629.07.05

Применение многомерных рядов Эрмита для представления информации о распределении физических полей объектов

В.И. Осадчий, Т.Н. Зюзько, В.П. Орлов

В статье предложено использовать двумерные и трехмерные ряды Эрмита для описания распределений различных параметров физических объектов. Проанализированы преимущества такого подхода. Для эффективного описания некоторого класса объектов достаточно использовать несколько коэффициентов ряда Эрмита. Предложены методы отбора коэффициентов для аппроксимации видеоинформации.

Обработка аэрокосмической информации при распознавании объектов, визуализации, анализе полей различной физической природы вокруг них и т.п. связана с анализом больших массивов данных. Для эффективного функционирования систем обработки большое значение имеет компактное представление такой информации. Представление в виде набора двумерных растров пикселов или трехмерных растров вокселов требует значительного объема памяти, неудобно для анализа и требует весьма сложных средств визуализации. Наряду с использованием широко распространенных разложений достаточно эффективно использование разложения пространственного распределения физических параметров в многомерные ряды Эрмита [1].

В этом случае вместо анализа больших массивов информации часто бывает достаточно знать значения нескольких десятков многочленов Эрмита. Для этих целей, например, для трехмерного случая можно воспользоваться совокупностью слоев, представленных двумерными рядами Эрмита или представлением всего распределения с помощью трехмерных рядов Эрмита.

Опишем полную ортогональную систему функций Эрмита, зависящих от двух переменных. Поскольку не существует развернутой общей теории ортогональных многочленов от нескольких переменных, рассмотрим $N-$ мерное обобщение ортогональных многочленов Эрмита с использованием квадратичных форм следующим образом.

Весовая функция ортогональной системы многочленов Эрмита n переменных имеет вид:

$$w(\xi) = \Delta^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\varphi(\xi)}{2}}$$

(1)

где $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ -- вектор переменных; (2)

$\varphi(\xi)$ -- положительно определенная квадратичная форма;

$$\varphi(\xi) = (C\cdot\xi,\xi) = (\xi, C\cdot\xi) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j \; ;$$

(3)

$C = \left\| c_{ij} \right\|$ -- произвольная положительно определенная симметричная квадратная матрица; Δ -- определитель матрицы C.

В случае n переменных формула Родрига принимает вид:

$$H_m(\xi) = (-1)^m \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\varphi(\xi)} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\varphi(\xi)} ,$$

(4)

где $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$.

(5)

Стандартизированные многочлены Эрмита одной переменной получаются, если в формулах (1) и (4) положить $n = 1$ и $c_{11} = 2$.

Примем $n = 2$ и $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда вектор ξ имеет вид: $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Квадратичная форма $\varphi(\xi)$ запишется в виде:

$$\varphi(x, y) = c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$$

(6)

и с учетом объявленной матрицы C:

$$\varphi(x,y) = 2\cdot(x^2 + y^2).$$

(7)

Весовая функция задается формулой:

$$w(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

(8)

Свойства ортогональности и нормированности будут пониматься относительно скалярного произведения:

$$(f,g) = \iint_R f(x,y)\cdot g(x,y)\cdot w(x,y)dxdy$$

(9)

Формулу Родрига рассмотрим как определение многочленов Эрмита двух переменных:

$$H_m(x,y) = (-1)^m \cdot e^{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^k \partial y^l} \cdot e^{-(x^2+y^2)},$$

(10)

где $k+l=m$, k и l -- степени многочлена по переменным x и y соответственно.

Воспользуемся формулой Родрига (10) для получения многочленов Эрмита двух переменных в явном виде и запишем их в соответствии с объявленным порядком:

$$H_{00}(x,y)=1 \qquad H_{12}(x,y)=8xy^2-4x$$

$$H_{10}(x,y)=2x \qquad H_{03}(x,y)=8y^3-12y$$

$$H_{01}(x,y)=2y \qquad H_{40}(x,y)=16x^4-48x^2+12$$

$$H_{20}(x,y)=4x^2-2 \qquad H_{31}(x,y)=16x^3y-24xy$$

(11)

$$H_{11}(x,y)=4xy$$

$$H_{22}(x,y)=16x^2y^2-8x^2-8y^2$$

$$H_{02}(x,y)=4y^2-2 \qquad H_{13}(x,y)=16xy^3-24xy$$

$$H_{30}(x,y)=8x^3-12x$$

$$H_{04}(x,y)=16y^4-48y^2+12$$

Поскольку обычно изображения представляют в виде растров, рассмотрим растровую модель изображения, которая представляет собой матрицу $f(m,n)$ размерности $M \times N$. Введем некоторое преобразование, которое матрице изображения $f(m,n)$ ставит в соответствие матрицу преобразованного изображения того же размера, элементы которого находятся по формуле:

$$F(k,l)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} f(m,n)\cdot A(m,n;k,l)$$

(12)

Здесь матрица A -- ядро прямого преобразования. Исходное изображение получается из обратного следующим образом:

$$f(m,n)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} F(m,n)\cdot B(m,n;k,l)$$

(13)

Данное преобразование понимается как нахождение спектрального представления анализируемого изображения.

Возможны различные интерпретации преобразования изображения с помощью некоторой системы ортогональных функций. Преобразование можно рассматривать как разложение исходного изображения в обобщенный двумерный спектр. Каждая спектральная составляющая характеризует вклад соответствующей спектральной (базисной) функции в энергию исходного изображения. При такой трактовке понятие частоты можно обобщить так, чтобы оно было применимо не только к гармоническим составляющим, но и к другим функциям, на которых основывается преобразование. Другая возможность интерпретации спектра заключается в том, что его можно рассматривать как способ составления изображения из набора двумерных функций $B(m,n;k,l)$, каждая из которых соответствует определенной точке (k,l) плоскости обобщенных частот. В подобной интерпретации ядро $B(m,n;k,l)$ называется двумерной базисной функцией, а коэффициент $F(k,l)$ указывает вес этой базисной функции, необходимый для получения рассматриваемого изображения.

Подобный обобщенный спектральный анализ полезен для изучения тех конкретных разложений, которые в наибольшей мере подходят для данного класса изображений.

Рассмотрим дискретное преобразование Эрмита, являющееся аналогом непрерывного преобразования, представленного выше:

$$F(k,l)=a_k \cdot a_l \cdot \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(-x_0+\frac{2\cdot x_0}{M}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(-y_0+\frac{2\cdot x_0}{N}\right)^2} \cdot$$
$$\cdot H_{kl}\left(-x_0+\frac{2\cdot x_0}{M}\cdot m, -y_0+\frac{2\cdot y_0}{N}\cdot n\right)$$

(14)

где $a_k=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\cdot k!\cdot 2^k}$, $a_l=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\cdot l!\cdot 2^l}$

(15)

Обозначим $x_m=-x_0+\frac{2\cdot x_0}{M}\cdot m$, $y_n=-y_0+\frac{2\cdot y_0}{N}\cdot n$, тогда соотношение (14) примет вид:

$$F(k,l)=a_k \cdot a_l \cdot \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x_m^2-\frac{1}{2}\cdot y_n^2}\cdot H_{kl}(x_m,y_n)$$

(16)

Поскольку ядра преобразований симметричны и разделимы, двумерное преобразование можно выполнить в виде последовательных одномерных преобразований по строкам и столбцам изображения:

$$F(k,l)=a_k\cdot a_l\cdot\sum_{m=0}^{M-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x_m^2}\cdot H_k(x_m)\right]\cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot y_n^2}\cdot H_l(y_n)$$

(17)

Обратное преобразование Эрмита задается соотношением:

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{M-1}\left[\sum_{l=0}^{N-1}F(k,l)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x_m^2}\cdot H_k(x_m)\right]\cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot y_n^2}\cdot H_l(y_n)$$

(18)

Для контроля правильности выполнения операций при переходе от исходного задания функции двух переменных к спектральному выражению будем использовать тождество Парсеваля:

$$\frac{1}{N\cdot M}\cdot\sum\sum f^2(m,n)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}F^2(k,l)$$

(19)

Запишем дискретное преобразование Эрмита в матричной форме. Пусть A -- матрица точек, в которых вычисляются значения многочленов $H_{kl}(x,y)$:

$$A=\left\|\left(x_i,y_j\right)\right\|\quad i,j=1,\ldots,N-1\,.$$

(20)

Пусть He -- операторная матрица, элементами которой являются произведения функций

$$H_{kl} \cdot \exp_{:} He = \left\| He_{ij} \right\|$$

(21)

Тогда коэффициенты спектра Эрмита запишутся в виде:

$$F(k,l) = Tr(He_{kl}(A) \cdot f^{T})$$

(22)

Здесь Tr -- операция взятия следа матрицы: $TrA = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}$;

f^{T} -- транспонированная матрица изображения.

Для обратного преобразования Эрмита имеем:

$$f(m,n) = Tr(He(A) \cdot F^{T})$$

(23)

При общей изменчивости поля объекта часто оно сохраняет свои устойчивые характерные черты. При этом наличие устойчивых искажений легко локализуется путем анализа коэффициентов разложения в ряд Эрмита.

При невысокой требуемой точности эти методы имеют преимущества в более компактном описании распределений и наглядности представления информации.

Список литературы.

1. Осадчий В.И., Прохорова Т.Н. Представление видеоинформации с помощью двумерных спектров Эрмита.//Тез. докл. I Всероссийской конференции Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях (Спектр-2000).- М., 1999 г.- с.175-182.