	270.00
34	113.75	119.6	0	30-75 90.00	64.87	2.30	127.27	65.75				
35	105.33	62.8	0	25.7								
36	68.50	111.7	180	34-35	114.88	1.70	51.70	65.12		114.86	7.50	87.75
37	66.44											
38	112.68				65.63	0.14	131.68	65.70				
39	111.19							66.31		66.32	186.32	58.00

Продолжение таблицы 6

N	КПС-1		КСС		КПС-2			СЛС <i>i</i>		КСС-2		
	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i<sub>экв</sub></i>	<i>u<sub>экв</sub></i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u</i>	<i>G=2</i>	<i>G=3</i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u<sub>1</sub></i>
40	106.87				114.67	0.81	133.92					
41	65.41											
42	69.14				66.48	1.29	45.00		67.09	112.93	5.22	80.25
43	111.84											
44	114.37				65.63	8.18	69.55					
45	107.00									68.00	2.70	285.3
46	67.38				66.23	0.51	117.95					
47	66.56											
48	111.31				111.31	7.50	18.75		68.72	111.25	1.34	70.88
49	112.28											
50	107.31				112.46	2.77	65.74					
51	66.79								69.34	69.45	0.30	66.56
52	68.09				67.41	4.74	54.28					
53	111.01											
54	122.70				90.00	17.66	10.00		69.66	110.41	2.47	287.00
55	107.70											
56	67.62				112.38	6.43	16.07					
57	68.13								70.31	70.20	3.43	60.75
58	110.59				68.61	2.64	114.55					
59	112.00											
60	68.11				90.00	17.23	9.00			109.29	4.50	301.62

Таблица 7

Параметры движения лучших спутниковых систем непрерывного четырёхкратного обзора

N	ФПС		КПС-1	КСС		КПС-2			КСС-2			
	$\Delta\Omega$	$\Delta u$	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i<sub>экв</sub></i>	<i>u<sub>экв</sub></i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u<sub>1</sub></i>	<i>i<sub>1</sub></i>	$\Omega_1$	<i>u<sub>1</sub></i>
12			57.62	40.2	180	155.0	57.62	15.00	30.00	58.5	22.5	67.5
13			134.26	40.0	180	139.0						
14			62.38	71.2	180	45.0	127.30	6.94	156.8			
15	60.3	36.0	124.32	126.2	0	60.0				124.31	168.00	24.00
16	47.2	22.5	122.38	60.0	0	45.0	122.38	11.25	123.75			
17			130.06	56.7	180	114.0 180						
18	61.0	0.0	56.48	87.24	0	30.00	123.52	0.00	30.00	124.4	0.00	58.4
19			58.09	70.0	180	115.0 156.0 180.0						

N	ФПС		КПС-1	КСС			КПС-2			КСС-2		
	$\Delta\Omega$	$\Delta u$	$i$	$i$	$i_{экр}$	$u_{экр}$	$i_1$	$\Omega_1$	$u_1$	$i_1$	$\Omega_1$	$u_1$
20	46.0	18.0	59.47	115.43	180	36.00	120.53	18.00	27.00			
21	60.2	11.4	125.64	72	0	32-38				59.4	170.4	140.0
22	90.5	0.0	122.66	128.0	0	90.00	122.66	8.18	49.09			
23			123.27									
24	46.8	0.0	55.25	90.00	0	0.00	124.75	15.00	52.50	55.4	22.5	79.4
25	38.8	34.2	125.63	114.4	180	36.0						
26	90.5	0.0	126.06	57.1	180	90.0	126.06	6.92	138.46			
27	60.6	8.6	123.09	88.5	180	25-31 60.0				123.35	175.59	136.25
28	47.9	0.0	124.53	83.0	0	38-40	55.47	6.43	154.29			
29			54.57									
30	90.4	0.0	52.34	94.7	180	31.0	127.66	6.00	138.00	127.9	9.0	322.5
31			127.25									
32	47.7	0.0	125.34	102.10	0	28.75	125.47	27.1	3.38			
33	60.4	0.0	53.83	85.73	180	28.50 60.00				126.0	179.69	20.06
34	90.4	0.0	126.16	65.0	180	74-77	55.56	5.29	153.37			
35	37.3	0.0	54.07	78.62	0	26.1						
36	47.8	0.0	54.73	103.66	0	25.25 60.00	54.72	45.00	5.00	125.27	0.00	40.00
37			53.93									
38	90.3	0.0	126.41	115.9	0	67-75	54.91	2.46	113.02			
39			53.91	81.89	180	24.12 60.0				53.91	4.61	106.15
40	37.8	0.0	54.97	110.23	0	25.00	54.97	45.00	4.50			

обзора только при  $N = 15, 16$  и  $20$  углы  $\Delta\Omega$  и  $\Delta u$  соответствуют «шахматному» расположению спутников. В остальных случаях этого нет; так что соответствующие системы, вообще говоря, уже не являются системами *F.W. Gobetz*'а.

Все угловые величины приведены в градусах.

Таблица 4 показывает, что по критерию  $\alpha$  в задаче однократного обзора лучшими  $N$ -спутниковыми системами являются:

- при  $5 \leq N \leq 19$  - системы классов КПС-1 и КСС (лучшие КПС-2 при  $N=8,14,16,18$



относятся и к классу КПС-1);

- при  $20 \leq N \leq 38$  - системы класса КПС-2 (с одним исключением: при  $N=21$  лучшая система принадлежит одновременно к классам ФПС, КСС и КСС-2; эта трёхплоскостная система *F.W. Gobetz*'а становится системой класса КСС, если линию пересечения плоскостей «положить» на плоскость экватора; аналогичная ситуация имеет место и при  $N = 15$  и  $18$ , но самыми лучшими эти системы не являются);

- при  $39 \leq N \leq 60$  - системы классов КСС-2 и ФПС.

Системы классов КПС-2 или КСС-2, лучшие при указанных  $N$ , далеко не всегда принадлежат к классу СЛС с  $G = 2$  или  $G = 3$  соответственно (и имеют более высокие, чем у СЛС, характеристики). Наверняка можно утверждать, что не принадлежат, когда  $N = 26, 28, 30, 34, 38, 39, 48, 51, 57$ , и принадлежат, когда  $N = 20, 22$ . В случаях, когда  $N = 24, 36, 54$ , вопрос остаётся открытым (взятая из работы [67] и приведенная в таблице 4 величина  $\alpha$  для СЛС с  $N = 24$  по-видимому ошибочна). Это говорит о том, что в задачах непрерывного обзора накладывать на рассматриваемые системы рекомендуемые *В.К. Саульским* условия А и Б нецелесообразно.

Положение дел с исследованием задачи непрерывного однократного обзора Земли удовлетворительным признать всё же нельзя, так как при

$N=15, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 52, 53, 55, 56, 58, 59$

(т.е. в 21 случае из рассмотренных 56!) мы не знаем систем, которые были бы лучше, чем системы из меньшего количества спутников. Более того, если придерживаться отмеченного в п. 1.1 требования «динамической устойчивости», то в системе не может быть неэкваториальных спутников с разными наклонениями. С ростом  $N$  и уменьшением величины  $\alpha$ , необходимой для обзора Земли, наклонение орбит неэкваториальной подсистемы поневоле должно приближаться к  $\pi/2$ , и у полюсов будет скапливаться неоправданно много спутников. Добавление экваториальных спутников, не нарушающих динамическую устойчивость и осматривающих всё более сужающуюся приэкваториальную область, положения не исправит. Ожидать высоких характеристик от таких систем не приходится. Выход один: необходимо перейти к новым моделям номинальных движений спутниковых систем с разными наклонениями. При этом, если придерживаться требования динамической устойчивости и использования круговых орбит, придётся рассматривать системы с орбитами разных радиусов, соизмеримыми периодами обращения по ним и с большими периодами движения всей системы (ввиду малости угловой скорости прецессии орбит). Можно, сохраняя одинаковость радиусов орбит, пересмотреть понятие динамической

устойчивости и отказаться от требования неподвижности плоскостей оскулирующих орбит по отношению друг к другу. Тогда требование периодичности движения спутниковой системы (период будет также большим) по отношению к некоторой системе координат (связанной, например, с плоскостью орбиты одного из спутников) необходимо оставить: иначе не будет ясно, на каком интервале времени оптимизировать работу системы.

Согласно таблице 5 в задаче 4-кратного обзора в диапазоне  $12 \leq N \leq 40$  доминируют КПС-1 и КПС-2. Системы класса КПС-2, лучшие при  $N = 14, 32, 34, 38$  и не входящие в КПС-1, классу СЛС (с  $G=2$ ) принадлежат при  $N = 14$  и  $N = 34$ . Аналогично КСС-2, лучшие при  $N = 27, 33$  и  $39$ , классу СЛС (с  $G=3$ ) принадлежат лишь при  $N = 39$ . Системы класса ФПС плохи. В отличие от задачи однократного обзора с ростом  $N$  качество лучших систем монотонно повышается.

Отметим интересную работу Ш.И. Галиева и В.И. Заботина [22]. В ней авторы доказали, что критериальные функции в задачах непрерывного обзора Земли (любой кратности) системами на круговых орбитах одинакового радиуса удовлетворяют условиям Липшица по всем переменным. Такие функции, как известно, допускают гарантированное нахождение глобального экстремума методом ломаных. Однако систем, которые были бы по соответствующим критериям лучше известных, на этом пути пока не получено.

1.7. Различные авторы изучали возможности спутниковых систем указанных выше классов в задачах непрерывного обзора различных широтных поясов:

- класса ФПС в задаче однократного обзора (*R.D. Luders* [2,15], *M.H. Ullock* и *A.H. Shoen* [4]);
- класса ФПС в задачах многократного обзора (*W.S. Adams* и *L.Rider* [31]);
- классов КПС-1, КПС-2, КСС в задаче однократного обзора (*Г.В. Можжаев* [33]);
- класса КПС-1 в задачах многократного обзора (*T.J. Lang* и *W.S. Adams* [48]);
- класса СЛС в задаче однократного обзора (*В.К. Саульский* [67]).

Заметим, что применение «симметричной» методологии исследования задачи непрерывного обзора широтных поясов потребовало разработки ряда теоретических вопросов, связанных с тем, что такая задача имеет отличную от (9) группу автоморфизмов - группу  $\{D_\infty, U, V\}$ , где  $D_\infty$  - группа, состоящая из всевозможных поворотов вокруг оси вращения Земли и поворотов на  $180^\circ$  вокруг осей, лежащих в плоскости экватора. Необходимо было решить проблему эквивалентности конечных подгрупп группы  $\{D_\infty, U, V\}$ , системы обозначений этих подгрупп, сужения областей изменения переменных

при решении задачи в соответствующих классах кинематически симметричных систем (см. [33]).

1.8. *В.Т. Бобронников* и *В.И. Шубин* [21] предприняли попытку выяснить возможности КПС в задаче периодического обзора широтных поясов (и, в частности, всей Земли). Предложенный ими метод расчёта позволял определять характеристики многих (но не всех) правильных систем. В тот же период *Б.П. Бырков* с сотрудниками разработали методику, пригодную для любых правильных систем [26], и провели соответствующие расчёты. Однако не все даже КПС-1 оказались исследованными. Возможности КПС-1 в задаче периодического обзора оценивали *T.J. Lang* и *J.M. Hanson* [25]. Этому посвящена и более поздняя работа *T.J. Lang* [64].

Последовательное «симметричное» исследование задачи периодического обзора было проведено *А.А. Гутеневым* и *Г.В. Можяевым* [23, 24]. Было показано, что группой автоморфизмов задачи является группа  $\{C_\infty, U, c_\pi^\perp e'\}$ , порождённая группой  $C_\infty$  всевозможных поворотов вокруг оси вращения Земли, динамической группой  $U$  и произведением  $c_\pi^\perp e'$  поворота  $c_\pi^\perp$  на  $180^\circ$  вокруг лежащей в плоскости экватора оси (всё равно, какой) на преобразование замены знака времени  $e'$ . Это потребовало решения аналогичных упоминавшимся в связи с группой  $\{D_\infty, U, V\}$  проблем: эквивалентности конечных подгрупп, их обозначений, сужения областей изменения переменных при решении задачи в классах систем с группами симметрии из  $\{C_\infty, U, c_\pi^\perp e'\}$ . Были разработаны также методики расчёта, пригодные для любых спутниковых систем. Исследовались характеристики систем классов КПС-1, КПС-2 и КСС, состоящие из спутников с одинаковым наклоном орбит. Расчёты показали, что для ряда интересующих практику вариантов исходных данных (в частности, при небольших высотах полёта и малых размерах зон обзора спутников) лучшими оказались системы класса КСС с «бедной» симметрией, получившие название «одномаршрутных». Они отличаются следующими особенностями. Геоцентрические проекции их спутников вычерчивают на вращающейся Земле одну и ту же трассу и движутся по ней цепочкой, появляясь в любой точке (исключая точки самопересечения трассы) через некоторые равные промежутки времени  $\Delta t$ : сначала 1-й спутник цепочки, затем 2-й, ..., последний  $N$ -й; при этом между прохождением  $N$ -го спутника на предыдущем цикле и 1-го на последующем протекает время, отличное от  $\Delta t$  (иначе система принадлежала бы к классу КПС-1). Иначе говоря, начальные фазовые состояния спутников являются образами состояния 1-го спутника при действии степеней

некоторого преобразования динамической группы сдвигов спутников вдоль траекторий их движения по отношению к вращающейся Земле. Часто одномаршрутные системы имели то же наклонение орбит (а значит, с точностью до поворотов вокруг оси вращения Земли - ту же трассу), что и оптимальная односпутниковая «система», а периодичность обзора одномаршрутной системы равнялась периодичности обзора односпутниковой, делённой на число спутников. Было обнаружено, что высокую эффективность в задаче периодического обзора могут иметь и системы, состоящие из нескольких одномаршрутных подсистем.

Независимо и примерно в то же время к одномаршрутным системам периодического обзора пришли *Б.П. Бырков* с сотрудниками [26] и *В.К. Саульский* [30]. Они рассматривали также системы, содержащие несколько одномаршрутных подсистем, получаемых из одной «базовой» небольшими поворотами вокруг оси вращения Земли, добиваясь эффекта расширения полос обзора «базовых» спутников. *Ю.Н. Разумный* [37, 44, 46] пошёл дальше и исследовал системы, которые назвал «регулярными». Они состоят из некоторого числа  $\eta$  одномаршрутных подсистем, являющихся образами некоторой «базовой» подсистемы при одновременном повороте на углы  $k \cdot \Delta\Omega$  вокруг оси вращения Земли и сдвиге  $k \cdot \Delta t$  во времени движения по отношению к вращающейся Земле,  $k = 1, 2, \dots, \eta - 1$  (величины  $\Delta\Omega$  и  $\Delta t$  подлежат определению). В ряде случаев характеристики регулярных систем оказались выше, чем у одномаршрутных. *Ю.Н. Разумный* установил ряд свойств регулярных систем, облегчающих поиск лучших систем этого класса.

*T.J. Lang*[58] предложил «генетический алгоритм», направленный на улучшение характеристик систем периодического обзора.

## **2. Задачи оптимизации номинальных движений спутниковых систем, использующих некруговые орбиты и предназначенных для обзора поверхности Земли**

2.1. До некоторого времени считалось, что в системах глобального назначения, когда требуется обслуживать потребителей в любой точке земного шара или значительной его части, круговые орбиты эффективнее эллиптических. Уверенность в этом поколебал *J.E. Draim*, который в работе [27] описал систему из четырёх спутников, использующую непрецессирующие эллиптические орбиты и обеспечивающую при определённых, хотя и чрезвычайно жёстких, условиях непрерывный однократный обзор Земли, в то время как было известно, что система непрерывного обзора на круговых орбитах одинакового радиуса требует минимум пять спутников.

Это послужило стимулом к изучению возможностей систем на эллиптических орбитах в задачах непрерывного обзора, используя теоретико-групповой подход. Если не принимать во внимание соображения, связанные с обеспечением динамической устойчивости и рассматривать системы на непрецессирующих орбитах, то можно показать, что критерии оптимальности могут быть представлены в виде (2) и что группой автоморфизмов задачи  $p$ -кратного непрерывного обзора Земли при любом  $p$  является группа  $\{W, U, V\}$ . Однако теперь преобразование динамической группы, сдвигающее спутники по их орбитам на половину периода уже не будет действовать на фазовом пространстве так же, как инверсия  $I$  относительно центра Земли:  $\{W, U, V\} \neq R \times P$ . Можно показать, что если  $\{I\}$  - группа, порождённая инверсией и состоящая из  $I$  и тождественного преобразования, то группа  $\{W, U, V\}$  является прямым произведением групп  $R, P = \{U, V\}$  и  $\{I\}$ ,

$$\{W, U, V\} = R \times P \times \{I\},$$

и что проблема нахождения групп симметрии фазовых состояний сводится к нахождению всех конечных подгрупп этого прямого произведения.

Конечные подгруппы  $H \subset R \times P$  были описаны при рассмотрении систем на круговых орбитах. Все подгруппы  $H \subset R \times P$  строятся либо по формуле

$$H = H_1 \times \{I\} = H_1 \cup H_1 I,$$

где  $H_1$  - подгруппа группы  $R \times P$ , либо по формуле

$$H = H_1 \cup H_1 h I,$$

где  $H_1$  - подгруппа индекса 2 группы  $\{H_1, h\} \subset R \times P$ ,  $h$  - элемент из  $R \times P$ . В первом случае инверсия  $I$  входит непосредственно в группу  $H$ , во втором - только будучи умноженной на нетождественные преобразования из  $R \times P$ . Таким образом, для нахождения конечных подгрупп  $H \subset R \times P \times \{I\}$  необходимо найти все подгруппы индекса 2 в конечных подгруппах группы  $R \times P$ . Эту задачу нетрудно решить, зная образующие элементы подгрупп группы  $R \times P$  (они приведены, например, в [33]).

Конечных подгрупп  $H \subset R \times P \times \{I\}$ , вообще говоря, бесконечно много. Однако далеко не все из них необходимо рассматривать. В самом деле, два начальных фазовых состояния  $s'$  и  $s''$  спутниковой системы естественно назвать эквивалентными, если одно из них является образом другого при действии некоторого преобразования  $g \in R \times P \times \{I\}$ : тогда критериальные функции задач непрерывного глобального обзора принимают на множествах  $s'$  и  $s''$  одно и то же значение. Соответственно группы  $H', H'' \subset R \times P \times \{I\}$  имеет смысл считать эквивалентными, если для каждого  $s'$  с группой симметрии  $H'$

найдётся эквивалентное  $s''$  с группой  $H''$  и наоборот. В роли групп симметрии можно рассматривать только попарно неэквивалентные группы. Число таких групп любого заданного порядка всегда конечно.

Была разработана система обозначений групп симметрии, удовлетворяющая естественным требованиям: 1) одинаковыми символами должны снабжаться эквивалентные группы и только они, 2) информация, содержащаяся в символе, должна быть достаточной для построения представителя класса эквивалентных групп, обозначенных этим символом. Согласно такой системе обозначений:

- символом группы  $H \subset R \times P$  является «старый» символ, введённый ранее;
- символом группы вида  $H = H_1 \times \{I\}$ , где  $H_1 \subset R \times P$ , является «старый» символ группы  $H_1$ , к которому добавляется знак « $\times \{I\}$ »;
- символ группы вида  $H = H_1 \cup H_1 h I$ , состоит из «старого» символа группы  $\{H_1, h\}$ , после которого в круглых скобках стоит «старый» символ подгруппы  $H_1$  индекса 2.

Длинный список всех символов конечных подгрупп  $H \subset R \times P \times \{I\}$  с их образующими элементами демонстрировался в докладе [69].

Фазовое состояние  $s_j$  отдельного спутника, движущегося по эллиптической орбите, удобно задавать: большой полуосью  $a_j$ , эксцентриситетом  $e_j$ , аргументом широты перигея  $\omega_j$ , долготой восходящего узла  $\Omega_j$ , наклонением орбиты  $i_j$  и средней аномалией  $M_j$ :  $s_j = \{a_j, e_j, \omega_j, \Omega_j, i_j, M_j\}$ . Преобразования группы  $R \times P \times \{I\}$  не меняют формы и размеров орбит спутников. Поэтому любая кинематически правильная система (или подсистема), начальное состояние  $s$  которой определяется по группе симметрии  $H \subset R \times P \times \{I\}$  формулой  $s = H(s_1)$ , является системой спутников на орбитах с одинаковыми большими полуосями ( $a$ , значит, и периодами обращения) и одинаковыми эксцентриситетами.

Автором совместно с А.А. Остапенко были изучены возможности кинематически правильных систем в задаче непрерывного однократного обзора Земли. Рассматривался следующий вариант задачи. Считалось, что каждый спутник «видит» на Земле любую точку, если угол места  $\beta$  спутника в ней неотрицателен:  $\beta \geq 0$ . Требовалось запустить спутники так, чтобы потребная для непрерывного обзора величина большой полуоси орбит  $a$  была бы минимальной.

Исследовались для случая  $\beta = 0$  все кинематически правильные системы, имеющие группы симметрии  $H$  порядка от 4 до 8 и состоящие, соответственно, из 4 - 8 спутников.

Количество попарно неэквивалентных групп  $H$  указанных порядков оказалось равным 210. Характеристики лучших по критерию  $a$  систем представлены в таблице 8. Лучшая система из 4 спутников имеет две группы симметрии четвёртого порядка:  $\bar{4}D_2E$  и  $4C_4E(2C_2E)$ . Это обусловлено тем, что её полной группой симметрии является группа  $\bar{8}D_4E(\bar{4}D_2E)$  порядка 8. Она обеспечивает непрерывный обзор при значительно меньшей большой полуоси  $a = 45000$  км нежели система [27], требующая полуось  $\sim 100000$  км. Необходимо отметить, что *J.E. Draim* в работе 1987 года пришёл к этой же системе из других соображений. Наш результат был получен независимо в декабре того же года. По этому поводу с *J.E. Draim*’ом была интересная переписка.

Лучшей системой из 5 спутников является знакомая система на круговых орбитах класса КПС-1. Орбиты лучших 6- и 8-спутниковых систем имеют столь большой эксцентриситет, что их перигеи находятся внутри Земли (в таблице 8 приведены характеристики близкой по качеству 6-спутниковой системы, лишённой этого недостатка). Это говорит о том, что подобные задачи необходимо ставить как задачи с ограничениями на фазовые переменные. Всё же указанные системы нельзя сбрасывать со счетов: ведь при увеличении минимально возможного угла места  $\beta$  величина  $a$ , а с ней и высота перигеев возрастёт. Для сравнения приведены минимальные значения большой полуоси, при которых обеспечивают непрерывный обзор лучшие из кинематически симметричных систем на круговых орбитах. Видно, что использование эллиптических орбит позволяет снизить большую полуось орбит.

Описанные результаты были сообщены в докладе [35]. Позже *F.Dufour* [65], рассматривая аналогичную задачу, рассчитал характеристики нескольких «эллиптических» аналогов систем класса КПС-1, состоящих из  $N = 4, 5$  и  $6$  спутников. При  $N = 4$  и  $5$  он пришёл к тем же выводам. Однако при  $N = 6$  наш результат выше: лучшая из 6-спутниковых систем, описанная в [65], требует большой полуоси  $16387$  км, а наша (реализуемая) система -  $15500$  км.

Всё это, однако, представляет лишь ограниченный теоретический интерес, так как наклоны орбит лучших систем далеки от критических, и вращение линии апсид при движении спутников в поле тяготения Земли быстро разрушит их орбитальную структуру. Поэтому необходимо ставить задачу оптимизации либо в классе систем с критическими наклонами с неизбежным ухудшением характеристик, либо в классе прецессирующих эллиптических орбит, когда траектории спутников в плоскостях оскулирующих орбит представляют собой розетки (рисунок 4). Модели номинальных движений систем с «

Таблица 8

Характеристики лучших систем непрерывного однократного обзора Земли на эллиптических орбитах

N	Группа симметрии, эксцентриситет $e$ , наклонение $i$	Начальные параметры движения				$a_{min}$	$a_{min}$ для лучших систем на круговых орбитах
		$j$	$\omega_j$	$\Omega_j$	$M_j$		
4	$\bar{4}D_2E$ ; $e = 0.31$ ; $e = 32.0^\circ$	1	90	45	135	45000	—
		2	90	225	315		
		3	270	315	225		
		4	270	135	45		
5	$5C_5E1$ ; $e = 0$ ; $e = 43.65^\circ$	1	—	0	0	17908	17908
		2	—	1.72	1.72		
		...	...	...	...		
		5	—	4.72	4.72		
6	$\bar{6}D_3E$ ; $e = 0.72$ ; $e = 46.0^\circ$	1	90	0	90	15090	15926 (КПС – 1) 14533 (КСС)
		2	90	120	210		
		3	90	240	330		
		4	270	0	270		
		5	270	120	30		
		6	270	240	150		
	$6C_6C_2$ ; $e = 0.15$ ; $e = 44.2^\circ$	1	0	0	0	15500	
		2	0	60	60		
		3	0	120	120		
		4	0	180	180		
		5	0	240	240		
		6	0	300	300		
7	$7C_7E2$ ; $e = 0.36$ ; $e = 59.5^\circ$	1	0	0	0	12400	12843
		2	0	$1.4\pi/7$	$1.2\pi/7$		
		...	...	...	...		
		7	0	$6.4\pi/7$	$6.2\pi/7$		
8	$\bar{8}D_4E$ ; $e = 0.7$ ; $e = 40^\circ$	1	90	0	0	9180	11549
		2	90	90	90		
		3	90	180	180		
		4	90	270	270		
		5	270	0	0		
		6	270	90	90		
		7	270	180	180		
		8	270	270	270		



«розеточными» орбитами обсуждаются в работе [55], опирающейся на полученное в [53] (см. также [61,62]) достаточно точное описание движения спутников в гравитационном поле Земли формулами первого приближения.

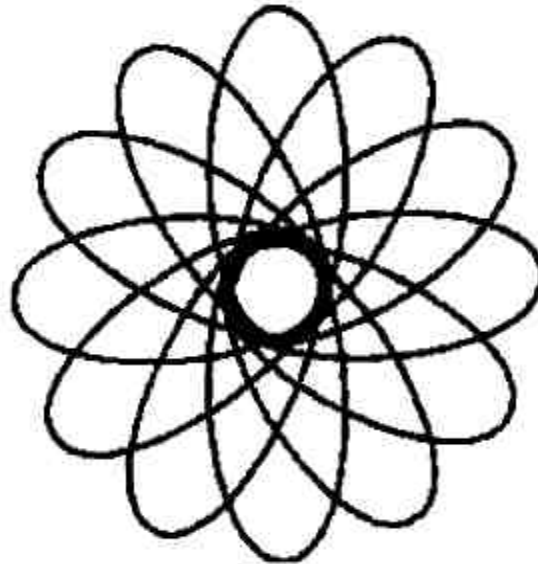


Рисунок 4

2.2. *А.А. Гутенев и Г.В. Можяев* в работе [38] развили «симметричный» подход к выяснению возможностей кинематически правильных систем спутников на эллиптических орбитах с критическими наклонениями в задаче периодического обзора широтных поясов, не симметричных относительно экватора. Подход основывался на том, что группой автоморфизмов задачи является группа  $\{C_\infty, U, c_\pi^\perp e' I\}$ , порождённая группой  $C_\infty$  поворотов вокруг оси вращения Земли, динамической группой  $U$  и преобразованием  $c_\pi^\perp e' I$ , где  $c_\pi^\perp$  - поворот вокруг произвольной оси, проходящей через центр Земли и лежащей в плоскости экватора,  $e'$  - преобразование замены знака времени,  $I$  - инверсия относительно центра Земли. Расчёты, проведённые для широтного пояса  $[-45^\circ, -10^\circ]$ , показали, что использование кинематически правильных систем на эллиптических орбитах даёт существенный выигрыш по сравнению с аналогичными системами на круговых орбитах того же периода обращения.

*Г.В. Можяев и С.В. Парфёнов* [59] применительно к задаче периодического обзора широтных поясов исследовали кинематически правильные, симметричные системы и

аналоги регулярных систем на прецессирующих эллиптических орбитах с некритическими наклонениями (т. е. с траекториями, имеющими в плоскости оскулирующей орбиты вид розеток). Лучшими часто оказывались аналоги регулярных систем. Насколько нам известно, оптимизация моделей номинальных движений систем, спутники которых движутся по «розеточным» траекториям, ранее не проводилась. Было бы интересно исследовать возможности таких орбитальных структур в задачах непрерывного обзора и задачах оптимизации движения радионавигационных систем (типа рассмотренной ниже в п.3).

*F.Dufour* [65] рассчитал характеристики ряда систем на непрецессирующих в своей плоскости эллиптических орбитах с критическими наклонениями, являвшихся аналогами систем на круговых орбитах класса КПС-1, в задаче непрерывного однократного обзора северного полушария.

2.3. Идея кинематической симметрии (и, в частности, кинематической правильности) представляет интерес вне связи с «породившими» её задачами оптимизации движения спутниковых систем. В общем случае кинематически правильной естественно назвать такую систему движущихся точек (конечную или бесконечную, с ограниченными в пространстве траекториями произвольной формы или нет), у которой движение любой точки по отношению к остальным - одно и то же с точностью до положения в пространстве, замены правого на левое, сдвига во времени и направления течения времени. Соответственно систему, являющуюся объединением некоторого числа кинематически правильных систем с общей группой симметрии, логично назвать кинематически симметричной. Такие системы являются естественным обобщением правильных и симметричных систем неподвижных точек, теория которых лежит в основе структурной кристаллографии. Было бы привлекательно создать теорию бесконечных кинематически симметричных систем, обладающих свойствами дискретности и однородности: она, возможно, будет полезна при изучении колебаний кристаллических решёток. Можно пойти по пути дальнейшего обобщения и рассматривать произвольные изменяющиеся во времени системы (не обязательно механические), элементами симметрии (т.е. преобразованиями, переводящими «движение» системы в себя) которых являются произведения ортогональных преобразований пространства на сдвиги во времени и/или на операцию обращения времени.

Известные лагранжевы движения в задаче трёх тел кинематически правильны. Замечательно, что совсем недавно, в 1999 году, *A. Chenciner* и *R. Montgomery* [52] нашли ещё один класс правильных движений: три тела одинаковой массы следуют друг за другом по орбите в форме восьмёрки (рис. 6). Существуют ли другие кинематически правильные

решения задачи, неизвестно.

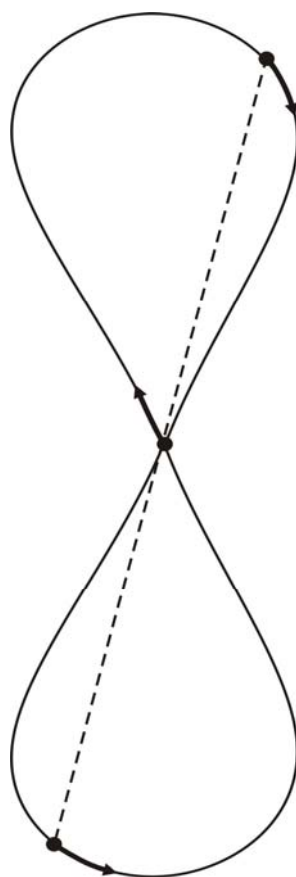


Рисунок 5

### 3. Другие задачи оптимизации номинальных движений спутниковых систем

Обеспечение обзора - далеко не единственное требование, предъявляемое к спутниковым системам различного назначения. Соответственно важными являются задачи оптимизации орбитальных структур по другим критериям. Например, *А.А. Гутенев*[39] исследовал задачу, критерий которой направлен на обеспечение максимального числа независимых межспутниковых каналов связи между любой парой спутников, а *Ш.И. Галлиев* и *В.И. Заботин* [40, 42, 51] - задачи с критериями обеспечения многоканальной связи, в частности, с минимальным числом переориентаций антенн межспутниковых каналов.

Особый интерес в настоящее время представляют проблемы оптимизации движения глобальных радионавигационных спутниковых систем типа GPS или ГЛОНАСС, которые должны не просто осуществлять многократный непрерывный обзор Земли, но и дать возможность любому наземному или околоземному потребителю в любой момент выбрать

такое спутниковое «созвездие», которое позволило бы решить навигационную задачу с высокой точностью. Рассмотрим, следуя [66], один из вариантов задачи оптимизации орбитальной структуры такой радионавигационной системы. Будем ориентироваться на то, что:

- навигационные космические аппараты (НКА) движутся по круговым орбитам заданного радиуса  $r$ ;

- каждый потребитель располагается на поверхности Земли (принимаемой за сферу радиуса  $R_3$ ), где обеспечивается непрерывное радионавигационное поле, т.е. имеется возможность в любой момент принять радионавигационные сигналы не менее, чем от 4-х радиовидимых НКА;

- каждый потребитель решает свою навигационную задачу как задачу первоначального определения своего местоположения псевдодальномерным методом и использует одноразовое беззапросное двухдиапазонное измерение псевдодальностей, позволяющее ликвидировать ионосферные ошибки в определении этих величин;

- все потребители используют одинаковые широконаправленные приёмные антенны с круговой (требуемой) поляризацией;

- каждый потребитель использует многоканальную аппаратуру, позволяющую одновременно измерять псевдодальности до не менее 4-х НКА;

- погрешности определения псевдодальностей, обусловленные многолучевостью распространения радиосигналов, излучаемых НКА, отсутствуют.

Ошибки определения параметров движения потребителя возникают вследствие ошибок измерения псевдодальностей и ошибок прогноза параметров движения НКА. В описанных выше условиях основными источниками ошибок измерения псевдодальностей (помимо главного источника систематической ошибки - неточности хода часов потребителя) являются [47]:

- воздействие тропосферы,
- шумы на входе приемника аппаратуры потребителя,
- неточность хода часов НКА.

Пусть:

$r_j$  и  $r$  - расчётные геоцентрические радиус - векторы  $j$ -го НКА и потребителя;

$r_j + \Delta r_j$  и  $r + \Delta r$  - соответствующие истинные радиус - векторы;

$d_j$  и  $d_j + \Delta d_j$  - расчётная и истинная дальности от потребителя до  $j$ -го НКА;

$\beta_j$  - расчетный угол места  $j$ -го НКА в точке расположения потребителя.

Примем следующие допущения:

1)  $j$ -й НКА является радиовидимым для потребителя в любой момент, если в этот момент  $\beta_j \geq \beta_{min}$ , где  $\beta_{min} \geq 0$  - заданная величина;

2) проекции  $\Delta r_j, \Delta u_j, \Delta n_j$  векторов  $\Delta r_j$  на соответствующие расчетные радиальные, трансверсальные и бинормальные направления являются независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и заданными среднеквадратическими отклонениями  $\sigma_r, \sigma_u, \sigma_n$ ;

3) величины  $\Delta d_j$  являются суммами

$$\Delta d_j = \Delta d_{mj} + \Delta d_{uj} + \Delta d_{ej}$$

случайных величин  $\Delta d_{mj}, \Delta d_{uj}$  и  $\Delta d_{ej}$  - ошибок определения псевдодальности до  $j$ -го радиовидимого НКА вследствие:

- воздействия тропосферы;
- шумов на входе приемника аппаратуры потребителя;
- сдвига шкалы времени  $j$ -го НКА по отношению к шкале времени системы;

при этом [47]

$$\Delta d_{mj} = \frac{\Delta d_m^\perp}{\sin \beta_j}, \quad \Delta d_{uj} = \frac{\Delta d_u^\perp}{\sqrt{1 - \delta \cos^2 \beta_j}},$$

где

$\Delta d_m^\perp$  и  $\Delta d_u^\perp$  - «тропосферная» и «шумовая» ошибки условного НКА, расположенного в зените по отношению к потребителю (они считаются заданными и одними и теми же для всех  $j$ );

$\delta$  - заданная постоянная, характеризующая диаграмму направленности антенн поребителей;

4) величины  $\Delta d_m^\perp, \Delta d_u^\perp$  и  $\Delta d_e$  являются (при различных  $j$  и между собой) независимыми нормально распределенными случайными величинами с заданными среднеквадратическими отклонениями  $\sigma_m^\perp, \sigma_u^\perp$  и  $\sigma_e$ .

Пренебрегая величинами порядка

$$\left( \frac{\Delta r_j}{r} \right)^2, \left( \frac{\Delta u_j}{r} \right)^2, \left( \frac{\Delta n_j}{r} \right)^2, \left( \frac{\Delta d_j}{r} \right)^2,$$

можно установить, что при псевдодальномерном способе определения координат по измерениям псевдодальностей до НКА некоторой радиовидимой четвёрки  $\xi$  (пусть для

простоты 1, 2, 3, 4 номера этих НКА) вектор  $\Delta r$  линейно связан с вектором ошибок

$$(\Delta d_m^\perp, \Delta d_{u1}, \dots, \Delta d_{u4}, \Delta d_{e1}, \dots, \Delta d_{e4}, \Delta r_1, \Delta u_1, \Delta n_1, \dots, \Delta r_4, \Delta u_4, \Delta n_4)'$$

и является гауссовским с нулевым математическим ожиданием. Его ковариационная матрица определяется расчётными радиус-векторами  $r_1, r_2, r_3, r_4, r$  и величинами

$\beta_{min}, \sigma_r, \sigma_u, \sigma_n, \delta, \sigma_m^\perp, \sigma_u^\perp, \sigma_e$ . Ввиду малости ошибок можно считать, что векторы  $r_1, r_2, r_3, r_4$  соответствуют номинальному движению системы НКА. При этом элементы ковариационной матрицы становятся функциями номинального начального фазового состояния системы  $s$ , расчётного радиус-вектора потребителя  $r$  и времени  $t$ . Достаточно универсальной характеристикой точности решения задачи местоопределения по выбранной четвёрке НКА  $\xi$  может служить определяемый ковариационной матрицей радиус  $R^{(\xi)} = R^{(\xi)}(s, r, t)$  доверительного шара случайного вектора  $\Delta r$ , соответствующий некоторой заданной доверительной вероятности  $P$ . Тогда критерием качества начального фазового состояния  $s$  можно назначить величину

$$R(s) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \max_{r, |r|=R_3} \left[ \min_{\xi} R^{(\xi)}(s, r, t) \right] \right\},$$

где  $T$  - период обращения НКА по их орбитам. Задача оптимизации номинального движения системы НКА заключается в том, чтобы найти

$$\min_s R(s).$$

Насколько нам известно, систематическое исследование подобных задач в достаточно широких классах номинальных орбитальных структур не проводилось. В то же время критерий  $R(s)$  можно представить в виде (2) и доказать, что группой автоморфизмов задачи является группа  $\{W, U, V\}$  и что справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2. Поэтому представляет интерес изучить возможности кинематически правильных и кинематически симметричных систем в сформулированной задаче.

С целью выяснить возможности улучшения орбитальной структуры системы ГЛОНАСС в работе [66] без изменения радиуса и наклона орбит исследовались кинематически правильные 22 - 24 - спутниковые системы с группами симметрии:

$$\begin{aligned} & \overline{22}D_{11}E\kappa, \quad \kappa = 1-10; & \overline{23}C_{23}E\kappa, \quad \kappa = 1-22; \\ & \overline{24}D_2E, \quad \overline{24}D_2C_2, \quad \overline{24}D_3E1, \quad \overline{24}D_3E2, \quad \overline{24}D_4E1, \quad \overline{24}D_4E3, \\ & \overline{24}D_4C_20, \quad \overline{24}D_4C_4, \quad \overline{24}D_6E1, \quad \overline{24}D_6E5, \quad \overline{24}D_6C_21, \quad \overline{24}D_6C_22, \end{aligned}$$

$\overline{24D_6C_30}$ ,  $\overline{24D_6C_6}$ ,  $\overline{24D_{12}E1}$ ,  $\overline{24D_{12}E5}$ ,  $\overline{24D_{12}E7}$ ,  $\overline{24D_{12}E11}$ ,  
 $\overline{24D_{12}C_21}$ ,  $\overline{24D_{12}C_25}$ ,  $\overline{24D_{12}C_31}$ ,  $\overline{24D_{12}C_33}$ ,  $\overline{24D_{12}C_41}$ ,  
 $\overline{24D_{12}C_42}$ ,  $\overline{24D_{12}C_60}$ ,  $\overline{24D_{12}C_{12}}$ ,  $\overline{24C_2^1E}$

(т.е. со всеми группами 1-го и 2-го типа и 22 - 24-го порядка, ведущими к неполярным системам с одинаковым наклоном орбит), а также кинематически симметричные 22 - 24-спутниковые системы, удовлетворяющие условиям:

- 1) порядок  $|H|$  группы симметрии  $H$  превышает число  $N$  спутников,
- 2) система состоит из одной кинематически правильной подсистемы с наклоном орбит 64,8 град, содержащей не менее 18 спутников (для обеспечения необходимой кратности обзора высоких широт) и некоторого количества кинематически правильных экваториальных подсистем.

К таким системам приводят лишь группы  $H$  второго типа, у которых  $36 \leq |H| \leq 46$ , а компонентной  $H_R$  являются группы диэдра  $D_n$ ,  $n=2,3,\dots$ . Список всех групп  $H$  и разложений чисел  $N$ , характеризующих исследованные системы, представлен в таблице 9.

Таблица 9

Порядок $H$	Символ $H$	Разложение $N$		
		$N=22$	$N=23$	$N=24$
36	$\overline{36D_3C_3}$ , $\overline{36D_6C_6}$ , $\overline{36D_9E1}$ , $\overline{36D_3E2}$ , $\overline{36D_{18}C_21}$ , $\overline{36D_{18}C_24}$			18+6
	$\overline{36D_6C_30}$ , $\overline{36D_{18}E5}$ , $\overline{36D_{18}E7}$			18+3+3, 18+6
	$\overline{36D_9E4}$ , $\overline{36D_{18}C_22}$	18+2+2, 18+4		18+4+2
	$\overline{36D_{18}E1}$	18+2+1+1, 18+2+2	18+2+2+1	18+2+2+1+1, 18+2+2+2
38	$\overline{38D_{19}E1}$	19+2+1	19+2+1+1, 19+2+2	19+2+2+1
40	$\overline{40D_5E1}$ , $\overline{40D_{10}E3}$ , $\overline{40D_{20}C_23}$ , $\overline{40D_{20}C_41}$			20+4
	$\overline{40D_{10}C_21}$ , $\overline{40D_{20}E9}$	20+2		20+2+2, 20+4
	$\overline{40D_{20}E1}$	20+1+1, 20+2	20+2+1	20+2+1+1, 20+2+2
42	$\overline{42D_7E2}$ , $\overline{42D_{11}E8}$ , $\overline{42D_{21}C_33}$			21+3
	$\overline{42D_{21}E1}$	21+1	21+1+1, 21+1	21+2+1
44	$\overline{44D_{11}E5}$ , $\overline{44D_{22}C_22}$			22+2
	$\overline{44D_{22}E1}$		22+1	22+1+1, 22+2
46	$\overline{46D_{23}E1}$			23+1

Расчёты проводились для следующих исходных данных, выбранных по результатам работ [47, 60]:

$$\sigma_{u}^{\perp} = 6.0\text{м} \quad (\text{для узкополосных радиосигналов и времени осреднения } T_0=1\text{с});$$

$$\sigma_{\epsilon} = 4.2\text{м} \quad (\text{соответствует сдвигу временных шкал } \leq 14 \text{ нс});$$

$$\sigma_m^{\perp} = 0.83\text{м} \quad (\text{при отсутствии тропосферных поправок в районе расположения навигатора});$$

$$\sigma_r = 1.5\text{м}, \sigma_u = 7\text{м}, \sigma_n = 7\text{м} \quad (\text{для перспективных спутников ГЛОНАСС-М}).$$

$$P = 0.95; i = 64.8\text{град}; \delta = 0.81.$$

Чтобы уменьшить зависимость результатов расчётов от исходных данных, в качестве критерия качества выбиралась безразмерная величина  $\tilde{R}(s) = \frac{R(s)}{\sigma_p^{\perp}}$ , где

$$\sigma_p^{\perp} = \sqrt{(\sigma_m^{\perp})^2 + (\sigma_u^{\perp})^2 + \sigma_{\epsilon}^2} = 7.37\text{м}.$$

Характеристики номинальной орбитальной структуры систем ГЛОНАСС таковы:

- наклонение орбит равно 64.8 град;
- радиус орбит равен 25470 км;
- система является кинематически правильной с группой симметрии  $H = 24C_3E1$ ;
- максимально возможный угол места, обеспечивающий в любой наземной точке видимость в любой момент не менее 4-х спутников, - 14,69 град, 5-ти спутников - 8,68 град.

При принятых выше исходных данных зависимость гарантированной точности  $\tilde{R}$  от минимального угла места  $\beta_{min}$ , при котором какой-либо наземный потребитель «видит» спутники, характеризуется таблицей:

$\beta_{min}$ (град)	3.4	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	$\geq 8.0$
$\tilde{R}$	11.3	131.9	132.5	133.8	135.7	136.9	*

(здесь и далее звёздочкой заменяются величины, превышающие 1000). Для потребителей различных широтных поясов аналогичные данные приведены в таблице 10. Они показывают,



Точностные характеристики ( $\tilde{R}$ ) номинальной орбитальной структуры системы ГЛОНАСС

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)					
	5	6	7	8	9	10
0-2	6.9	6.9	8.0	8.7	8.9	15.0
2-4	6.9	7.9	8.5	14.7	14.8	15.0
4-6	8.2	9.9	14.6	14.6	14.6	14.6
6-8	9.8	9.8	10.2	14.2	14.2	14.2
8-10	9.4	9.6	9.6	9.9	14.1	14.1
10-12	9.1	9.2	9.3	9.4	13.6	17.9
12-14	9.2	9.2	9.2	15.0	22.4	*
14-16	9.1	9.1	9.1	38.4	*	*
16-18	9.0	9.1	9.1	*	*	*
18-20	9.2	9.2	9.2	*	*	*
20-22	9.1	9.1	9.1	138.4	140.1	*
22-24	9.6	135.7	136.9	136.9	136.9	136.9
24-26	133.8	133.8	133.8	133.8	133.8	133.8
26-28	131.1	131.1	131.1	131.1	131.1	131.1
28-30	11.2	128.8	129.5	129.5	129.5	129.5
30-32	10.9	11.2	127.9	127.9	127.9	127.9
32-34	10.8	11.1	11.3	11.6	126.4	126.4
34-36	10.6	11.0	11.3	11.4	11.5	271
36-38	10.1	10.9	11.0	11.1	11.2	11.7
38-40	9.5	9.6	10.6	10.7	10.9	231.8
40-42	9.0	9.1	10.0	10.1	258.6	363.1
42-44	8.7	8.8	9.0	9.5	660.0	*
44-46	8.3	8.5	8.6	374.6	*	*
46-48	8.5	8.5	8.5	8.5	*	*
48-50	7.3	7.4	8.5	8.5	8.5	8.5
50-52	7.1	7.1	7.3	7.8	8.4	8.4
52-54	7.1	7.2	7.3	7.7	7.8	7.8
54-56	6.6	7.0	7.1	7.6	7.6	10.7
56-58	6.6	6.7	6.9	10.6	10.6	10.6
58-60	6.5	6.7	6.7	10.5	10.5	10.5
60-70	6.7	6.8	6.8	6.9	10.5	14.2
70-80	8.2	8.3	8.4	15.0	15.1	15.3
80-90	7.8	7.9	8.1	8.1	8.1	8.1

что уже при  $\beta_{min} = 5^\circ$  приемлемый уровень точности не достигается в широтных поясах  $[24^\circ, 28^\circ]$  и  $[-28^\circ, -24^\circ]$ . С ростом  $\beta_{min}$  эти поясы быстро расширяются.

В таблицах 11 - 16 приведены точностные характеристики нескольких лучших систем исследованных классов. 22- и 23-спутниковые системы (таблицы 11 и 12), несмотря на меньшее, чем у ГЛОНАСС, количество спутников, не допускают точностных «провалов» вплоть до  $\beta_{min} = 6^\circ$ . Такова и 24-спутниковая система с характеристиками таблицы 13. На неё стоит обратить внимание. Хотя по качеству её орбитальная структура не лучшая, но в неё легко трансформировать структуру системы ГЛОНАСС: достаточно передвинуть спутники вдоль орбит. Таблицы 14 и 15 посвящены лучшим системам спутников с одинаковым наклоном орбит: они имеют хорошие точностные характеристики до  $\beta_{min} = 7^\circ - 8^\circ$ . Наконец, самой лучшей является кинематически симметричная систем, состоящая из двух правильных подсистем: 21-спутниковой неэкваториальной и 3-спутниковой экваториальной (таблица 16). Она сохраняет высокие качества вплоть до  $\beta_{min} = 9^\circ$ .

#### **4. Задачи оптимизации процессов гибкой коррекции движения спутниковых систем**

Коррекция движения спутниковой системы называется жёсткой, если целью её является сообщение системе фиксированного, заранее известного номинального движения. Задача оптимизации процесса такой коррекции распадается на хорошо известные задачи коррекции отдельных спутников, так как последние не влияют на движение друг друга. Коррекция именуется гибкой, если она призвана сообщить системе любое движение из некоторого семейства. Указать такие семейства становится возможным прежде всего вследствие неединственности решения задач оптимизации номинальных движений, обусловленных наличием у таких задач обширных групп автоморфизмов. Можно ожидать, что гибкая коррекция будет значительно выгоднее жесткой, если спутники испытывают сильные возмущения одинакового характера, слабо влияющие на качество работы системы (такowymi могут быть, например, прецессия орбит из-за нецентральности гравитационного поля Земли и увеличение угловой скорости движения по низким орбитам вследствие сопротивления атмосферы). Однако при гибкой коррекции в описании "конечного" многообразия движений участвуют обычно фазовые координаты всех спутников. При этом конечные условия "перевязывают" задачу, резко увеличивая её

Таблица 11

Точностные характеристики кинематически правильной 22-спутниковой системы с группами симметрии  $\overline{22D_{11}E3}$  и  $22C_{11}E7$  (11 орбит с равномерно разнесенными восходящими узлами, по 2 спутника на каждой орбите)

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)					
	5	6	7	8	9	10
0-2	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9
2-4	11.0	12.1	12.2	12.2	12.2	12.2
4-6	11.2	11.2	11.2	12.4	12.8	*
6-8	10.2	10.2	10.2	10.2	10.2	*
8-10	9.5	9.5	9.5	9.5	9.5	9.5
10-12	9.1	9.1	9.1	9.1	9.1	25.3
12-14	8.8	8.9	8.9	24.4	27.4	27.8
14-16	8.6	23.6	26.5	26.9	26.9	26.9
16-18	25.8	26.1	26.1	26.1	26.8	27.3
18-20	25.0	25.6	25.9	26.3	26.3	*
20-22	25.2	25.2	25.2	*	*	*
22-24	23.6	24.1	24.7	*	*	*
24-26	21.7	22.1	22.5	23.0	23.4	*
26-28	23.4	23.4	23.4	23.4	23.4	23.4
28-30	7.9	8.0	22.9	22.9	22.9	22.9
30-32	7.7	7.7	7.8	9.4	22.6	22.6
32-34	7.5	7.6	7.7	7.9	8.2	20.2
34-36	7.5	7.7	7.9	8.0	8.2	8.3
36-38	7.6	7.7	7.8	8.0	8.1	8.3
38-40	7.5	7.7	7.8	7.9	8.0	8.3
40-42	7.1	7.4	7.6	8.1	8.5	9.1
42-44	7.1	7.1	8.2	8.7	9.1	*
44-46	7.1	8.4	8.8	9.0	9.2	9.4
46-48	8.6	8.7	8.9	9.0	9.2	9.3
48-50	8.6	8.7	8.9	9.0	9.2	9.3
50-52	8.6	8.7	8.9	9.0	9.1	9.2
52-70	7.5	7.6	8.5	8.7	8.7	8.7
70-72	6.6	7.0	7.1	7.6	51.9	52.5
72-74	6.9	7.2	9.8	51.3	51.4	51.5
74-76	7.5	9.6	9.8	10.7	50.8	50.8
76-78	7.9	9.4	9.4	10.5	10.6	10.6
78-90	8.0	8.1	9.0	10.3	10.4	10.5

Точностные характеристики 23 - спутниковой системы с группой симметрии  $23C_{23}E5$   
(23 орбиты с равномерно разнесенными восходящими узлами, по 1 спутнику на каждой орбите)

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)					
	5	6	7	8	9	10
0-2	10.8	11.0	11.0	11.0	12.8	*
2-4	11.4	11.6	13.1	22.2	*	*
4-6	11.8	13.1	*	*	*	*
6-8	9.4	12.7	*	*	*	*
8-10	9.2	9.8	*	*	*	*
10-12	10.6	10.9	11.3	12.2	*	*
12-14	11.2	11.5	11.8	*	*	*
14-16	10.4	10.7	23.6	29.8	29.8	29.8
16-18	10.3	10.9	*	*	*	*
18-20	10.7	10.9	*	*	*	*
20-22	9.2	9.2	10.9	*	*	*
22-24	8.4	8.4	9.5	9.5	9.5	*
24-26	7.9	8.6	9.2	9.7	9.7	9.7
26-28	7.5	8.6	8.8	10.1	10.1	10.1
28-30	9.5	9.5	9.5	9.5	9.5	11.7
30-32	9.2	9.4	9.4	9.4	11.5	11.7
32-34	8.6	8.6	9.4	9.4	11.5	11.5
34-36	7.4	8.7	8.7	10.9	*	*
36-38	8.0	8.4	9.2	10.9	11.2	117.2
38-40	8.8	9.0	9.1	9.3	10.8	40.9
40-42	8.7	8.8	8.9	9.0	9.1	25.8
42-44	8.6	8.7	8.7	8.9	9.0	51.2
44-46	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	300.7
46-48	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	*
48-60	8.1	8.2	8.3	8.4	8.6	11.1
60-62	6.6	6.8	6.9	7.1	35.0	35.4
62-64	6.8	6.9	34.2	34.6	34.6	34.6
64-66	6.8	11.3	11.9	33.6	33.6	33.6
66-68	6.6	11.4	11.6	11.7	33.2	33.2
68-80	11.0	11.2	11.3	11.4	11.4	11.5
80-90	8.5	8.5	8.5	10.8	10.8	10.8

Точностные характеристики кинематически правильной 24-спутниковой системы с группой симметрии  $24C_3E2$  (3 орбиты, по 8 спутников на каждой орбите)

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)					
	5	6	7	8	9	10
0-2	9.3	10.0	*	*	*	*
2-4	9.0	9.0	*	*	*	*
4-6	8.8	8.8	8.8	8.8	*	*
6-8	8.7	8.7	8.7	8.7	8.7	8.7
8-10	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5
10-12	8.6	8.6	8.6	8.6	10.5	11.1
12-14	8.6	8.7	8.7	10.8	11.8	13.8
14-16	7.7	9.2	11.6	12.7	13.4	14.2
16-18	9.3	12.3	12.5	13.2	13.7	14.2
18-20	12.2	12.2	12.2	13.3	14.4	16.4
20-22	11.9	11.9	11.9	11.7	17.8	24.1
22-24	10.0	11.6	11.6	11.6	32.8	*
24-26	9.4	9.4	10.7	*	*	*
26-28	9.3	9.6	9.9	*	*	*
28-30	9.7	9.9	10.0	10.2	*	*
30-32	10.0	10.2	10.3	10.5	10.5	25.0
32-34	10.4	10.6	10.6	24.4	24.7	24.7
34-36	10.7	23.8	24.1	24.1	24.1	24.1
36-38	8.9	23.3	23.3	23.3	23.3	23.3
38-40	8.9	20.7	20.7	20.7	20.7	20.7
40-42	8.2	22.6	22.6	22.6	22.6	22.6
42-44	7.3	7.4	22.3	22.3	22.3	22.3
44-46	7.1	7.2	7.3	7.3	21.9	21.9
46-48	7.0	7.0	7.1	8.4	8.6	8.9
48-50	6.8	7.7	7.9	8.6	8.7	8.8
50-52	6.6	7.6	7.7	8.5	8.5	8.9
52-54	7.1	7.4	7.6	8.4	8.9	9.0
54-56	7.0	7.2	7.6	8.0	8.8	8.9
56-58	6.9	7.7	7.8	7,8	8.2	8.6
58-60	7.7	7.7	7.7	7.7	7.7	7.7
60-70	7.3	7.3	7.3	7.3	16.0	16.0
70-80	7.1	7.2	7,3	16.5	16.6	16.7
80-90	7.7	8.1	8.9	9.0	9.0	16.8

Точностные характеристики кинематически правильной 24 - спутниковой системы с группой симметрии  $\overline{24D_{12}C_25}$  (24 орбиты, по 1 спутнику на каждой орбите; начальные параметры движения:

$$\Omega_j = 3.0 + 150(j-1) \text{ град}, \quad u_j = 131.62 + 60(j-1) \text{ град}, \quad j = 1, \dots, 12;$$

$$\Omega_j = -3.0 + 150(j-13) \text{ град}, \quad u_j = -131.62 + 60(j-13) \text{ град}, \quad j = 13, \dots, 24)$$

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)							
	5	6	7	8	9	10	11	12
0-2	7.2	10.6	10.7	10.9	*	*	*	*
2-4	9.1	10.6	10.8	11.0	*	*	*	*
4-6	9.1	9.3	9.5	11.2	12.4	*	*	*
6-8	9.1	9.5	9.7	9.9	11.6	13.5	*	*
8-10	9.4	9.6	9.6	9.6	9.6	12.3	13.0	*
10-20	9.3	9.3	9.8	10.3	10.7	16.0	16.5	17.1
20-22	8.7	9.9	10.4	14.0	15.4	15.7	16.0	16.3
22-24	7.2	13.6	13.8	13.8	14.6	15.1	15.4	15.4
24-26	13.3	13.3	13.4	13.5	13.6	14.4	14.8	14.8
26-28	13.1	13.2	13.2	13.2	13.2	13.9	14.1	14.1
28-30	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	13.5	13.6	13.6
30-40	10.5	10.5	10.5	11.7	11.8	12.8	13.2	13.2
40-42	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9	11.1	11.3	12.2
42-44	11.0	11.0	11.0	11.0	11.0	11.0	11.1	11.9
44-46	10.8	10.8	10.8	10.9	11.0	11.1	11.1	11.8
46-56	8.5	10.5	10.6	14.1	14.1	14.5	15.8	16.1
56-58	8.5	8.5	13.9	13.9	13.9	13.9	13.9	14.0
58-60	8.3	11.0	11.1	11.1	11.1	12.6	13.0	13.3
60-62	8.7	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5	13.5	39.4
62-64	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2	13.6	288.5
64-66	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2	13.2	277.3	277.3
66-68	10.3	13.2	13.2	13.2	13.2	18.0	18.0	18.0
68-70	10.0	10.2	10.3	13.1	13.1	269.0	269.0	269.0
70-72	9.8	10.0	10.1	10.3	55.7	55.7	55.7	55.7
72-74	9.6	9.8	10.0	10.1	262.6	262.6	262.6	262.6
74-76	9.1	9.3	9.4	9.7	294.9	294.9	294.9	294.9
76-78	8.5	8.9	9.8	10.4	10.4	293.3	293.3	293.3
78-80	9.5	10.2	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3	290.7
80-82	10.2	10.2	10.2	10.2	10.2	10.2	10.2	10.2
82-90	7.1	7.1	7.1	7.4	7.7	8.0	8.2	8.4

Таблица 15

Точностные характеристики кинематически правильной 24-спутниковой системы с группой симметрии  $\overline{24D_{12}C_2}1$  (12 орбит с равномерно разнесенными восходящими узлами, по 2 спутника на каждой орбите; начальные параметры движения:

$$\Omega_j = 30(j-1) \text{ град}, \quad u_j = 52.12 + 60(j-1) \text{ град}, \quad j = 1, \dots, 12;$$

$$\Omega_j = 30(j-13) \text{ град}, \quad u_j = -52.12 + 60(j-13) \text{ град}, \quad j = 13, \dots, 24)$$

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)							
	5	6	7	8	9	10	11	12
0-2	13.2	13.3	13.3	13.3	13.3	13.3	19.8	30.7
2-4	13.3	13.4	13.5	13.6	13.6	13.6	643.2	*
4-6	9.6	10.2	13.6	13.7	*	*	*	*
6-8	9.1	11.7	14.0	*	*	*	*	*
8-10	13.1	13.6	13.9	*	*	*	*	*
10-12	12.8	12.8	12.8	12.8	32.3	*	*	*
12-14	12.2	12.2	12.2	12.3	12.8	20.1	41.7	*
14-16	11.8	11.9	12.6	12.7	12.9	19.5	19.5	21.7
16-18	11.7	11.9	12.6	12.6	12.6	17.8	*	*
18-20	11.3	11.9	12.3	16.2	17.7	18.5	*	*
20-22	11.2	15.3	16.5	17.5	18.1	18.1	18.1	*
22-24	11.1	16.5	17.2	17.6	17.6	17.6	17.6	17.9
24-26	11.0	16.8	17.3	17.3	17.3	17.3	17.4	17.5
26-28	10.9	16.6	16.8	16.8	16.8	16.9	17.1	17.2
28-30	11.7	12.0	12.0	16.4	16.4	16.4	16.4	16.4
30-32	11.7	11.7	11.7	11.7	15.7	15.9	15.9	15.9
32-34	11.5	11.5	11.5	11.5	12.2	14.9	15.6	15.6
34-36	10,2	11.4	11.4	12.2	12.9	13.4	13.8	14.9
36-38	10.1	10.1	10.8	12.5	13.0	13.0	13.0	13.0
38-40	9.9	9.9	9.9	9.9	12.7	12.7	12.7	12.7
40-42	8.7	9.7	9.7	9.7	9.7	11.5	12.5	12.5
42-44	8.0	8.2	8.2	9.7	9.7	9.7	10.5	12.5
44-46	7.9	7.9	7.9	8.1	8.9	9.6	9.6	10.1
46-54	6.8	6.9	7.1	7.4	8.2	8.6	13.2	13.7
54-56	6.4	6.9	7.1	7.5	12.9	13.4	14.0	29.3
56-58	7.2	7.2	7.5	13.1	13.8	15.1	15.3	29.3
58-60	7.3	13.0	13.5	14.9	15,0	15.2	15.3	15.3
60-62	13.4	14.7	14.8	14.9	15.0	15.0	15.0	15.1
62-64	14.6	14.7	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8	14.8
64-66	14.5	14.5	14.5	14.5	14.5	14,5	14.5	14.5
66-76	12.4	12.9	13.8	13.8	13.8	13.8	13.8	14.3
76-78	13.8	13,8	13.8	13.8	13.8	13.8	13.8	13.8
78-90	7.2	7.2	7.3	7.3	7.3	8.5	9.6	10.1

Точностные характеристики кинематически симметричной 24-спутниковой системы с группой симметрии  $\overline{42D_7E2}$  и разложением  $24 = 21 + 3$  (8 орбит, по 3 спутника на каждой орбите; начальные параметры движения:

$$i_j = 64.8 \text{град}, \quad \Omega_j = \frac{4\pi}{7}(j-1), \quad u_j = \frac{2\pi}{21}(j-1), \quad j = 1, \dots, 21;$$

$$i_j = 0, \quad \Omega_j = 0, \quad u_j = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}(j-22), \quad j = 22, 23, 24)$$

Широтный пояс (град)	$\beta_{min}$ (град)							
	5	6	7	8	9	10	11	12
0-2	7.4	7.6	7.7	17.9	20.8	25.0	27.2	29.1
2-4	7.8	8.1	11.2	21.1	24.4	25.7	25.7	26.5
4-6	8.2	8.6	11.4	22.3	23.9	23.9	23.9	23.9
6-8	8.8	11.2	11.5	11.5	19.2	23.4	23.4	23.4
8-10	10.9	10.9	10.9	10.9	10.9	11.8	23.3	23.3
10-12	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	16.8
12-14	9.8	9.8	9.8	9.8	9.8	9.9	10.0	10.2
14-28	9.4	9.6	10.4	10.7	10.8	12.8	13.0	17.1
28-30	10.1	10.4	10.5	10.5	10.5	12.6	12.6	102.8
30-32	10.2	10.2	10.2	10.2	10.3	12.3	39.7	48.5
32-34	9.3	9.3	9.3	10.1	10.2	10.2	36.4	36.4
34-36	9.1	9.2	9.3	9.5	10.1	*	*	*
36-38	9.5	9.6	9.7	9.8	10.0	*	*	*
38-40	9.4	9.5	9.6	9.7	10.0	10.1	10.1	*
40-42	9.5	9.5	9.5	9.5	9.5	9.9	9.9	9.9
42-44	9.5	9.6	9.6	9.6	9.6	10.7	10.7	10.7
44-46	7.6	8.6	9.6	9.7	9.7	9.8	9.9	10.0
46-48	8.3	8.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	10.0
48-50	8.3	8.9	9.1	9.1	9.3	9.4	9.7	9.8
50-60	8.0	8.6	9.0	9.3	9.3	9.3	9.3	9.6
60-62	6.9	6.9	6.9	6.9	7.0	7.4	7.9	7.9
62-64	6.9	6.9	6.9	6.9	7.1	7.5	8.0	8.8
64-66	6.2	7.0	7.0	7.0	7.4	8.5	8.7	8.7
66-68	6.5	6.7	7.3	7.8	8.1	8.4	8.6	8.7
68-70	7.5	7.6	7.7	7.7	8.0	8.2	8.4	8.7
70-82	7.3	7.3	7.7	7.9	8.2	12.0	12.1	12.9
82-90	8.2	8.4	8.6	8.7	8.9	9.1	11.1	11.1



размерность и сложность. Число работ, посвящённых проблемам гибкого корректирования спутниковых систем, незначительно.

В докладе [18] были сообщены результаты аналитического решения ряда задач гибкой коррекции с помощью реактивных двигателей малой тяги. Задачи имеют большую размерность, но инвариантны по отношению к перенумеровкам спутников. Благодаря этому удалось произвести их декомпозицию, т. е. найти такие новые переменные, линейно зависящие от старых, в которых задачи распадаются на ряд независимых подзадач малой размерности. Декомпозиция осуществлялась с помощью методики [16, 17], основанной на теории линейных представлений групп. Систематическое изложение результатов работы [18] было дано в статьях [56, 57]. В [18, 56, 57] предполагалось, что поле тяготения Земли является центральным. Однако все результаты можно распространить на случай, когда спутники движутся в нецентральной силе, силовая функция которого содержит, кроме «ньютоновской» части, член со второй зональной гармоникой, т.е. можно учесть основные гравитационные возмущения, действующие на спутники Земли.

*Ю.П. Улыбышев* опубликовал работу [50], в которой рассмотрел задачу гибкого импульсного корректирования систем спутников, движущихся в центральном поле по орбитам, близким к круговым одинакового радиуса и наклона. В этой работе задача ставится как задача управления только «вековыми» возмущениями. При таком подходе реализация предлагаемых законов управления будет вносить дополнительные возмущения из-за неучёта внутривитковых колебаний. Задача ставится в слишком упрощённом виде: не обращается внимание на эксцентриситеты орбит, не производится гибкое корректирование положения плоскостей орбит спутников (выбранная система координат и не позволяет это сделать). Импульсная схема коррекции предполагает использование двигателей большой тяги. У них расход топлива на отдельную коррекцию  $\sim$  пропорционален сумме модулей прилагаемых импульсов. Поэтому принятый в [50] квадратичный функционал не вполне соответствует цели экономии топлива.

### **Библиографический список**

1. Vargo L.G. Orbital patterns of satellite systems. // The Journal of the Astronautical Sciences. 1960. 7. №4. P. 78-86.
2. Luders R.D. Satellite networks for continuous zonal coverage. // ARS Journal. 1961, 31. №2. P. 179-184.

3. Gobetz F.W. Satellite networks for global coverage. // *Advances in astronomical sciences*. 1963, vol.9. P. 134-156.
4. Ullock M.H., Shoen A.H. Optimum polar satellite networks for continuous earth coverage. // *AJAA Journal*. 1963. №1. P. 69-72.
5. Можаяев Г.В. Предварительные исследования проблемы оптимизации параметров орбит систем спутников, предназначенных для непрерывного обзора поверхности Земли. Научно-технический отчет Днепропетровского университета № 120-5-2. Днепропетровск, 1967. 42с.
6. Можаяев Г.В. Правильные спутниковые системы (общая теория и практические результаты). Научно-технический отчет Днепропетровского университета № 120-5-3. Днепропетровск, 1967. 68с.
7. Можаяев Г.В. К проблеме оптимизации орбит спутниковых систем, предназначенных для непрерывного обзора поверхности Земли // Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Москва, 25 января - 1 февраля 1968г. Аннотации докладов. М.: Наука, 1968. С. 215.
8. Можаяев Г.В. Некоторые задачи оптимизации орбит спутниковых систем. Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. Днепропетровский университет, 1968. 136 с.
9. Walker J.G. Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage // *Journal of the British Interplanetary Society*. 1971. Vol. 24. P. 369-384.
10. Можаяев Г.В. Исследование задачи оптимизации параметров движения систем спутников, предназначенных для непрерывного обзора Земли. I, II, III. // Научно-технические отчеты Днепропетровского университета: № ПМ-1, 1972, 127с.; № ПМ-2, 1972, 270с.; № ПМ-3, 1973, 171с.
11. Можаяев Г.В. Задача о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы. I. // *Космические исследования*. 1972. Т. 10. Вып. 6. С. 833-840 (поступила в редакцию 6 апреля 1970 г.).
12. Можаяев Г.В. Задача о непрерывном обзоре Земли и кинематически правильные спутниковые системы. II. // *Космические исследования*. 1973. Т. 11. Вып.1. С. 59-69 (поступила в редакцию 6 апреля 1970 г.).
13. Можаяев Г.В. К задаче о непрерывном обзоре Земли системой спутников. // *Проблемы механики управляемого движения*. Вып.3. Пермь. 1973. С. 132-142.

14. Walker J.G. Continuous whole earth coverage by circular orbit satellites. // International conference on satellite systems for mobil communication and surveillance, 1973. London, 1973. P. 35-38.
15. Luders R.D., Ginsberg L.J. Continuous zonal coverage - a generalized analysis. // AJAA Papers. 1974. №842.
16. Можаяев Г.В. Об использовании симметрии в линейных задачах с квадратичным критерием качества. I. // Автоматика и телемеханика. 1975. №6. С. 22-30.
17. Можаяев Г.В. Об использовании симметрии в линейных задачах с квадратичным критерием качества. II. // Автоматика и телемеханика. 1975. №7. С. 22-31.
18. Можаяев Г.В. Применение теории представлений групп для решения задач оптимизации процессов коррекции движения систем спутников. // Четвёртый Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Киев, 21 -29 мая 1976 г. Аннотации докладов. Киев: Наукова думка, 1976. С. 31.
19. Бырков Б.П. и др. Системы многократного обзора сферы. Каталог, т.1 - т.5. Москва, 1978.
20. Ballard A.H. Rozette Constellations of Earth Satellites. // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. AES16, No. 5, Sept. 1980, pp. 656-665.
21. Бобронников В.Т., Шубин В.И. Метод решения задачи о построении сети ИСЗ для периодического обзора земной поверхности. // Труды XV чтений К.Э. Циолковского. Механика космического полёта. Москва, 1981. С. 52-58.
22. Галиев Ш.И., Заботин В.И. О непрерывном обзоре поверхности Земли. // Исследование Земли из космоса. 1983. №1. С. 117-120.
23. Можаяев Г.В., Гутенев А.А. О свойствах кинематически симметричных спутниковых систем в задаче периодического обзора Земли. // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1983 г., 1984 г. Москва: Наука, 1985. С. 50.
24. Гутенев А.А., Можаяев Г.В. К расчёту периодичности обзора Земли системой спутников. Москва, 1983. 24 с. Депонировано в ВИНТИ 12.04.83 №1926-83.
25. Lang T.J., Hanson J.M. Orbital Constellations Which Minimize Revisit Time. // Astrodynamics. 1983. Vol. 54. Pt. 2. P. 1071-1086.
26. Бырков Б.П., Силов В.В., Никитин И.Н. Использование временных диаграмм видимости для выбора одномаршрутных систем ИСЗ на эллиптических орбитах. // Труды XVIII чтений К.Э. Циолковского. Механика космического полёта. Москва, 1984. С. 26-31.

27. Draim J.E. Three- and four-Satellite Continuous Coverage Constellations. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 6, Nov. - Dec. 1985, pp. 725-730.
28. Draim J.E. A common-Period Four-Satellite Continuous Global Coverage Constellation. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 10, No. 5, Sep. - Oct. 1987, pp. 492-499.
29. Lang T.J. Symmetric circular orbit satellite constellations for continuous global coverage // AAS paper 87-499, 1987.
30. Саульский В.К. Метод оптимизации орбит и структуры систем ИСЗ для периодического круглосуточного обзора Земли. // Исследование Земли из космоса. 1987. №1. С. 111-121.
31. Adams W.S., Rider L. Circular Polar Constellations Providing Continuous Single or Multiple Coverage Above a Specified Latitude. // Journal of the Astronautical Sciences. Vol. 35, No 2, 1987, pp.155-192.
32. Саульский В.К. Оптимальные орбиты и структура систем ИСЗ для периодического обзора Земли. // Исследование Земли из космоса. 1989. №2. С. 104-115.
33. Можяев Г.В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем (теоретико-групповой подход). Москва: Машиностроение, 1989. 304с.
34. Draim J.E. Continuous global N-tuple coverage with  $(2N+2)$  satellites. // AS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Vermont. August 7-10, 1989.
35. Можяев Г.В., Остапенко А.А. Возможности кинематически правильных спутниковых систем на эллиптических орбитах в задаче непрерывного обзора Земли. // Труды XIV Научных чтений по космонавтике, посвящённых памяти академика С.П. Королёва и других советских учёных – пионеров освоения космического пространства (Москва, 30 января – 2 февраля 1990 г.). Актуальные проблемы небесной механики. ИИЕТ АН СССР. Москва, 1990. С. 18-19.
36. Галиев Ш.И., Заботин В.И. Система из минимального числа спутников для многократного обзора Земли. // Исследование Земли из космоса. 1990. №5. С. 102-108.
37. Разумный Ю.Н. Правильные (регулярные) многомаршрутные спутниковые системы периодического обзора Земли. // Труды XV Научных чтений по космонавтике. Секция «Задачи ориентации и управления движением космических аппаратов». Москва: ИИЕТ АН СССР, 1991. С. 29.
38. Gutenev A.A., Mozhaev G.V. On the Orbital Structure of Elliptic Satellite Constellations Providing Minimum Revisit Time. // Seventh National Space Engineering Symposium 1992. Canberra, Australia, 21-25 September, 1992. Conference proceedings. The Institution of Engineers, Australia. National Conference Publication No. 92/9. P. 101-106.

39. Gutenev A.A. Optimization of low-Altitude Global Communications Constellations. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol. 15. No. 15.1992, pp. 871-877.
40. Галиев Ш.И., Заботин В.И. Модели спутниковых систем глобальной связи и методы анализа и синтеза их структур. // *Исследование Земли из космоса*. 1993. №5. С. 66-75.
41. Lang T.J. Optimal low earth orbit constellations for continuous global coverage // *AAS /AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, 1993.
42. Заботин В.И. Модели спутниковых систем глобальной связи на эллиптических орбитах. *Исследование Земли из космоса*. 1994. №5. С. 70-76.
43. Lang T.J., Mayer J.L. A new six satellite constellation for continuous global coverage. // *AAS paper*. 1995. №221.
44. Разумный Ю.Н., Ермаченков А.В. Аналитическая методика определения периодичности обзора Земли спутниковой системой и рациональные орбитальные построения для решения задач ИПРЗ. // *Исследование Земли из космоса*. 1995. №2. С. 57-70.
45. Галиев Ш.И. Динамические оценки числа спутников для многократного обзора Земли. // *Космические исследования*. 1996. Т. 34. №5. С. 500-504.
46. Разумный Ю.Н., Ермаченков А.В. Анализ возможностей регулярных маршрутных спутниковых систем в задаче периодического обзора. // *Сборник трудов 7-го Всероссийского научно-технического семинара «Управление движением и навигация летательных аппаратов»*. Ч.2. Самара, 19-23 июня 1995 г. Самара: СГАУ, 1996. С. 136-139.
47. Волков Н.М., Иванов Н.Е., Салищев В.А., Тюбалин В.В. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС // *Зарубежная радиоэлектроника*, №1, 1997. С. 31-46.
48. Lang T.J., Adams W.S. A Comparison of Satellite Constellations for Continuous Global Coverage. // *IAF Workshop on Mission Design and Implementation of satellite constellations*. Toulouse, France, Nov. 17-19, 1997. Paper D-4.
49. Заботин В.И. Задача кратного обзора Земли спутниковыми системами на эллиптических орбитах. // *Космические исследования*. 1997. Т. 35. №4. С. 445-448.
50. Ulybyshev Yu.P. Long-Term Formation Keeping of satellite Constellation Using Linear-Quadratic Controller. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol. 21, No. 1, 1998, pp. 109-115.

51. Заботин В.И. Достаточные условия существования спутниковых систем многоканальной глобальной связи. // Космические исследования. 1999. Т. 37. №5. С. 1-5.
52. Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in case of equal masses. // Northwestern University, Evanston Conference on Celestial Mechanics, December, 15-19, 1999.
53. Можаяев Г.В. Об описании движения искусственных спутников Земли в первом приближении. // Космические исследования. 2000. Т. 38. №4. С. 423-431.
54. Разумный Ю.Н. Синтез орбитальных структур спутниковых систем периодического обзора. Москва: издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. 104 с.
55. Можаяев Г.В., Парфёнов С.В. Модели номинальных движений спутниковых систем. // Полёт. 2001. №9. С. 28-35.
56. Можаяев Г.В. Решение некоторых задач оптимизации процессов гибкой коррекции движения спутниковых систем. I. // Космические исследования. 2001. Т. 39. №5. С. 518-530.
57. Можаяев Г.В. Решение некоторых задач оптимизации процессов гибкой коррекции движения спутниковых систем. II. // Космические исследования. 2001. Т. 39. №6. С. 634-647.
58. Lang T.J. A Parametric Examination of Satellite Constellations To Minimize Revisit Time For Low Earth Orbits Using a Genetic Algorithm. // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Quebec, Canada, 30 July - 2 August 2001.
59. Можаяев Г.В., Парфёнов С.В. Исследование задачи периодического обзора широтных поясов спутниковыми системами на прецессирующих эллиптических орбитах. // Отчёт Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана по теме «Кедр СМ-3». Москва, 2001. 169 с.
60. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ (редакция 5.0). Москва, 2002. 58 с.
61. Можаяев Г.В. Исправления к статье «Об описании движения искусственных спутников Земли в первом приближении». // Космические исследования. 2002. Т. 40. №3. С. 336.
62. Можаяев Г.В., Малышев А.В. Точность описания движения искусственных спутников Земли формулами первого приближения. // Полёт. 2002. №3. С. 18-22.
63. Можаяев Г.В. Возможности кинематически правильных спутниковых систем с группами симметрии второго типа в задачах многократного непрерывного обзора

- Земли // 8-я международная конференция «Системный анализ и управление». Евпатория, 29.06.- 06.07.2003. Сборник тезисов. С. 79.
64. Lang T.J. Walker Constellations to Minimize Revisit Time in Low Earth Orbit. // 13-th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Ponce, Puerto Rico, 9-13 February, 2003. Paper AAS 03-178.
65. Dufour F. Coverage Optimization of Elliptical Satellite Constellations with Extended Satellite Triplet Method. // 54-th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, the International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law, 29 September - 3 October 2003, Bremen, Germany. IAC-03-A.3.02.
66. Можаяев Г.В. О возможности улучшения орбитальной структуры системы ГЛОНАСС. // 9-я международная конференция «Системный анализ и управление». Крым, Евпатория, 4 - 11 июля 2004 года. Тезисы докладов. С. 102-103.
67. Саульский В.К. Многоспутниковые системы с линейной структурой и их применение для непрерывного обзора Земли. // Космические исследования. 2005. Т. 43. №1. С. 36-53.
68. Можаяев Г.В. Возможности кинематически правильных спутниковых систем с группами симметрии второго типа в задаче непрерывного однократного обзора Земли. // Космические исследования. 2005. Т. 43. №3. С. 215-223.
69. Можаяев Г.В. Теоретико-групповой подход к проблемам синтеза орбитальных структур спутниковых систем на некруговых орбитах. // 11-я международная конференция «Системный анализ, управление и навигация». Крым, Евпатория, 2 - 9 июля 2006 года. Тезисы докладов. С. 147-148.

### **Сведения об авторе**

Можаяев Герман Валентинович.

Военная академия воздушно-космической обороны, профессор, доктор технических наук.

170001, г. Тверь, 2-й переулок Красной Слободы, д. 5, кв. 128.

Контакты: (4822) 34-10-90; факс: (4822) 34-10-90; [mmkty@tvcom.ru](mailto:mmkty@tvcom.ru).